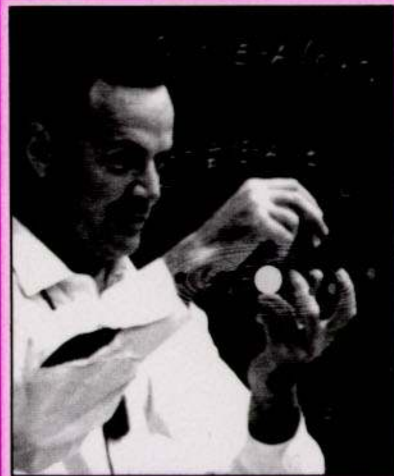
LA CONFERENCIA PERDIDA DE FEYNMAN

El movimiento de los planetas alrededor del Sol



Edición de David Goodstein y Judith Goodstein

METATEMAS 56

LIBROS PARA PENSAR LA CIENCIA

David L. Goodstein, vicepresidente y titular de la cátedra Frank J. Gilloon del Instituto Tecnológico de California, es autor y director del galardonado curso de física para televisión *The Mechanical Universe*. La doctora **Judith R. Goodstein** trabaja en los archivos universitarios del Instituto y es autora de *Milliken's School: A History of the California Institute of Technology*.

Richard Feynman nació en Far Rockaway (Nueva York) en 1918, se graduó en 1939 en el Instituto Tecnológico de Massachusetts y se doctoró en Princeton en 1942. Investigador en el Laboratorio Científico de Los Álamos, fue después profesor en la Cornell University, y más tarde en el Instituto Tecnológico de California, donde trabajó con Murray Gell-Mann. Autor, entre otros, de los libros *The Feynman Lectures of Physics*, *QED* y ***El carácter de la ley física*** (de próxima publicación en esta colección), su libro de memorias, *¿Está usted de broma, señor Feynman?* (1985), se convirtió en un sorprendente *best-seller*.

Metatemas 56

Metatemas
Libros para pensar la ciencia
Colección dirigida por Jorge Wagensberg

Al cuidado del equipo científico del Museu de la Ciència de la Fundació "la Caixa"

* Alef, símbolo de los números transfinitos de Cantor

David L. Goodstein y Judith R. Goodstein

LA CONFERENCIA PERDIDA DE FEYNMAN

El movimiento de los planetas alrededor del Sol

Traducción de Antonio-Prometeo Moya

Tusquets Editores

Título original: *Feynman's Lost Lecture. The Motion of the Planets Around the Sun*

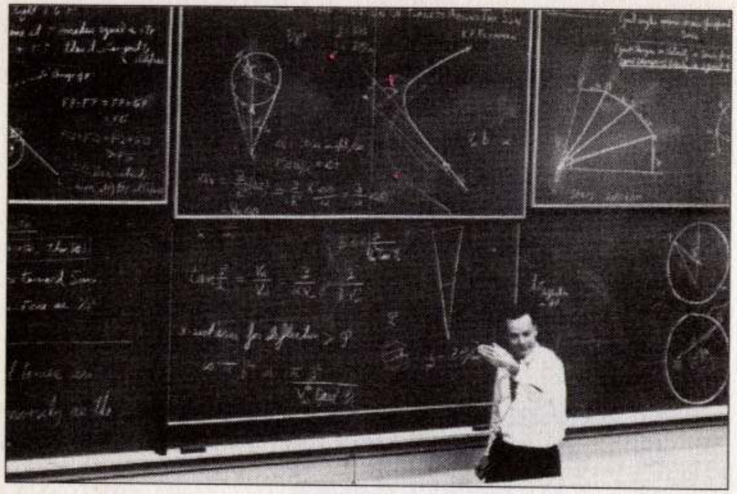
1.ª edición: febrero 1999

Diseño de la colección: BM

ISBN: 84-8310-619-1
Depósito legal: B. 3.911-1999
Fotocomposición: David Pablo
Impreso sobre papel Offset-F Crudo de Papelera del Leizarán, S.A.
Liberdúplex, S.L. - Constitución, 19 - 08014 Barcelona
Impreso en España

Índice

A la memoria de R.P.F.,
que se quedaría estupefacto si viera que
hemos necesitado explicar lo que él dijo
tan claramente



Richard Feynman durante la conferencia sobre el movimiento de los planetas.

Prefacio

He aquí la historia de cómo se perdió la conferencia perdida de Feynman y de cómo vino a recuperarse. En abril de 1992, estando yo a cargo de los archivos del Instituto Tecnológico de California (Caltech), Gerry Neugebauer, jefe del departamento de Física, me indicó que revisara los ficheros del despacho de Robert Leighton. Éste estaba enfermo y hacía años que no iba por allí. Marge Leighton, su mujer, ya se había llevado los libros y efectos personales de su marido y había dicho a Neugebauer que no tenía inconveniente en que lo vaciaran. Yo cogería lo que quisiera para los archivos, y el departamento de física se quedaría con el resto.

Además de dirigir el departamento de física entre 1970 y 1975, Leighton, junto con Matthew Sands, había supervisado la edición y publicación del curso de introducción a la física que Richard Feynman había impartido durante dos años a los alumnos de primero y segundo curso del Caltech. Las lecciones, publicadas por Addison-Wesley en tres volúmenes a principios de los años sesenta, trataban de casi todos los temas de la física con una perspectiva que aún hoy conserva su frescura y originalidad. Yo esperaba encontrar algún indicio sólido de la colaboración Leighton-Feynman.

Tardé un par de semanas en trasladar los montones de papeles que había por todas partes, pero Leighton no me defraudó. Encontré dos carpetas, una rotulada «Clases Feynman de Primero, sin terminar» y otra etiquetada «Addison-Wesley», ambas empotradas entre presupuestos y encargos de décadas anteriores y acordeones de amarillento papel continuo con listados infinitos de números, todo metido de cualquier manera en un cuarto trastero que estaba delante mismo de su despacho. La correspondencia de Leighton con la editorial contenía detalles sobre el formato, el color de la cubierta, comentarios de lectores, utilización en otras instituciones docentes y cálculos sobre cómo se venderían los volúmenes. Puse aquella carpeta en el montón de «Guardar». La otra, la que contenía las charlas inéditas de Feynman, me la llevé a los archivos.

En el prefacio que escribió en junio de 1963 para *The Feynman Lectures on Physics*, Feynman hablaba de algunas charlas no incluidas en el libro. Durante el primer año había dado tres clases optativas sobre resolución de problemas. Pues bien, tres de los documentos que contenía la carpeta de Leighton eran la transcripción en bruto de sus clases de repaso A, B y C, impartidas por Feynman en diciembre de 1961. Una charla sobre dirección inercial de cohetes, que Feynman dio al mes siguiente, tampoco entró en la selección (una decisión poco afortunada, según el mismo Feynman) y sólo encontré una transcripción parcial en la carpeta de Leighton. La carpeta contenía asimismo la transcripción parcial e inédita de una charla posterior, fechada el 13 de marzo de 1964, y un fajo de notas de puño y letra de Feynman. Se titulaba «El movimiento de los planetas alrededor del Sol» y era un tratamiento heterodoxo de la explicación geométrica de la ley de las elipses ofrecida por Newton en los *Principia Mathematica*.

En septiembre de 1993 tuve ocasión de hacer una lista de las grabaciones originales de las clases de Feynman, que también se habían entregado a los archivos. Había cinco conferencias que no se encontraban en los volúmenes de Addison-Wesley. Recordé entonces las cinco conferencias inéditas de la carpeta de Leighton; como era de esperar, las transcripciones inéditas coincidían con las cintas magnetofónicas. En los archivos había además fotos de los diagramas y ecuaciones que escribió Feynman en la pizarra durante cuatro charlas (todas mencionadas por él en su prefacio), pero no encontré ninguna correspondiente a la conferencia de marzo de 1964 sobre el movimiento de los planetas. (Mientras seleccionaba las ilustraciones del presente libro, encontré casualmente una foto de Feynman tomada durante esta conferencia en concreto. Es la que se reproduce al principio del libro.) Aunque Feynman había entregado a Leighton sus apuntes para la charla de 1964, con bosquejos para las fórmulas de la pizarra, por lo visto Leighton decidió no incluirlos en el último (1965) volumen de *The Feynman Lectures on Physics*, que trataba sobre todo de la mecánica cuántica. Con el tiempo, la conferencia se olvidó. A efectos prácticos, fue como si se hubiera perdido.

La idea de recuperar las cinco conferencias inéditas nos atraía a David y a mí, así que cuando, como de costumbre, nos fuimos en diciembre a la ciudad italiana de Frascatti, nos llevamos copias de las cintas magnetofónicas, las transcripciones, las fotos de la pizarra y los apuntes de Feynman. Durante las dos semanas siguientes escuchamos las cintas, tomamos notas, nos reímos de los chistes, nos esforzamos por entender las preguntas de los estudiantes y las respuestas de Feynman al término de cada charla, y tomamos más notas. Al final, sin embargo, llegamos a la conclusión de que la única conferencia que aún tenía la vitalidad, la originalidad y la fuerza que asociábamos con la presencia de Feynman en las aulas era la de 1964 sobre el movimiento de los planetas, la única que necesitaba complementarse con fotos de la pizarra, unas fotos que no teníamos. Aunque a regañadientes, renunciamos a la idea.

Eso creíamos al menos. Pero los ecos de la conferencia obsesionaban a David, sobre todo cuando al año siguiente comenzó a dar clases sobre aquella misma materia a los alumnos de primer curso de física. David tenía la cinta, ¿pero podía reconstruir las exposiciones de la pizarra basándose en los escasos y esquemáticos bosquejos de los apuntes de Feynman y en las pocas palabras que aquél había garabateado para sí mismo más que para los estudiantes? «Volvamos a intentarlo», dijo a principios de diciembre de 1994, mientras nos preparábamos para hacer un viaje por el canal de Panamá. Esta vez nos llevamos sólo la transcripción de la conferencia junto con los apuntes de Feynman y, por si acaso, sendas antologías de la *Astronomia nova* de Kepler y de los *Principia* de Newton.

El *S.S. Rotterdam* tardó once días en viajar de Acapulco a Fort Lauderdale. David se encerraba en el camarote durante dos o tres horas diarias y se esforzaba por descifrar la conferencia perdida de Feynman. Partió, al igual que Feynman, de las pruebas geométricas de Newton. La primera brecha se abrió cuando consiguió cuadrar el primer boceto de Feynman con un diagrama de Newton, el de la página 40 de la edición Cajori de los *Principia*. Llevábamos ya tres días de viaje, tal vez cuatro, el litoral de Costa Rica era plenamente visible y David me anunció de pronto que también él podía seguir el razonamiento de Newton hasta determinado punto. Cuando abandonamos las aguas pacíficas y entramos en las atlánticas, David estaba completamente absorto en las curvas, ángulos y secantes que Feynman había dibujado y descrito claramente a lápiz. Todas las mañanas y todas las noches, cada vez durante más tiempo, se quedaba en el camarote, ajeno al paisaje para concentrarse en las figuras geométricas (las de Newton, las de Feynman y las suyas). Cuando llegamos a Fort Lauderdale, el 21 de diciembre, se sabía y entendía toda la argumentación de Feynman. Mientras volvíamos en avión adquirió forma el presente libro.

Su versión definitiva debe mucho a las aportaciones de la familia y los amigos. Marcia Goodstein consiguió ingeniosamente que un sencillo programa dibujara las casi 150 figuras que hacían falta para contar el cuento geométrico de Feynman. Sara Lippincott, hábil jefa de edición y diplomática, peinó la prosa y adecentó la organización del material. Ed Barber, vicepresidente de la editorial W.W. Norton, invirtió años de amigable insistencia que fueron recompensados cuando apareció la conferencia perdida. Robbie Vogt contribuyó con la historia de su nacimiento. Jim Blinn leyó el manuscrito e hizo sugerencias útiles. Valentine Telegdi insistió en que nos fijáramos en la prueba de James Clerk Maxwell. Por último, quisiéramos dar las gracias a Carl y Michelle Feynman por su amable cooperación, y a Mike Keller, abogado de la propiedad intelectual de Caltech, por su ayuda y entusiasmo. Los beneficios económicos que se obtengan con este libro se emplearán para financiar la investigación científica y académica en Caltech.

Todas las fotografías del presente volumen proceden de los archivos de Caltech.

J.R.G.

Pasadena, mayo de 1995

Introducción

> Prefiero descubrir un solo hecho, por pequeño que sea, a discutir largamente los grandes temas sin descubrir nada en absoluto.
>
> Galileo Galilei

Éste es un libro sobre un solo hecho, aunque no pequeño. Cuando un planeta, o un cometa, o cualquier otro cuerpo, dibuja un arco en el espacio, influido por la fuerza de la gravedad, describe una serie muy especial de curvas matemáticas, que pueden ser un círculo, una elipse, una parábola o una hipérbola. Estas curvas se conocen con el nombre genérico de secciones cónicas. ¿Por qué la naturaleza se empeña en describir estas y sólo estas elegantes construcciones geométricas? El problema tiene no sólo profundas consecuencias científicas y filosóficas, sino también una gran importancia histórica.

En agosto de 1684, Edmund Halley (cuyo apellido daría nombre al cometa) fue a Cambridge para hablar de mecánica celeste con el célebre pero un tanto excéntrico matemático Isaac Newton. La idea más extendida en los círculos científicos era que los movimientos de los planetas podían deberse a una fuerza procedente del Sol que menguaba en razón inversamente proporcional al cuadrado de las distancias entre el Sol y los planetas, pero nadie había sabido exponerlo satisfactoriamente hasta entonces. Newton le confesó que él sí había conseguido demostrar que una fuerza de aquellas características originaba órbitas elípticas, exactamente lo mismo que Johannes Kepler había deducido setenta años antes observando el cielo. Halley instó a Newton a que le enseñara la demostración. Parece ser que Newton se hizo de rogar, aduciendo que no sabía dónde la había puesto, pero prometió a Halley que la reconstruiría y se la enviaría. Meses más tarde, en noviembre de 1684, Newton envió a Halley un texto de nueve páginas en el que exponía que una ley gravitatoria cuadrática inversa y unos cuantos principios básicos de dinámica explicarían no sólo las órbitas elípticas sino también otras leyes keplerianas de los movimientos planetarios, y más cosas aún.

Halley advirtió que tenía en las manos nada menos que la clave del conocimiento del universo tal como se concebía entonces, y apremió a Newton para que le permitiera preparar su publicación. Pero Newton, que no estaba del todo satisfecho con su trabajo y quería revisarlo, prefirió esperar. La espera se prolongó casi tres años, durante los cuales Newton, según parece, no hizo otra cosa que trabajar en el problema. Lo que surgió finalmente, en 1687, fueron los *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, la obra maestra de Newton y el libro que marca el nacimiento de la ciencia moderna.

Casi trescientos años después, el físico Richard Feynman, al parecer sólo para entretenerse, quiso demostrar por su cuenta la ley kepleriana de las elipses sin recurrir a matemáticas más avanzadas que la geometría plana elemental. Cuando se le pidió en marzo de 1964 que diera una charla como profesor invitado a los alumnos de primer curso en Caltech, decidió basarla en dicha demostración geométrica. La conferencia fue debidamente grabada en cinta y transcrita. Por lo general se sacaban fotos de la pizarra durante las clases de Feynman; no obstante, si es que se hicieron en el presente caso, no han llegado hasta nosotros. Sin ninguna referencia de a qué diagramas geométricos aludía, la conferencia resultaba incomprensible. Pero el redescubrimiento entre los papeles de su colega Robert Leighton de los apuntes que Feynman había tomado para la charla permitió reconstruir su argumentación.

El hallazgo de esta conferencia perdida nos brinda una oportunidad exraordinaria. Para muchos, la fama de Feynman se debe a las anécdotas picarescas que cuenta en dos libros, *¿Está usted de broma, señor Feynman?* y *¿Qué* te *importa lo que piensen los demás?*, que escribió en sus últimos años en colaboración con el hijo de Leighton, Ralph. Las anécdotas de estos libros son divertidas de por sí, pero adquieren una resonancia especial porque el protagonista es además un físico teórico de dimensiones históricas. El lector profano, sin embargo, no tiene forma de escrutar aquí la mente de Feynman para ver su otra cara, la poderosa inteligencia que ha dejado una huella imborrable en el pensamiento científico. En la presente conferencia, en cambio, Feynman emplea a fondo su ingenio, perspicacia e intuición, y su argumentación no queda eclipsada por la cortina de sutilezas matemáticas que hacen impenetrables para los no iniciados casi todos sus logros en física. La presente conferencia brinda a todo aquel que tenga nociones de geometría plana la oportunidad de contemplar al gran Feynman en acción.

¿Por qué se empeñó en demostrar la ley kepleriana de las elipses utilizando sólo la geometría plana? Es más fácil demostrarla utilizando las poderosas técnicas de matemáticas más avanzadas. Es evidente que a Feynman le intrigaba el hecho de que Isaac Newton, quien había ideado alguna de las mencionadas técnicas, expusiera en los *Principia* su propia demostración de la ley de Kepler empleando sólo geometría plana. Feynman quiso seguir la demostración de Newton, pero no pudo pasar de determinado punto, ya que Newton echaba mano de unas misteriosas propiedades de las secciones cónicas (un tema de candente actualidad en el siglo XVII) que Feynman desconocía. De modo que, como él mismo dice en la conferencia, ideó su propia demostración.

Ahora bien, este problema no es sólo un interesante rompecabezas intelectual. La demostración newtoniana de la ley de las elipses es la frontera que separa el mundo antiguo del moderno, la culminación de la revolución científica. Es una de las mayores hazañas de la mente humana, comparable a las sinfonías de Beethoven, las obras de Shakespeare o la Capilla Sixtina de Miguel Ángel. Además de tener gran importancia en la historia de la física, es una prueba concluyente del asombroso hecho que viene confundiendo e intrigando a todos los grandes pensadores desde la época de Newton: que la naturaleza obedece a leyes matemáticas.

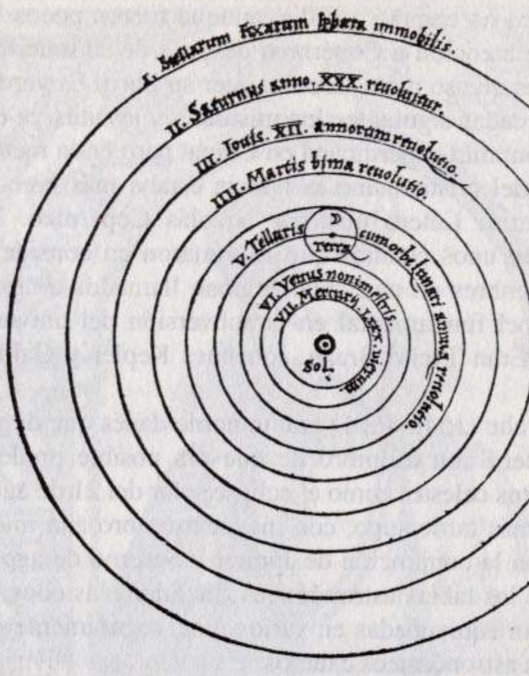
Por todos estos motivos, creo que vale la pena presentar la conferencia de Feynman para que el mundo la conozca. Para el lector será un hueso algo duro de roer. Seguro que acoquinó incluso a los genios matemáticos del primer curso de Caltech. Aunque cada etapa es elemental, la demostración en conjunto no es sencilla; y sin la pizarra de Feynman ni su vívida presencia en el aula, la conferencia es mucho más difícil de seguir. Este libro, sin embargo, se propone atraer al lector explicándole primero el significado histórico de la demostración newtoniana de la ley de las elipses junto con la vida y la obra de Feynman, y reconstruyendo después la demostración que Feynman plasmó en la conferencia, explicándola con tanto detalle que los lectores que recuerden la geometría del bachillerato acabarán entendiendo su brillante formulación. Llegados a este punto, el lector estará listo para afrontar el texto de la conferencia.

1
De Copérnico a Newton

En 1543, cuando ya estaba en el lecho de muerte, el canónigo polaco Nicolás Copérnico pudo ver los primeros ejemplares de su libro sobre *Las revoluciones de las esferas celestes*. Había retrasado adrede su publicación hasta el momento en que ya no tuviera que afrontar las consecuencias. Aquella obra sugería algo impensable: que el Sol y no la Tierra era el centro del universo. Hablaba de revoluciones, de revoluciones reales en el cielo, y representó el inicio de lo que dio en llamarse, metafóricamente, revolución científica. En la actualidad, cuando llamamos revoluciones a los grandes cambios, políticos y de otra especie, rendimos homenaje a Copérnico, cuyo libro sobre las «revoluciones» inició la primera de ellas.

Antes de Copérnico, nuestra concepción del mundo procedía de los antiguos filósofos y matemáticos griegos, perpetuada en el tiempo gracias a los escritos de Platón y Aristóteles, que vivieron y enseñaron en el siglo IV a.C. Toda la materia del mundo aristotélico estaba compuesta de cuatro elementos: tierra, agua, aire y fuego. Cada elemento tenía su lugar natural: la tierra, rodeada por el agua, en el centro del universo, y luego el aire y el fuego, en esferas ascendentes. El movimiento natural se producía porque los elementos buscaban su lugar natural. Así, los cuerpos pesados, básicamente terrestres, tendían a caer, mientras que las burbujas de aire subían en el agua y el humo ascendía por el aire. Los movimientos restantes eran violentos y necesitaban una causa inmediata. Por ejemplo, una carreta de bueyes no se podía mover salvo que un buey tirase de ella. Más allá de las esferas de tierra, agua, aire y fuego, los cuerpos celestes giraban en esferas cristalinas autónomas. Las esferas celestes, a las que sólo se permitía la perfección del movimiento circular, eran imperturbables, armónicas y eternas. Sólo aquí en la Tierra había cambio, muerte y degeneración. Era un sistema coherente, indiscutiblemente ideado para ponernos en el lugar en que estábamos, pero dicho lugar era el centro del universo y, pese a todos nuestros defectos, era fácil imaginar que éramos la finalidad de la creación. «Estábamos la mar de contentos con el cosmos de Aristóteles», dice un personaje de la *Arcadia* de Tom Stoppard, que se burla de historiadores y científicos por igual. «Personalmente hablando, era mi preferida. Cincuenta y cinco esferas cristalinas girando y Dios dándole a la manivela es lo que yo llamo un universo satisfactorio.»

Pero incluso en los cielos imperturbables del cosmos aristotélico había algunos problemas. El Sol, la Luna y las estrellas ejecutaban bien sus movimientos (casi siempre), pero había unos cuantos cuerpos excepcionales llamados planetas (*planeta* en griego significa «errante») que no se comportaban como es debido. Predecir la posición de dichos cuerpos (en qué lugar del cielo aparecerían en una noche dada) era el cometido profesional de los astrónomos. La información tenía cierta importancia para la agricultura y la navegación y, por encima de todo, para trazar horóscopos en un mundo inmerso en la astrología. La idea de que los planetas daban vueltas alrededor de la Tierra describiendo círculos perfectos no coincidía con la observación, pero Platón había dicho que en los cielos sólo era posible el movimiento circular. Por eso, los astrónomos hicieron que los planetas describieran circunferencias, llamadas epiciclos, que eran a su vez el centro de otros círculos, llamados deferentes. Si la observación de un planeta en el cielo no coincidía del todo con el sistema vigente de círculos deferentes y epiciclos, se podía añadir otro epiciclo para ajustar los cálculos y mejorar



Concepción copernicana del sistema solar, según el *De revolutionibus orbium coelestium*, de 1543.

la seguridad de las predicciones, una práctica que se llamaba «salvar las apariencias». Este sistema antiguo quedó codificado en el *Almagesto* de Ptolomeo, un astrónomo alejandrino del siglo II d.C. El *Almagesto* fue el principal manual de astronomía durante mil cuatrocientos años, hasta la época de Copérnico.

En su libro sobre las revoluciones, Copérnico señalaba que todo el complicado sistema de epiciclos y círculos deferentes se simplificaba si, por conveniencia matemática, se ponía el Sol en el centro del universo y no la Tierra. Lo decía en el primer capítulo. El resto del libro estaba lleno de tablas astronómicas, calculadas después de trazar epiciclos y círculos deferentes centrados en el Sol. El truco de la conveniencia matemática no engañó a nadie, aunque fueron pocos los que prestaron atención a Copérnico después de su muerte y menos aún los que se molestaron en leer su libro. Es verdad que en las décadas siguientes los misioneros jesuitas ya enseñaban astronomía copernicana en China, pero en la metrópoli romana del cristianismo la Iglesia estaba más preocupada por Martín Lutero que por Nicolás Copérnico. No obstante, hubo unos cuantos que lo tomaron en consideración. Tres hombres en particular estaban llamados a representar un papel fundamental en la subversión del universo geocéntrico. Eran Tycho Brahe, Johannes Kepler y Galileo Galilei.

Tycho Brahe (1546-1601) era un noble danés que de pequeño se enteró con asombro de que era posible predecir acontecimientos celestes como el eclipse solar del 21 de agosto de 1560; más tarde supo, con mayor asombro aún mientras observaba la conjunción de Júpiter y Saturno de agosto de 1563, que las tablas astronómicas (incluidas las copernicanas) estaban equivocadas en varios días, seguramente por falta de datos astronómicos exactos.

Después de estudiar Derecho, viajar por Europa, perder la nariz en un duelo y sustituirla por otra de oro, plata y cera, Brahe escandalizó a la sociedad danesa casándose con una plebeya y dedicándose a la astronomía. Instaló un pequeño observatorio en unos terrenos de la familia y allí, el 11 de noviembre de 1572, descubrió una brillante estrella donde no había habido ninguna hasta entonces, en la constelación de Casiopea. En teoría no podían aparecer estrellas nuevas en el inmutable cielo aristotélico. El escrito de Brahe *De nova stella* ofendió a la Iglesia, cimentó su reputación y le valió el mecenazgo de Federico II de Dinamarca.

Federico dio a Brahe la isla de Hveen, próxima a Copenhague, y dinero para construir allí el mayor observatorio astronómico que el mundo había visto hasta entonces. Se construyeron instrumentos colosales (la «gran armilla ecuatorial» tenía dos metros y medio de diámetro, y el diámetro del

Tycho Brahe a los cuarenta años. Frontispicio de la *Astronomiae instauratae mechanica*, edición de 1602.

«gran cuadrante mural» era de cuatro metros) para hacer mediciones de exactitud sin precedentes y edificios fabulosos donde vivir y trabajar, imprentas para publicar los hallazgos y muchas cosas más. Brahe dio al lugar el nombre de Uraniborg, por Urania, la musa de la astronomía. Comenzado en 1576, estuvo en funcionamiento hasta 1597. Unos años después, en 1610, la invención del telescopio acabó para siempre con la observación astronómica a simple vista. Sin embargo, las observaciones que se hicieron en Uraniborg durante su breve existencia redujeron la inexactitud de las tablas astronómicas de diez minutos de arco a dos minutos. (El dedo índice, con el brazo estirado, abarca un ángulo de un grado aproximadamente; diez minutos de arco es la sexta parte de un grado; dos minutos es la quinta parte de diez minutos.)

Tras la muerte de Federico II en 1588 le sucedió su hijo Cristián IV. Al nuevo rey le incomodaban las incesantes peticiones de patrocinio generoso que le hacía Brahe, y en 1597 la situación estaba ya tan deteriorada que Brahe clausuró Uraniborg, abandonó Dinamarca y se instaló en Praga, donde pasó a ser matemático imperial de Rodolfo II, rey de Hungría y Bohemia y soberano del Sacro Imperio Romano.

Cuando Brahe se fue a Praga ya había hecho una imperecedera contribución a la astronomía. Sin embargo, no estaba satisfecho. Aún tenía que poner sus valiosas (y en buena medida todavía secretas) observaciones al servicio de la nueva cosmología. Pero no de la cosmología copernicana y, desde luego, tampoco la tolemaica; Brahe había ideado un cosmos propio. En el sistema de Brahe todos los planetas daban vueltas alrededor del Sol y éste, con los demás planetas, daba vueltas alrededor de la Tierra, que volvía así a ser el centro del universo. Para la mentalidad moderna el sistema de Brahe parece una solución de compromiso entre Aristóteles y Copérnico, pero en aquella época supuso un alejamiento de Aristóteles aún más audaz que el del canónigo polaco, ya que pulverizaba las esferas cristalinas que en teoría

llenaban los cielos, al margen de que en su centro estuviera la Tierra o el Sol. La cuestión era: ¿apoyaban los datos de Brahe el sistema de Brahe? Para responder esta pregunta hacía falta un talento matemático aún mayor que el del matemático imperial. Puede que en toda Europa no hubiera más que un matemático con la capacidad requerida. Pero uno había por lo menos. Era Johannes Kepler.

Kepler nació en 1571. Era hijo de un soldado mercenario que se esfumó muy pronto y de una mujer de armas tomar, hija de un posadero, que luego sería procesada por bruja. De corta estatura, salud frágil y ningún patrimonio, la evidente inteligencia de Kepler le mereció una beca que le permitió ingresar en la universidad de Tubinga. Allí estudió con uno de los primeros defensores europeos del sistema copernicano, Michael Mästlin. Después de obtener los títulos de bachiller y maestro, el profesorado de Tubinga lo salvó de la teología luterana y lo recomendó para un puesto de profesor de matemáticas en la Escuela Superior de la ciudad austriaca de Graz.

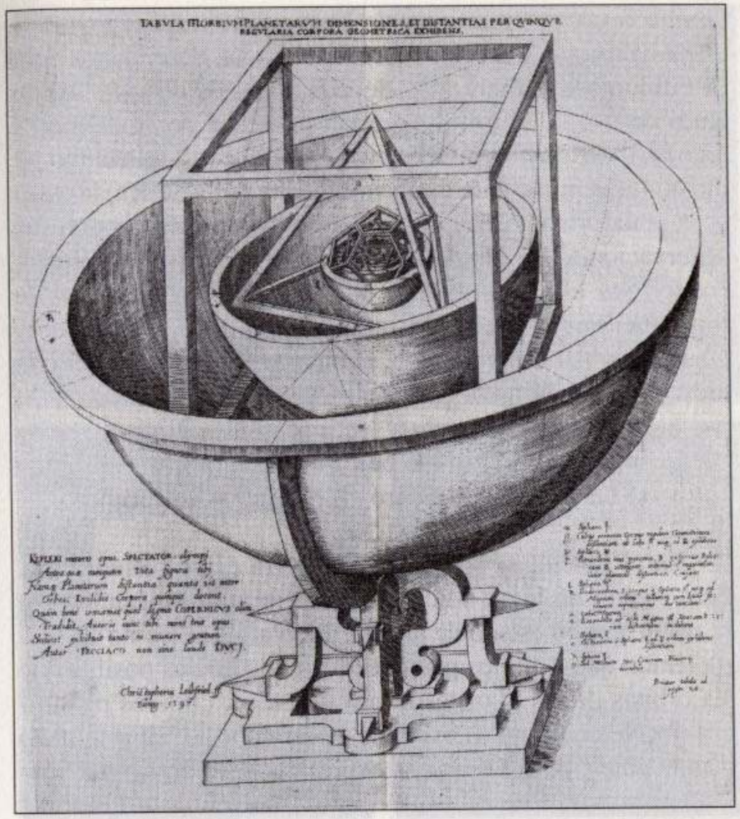
Según la leyenda, cierto día de verano de 1595, mientras el cuerpo de Kepler hablaba de geometría a una clase llena de adolescentes aburridos, su mente repasaba los datos clasificados de la astronomía copernicana, la pasión de su vida. Al trazar dos círculos, uno por fuera y otro por dentro de un triángulo equilátero, se dio cuenta de pronto de que la proporción que guardaban los diámetros de los dos círculos (el exterior mide el doble que el interior) era básicamente la misma que la de los diámetros de las órbitas de Júpiter y Saturno. El descubrimiento puso al mismo Kepler en órbita. No tardó en idear un modelo en el que las seis esferas invisibles que regían las órbitas de los seis planetas conocidos estaban acopladas, por dentro y por fuera, a los cinco «sólidos perfectos» de la antigüedad (sólidos con todas las caras iguales: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro), metidos unos dentro de otros. Poniendo los sólidos en el orden justo, los diámetros de las esferas guardaban casi la misma proporción que los diámetros de las órbitas planetarias.

El modelo kepleriano explicaba por qué había seis planetas y sólo seis (porque había cinco, y sólo cinco, sólidos perfectos) y por qué sus órbitas guardaban las proporciones que guardaban. Milagrosamente, todo encajaba. Kepler pensó, y no por última vez en su vida, que había visto el interior de la mente de Dios. En 1596 hizo público el motivo de su inspiración en el *Mysterium cosmographicum*, obra que llamó la atención de Tycho Brahe.

A Brahe no le fascinaban las ideas copernicanas de Kepler, pero su talento matemático le impresionó. Invitó a Kepler a trasladarse a Praga. Kepler se había labrado ya una sólida reputación de astrólogo perspicaz (sus predicciones sobre la peste, el hambre y las invasiones turcas solían dar en el blanco), pero su economía seguía siendo precaria y, como era luterano, se sentía acosado en la católica Graz. El primero de enero de 1600 partió hacia Praga para reunirse con el astrónomo danés.

El apocado Johannes Kepler no hizo buenas migas con el ruidoso Tycho Brahe y su nariz metálica, pero los dos se necesitaban. El primero necesitaba los datos del segundo para crear la obra de su vida, y Tycho necesitaba del genio de Kepler para organizar sus observaciones y confirmar su propio sistema. El desencuentro duró dieciocho meses, hasta que en 1601 Tycho Brahe murió repentinamente de una infección urinaria aguda. Se cuenta que las últimas palabras que dijo a Kepler fueron: «Que no haya vivido en vano». Pero Kepler, el abnegado copernicano, no tenía intención de continuar la cosmología de Tycho.

A la muerte de Brahe, Kepler consiguió, con algunas dificultades (nada fue fácil en la vida de Kepler), que lo nombraran matemático imperial (un título más honorífico que rentable) y que los herederos de Brahe le cedieran los fabulosos datos del difunto. Además, publicó un libro de astrología. (Consideraba charlatanes y farsantes a los demás astró-



Los sólidos acoplados (la esfera exterior es la de Saturno); del *Mysterium cosmographicum* de Johannes Kepler, de 1596.

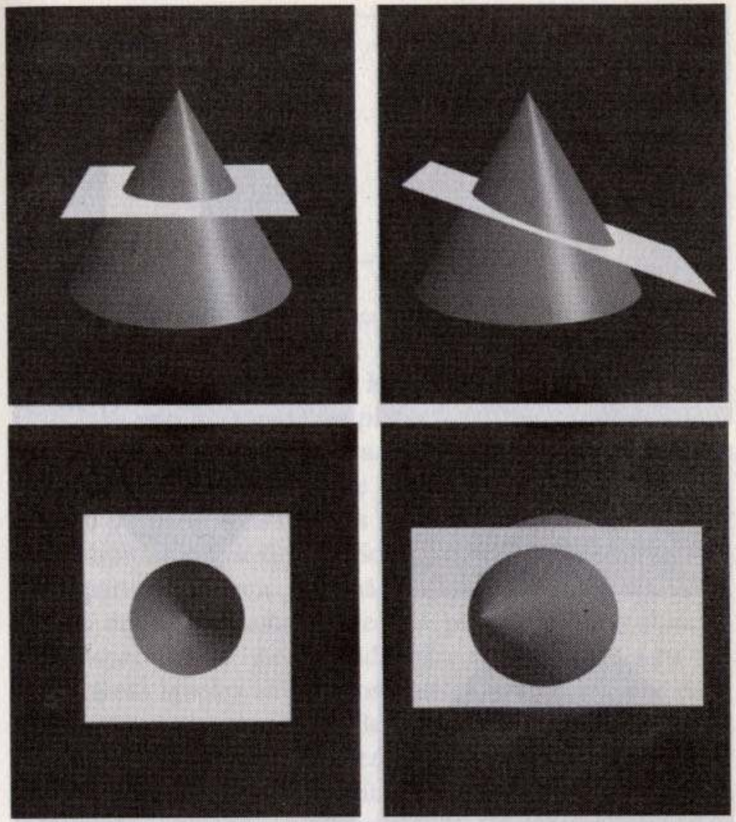
logos, pero no podía dominar la tentación de creer que había cierta armonía entre el destino humano y el paisaje celeste.) Y en 1604, mientras observaba una rara conjunción de Marte, Júpiter y Saturno, vio aparecer una supernova, una estrella nueva que fue visible en el cielo durante diecisiete meses.

La mayor contienda de Kepler fue su propia «guerra con Marte», la búsqueda de una órbita para el planeta que coincidiera con las observaciones de Tycho Brahe. La órbita marciana habría podido ser un círculo si en las observaciones la incertidumbre hubiera sido de diez minutos de arco, como antes de Brahe. Pero la magnífica herencia de Brahe pedía algo distinto. Kepler hizo cálculos prodigiosos, utilizando un método ingenioso para deducir la órbita de la Tierra, la insegura plataforma celeste desde la que Tycho había hecho sus observaciones. La órbita terrestre podía pasar por un círculo, con el Sol algo desplazado del centro. Pero la órbita de Marte no. Por más empeño que ponía, ningún círculo encajaba. En su *Astronomia nova*, publicada en 1609, Kepler cita unos versos de Virgilio para describir su búsqueda:

> La lujuriosa Galatea me busca con picardía:
> corre hacia el bosque, pero espera que la vea primero.

En el sistema copernicano, la Tierra es un planeta más. Pero siendo un lugar de cambio, muerte y degeneración, no se encuentra en estado de perfección platónica, como en teoría tenían que estar los planetas, de modo que es posible que las órbitas de los planetas no necesiten ser círculos platónicos. («¡Necio de mí!», exclama Kepler por no haberse dado cuenta antes; pero ya no nos expresamos así en las publica-

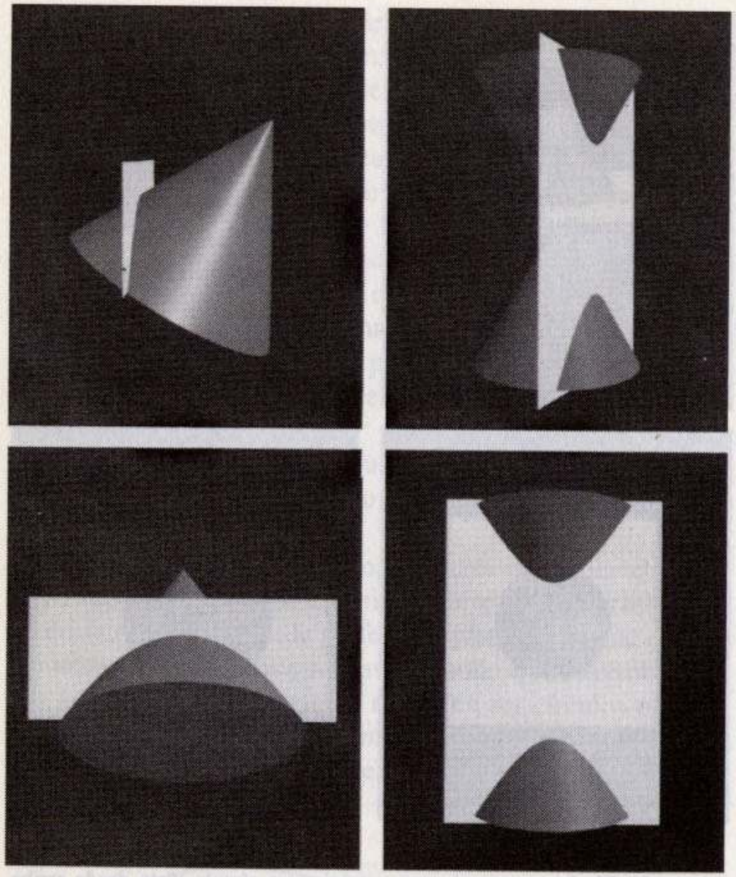
Elipse con el sol en un foco (la órbita de Marte es mucho más circular).



Izquierda: El plano corta el cono y origina un círculo visto desde arriba *(abajo)*. *Derecha:* El plano inclinado corta el cono y origina una elipse vista desde arriba *(abajo)*.

ciones científicas.) La órbita de Marte no era un círculo. Era una elipse, con el sol en un foco (Kepler tomó esta palabra de la latina *focus*, que significa fogón).

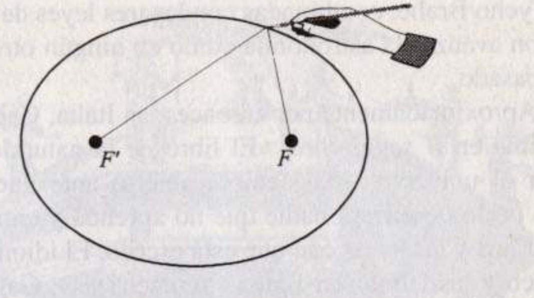
La elipse es una curva cerrada ya conocida en la antigüedad. Apolonio de Perga (hacia 262 - hacia 190 a.C.) demostró que cortando un cono con un plano se obtenían dos cur-



Izquierda: El plano corta el cono en sentido paralelo al lado opuesto del cono. Desde arriba se ve una parábola *(abajo)*. *Derecha:* El plano corta los dos miembros de un cono extendido. Desde arriba se ve una hipérbola *(abajo)*. A diferencia de las demás secciones cónicas, la hipérbola tiene siempre dos ramas.

vas cerradas, el círculo y la elipse, y dos curvas abiertas, la parábola y la hipérbola.

Estas figuras se conocen con el nombre genérico de secciones cónicas. La elipse en concreto se puede dibujar con ayuda de un cordel y dos tachuelas situadas en los dos focos:

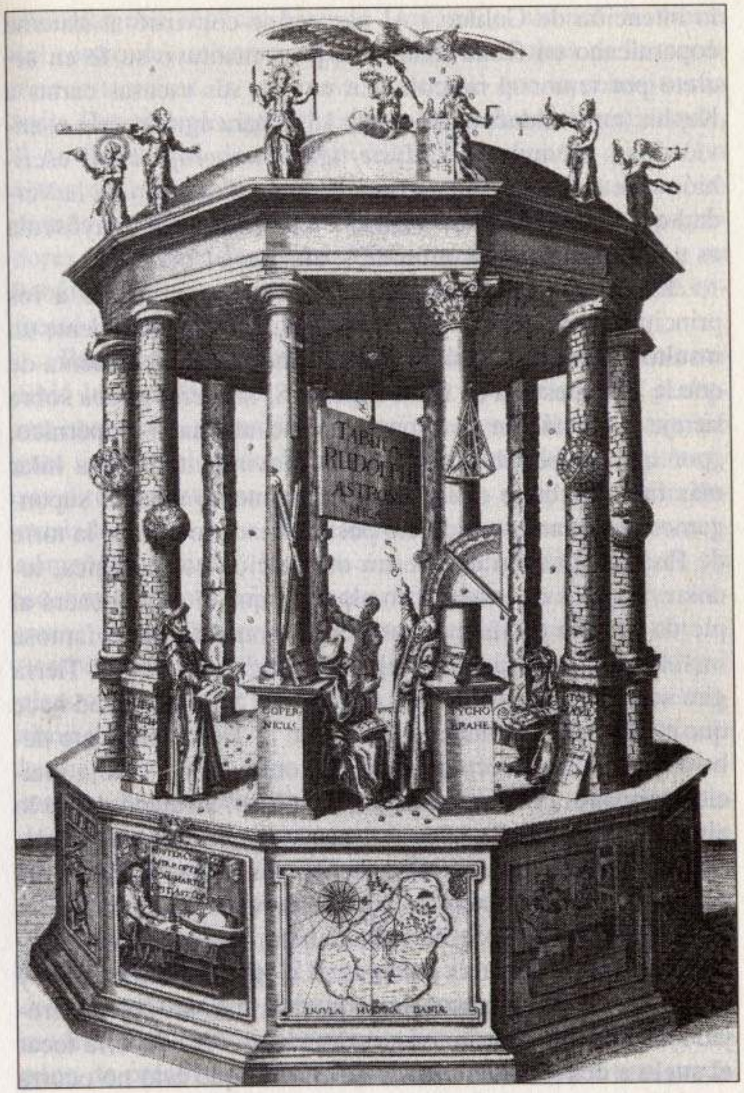


Volveremos sobre las especiales propiedades de la elipse en el capítulo 3.

En su *Astronomia nova*, Kepler nos dice que, en realidad, las órbitas de todos los planetas son elipses, con el Sol en un foco; esta afirmación acabó conociéndose como primera ley de Kepler, la ley de las elipses. También nos dice que un planeta se mueve más aprisa cuando está en la parte de la órbita más próxima al Sol y más despacio cuando está en la parte más lejana. Además, esta aceleración y esta dilatación del movimiento planetario poseen una regularidad muy especial: una línea trazada entre el Sol y el planeta barrería áreas iguales en tiempos iguales. Esta propiedad pasó a conocerse como segunda ley de Kepler. Diez años más tarde, en 1619, Kepler publicó un nuevo libro, *Harmonices mundi*, «Ciencia de la armonía del mundo», en el que exponía otra ley, la tercera. Las dos primeras describen el movimiento de un solo planeta en su órbita. La tercera compara las órbitas de los planetas. Dice que cuanto más alejado está un planeta del Sol, más despacio se mueve en su órbita. En concreto, un año de vida de un planeta (el tiempo que tarda en completar una órbita) es proporcional al tamaño de la órbita elevado a la potencia 3/2 (teóricamente, el diámetro mayor de la elipse). En conjunto, estos enunciados son la mayor contribución de Kepler, las tres leyes del movimiento planetario. En 1627 publicó las *Tablas rudolfinas*, llamadas así por el nombre del mecenas de Kepler, Rodolfo II. Estas tablas astronómicas, basadas en las minuciosas observaciones de Tycho Brahe, combinadas con las tres leyes de Kepler, hicieron avanzar la astronomía como en ningún otro momento del pasado.

Aproximadamente por entonces, en Italia, Galileo Galilei escribía en *Il saggiatore*: «El libro de la naturaleza, quiero decir el universo, está siempre abierto ante nuestros ojos, pero no lo descifrará nadie que no aprenda y entienda antes el idioma y las letras con que está escrito. El idioma es matemático y las letras son figuras geométricas». Galileo no escribía para elogiar las leyes de Kepler, que, paradójicamente, no llegó a conocer y mucho menos defender. Escribía, por el contrario, en defensa del sistema de Copérnico. En 1616, el primer teólogo de la Iglesia Católica, el cardenal Roberto Belarmino, había dicho que el sistema copernicano era «falso y erróneo» y había incluido la obra de Copérnico en el índice de libros prohibidos. Pero he aquí que había subido al solio pontificio un nuevo papa, Urbano VIII, antiguo amigo y defensor de Galileo, y éste esperaba impedir que la Iglesia chocara de frente con la ciencia. No lo consiguió.

Galileo nació en 1564 en Pisa; su padre, Vincenzio Galilei, era músico. (Entre las familias toscanas estaba entonces de moda bautizar al primogénito con el apellido gentilicio.) Galileo estudió medicina en la Universidad de Pisa, pero abandonó los estudios sin llegar a titularse por falta de dinero. Aprendió matemáticas él solo, publicó algunos ensayos y se ganó la vida dando clases de matemáticas en Pisa. En esta ciudad descubrió la ley del péndulo (un péndulo tarda siempre el mismo tiempo en completar un ciclo, sea cual fuere la amplitud de su arco) y la ley de la caída de los cuerpos (todos los cuerpos, sea cual fuere su masa, caen en el vacío con la misma aceleración constante), y realizó diversos experimentos cinéticos con bolas y planos inclinados que condujeron nada menos que a la invención de la ciencia experimental tal como la concebimos actualmente. (La palabra *saggiatore* se traduce tradicionalmente por «ensayador», pero el moderno término «experimentador» describe mejor



Frontispicio de las *Tabulae Rudolphinae*, de 1627. Dibujado por Kepler, este complejo grabado retrata a los gigantes de la astronomía reunidos en el templo de Urania. En el panel izquierdo de la base se encuentra el mismo Kepler y el título de cuatro libros suyos.

la intención de Galileo.) Al parecer se convirtió al sistema copernicano en fecha temprana, pero mantuvo su fe en secreto por temor al ridículo. En una de sus escasas cartas a Kepler (en realidad, una nota de 1597 para agradecerle el envío de un ejemplar del *Mysterium cosmographicum*) escribió: «Me felicito por tener un aliado en el estudio de la Verdad que es amigo de la Verdad». La Verdad con mayúscula es una velada pero inconfundible alusión a Copérnico.

El sistema de Copérnico no era sólo un insulto a los principios aristotélicos y eclesiásticos; parecía igualmente un insulto al sentido común. Cualquier necio se daba cuenta de que la Tierra estaba en firme reposo. Si la Tierra giraba sobre su eje y corría por el espacio, como afirmaba Copérnico, ¿por qué no percibía nadie estos movimientos? Para hilar más fino, medítese el siguiente experimento mental: supongamos que tiramos un objeto pesado desde lo alto de la torre de Pisa. Al margen de nuestra orientación cosmológica, todos estaremos de acuerdo en algo: en que el objeto caerá al pie de la torre (olvidándonos por el momento de su famosa inclinación). Ahora bien, según los copernicanos la Tierra gira sobre su eje mientras el objeto cae. Si la gravedad hace que el objeto caiga hacia el centro de la Tierra, el objeto deberá caer en línea recta mientras la torre se aleja con la rotación terrestre. ¿Cuánto se aleja? Un objeto arrojado desde lo alto de la torre tarda unos dos segundos en llegar al suelo. Dados el tamaño de la Tierra y el hecho de que tarda un día en completar una rotación, la distancia no es difícil de medir. Mientras el objeto cae, la torre debería alejarse unos ochocientos metros. En otras palabras, si Copérnico tenía razón y la Tierra completaba una rotación cada día, un objeto arrojado desde lo alto de la torre inclinada de Pisa debería tocar el suelo a ochocientos metros de ella. El que esto no ocurra parece una muy tajante refutación del sistema copernicano.

El problema que tenían ante sí los copernicanos renacentistas no era que costase mucho rebatir estas objeciones, sino algo peor aún: que no parecía haber punto de partida para

enunciar una réplica. Cuando Copérnico arrancó la Tierra del centro del universo, arrancó también el alma de la mecánica aristotélica, la argamasa intelectual que lo cohesionaba todo. Por ejemplo, ¿por qué había de caer un objeto pesado, si no iba en pos de su lugar natural? Responder que caía a causa de la gravedad, como se hizo y se sigue haciendo, no es más que dar otro nombre a lo desconocido. Para los seguidores de Copérnico, el aristotelismo estaba en ruinas y no había nada para reemplazarlo. Tal fue el dilema al que se enfrentó Galileo.

Para averiguar cómo funcionaba el mundo, Galileo concibió la idea de hacer experimentos cuyos resultados pudieran analizarse matemáticamente. Fue una idea que cambió para siempre el curso de la historia humana. No podía observar directamente los cuerpos que caían, dado que caían demasiado aprisa y no había relojes buenos: los primeros cronómetros exactos, basados en su descubrimiento de la isocronía del péndulo, aparecerían mucho después. Para retrasar el movimiento de los cuerpos que caían, midió el tiempo que empleaban en su caída unas bolas rodando por planos ligeramente inclinados, que se habían alisado al máximo para minimar la fricción. (En el Museo de Historia de la Ciencia de Florencia hay reproducciones de estos instrumentos, hechas por hábiles artesanos.) Probó muchos métodos para medir el tiempo que transcurría mientras rodaban las bolas. El mejor fue una especie de cronómetro de agua. El agua corría por un tubo (que el experimentador tapaba y abría con el dedo) y caía en otro recipiente mientras la bola estaba en movimiento. Luego pesaba el agua vertida. El peso del agua equivalía al tiempo transcurrido. Las reproducciones modernas de estos experimentos han demostrado que con un poco de práctica Galileo llegaba de este modo a una precisión de unas dos décimas de segundo. Salvo en contadísimos casos, estas mediciones no se mejoraron hasta el siglo XX.

Gracias a este método, Galileo descubrió la ley de la caída de los cuerpos. Vio que, duplicando el tiempo, la bola recorría una distancia cuatro veces mayor. Fuera cual fuese la inclinación del plano, el resultado no cambiaba, y con un gigantesco alarde de imaginación supuso que seguiría siendo el mismo si la pendiente era vertical, si el cuerpo caía de veras. Al experimento añadió el análisis matemático: si la distancia era proporcional al cuadrado del tiempo, esto significaba, como él mismo demostró con argumentos geométricos, que el movimiento tenía una aceleración uniforme. Por último imaginó que el cuerpo caía en el vacío. En la mecánica aristotélica, hay lugar donde hay algo. Imaginar un lugar donde no hay nada, el vacío, es una contradicción en los términos, un absurdo lógico impensable. Pero Galileo rompió todas o al menos algunas de las amarras del pensamiento aristotélico. Imaginó el vacío y comprendió que la aceleración de un cuerpo que caía en el vacío no podía depender de su peso; sólo la resistencia del aire hace que los cuerpos más ligeros caigan más despacio que los pesados. Esta observación completó la ley de la caída de los cuerpos.

Sin embargo, no explicaba por qué un cuerpo caía al pie de la torre de Pisa y no a ochocientos metros de distancia. La solución del dilema salió, sin embargo, de los experimentos con los planos inclinados y las bolas. Galileo descubrió que si se hacía que la bola bajase por un plano y subiera por otro, tendía a subir por el segundo plano hasta alcanzar la misma altura de partida. Si la pendiente del segundo plano era más pronunciada que la del primero, la bola subía menos trecho, y si era menos pronunciada, subía más trecho, alcanzando en ambos casos la misma altura del principio. Hoy sabemos que esta conducta es una manifestación de lo que llamamos conservación de la energía. Pero Galileo comprendió algo más. Con otro prodigioso alarde de imaginación, razonó que, *si el segundo plano fuera horizontal, la bola no dejaría de rodar nunca*, porque nunca alcanzaría la altura del principio. Así llegó a la conclusión de que el estado natural de un objeto dotado de movimiento horizontal era seguir moviéndose horizontalmente, a velocidad constante y para siempre. La idea

Retrato de Galileo aparecido en *Il Saggiatore*, 1623.

representaba un alejamiento radical de la filosofía aristotélica, donde todo movimiento horizontal necesitaba una causa inmediata. Al final se transformaría en la primera ley newtoniana del movimiento, la ley de la inercia. Era también lo que hacía falta para solucionar el dilema del objeto arrojado desde la torre de Pisa y, por otra parte, el problema, más general, de por qué no percibimos el movimiento de la Tierra. La superficie de la Tierra y todo lo que contiene están en movimiento horizontal, a causa de la rotación del planeta. Su estado natural es seguir así, de suerte que para un observador situado en la superficie de la Tierra, todo, por moverse al mismo tiempo, parece estar en reposo. Si un observador que estuviera realmente en reposo observara el experimento de la torre de Pisa, vería que tanto la torre como el objeto se movían a la vez en sentido horizontal, incluso mientras caía el objeto. Por eso aterriza el objeto al pie de la torre, y no más atrás.

El mismo razonamiento era válido, decía Galileo, para cualquier proyectil, por ejemplo una bala de cañón. Con una trayectoria horizontal, una bala de cañón (olvidándonos de la resistencia del aire) conservaría la velocidad inicial aportada por la explosión de la pólvora. Con una trayectoria vertical sería igualmente válida la ley de la caída de los cuerpos, incluso durante el ascenso de la bala. Combinando las dos clases de movimiento y barajando matemáticas, Galileo demostró que la trayectoria de cualquier proyectil próximo a la superficie de la Tierra describía una parábola. «Se ha observado», escribió en sus *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, de 1638, «que los proyectiles describen una trayectoria curva, pero nadie ha demostrado que sea una parábola. Que lo es lo demostraré juntamente con otras muchas cosas, también dignas de conocerse, y lo que es todavía más importante, que se abren las puertas de una inmensa e importantísima ciencia.» Una vez más, Galileo tenía razón: era una ciencia inmensa e importantísima. El descubrimiento de que su ley de la inercia (la tendencia de un cuerpo a moverse a velocidad constante en sentido horizontal), en combinación con la gravedad (representada por su ley de la caída de los cuerpos), originaba trayectorias próximas a la superficie de la Tierra con la forma


DIALOGO
DI
GALILEO GALILEI LINCEO
MATEMATICO SOPRAORDINARIO
DELLO STVDIO DI PISA.
E Filosofo, e Matematico primario del
SERENISSIMO
GR.DVCA DI TOSCANA.
Doue ne i congressi di quattro giornate si discorre sopra i due
MASSIMI SISTEMI DEL MONDO
TOLEMAICO, E COPERNICANO;
Proponendo indeterminatamente le ragioni Filosofiche, e Naturali tanto per l'una, quanto per l'altra parte.
CON PRI VILEGI.
IN FIORENZA, Per Gio: Batista Landini MDCXXXII.
CON LICENZA DE' SVPERIORI.

Portada del *Dialogo... sopra i due massimi sistemi del mondo, Tolemaico e Copernicano*, de 1632. Por defender en este libro la teoría copernicana, Galileo fue procesado por la Inquisición romana y condenado a arresto domiciliario perpetuo. La obra estuvo en el índice de libros prohibidos hasta 1823.

de una sección cónica, la parábola, fue el mismo que Isaac Newton empleó más tarde para exponer cómo funcionaba el universo.

Los conflictos de Galileo con la Iglesia (toda una epopeya, pero no es el tema de este libro) tuvieron como resultado la expulsión de la revolución científica de suelo italiano. Se afincaría en Inglaterra, en la persona de Isaac Newton. Mientras viajaba al norte, sin embargo, se detuvo brevemente en Francia, donde encontró a René Descartes. Descartes sabía de líneas rectas. Las coordenadas cartesianas, con su conocido sistema *x-y-z*, se llaman así por él. La versión galileana de la inercia funcionaba sólo en sentido horizontal. Pero, según Galileo, cuando se prolongaba ilimitadamente, el movimiento horizontal a velocidad constante se convertía en movimiento circular alrededor del centro de la Tierra. A pesar de su inteligencia, Galileo no pudo desembarazarse de este rezagado ideal platónico. Descartes puso las cosas en su sitio. Describió la ley de la inercia tal como la emplearía Newton: si no se ejerce ninguna fuerza sobre los cuerpos, el cuerpo en reposo seguirá en reposo y el cuerpo en movimiento seguirá moviéndose, a velocidad constante, en línea recta.

Suele decirse que Isaac Newton nació en 1642, el año de la muerte de Galileo, como si fuera necesario que hubiera siempre en el mundo un genio de estas caractrísticas. La verdad es que nació el 4 de enero de 1643, según el calendario moderno y el que se empleaba en la Italia de Galileo. En Inglaterra no se había adoptado aún la última reforma papal del calendario por culpa de los problemas conyugales (o conceptuales) del rey Enrique VIII, de manera que el nacimiento se fechó el 25 de diciembre de 1642. En cualquier caso, Newton fue hijo póstumo y prematuro, una combinación insólita. El padre, llamado también Isaac Newton, falleció tres meses antes de nacer su hijo, y éste era una criatura frágil que no parecía destinada a vivir ochenta y cuatro años.

La madre de Isaac esperaba que, cuando se hiciese mayor, administrase las cuantiosas propiedades que le había legado su segundo marido, fallecido cuando Isaac tenía unos once años. La verdad es que si el padre de Isaac hubiera vivido, o si su padrastro hubiera sido un individuo más humano, el futuro físico habría sido de mayor un terrateniente

René Descartes.

razonablemente adaptado y muy industrioso. Pero las cosas no ocurrieron así. Por el contrario, de adulto fue un hombre cuya cólera desenfrenada lo ponía a veces al borde de la locura y que al final de sus días afirmaba que aún no había perdido la virginidad. No obstante, también fue un hombre que cambió la historia humana hasta un punto reservado sólo a unos cuantos.

En 1661, el joven Isaac se matriculó en el Trinity College de Cambridge, donde los planes de estudios seguían aún bajo la égida de Aristóteles, pero donde la revolución científica flotaba en el aire. Recibió el título de bachiller en 1665 y poco después, para huir de la peste bubónica, se refugió en las propiedades familiares de Lincolnshire. Se cree que durante los dos años que pasó allí hizo muchos de sus descubrimientos más importantes, pero el mundo no los conocería hasta mucho después.

Entre las numerosas hazañas de Newton, la más importante fue formular los principios dinámicos que sustituirían la concepción aristotélica del mundo. En 1687, cuando publicó su obra maestra, los *Principia*, lo había reducido todo a tres leyes, enriquecidas con una serie de definiciones y corolarios. La primera ley era el principio de inercia, heredado de Galileo y Descartes:

LEY 1

Un cuerpo no sometido a la acción de ninguna fuerza que le haga cambiar de estado permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme.

La segunda ley de Newton, auténtica piedra angular de su dinámica, explica lo que le ocurre a un cuerpo cuando está sometido a alguna fuerza:

LEY 2

El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz ejercida y se produce en el sentido de la línea recta en que se ejerce la fuerza.

Al comienzo de los *Principia*, Newton definía la cantidad de movimiento diciendo que era el producto de la velocidad (esto es, la rapidez más la dirección) por la cantidad de materia, o, dicho más exactamente, lo que los físicos actuales llaman momento. Mucho después de la muerte de Newton la segunda ley se resumió en la fórmula $F = ma$ (fuerza igual a masa por aceleración); pero Newton no la expresó nunca de este modo.

La tercera ley de Newton se denomina ley de acción y reacción:

LEY 3

A toda acción se le opone siempre una reacción igual; o lo que es lo mismo, las acciones recíprocas de dos cuerpos son siempre iguales y tienen direcciones contrarias.

La tercera ley elimina una complicación potencialmente embarazosa que había en el problema del movimiento planetario. Los planetas (incluida la Tierra) son cuerpos muy grandes y complejos cuyas partes internas ejercen fuerzas entre sí. Según la tercera ley de Newton, estas fuerzas se anulan recíprocamente, sea cual fuere su naturaleza. Toda fuerza debida a un punto de un planeta que se ejerce sobre otro punto queda compensada por otra fuerza igual y opuesta que el segundo punto ejerce sobre el primero. El resultado neto es que la naturaleza bruta del planeta puede pasarse por alto completamente al calcular su trayectoria alrededor del Sol. El planeta se comporta como si su masa estuviera concentrada en un punto geométrico situado en su centro.

La tercera ley da a entender además que los planetas ejercen sobre el Sol fuerzas iguales y opuestas a las que ejerce el Sol sobre los planetas. Para soslayar los problemas que esta afirmación podría originar, Newton, en su demostración formal, no se refiere al Sol, sino a «un centro inmóvil de fuerza». Newton supone (acertadamente) que el Sol tiene tanta masa que apenas se entera del tirón de las fuerzas gravitatorias de los planetas. La tercera ley sería tiempo después de importancia capital en otras áreas de la física, pues está en la base de las leyes de la conservación del momento, del momento angular y de la energía. En lo que respecta al problema del movimiento planetario, sin embargo, su principal virtud es que todos sus efectos pueden pasarse por alto.

Las tres leyes de Newton son los principios dinámicos que reemplazaron los movimientos «naturales» y «violentos» de la mecánica aristotélica. A estas leyes, válidas para todas las fuerzas y todos los cuerpos, Newton añadió la naturaleza concreta de una clase particular de fuerza que operaba entre el Sol y los planetas, o entre un planeta y sus satélites, o entre dos puntos materiales cualesquiera del universo. Era la fuerza de gravedad, y para deducir sus propiedades recurrió, como veremos después, a la segunda y tercera leyes de Kepler. Luego demostró que sus tres leyes, en combinación con la fuerza de gravedad, originaban las órbitas elípticas de los planetas.

Isaac Newton inventó el cálculo diferencial y el integral. Es indudable que empleó estas potentes herramientas analíticas para hacer sus grandes descubrimientos. Sin embargo, cuando escribió los *Principia* no había publicado aún sus trabajos sobre el cálculo. (Más tarde se desataría una típica y aburrida polémica sobre quién había sido el verdadero inventor, si Newton o el filósofo y matemático alemán Gotfried Wilhelm Leibniz, que había hecho los mismos descubrimientos matemáticos por su cuenta.) Los *Principia* están escritos en dos idiomas clásicos, el latín y la geometría euclidiana. El motivo es evidente: Newton tenía que dirigirse a sus contemporáneos en un lenguaje que éstos entendieran. Puede que este método de presentación tuviera otra ventaja. Muchos años después, Richard Feynman (un hombre que no se parecía en nada a Newton, salvo en las cuestiones científicas) sintió tanta curiosidad que ideó su propia demostración geométrica de la ley de órbitas elípticas. «Es difícil descubrir

Isaac Newton. Grabado de B. Reading, 1799, según un retrato de sir Peter Lely.

cosas con el método geométrico», dijo en su conferencia sobre el tema (capítulo 4 de este libro), «pero la elegancia de la demostración, una vez hechos los descubrimientos, no tiene precio.»

Es notorio que Isaac Newton dijo que «si he alcanzado a ver tan lejos es porque me subí a hombros de gigantes». Los gigantes fueron Copérnico, Brahe, Kepler, Galileo y Descartes. Antes de Newton no había más que la confusión producida por el hundimiento de la concepción aristotélica del mundo y ningún indicio sobre cómo llenar el vacío que había dejado. Los gigantes de Newton pusieron algunos ladrillos o parte de los andamios, pero la forma y estructura del nuevo edificio no eran visibles aún. (Descartes creyó verlo, pero se equivocó.) Entonces llegó Newton y el mundo, de repente, estuvo otra vez en orden y se hizo previsible y comprensible. Newton había averiguado cómo funcionaba todo, y la demostración de que no se equivocaba fue su forma de probar la ley kepleriana de las elipses. No tardaremos en ver nuestra propia prueba de la ley de las elipses; no será exactamente como la de Newton, sino la ideada por Richard Feynman casi trescientos años después.

Primero, una ojeada a Richard Feynman.

2
Evocación de Feynman

En 1965, cuando compartió el premio Nobel con Julian Schwinger y Shinichiro Tomonaga por la invención de la electrodinámica cuántica, Richard Feynman era desconocido entre el público en general, pero entre los físicos ya era un héroe de dimensiones legendarias. En aquella época, quienes esto escriben preparaban el doctorado en la universidad de Washington en Seattle, un campus encantador que parecía muy alejado del centro del universo intelectual. Sin embargo, a principios de 1966, mientras yo (D.L.G.) me dedicaba a buscar mi primer empleo, Caltech tenía una plaza vacante en física experimental de bajas temperaturas, y fui invitado a impartir un seminario en Pasadena.

Era una época de entusiasmo para la física de bajas temperaturas. El estudio del comportamiento de la materia a temperaturas inmediatamente por encima del inalcanzable cero absoluto era una disciplina coherente y no una simple serie de técnicas, dado que se había articulado alrededor de dos problemas capitales ya clásicos: la superfluidez y la superconductividad. La superfluidez es la misteriosa capacidad que posee el helio líquido para fluir sin resistencia a temperaturas inferiores a dos grados por encima del cero absoluto. La superconductividad es la capacidad equivalente de muchos metales para conducir corriente eléctrica sin resistencia a temperaturas igual de bajas. Estos fenómenos seguían sin explicarse desde hacía décadas. En los años cincuenta, sin embargo, los dos problemas saltaron por los aires, gracias en buena medida al trabajo de Feynman. En ambos campos se entró en un periodo de intensa creatividad. Por ejemplo, los últimos conocimientos sobre la superconductividad permitieron imaginar circuitos eléctricos ordinarios para utilizar ingenios mecanocuánticos. El más prometedor se basaría en los experimentos de James Mercereau, un doctor de Caltech que había desarrollado el SQUID (siglas de Superconducting Quantum Interference Device, y que en inglés significa «calamar»).

Feynman siguió con avidez los experimentos de Mercereau y en aquella época era normal verlo en el laboratorio de física de bajas temperaturas del Caltech, un poco porque le interesaban vivamente los experimentos que se hacían allí y otro poco porque en el grupo de bajas temperaturas había una secretaria muy atractiva (que luego se casaría con Mercereau).

Dadas las circunstancias, el que me invitaran a cambiar la llovizna de Seattle por el sol de Pasadena para impartir un seminario al grupo de física de bajas temperaturas fue una oferta que no pude resistir. Caltech guardaba más ases en la manga. Mercereau, que se había propuesto redoblar los trabajos de experimentación en física de bajas temperaturas, fue a recibirme al aeropuerto y me preguntó si tenía inconveniente en comer antes de presentarme en el instituto, añadiendo que había quedado con Dick Feynman para que se reuniera con nosotros. Comimos los tres en un restaurante *topless* de Pasadena que Feynman frecuentaba por entonces. Lo único que recuerdo de aquella hora de conmoción cultural es que no dejaba de repetirme: «Esto no se lo van a creer en Seattle». Me había recuperado ya cuando llegó el momento de dar el seminario y, tal como fueron las cosas, al cabo de unos meses nos trasladamos a Caltech para quedarnos.

Richard Feynman nació el 11 de mayo de 1918, hijo de Lucille y Melville Feynman. El fuerte acento callejero que conservó e incluso cultivó durante toda su vida hacía creer a

casi todos sus oyentes que era oriundo de Brooklyn, pero la verdad es que nació y se educó en Far Rockaway, en el tranquilo barrio neoyorquino de Queens.

El padre de Feynman, al que éste veneraba en sus últimos años, no fue un hombre adinerado, pero el joven Richard adquirió pronto fama de prodigio y por eso se dispuso que fuera primero al MIT, donde se licenció en ciencias en 1939, y luego a Princeton para doctorarse. Su director de tesis fue John Archibald Wheeler, y en Princeton se dedicó a aplicar el principio de mínima acción a la mecánica cuántica. La tesis produjo el trabajo que sería la base de parte de sus más importantes logros posteriores.

Durante su época de doctorando tuvo su primer y único encuentro con Albert Einstein. Éste trabajaba en Princeton, en el Instituto de Estudios Avanzados, una institución totalmente separada de la universidad. Sin embargo, los miembros del instituto y los del departamento de física universitario solían asistir a los seminarios de los colegas.

Un día se anunció que el doctorando Richard Feynman iba a dar un seminario por primera vez. No sólo iba a ser su primer seminario, sino que además iba a presentar y defender la sorprendente idea con la que él y Wheeler habían estado trabajando: que un electrón podía avanzar y retroceder en el tiempo. Corrió el rumor de que iban a asistir Einstein y otros físicos famosos que casualmente estaban por allí.

El joven Feynman, comprensiblemente nervioso, decidió saltarse el té y las pastas que normalmente precedían al seminario y preparar la charla en su lugar, y a este efecto fue al aula y se puso a llenar la pizarra de ecuaciones. Llevaba un rato escribiendo fórmulas cuando tuvo la sensación de que lo miraban. Al volverse vio a Albert Einstein en la puerta. Los dos grandes físicos se miraron y entonces se produjo el único diálogo privado que habría entre ellos en lo sucesivo: «Oiga, joven», le dijo Einstein, «¿dónde dan el té?» Feynman acabó por olvidar las palabras exactas con que le respondió.

Estando todavía en Princeton, Feynman se casó con la mujer de sus sueños, Arlene Greenbaum. Cuando se doctoró, en 1942, Estados Unidos estaba en guerra. La joven pareja se trasladó a Los Álamos, en Nuevo México, donde se estaba preparando un plan supersecreto para construir una bomba atómica. Feynman se integró en la División Teórica, a las órdenes de Hans Bethe, el gran teórico que averiguó cómo queman su combustible nuclear el Sol y las estrellas. Arlene, que se moría ya de tuberculosis, ingresó en el hospital de Albuquerque.

Durante la estancia de Feynman en Los Álamos se puso de manifiesto que podía competir en igualdad de condiciones con los gigantes intelectuales del momento, entre ellos Bethe, Enrico Fermi y John von Neumann. Al mismo tiempo afloraron algunos rasgos que al final formarían parte de su leyenda, por ejemplo su gusto por las travesuras, abrir cajas de seguridad con trucos sencillos para dejar dentro notas provocativas, o intercambiar con su mujer cartas troceadas como un rompecabezas, para que los censores perdieran un tiempo precioso recomponiéndolas.

Cierto día de su último periodo en aquel trabajo, Feynman comió con el funcionario de patentes del proyecto Los Álamos. Aunque todos los aspectos del proyecto, incluyendo su misma existencia, eran altísimo secreto, el cometido de aquel funcionario era patentar todos los inventos que se hiciesen, seguramente para que sólo el gobierno pudiera utilizarlos. Sin embargo, ante la profunda consternación del funcionario, los científicos parecían invertir poco tiempo, y menos interés, en idear patentes. «Pero hombre», le dijo el funcionario a Feynman, «ustedes están creando un mundo totalmente nuevo. Seguro que con todo eso pueden hacerse cosas desconocidas hasta ahora.» Feynman meditó unos segundos y respondió que probablemente sí, que por ejemplo podía hacerse un submarino atómico, o un avión atómico.

Al día siguiente por la mañana Feynman encontró en su mesa, esperando su firma, unas solicitudes, ya debidamente

rellenadas, para patentar el «submarino atómico» y el «avión atómico». Así vino Feynman a tener la patente del submarino nuclear, un aparato de valor militar considerable, pero de poca utilidad comercial. Se ha dicho que, años después, cuando las Industrias Aeronáuticas Hughes se plantearon la construcción de un avión nuclear, ofrecieron a Feynman un puesto de vicepresidente (que el físico rechazó sin tardanza) porque poseía la patente del invento. En cualquier caso, de acuerdo con el convenio de patentes que firmaron los empleados de Los Álamos, Feynman tenía derecho a un dólar por cada patente. Cuando reclamó sus dos dólares, resultó que no se había abierto ninguna cuenta destinada a este fin, y el funcionario de patentes no tuvo más remedio que poner el dinero de su propio bolsillo. Feynman gastó los dos dólares en la cantina, donde invitó a naranjadas y chocolatinas a todo el personal de la División Teórica.

En 1945 murió Arlene en el hospital de Albuquerque. Feynman relataría conmovedoramente este episodio muchos años después en *¿Qué te importa lo que piensen los demás?* Había pedido el coche a su compañero de habitación para estar junto a ella y volvió a Los Álamos tan deprimido que no pudo afrontar la perspectiva de tener que hablar inmediatamente de la muerte de su mujer. Su compañero de habitación le organizó una tranquila velada con unos amigos que no sabían lo sucedido. Años después recordaría Feynman el asombro que sintió durante aquella velada ante el hecho de que nadie se diera cuenta del tremendo secreto que había en el interior de su cabeza. Su compañero de habitación era Klaus Fuchs, que también tenía secretos propios y sería luego condenado por hacer espionaje para la Unión Soviética.

Al terminar la guerra, Hans Bethe le ofreció un puesto en la Universidad de Cornell y allí se concentró Feynman en la descripción mecanocuántica de las interacciones entre la luz y la materia. Aunque Schwinger y Tomonaga, que desarrollaron por su cuenta soluciones equivalentes, compartieron el premio Nobel con él por aquel trabajo, el enfoque de

Feynman fue con mucha diferencia el más original. Su método descartó el campo electromagnético de Maxwell y lo sustituyó enteramente por interacciones entre partículas, trazando todas las trayectorias posibles con probabilidaes regidas por el principio de mínima acción, tal como había adelantado en su tesis doctoral. (En el capítulo 3 veremos un reflejo de este enfoque, cuando Feynman emplee una modalidad del principio de mínima acción en su demostración geométrica de la ley de las elipses.) Ideó además un método de representación gráfica para no perder de vista los complejos cálculos que requería su enfoque. Estas representaciones acabaron por conocerse en todo el mundo como diagramas de Feynman. El trabajo de Feynman llegó nada menos que a reformular la mismísima mecánica cuántica. Su método gráfico se utiliza ampliamente en muchas áreas de la física teórica.

Feynman dejó Cornell en 1950 y se incorporó al profesorado del Caltech (Instituto Tecnológico de California), donde, exceptuando un año que estuvo en Brasil (1951-1952), pasaría el resto de su vida profesional. En Caltech concentró su atención en el problema de la superfluidez del helio líquido. El teórico ruso Lev Landau había demostrado que la capacidad del helio para fluir sin resistencia se debía a que el líquido podía tomar energía de su entorno en ciertas condiciones muy restringidas. Feynman supo reconducir la observación de Landau hasta sus raíces mecanocuánticas. Los diagramas de Feynman serían después un importante instrumento de investigación en este campo, pero Feynman no los utilizó para resolver este problema. Por el contrario, dio la vuelta a la anticuada versión de la mecánica cuántica que había dado Schrödinger y con su notable intuición se dedicó a conjeturar la naturaleza de un gigantesco sistema cuántico.

Las notas privadas de Feynman revelan que durante este periodo se empeñó también en solucionar el problema de la superconductividad, que era hermano del otro. El problema parecía especialmente hecho para que Feynman pusiera a

prueba sus facultades. Como en el caso de la superfluidez, la solución comportaba la existencia de un bache de energía que la corriente eléctrica suplía tomándola del entorno. Además, este bache se formaba a causa de las interacciones entre los electrones del metal y las ondas sonoras o fonones. Esta parte del problema es comparable a las interacciones entre electrones y ondas luminosas o fotones que habían estado en la base de su teoría de la electrodinámica cuántica. A diferencia de lo ocurrido con la superfluidez, las técnicas gráficas de Feynman, en las que él era evidentemente el maestro supremo, parecían más que aptas para aquella empresa. Sus principales competidores, John Bardeen, Leon Cooper y J. Robert Schrieffer, eran bien conscientes de ello. Al final, sin embargo, resultó que las potentes técnicas de Feynman condujeron inevitablemente a éste por una dirección distinta y fueron Bardeen, Cooper y Schrieffer quienes, a comienzos de 1957, dieron una solución espectacular al problema. Por este trabajo recibieron el premio Nobel, el segundo que obtenía Bardeen. (El primero lo había compartido en 1956 con William Schokley y Walter Brattain por el descubrimiento de los transistores.)

La superconductividad no fue el único problema cuya solución se propondría Feynman en vano. Durante el resto de su vida hizo también incursiones en terrenos como la biología experimental, la mecánica estadística, los jeroglíficos mayas y la física de los ordenadores, con un grado de acierto variable. Era muy reacio a airear o publicar resultados en los que no tuviese absoluta confianza o que pudieran restar méritos a rivales con derecho a ellos; en consecuencia, sus publicaciones forman una lista breve y contienen pocos errores.

Poco después de Feynman llegó a Caltech Murray Gell-Mann, que obtendría su propio Nobel (1969) por su hallazgo de simetrías en las propiedades de las partículas elementales de la materia. Con Feynman y Gell-Mann allí, Caltech se convirtió en el centro del universo de la física teórica. En 1958 publicaron un artículo común titulado «Teoría de la interacción de Fermi», que explicaba lo que se ha dado en llamar interacción débil, una fuerza que rige la desintegración de ciertas partículas nucleares. Feynman y Gell-Mann sabían que los experimentos negaban la teoría, pero tuvieron suficiente confianza en sí mismos para publicarla de todos modos. Tiempo después se supo que los experimentos estaban equivocados: la teoría era acertada.

Durante este mismo periodo, Feynman participó en los trabajos de Gell-Mann y George Zweig, otro profesor de física teórica del Caltech, que produjeron la teoría de los quarks, que es fundamental para la idea que tenemos actualmente de la naturaleza de la materia.

Feynman se casó en 1952 con Mary Louise Bell, una profesora universitaria de historia del arte ornamental. Se divorciaron en 1956. El científico se casó por tercera y última vez el 24 de septiembre de 1960, con Gweneth Howarth. En 1962 tuvieron un hijo, Carl, y en 1968 adoptaron una niña, Michelle. Feynman fomentó una imagen pública (muy conocida entre sus colegas) caracterizada por dibujar mujeres desnudas y por pasar el tiempo en bares *topless*, pero su vida privada era de lo más convencional y de clase media, y transcurría en una cómoda casa de Altadena, al pie de los Montes de San Gabriel, no lejos del campus de Caltech.

En 1961 emprendió una aventura que causaría un profundo impacto en toda la comunidad científica: dar el curso de dos años de introducción a la física que tenían que estudiar los alumnos de primer ciclo de Caltech. Sus clases se grabaron y transcribieron, y se fotografiaron todas las pizarras que llenaba de ecuaciones y dibujos. Con este material, sus colegas Robert Leighton y Matthew Sands, con ayuda de Rochus Vogt, Gerry Neugebauer y otros, publicaron una serie de volúmenes titulada *The Feynman Lectures on Physics*, que es hoy un auténtico y perdurable clásico de la literatura científica.

Feynman fue un profesor realmente grande. Se enorgullecía de saber explicar a los principiantes incluso las ideas

Feynman y Gell-Mann, 1959.

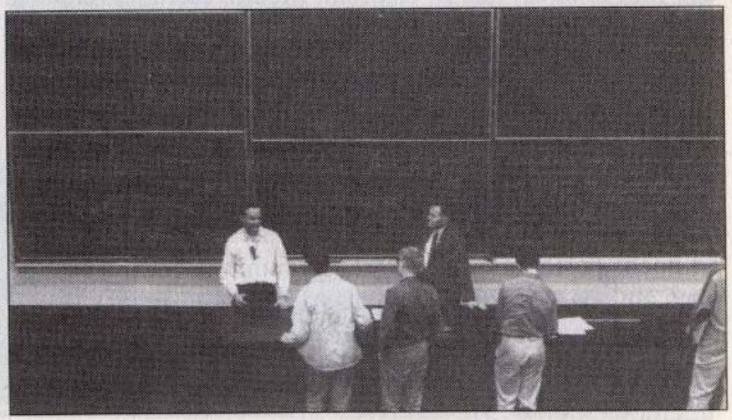
más profundas. En cierta ocasión le dije: «Dick, explícame por qué las partículas de espín 1/2 obedecen la estadística de Fermi-Dirac, para que yo me entere». Como conocía la valía de su audiencia, respondió: «Prepararé una clase de primero sobre el tema». Pero al cabo de unos días se me acercó y me dijo: «No puedo. No puedo reducirlo al nivel de los estudiantes de primero. Lo que significa que en realidad no lo entiendo».

Feynman impartió sus clases a los alumnos de primero de Caltech en el año académico 1961-1962, y a los mismos estudiantes, ya en segundo curso, en 1962-1963. Sus preferencias en cuestiones físicas eran totalmente eclécticas; dedicaba tanta energía creativa a describir el discurrir del agua como a comentar la curvatura espaciotemporal. Puede que, entre todos los temas que tocó en aquel curso introductorio, la hazaña más descollante fuera su presentación de la mecánica cuántica (en el volumen III de la serie); apenas disfrazado, se trataba del novedoso enfoque de la mecánica cuántica que había desarrollado él mismo.

Aunque Feynman era un actor fascinante en el aula, nunca enseñó formalmente a los alumnos de primer ciclo, exceptuando el curso de 1961-1963. Durante toda su vida profesional, descontado aquel paréntesis, no dio más que cursos de doctorado. La conferencia que ha justificado el presente libro no formaba parte del curso original; fue más bien una charla de «profesor invitado» para los alumnos de primero, al final del trimestre invernal de 1964. Rochus Vogt era el nuevo profesor de introducción a la física e invitó a Feynman a dar la charla como un gesto generoso para los estudiantes. *The Feynman Lectures* no tuvieron porvenir como manuales de introducción, ni siquiera en Caltech, donde se gestaron. Pero se perpetuarían como fuente de perspicacia e inspiración para los científicos consumados que habían aprendido física por medios más convencionales.

A raíz de la obtención del Nobel en 1965, Feynman pasó por un breve periodo de depresión durante el que dudó de su capacidad para seguir prestando servicios útiles y originales a la física teórica. Por aquella época me integré en el claustro de profesores de Caltech. El curso de Feynman sobre física lo daba a la sazón Gerry Neugebauer. Mientras el titular había sido Feynman, Gerry, que hacía de profesor ayudante, había cargado con la difícil misión de preparar deberes para los alumnos (en números redondos, unos doscientos), y era difícil en buena medida porque nadie, quizá ni siquiera el mismo Feynman, sabía por adelantado qué se iba a decir en clase. Tal como ocurrió en el caso de la conferencia perdida que se reproduce en el capítulo 4 de este libro, Feynman llegaba al aula sin más preparación que un par de páginas de apuntes. Neugebauer, para facilitar su propio trabajo, comía

«No las quiero abrir enseguida y pierdo el tiempo durante un rato.» Feynman contando a los estudiantes de Caltech cómo forzaba cajas de seguridad en Los Álamos. 1964.

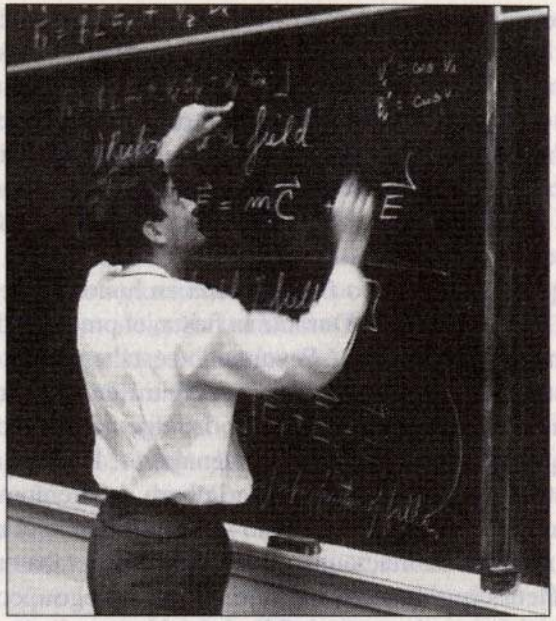


Feynman y Leighton, 1962.

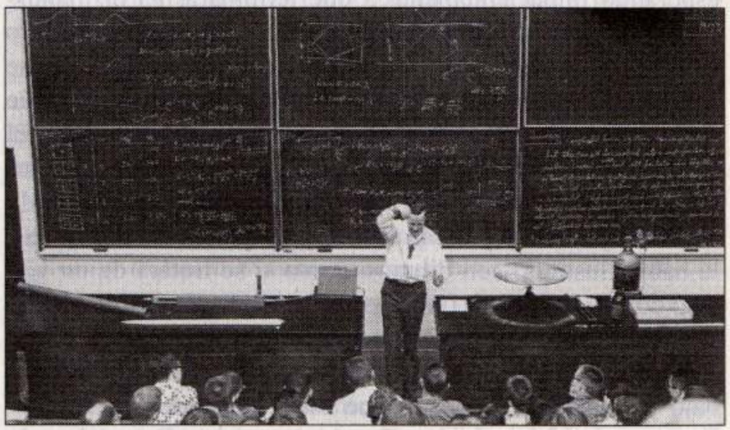
con Feynman, Leighton y Sand después de las clases en la cafetería de Caltech, conocida por generaciones de estudiantes como «la Grasa»; el elegante club de profesores, el Ateneo, no casaba con el estilo de Feynman. Durante la comida se comentaba la clase, y mientras Leighton y Sands competían para ganar puntos ante Feynman, Neugebauer se esforzaba por extraer la esencia de lo que se había dicho en el aula.

En 1966, pues, era Neugebaur quien daba las clases; yo entré como ayudante y me encargaron una de las pequeñas secciones de repaso oral que complementaban las clases principales del curso. Las ya tradicionales comidas en «la Grasa» continuaban, con Feynman de comensal. Fue allí donde lo conocí realmente, sobre todo intercambiando ideas con él sobre la forma de enseñar física. Aquel otoño le invitaron a dar una conferencia pública en la Universidad de Chicago en febrero del año siguiente. Al principio quiso negarse (casi todos los días recibía invitaciones de ese estilo), pero al final decidió aceptar y dar una charla sobre nuestras ideas docentes, si yo accedía a ir con él. Añadió que me abonaría los gastos del viaje con los honorarios absurdamente elevados (mil dólares) que le ofrecían. Medité escrupulosamente la cuestión durante un microsegundo y le dije que sí. Cuando comunicó a la Universidad de Chicago que iría con él, los de Chicago se preguntaron sin duda quién era yo y qué pintaba allí, pero me invitaron de buena gana y además me pagaron el viaje.

Compartimos un juego de habitaciones en el Club Quadrangle, el club de profesores de la Universidad de Chicago. La noche posterior a su conferencia fuimos a cenar a casa de unos amigos, Val y Lia Telegdi. Al día siguiente por la mañana llegué un poco tarde al comedor del club para tomar el desayuno. Feynman ya estaba allí, comiendo con una persona a quien yo no conocía. Me senté con ellos, se murmuraron presentaciones que no oyó nadie y me tomé el primer café del día, aún cayéndome de sueño. Como escuchaba lo



Feynman ante la pizarra, 1961.



Feynman y el movimiento de las ondas, 1962.

que decían, acabé dándome cuenta de que el desconocido era James Watson, el descubridor, junto con James Crick, de la estructura bihelicoidal del ADN. Tenía en las manos un manuscrito titulado *El buen Jim* (el editor lo cambió luego por *La doble hélice*) y quería que Feynman lo leyese, con la esperanza de que hiciera alguna aportación a las frases de elogio de la sobrecubierta. Feynman aceptó echar un vistazo al manuscrito.

Aquella noche hubo fiesta y cena en honor de Feynman en el Club Quadrangle. Durante la fiesta, el preocupado anfitrión me preguntó por qué Feynman no estaba presente. Subí a nuestras habitaciones y me lo encontré enfrascado en la lectura del manuscrito de Watson. Le dije varias veces que tenía que bajar, ya que era el homenajeado. Lo hizo a regañadientes, pero huyó de la cena a la hora más temprana que le permitió la educación. Cuando se despidió todo el mundo, subí a nuestras habitaciones. Feynman me esperaba en la salita. «Tienes que leerlo», me dijo. «Desde luego», contesté. «Ardo en deseos de que se publique.» «No», replicó, «quiero decir ahora mismo.» Así, sentado en la salita de nuestra suite, entre la una y las cinco de la madrugada, con Feynman esperando impacientemente a que terminara, leí el manuscrito que al final sería *La doble hélice*. En cierto momento alcé la vista y dije: «Oye, Dick, este tío o es muy listo o tiene mucha suerte. No deja de decir que sabía menos que nadie de lo que estaba pasando y sin embargo es el que se lleva el gato al agua». Feynman casi cruzó volando la sala para enseñarme el cuaderno en el que había estado garabateando mientras yo leía. No había escrito más que una breve frase y la había ilustrado con dibujos, como si se tratara de un vistoso códice medieval. La frase era: «¡No hacer caso!».

«¡Eso es lo que yo había olvidado!», gritó (a las tantas de la madrugada). «Hay que preocuparse por el propio trabajo y no hacer caso de lo que estén haciendo los demás.» En cuanto se hizo de día, llamó a su mujer, Gweneth, y le dijo: «Creo que ya lo tengo. Ahora podré trabajar otra vez».

A finales de los sesenta volvió a la acción, absorto en el problema que le ocuparía durante una década o más. Las colisiones a altísimas energías de partículas pesadas como los neutrones y protones podían describirse por entero en el lenguaje de las interacciones de sus partes internas. Era la teoría del «partón», donde las partes internas eran los quarks que sus colegas Murray Gell-Mann y George Zweig ya habían ideado y a los que se añadieron unas partículas que recibieron el nombre «gluones» porque su papel era aglutinar los quarks. Este modelo ha tenido unos aciertos tan impresionantes a la hora de predecir los resultados de los experimentos con aceleradores de partículas de alta energía que la teoría del quark ha acabado siendo universalmente adoptada entre los físicos, aunque hasta la fecha ha sido imposible sacar un solo quark de un protón o de un neutrón para analizarlo individualmente.

El sentido del humor de Feynman era tan especial como todo lo que le rodeaba. En 1974 el mundo de la física se conmocionó a causa del descubrimiento casi simultáneo (en el Acelerador Lineal de Stanford y el Laboratorio Nacional de Brookhaven, en Long Island) de una partícula nueva. Llamada partícula J por el grupo de Brookhaven y partícula ψ (psi) por el grupo de Stanford, no tardó en conocerse como partícula J/psi. El descubrimiento tenía la forma de dos picos muy estrechos, denominados «resonancias», en una gráfica de la señal detectada en función de la energía de colisión. A otras energías los detectores registraban sólo un insignificante ruido de fondo de bajo nivel. Por entonces yo era presidente del comité de coloquios del departamento de física de Caltech. Puesto que se sabía de mi amistad con Feynman, el comité me encargó por mayoría que pidiera a Dick que diese una charla para explicar el significado de aquellos asombrosos descubrimientos. Dick aceptó inmediatamente y me esbozó la conferencia que pensaba dar. Acordamos la fecha más próxima disponible (el 16 de enero de 1975) y lo dejamos así. Tras anotar la fecha en cuestión en mi calendario de coloquios, me olvidé del asunto, dándolo por hecho.

Tres semanas antes de la fecha, durante las vacaciones navideñas, vino a verme el director del semanario *Caltech Calendar*. El órgano informativo tenía que publicar ya el título de la conferencia del doctor Feynman. Feynman estaba en la Baja California, en un refugio familiar que no tenía teléfono, y yo tenía un gran problema.

Inventé un título para la charla de Feynman: «El amplio trasfondo teórico de dos estrechas resonancias». Para un físico era un juego de palabras endeble; para el resto era incomprensible. Pero describía muy bien la charla que pensaba dar Feynman. Llamé a un amigo común, Jon Matthews, y le pedí consejo. Se echó a reír cuando oyó mi título, pero se calmó al instante y dijo: «No lo pongas. Dick tiene un fabuloso sentido del humor para todo, menos para la física, para el que no tiene ninguno».

Pero a mí me gustaba el título y, además, había hecho reír a Jon. Se lo pasé al director del semanario y me olvidé del tema.

La charla de Feynman iba a ser la segunda de aquel año. El día de la primera (el jueves 9 de enero), cuando nos reunimos para tomar el té a las cinco menos cuarto, vi a Feynman por primera vez desde las Navidades y de repente lo recordé todo. Me di cuenta además de que el calendario de actos de la semana siguiente se había publicado aquel mismo día y él tenía que haber visto mi título. Temí lo peor, pero resolví atacar el problema de frente. «Oye, Dick, lo siento», balbuceé. «Me pidieron un título y tú no estabas, lo hice con la mejor intención.»

Bajó la nariz hasta apuntarme con ella, de un modo que sólo él sabía hacer. «Está bien», dijo con un tono que me dio a entender que la cosa distaba mucho de estar bien. «Está bien», repitió con una voz cargada de presagios.

Tomamos té y al cabo de unos minutos subimos todos al sacrosanto salón donde venían celebrándose los coloquios de

física de Caltech desde tiempos inmemoriales (desde 1921). Como solía hacer, Feynman se sentó junto a mí en la primera fila, que estaba informal pero estrictamente reservada para los profesores de física. La conferencia fue teórica, técnica y difícil: «Procesos de equilibrio en los núcleos», por Steven Koonin, a la sazón doctorando del MIT (en la actualidad es rector de Caltech). Feynman no hizo más que mumurarme comentarios y cuchufletas al oído, y al final de la charla yo ya había perdido por completo el hilo de la argumentación de Koonin.

Cuando el orador dejó de hablar, otro personaje con derecho a butaca de primera fila, el físico nuclear Willy Fowler, hizo una pregunta. (Willy se llevaría el premio Nobel en 1983 por sus trabajos sobre la producción de elementos en las estrellas.) Aunque yo no había entendido gran cosa de la ponencia, me pareció que comprendía la pregunta de Willy y creí saber la respuesta. Para devolverle el favor a Feynman, le murmuré la respuesta al oído y Feynman levantó la mano como una flecha.

Para los ponentes de los coloquios de física de Caltech de aquella época, el público consistía en Richard Feynman y una masa de caras inidentificables. Cuando Feynman levantó la mano, el joven Koonin, que se había esforzado por articular una respuesta a la pregunta de Willy, se puso en sus manos con alivio manifiesto. Feynman se puso en pie con solemnidad (cosa que nunca hacía durante el debate que seguía a las ponencias). «Gudshtain dice...», comenzó, vociferando mi apellido y pronunciándolo mal adrede, para que pareciese alemán, «Gudshtain dice...» y a continuación reprodujo mi respuesta, pero no como yo se la había murmurado, sino con elegancia, bien expresada, como yo no habría podido hacer nunca.

«¡Eso es!», exclamó Koonin. «Eso es precisamente lo que yo quería decir.»

«Bueno», dijo Feynman, mientras yo me metía debajo del asiento, «a mí que me registren. Yo no lo entiendo. Es lo que Gudshtain dice.» Por fin se había vengado. El asunto no volvió a mencionarse.

Un viernes de comienzos de junio de 1979, la fiel secretaria de Feynman, Helen Tuck, pasó a verme discretamente para decirme que se había enterado de que a Feynman le habían diagnosticado cáncer de estómago. Iban a ingresarlo en el hospital para operarlo a finales de la semana siguiente. No se tenía la total certeza de que volviera a salir. Yo no debía decirle a Feynman que lo sabía.

Aquel viernes era día de entrega de títulos en Caltech. Feynman no dejó de asistir, togado hasta los pies para desfilar en el cortejo académico. Le dije que habían encontrado un error en un trabajo que habíamos hecho juntos y que me sentía incapaz de localizar el origen del mismo. ¿Le gustaría que habláramos al respecto? Quedamos en vernos en mi despacho el lunes por la mañana.

El lunes por la mañana nos pusimos a trabajar. Mejor dicho, se puso él. Yo miraba por encima de su hombro, hacía comentarios y sugerencias, pero sobre todo me maravillaba de que aquel hombre que afrontaba en secreto una operación posiblemente mortal estuviera revisando con inagotable energía un problema sin importancia de teoría elástica bidimensional. La solución del problema podía encontrarse en manuales corrientes, pero no era ésta la cuestión. Al hacer el trabajo juntos en su momento, Feynman había querido desarrollar él solo aquel resultado menor, en una servilleta de un bar *topless*, y habíamos cometido la imprudencia de publicar el resultado (una pequeña parte de una teoría mucho mayor) sin cotejarlo con la fórmula vigente. Por aquella época, y a pesar del tiempo que pasaba en los bares *topless*, Feynman no probaba ni gota de alcohol, por temor a que éste redujera su capacidad intelectual. No se le habría podido acusar de deducir «en estado de embriaguez». A pesar de todo, algo había fallado. La pregunta era: ¿qué sutil error había cometido para dar con una solución ligeramente equivocada?

El problema resultó inabordable. A las seis de la tarde

nos dimos por vencidos y cada cual se fue a lo suyo. Dos horas después me llamó a casa. ¡Había encontrado la solución! Según me contó, no había podido dejar de darle vueltas y al final lo había encontrado. Me dictó la solución. Cuatro días antes de ingresar en el hospital para someterse a la primera intervención quirúrgica, Feynman estaba radiante de alegría.

El tumor que se le extrajo aquel fin de semana era grande, pero a los médicos les pareció muy localizado y se emitió un pronóstico esperanzador. Feynman, sin embargo, moriría finalmente de aquello.

Durante los años ochenta, la última década de su vida, Feynman se convirtió en una auténtica figura pública, quizá en el científico más conocido desde Albert Einstein. Al principio de su trayectoria profesional, incluso mientras cultivaba su especialísima imagen entre los científicos, había huido de la atención pública. Había pensado incluso en rechazar el premio Nobel, hasta que comprendió que un gesto así le daría más notoriedad que el premio mismo. Sin embargo, al final de su vida hubo una serie de hechos que se confabularon para lanzarlo a la fama.

En 1985, *¿Está usted de broma, señor Feynman*? se convirtió en un meteórico *bestseller* sorpresa. Ralph Leighton, amigo de Feynman y amante del bongo, había recogido las anécdotas personales que Feynman venía contando desde hacía años, y Edward Hutchings, veterano profesor de periodismo en Caltech, las había puesto en orden. Subtitulado «Aventuras de un curioso personaje» (el doble sentido era intencionado), el libro contaba las aventuras extracientíficas de Feynman, desde sus actitudes antimilitaristas en Los Álamos hasta sus bailes en el carnaval de Río. Esta imagen anticonvencional del gran científico en acción fascinó a un público que no sabía por qué era famoso Feynman. Tres años después apareció otro volumen, *¿Qué te importa lo que piensen los demás?*, con el subtítulo de «Nuevas aventuras de un curioso personaje», también «tal como le fueron referidas a Ralph Leighton».

En el ínterin, sin embargo, un acontecimiento catastrófico había concentrado la atención estadounidense. El 28 de enero de 1986, la lanzadera espacial *Challenger* había estallado momentos después del despegue. Vista en directo por millones de personas y repetida hasta la saciedad por televisión, la conflagración de la escena prendió en la conciencia nacional. Días más tarde, el director en funciones de la NASA, William Graham, que había estudiado en Caltech y asistido a las conferencias que Feynman daba habitualmente en Industrias Aeronáuticas Hughes, llamó a Feynman y lo invitó a formar parte de una comisión presidencial para investigar el accidente.

La comisión estuvo presidida por el antiguo secretario de Estado William F. Rogers, que tuvo muchas dificultades para contener al efervescente científico. Feynman no dejó que su avanzada enfermedad obstaculizara su voluntario papel de investigador implacable. El momento culminante de su fama pública llegó cuando, en el curso de una audiencia de la comisión televisada a todo el país, estrujó con unas tenazas un trozo de material impermeabilizante de uno de los cohetes propulsores de combustible sólido de la lanzadera, y dejó caer la muestra en un vaso de agua muy fría, para demostrar que el material impermeable perdía su elasticidad a bajas temperaturas. (A pesar de la electrizante impresión que produjo en su momento, la demostración se había ensayado previamente con mucho cuidado.) Este defecto demostró cuál había sido la causa principal de la tragedia del *Challenger*.

La conferencia perdida de Feynman sobre el movimiento planetario no fue en modo alguno la única que dio como profesor invitado a los estudiantes de primer ciclo de Caltech. Con el paso de los años se le pidió a menudo que hiciera esta clase de apariciones y casi siempre aceptó. La última de estas conferencias la pronunció la mañana del viernes 13 de marzo de 1987. Yo daba por entonces el curso de introducción a la física a los estudiantes de primer ciclo, se lo pedí y aceptó dar la última charla del trimestre invernal.

El tema de la charla fue en esta ocasión la curvatura espaciotemporal (la teoría einsteiniana de la relatividad general). Antes de comenzar quiso decir unas palabras sobre un particular que le había emocionado mucho. Hacía tres semanas había aparecido una supernova en el borde de nuestra galaxia. «Tycho Brahe tuvo su supernova», dijo Feynman a los alumnos, «y Kepler la suya. No hubo más supernovas durante cuatrocientos años. ¡Yo tengo ya la mía!»

Este comentario fue acogido por el estupefacto silencio de los estudiantes, que tenían razones de sobra para dejarse apabullar por Feynman incluso antes de que abriera la boca. Dick sonrió con placer innegable al ver el efecto que había producido y quiso disolverlo inmediatamente. «Ya sabéis», murmuró, «que en una galaxia hay unos cien mil millones de estrellas, diez elevado a la undécima potencia. Esta cantidad pasaba antes por ser muy elevada. Decíamos que las cifras así eran "astronómicas". Hoy están por debajo de la deuda nacional y deberíamos llamarlas "cifras económicas".» La clase estalló en carcajadas y Feynman comenzó su conferencia.

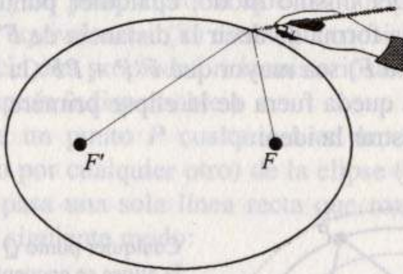
Murió once meses después, el 15 de febrero de 1988.

3

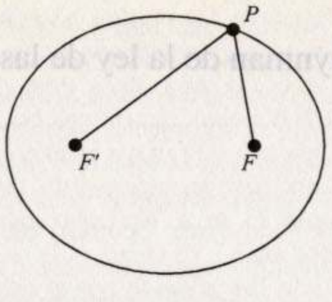
Prueba de Feynman de la ley de las elipses

«Las cosas sencillas tienen una demostración sencilla», escribió Feynman en sus apuntes para la conferencia. Luego tachó la segunda sencillez y en su lugar puso «elemental». La cosa sencilla que tenía en la cabeza era la primera ley de Kepler, la ley de las elipses. La demostración que iba a presentar era ciertamente elemental, en el sentido de que no empleaba matemáticas más avanzadas que la geometría del bachillerato, pero distaba mucho de ser sencilla.

Para empezar, Feynman nos recuerda que una elipse es una especie de círculo estirado que puede trazarse con dos tachuelas, un cordel y un lápiz, del siguiente modo:

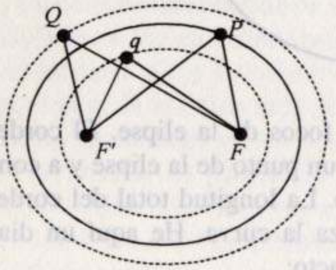


Las tachuelas son los dos focos de la elipse. El cordel traza una línea entre un foco y un punto de la elipse y a continuación va hacia el otro foco. La longitud total del cordel no varía mientras el lápiz traza la curva. He aquí un diagrama geométrico algo más exacto:



F' y *F* son los dos focos y *P* puede ser cualquier punto de la curva. La distancia entre *F'*, *P* y *F* es siempre la misma, sea cual fuere el punto de la curva donde esté *P*.

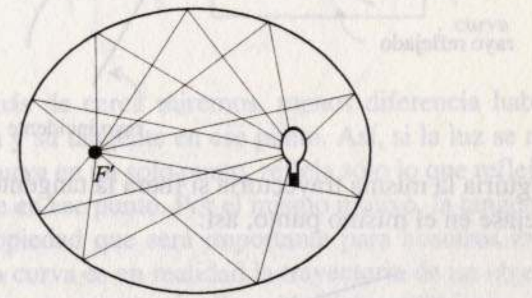
He aquí ahora una bagatela que conviene recordar: si el cordel se acorta un poco y las tachuelas se dejan donde están, podemos trazar otra elipse dentro de la primera, y si el cordel se alarga y las tachuelas siguen sin moverse, podemos trazar una elipse por fuera de las otras dos. De aquí se sigue que cualquier punto del plano —por ejemplo, *q*— situado de tal modo que la distancia entre *F'*, *q* y *F* sea inferior a la distancia entre *F'*, *P* y *F* (es decir, cualquier punto que pueda alcanzarse con un cordel más corto) queda dentro de la primera elipse. Del mismo modo, cualquier punto *Q* tal que $F'Q + QF$ (otra forma de decir la distancia de *F'* a *Q* más la distancia de *Q* a *F*) sea mayor que $F'P + PF$ (la longitud del primer cordel) queda fuera de la elipse primera. He aquí un dibujo para ilustrar la idea:



Cualquier punto *Q* exterior a la elipse se encuentra en una elipse mayor, trazable con un cordel más largo. Cualquier punto *q* interior a la elipse se encuentra en una elipse menor, trazable con un cordel más corto.

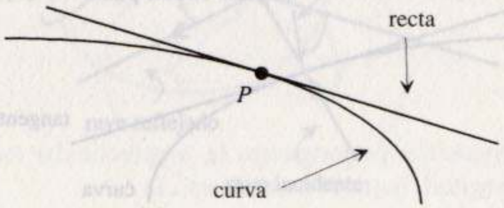
Feynman se sirve de esta idea ya en plena conferencia, pero no la prueba como nosotros. Por el contrario, indica a los estudiantes que la prueben por su cuenta.

Una elipse tiene otra propiedad particular. Si en *F* se encendiera una bombilla, y si la superficie interior de la elipse reflejara la luz como un espejo, todos los rayos reflejados acabarían concentrándose en *F'*, como sigue:

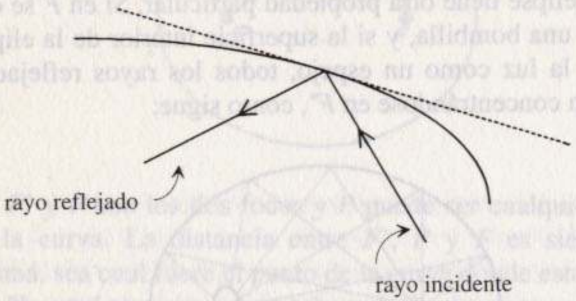


Y viceversa: todos los rayos luminosos que partan de un foco se concentrarán en un punto del otro foco. Feynman formula estas palabras como segunda propiedad elemental de la elipse y se pone a probar que las dos propiedades en realidad son equivalentes. (Su estrategia consiste aquí en conducirnos hacia una propiedad más misteriosa de las elipses y que será después indispensable.)

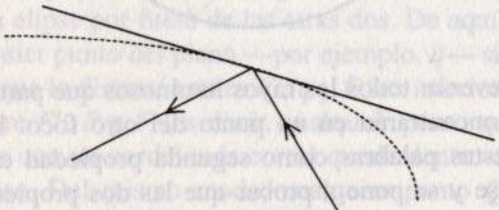
Dibújese un punto *P* cualquiera en la elipse. Por ese punto (como por cualquier otro) de la elipse (o de cualquier otra curva) pasa una sola línea recta que roza la curva sin cortarla, del siguiente modo:



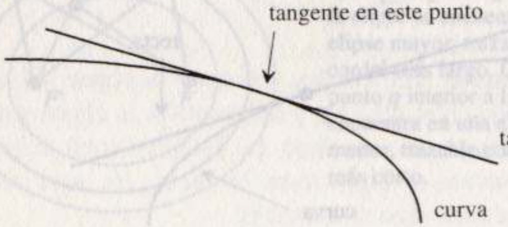
Esta línea es tangente a la curva en dicho punto. Un rayo luminoso, reflejado por la curva en cualquier punto, del siguiente modo:



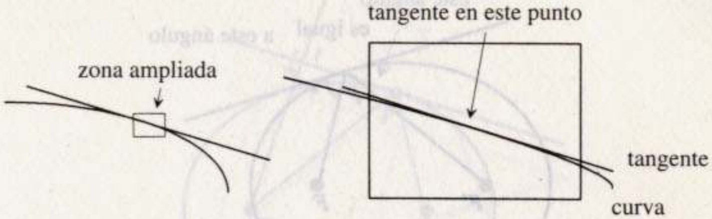
seguiría la misma trayectoria si fuera la tangente la que lo reflejase en el mismo punto, así:



El motivo de que la luz se refleje en la curva tal como lo haría en la tangente en el mismo punto es que la tangente señala la dirección de la curva en ese punto concreto. Si se parte con una curva y su tangente en determinado punto,

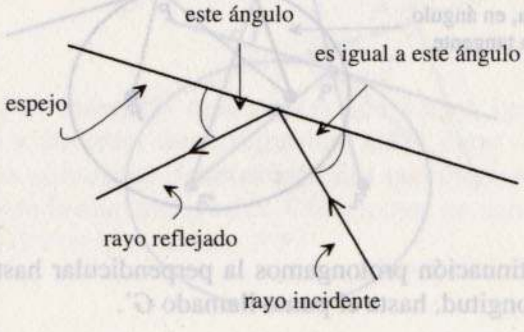


y se amplía la imagen en los alrededores del punto, la curva se estira y se vuelve casi tan recta como la tangente:

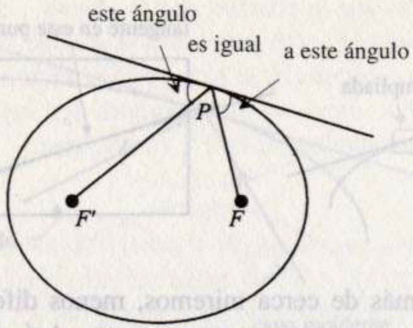


Cuanto más de cerca miremos, menos diferencia habrá entre la curva y su tangente en ese punto. Así, si la luz se refleja en una curva en un solo punto, refleja sólo lo que reflejaría la tangente en ese punto. Por el mismo motivo, la tangente tiene otra propiedad que será importante para nosotros más adelante: si la curva es en realidad la trayectoria de un objeto móvil, la tangente muestra la dirección del movimiento del objeto en cada punto. Cuando decimos que la elipse es la figura que describe un planeta en su órbita alrededor del Sol, la tangente a la elipse en cada uno de los puntos estará en la dirección de la velocidad instantánea en ese punto.

La ley de reflexión en un espejo plano dice que el rayo toca el espejo y sale reflejado en el mismo ángulo, como sigue:

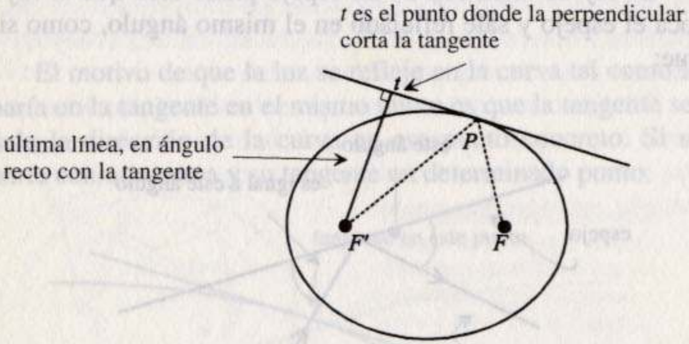


He aquí pues la propiedad aplicada a los rayos luminosos:

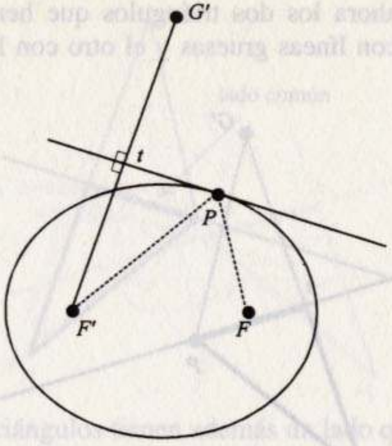


El rayo incidente de F a P forma el mismo ángulo con la tangente en P que el rayo reflejado, que va a F'. Nuestra misión es probar que esta afirmación equivale a decir que la distancia $F'P$ más la distancia PF es la misma para cualquier punto P de la curva.

La prueba necesita algunas operaciones. Tracemos una línea desde F' que sea perpendicular a la tangente, de este modo:

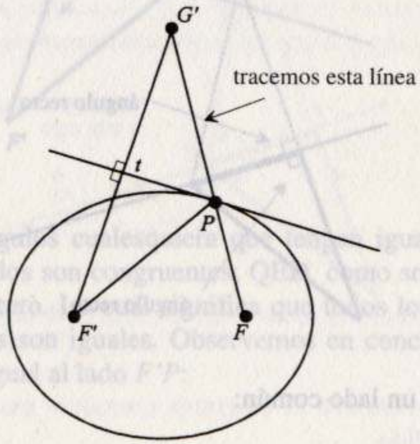


A continuación prolongamos la perpendicular hasta duplicar su longitud, hasta el punto llamado G'.

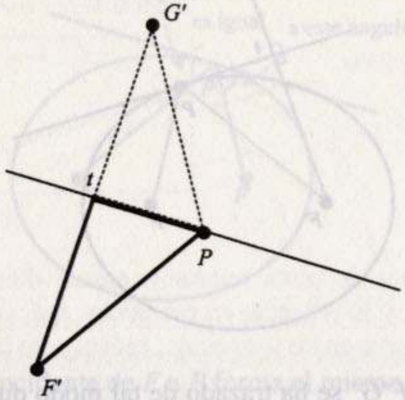


La línea $F'G'$ se ha trazado de tal modo que la tangente a la elipse en el punto P es su bisectriz perpendicular. Feynman llama G' al punto reflejo de F'. Lo que quiere decir es que si la tangente fuera en realidad un espejo, y si el punto F' se viera a sí mismo en dicho espejo, su reflejo parecería estar en G', a la misma distancia detrás del espejo.

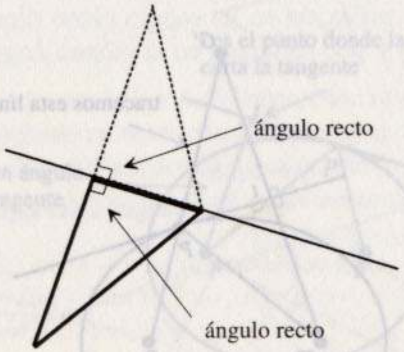
Hace falta otra línea. Conectemos los puntos G' y P con una recta:



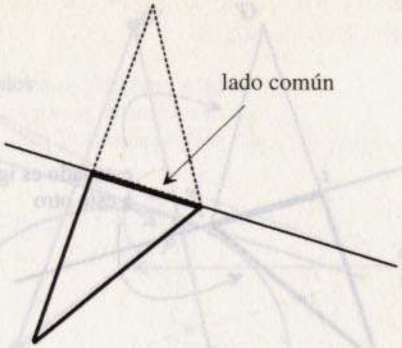
Veamos ahora los dos triángulos que hemos formado; uno aparece con líneas gruesas y el otro con líneas de puntos:



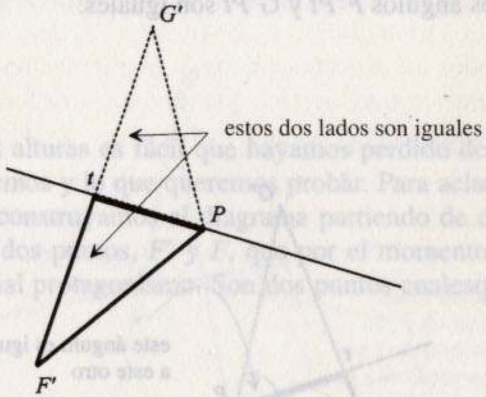
Los dos triángulos son congruentes, es decir, son idénticos en todos los aspectos menos en la orientación. He aquí la prueba. Puesto que hicimos que el cruce en *t* fuera un cruce de perpendiculares, los dos triángulos tienen un ángulo recto:



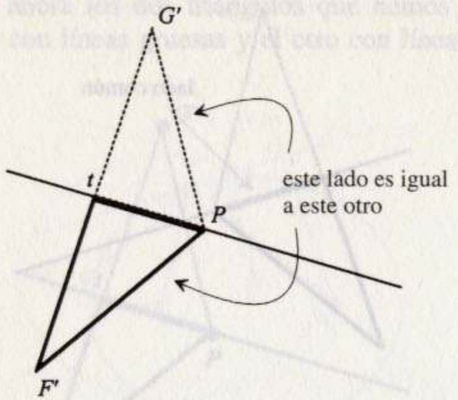
Tienen un lado común:



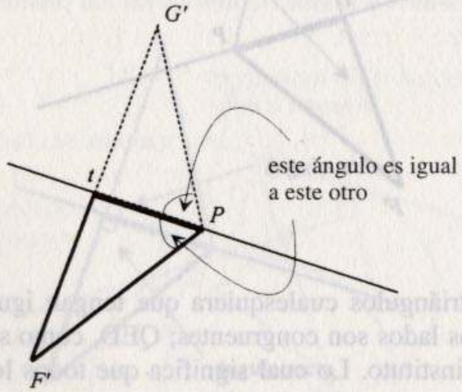
Los dos triángulos tienen además un lado que se trazó de la misma longitud (la tangente que corta *F'G'* por la mitad):



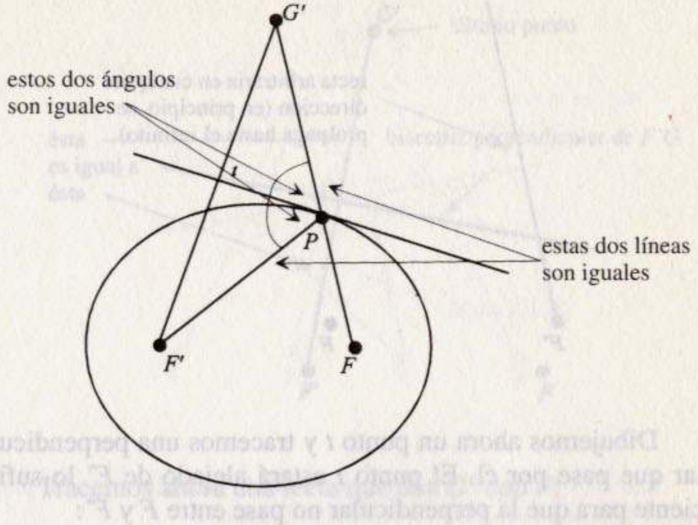
Dos triángulos cualesquiera que tengan iguales un ángulo y dos lados son congruentes; QED, como solíamos decir en el instituto. Lo cual significa que todos los lados correspondientes son iguales. Observemos en concreto que el lado *G'P* es igual al lado *F'P*:



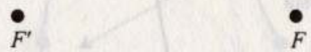
Y los ángulos $F'Pt$ y $G'Pt$ son iguales:



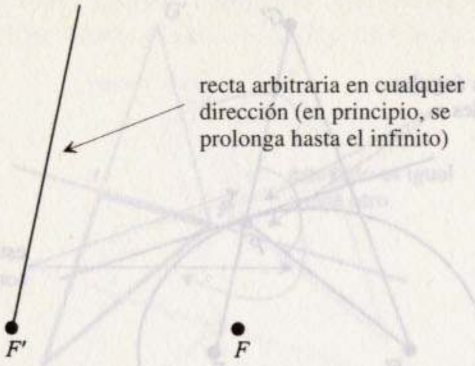
Bien, volvamos al diagrama completo para ver qué hemos aprendido.



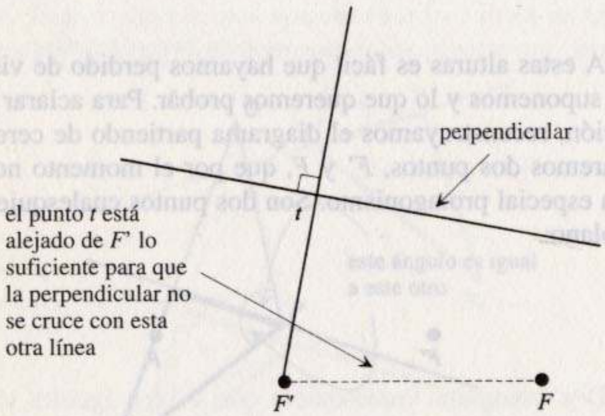
A estas alturas es fácil que hayamos perdido de vista lo que suponemos y lo que queremos probar. Para aclarar la situación, reconstruyamos el diagrama partiendo de cero. Dibujaremos dos puntos, F' y F, que por el momento no tendrán especial protagonismo. Son dos puntos cualesquiera en un plano:



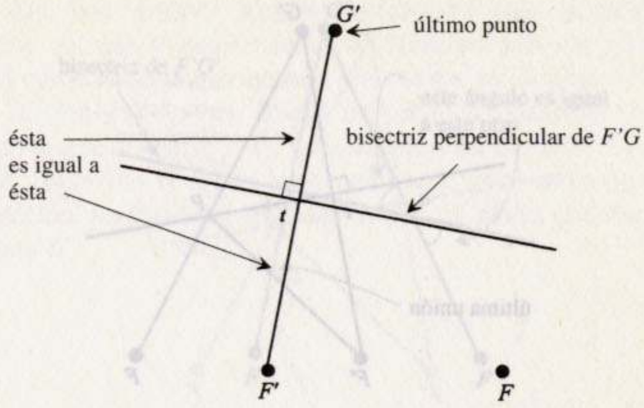
Partiendo de F', trazamos una recta en cualquier dirección:



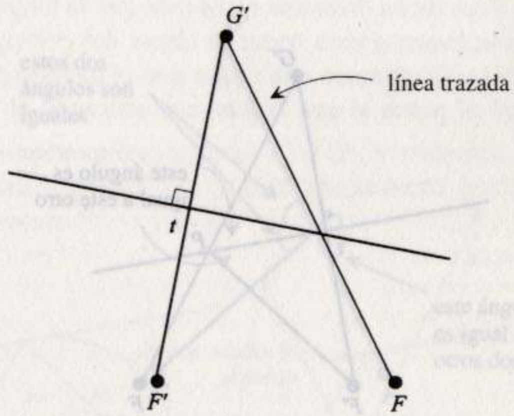
Dibujemos ahora un punto t y tracemos una perpendicular que pase por él. El punto t estará alejado de F' lo suficiente para que la perpendicular no pase entre F y F':



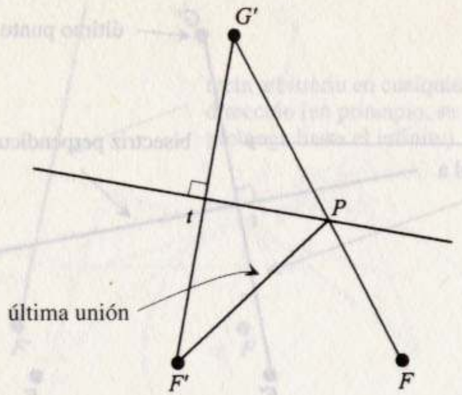
Dibujemos en la recta arbitraria un punto G' tal que $F't$ sea igual a tG'. La perpendicular que trazamos será pues la bisectriz de $F'G'$:



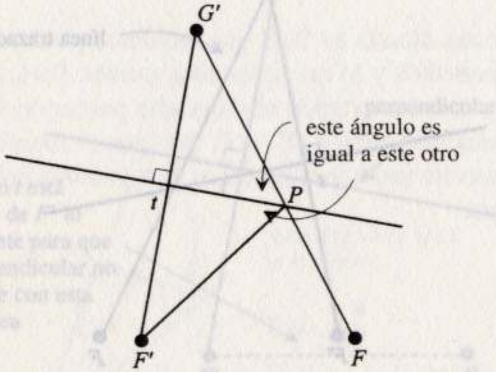
Tracemos ahora una recta que una G' con F:



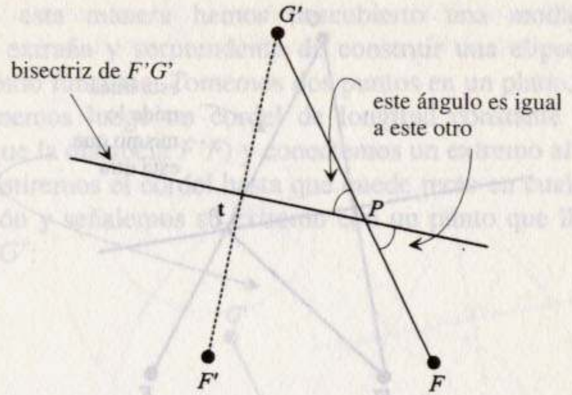
Llamemos P al punto donde esta última línea se cruza con la bisectriz perpendicular y tracemos la línea que une P con F':



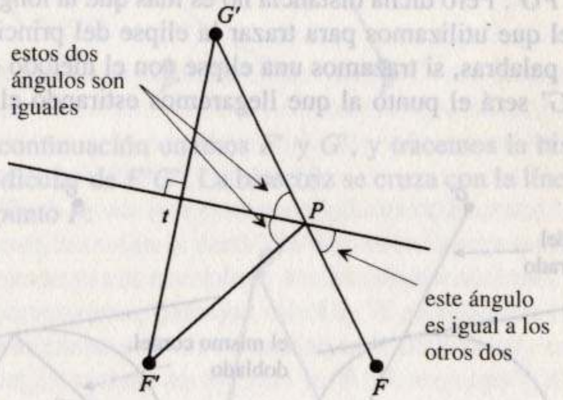
Los dos triángulos son congruentes, lo mismo que antes; luego los ángulos *F'Pt* y *G'Pt* son iguales:



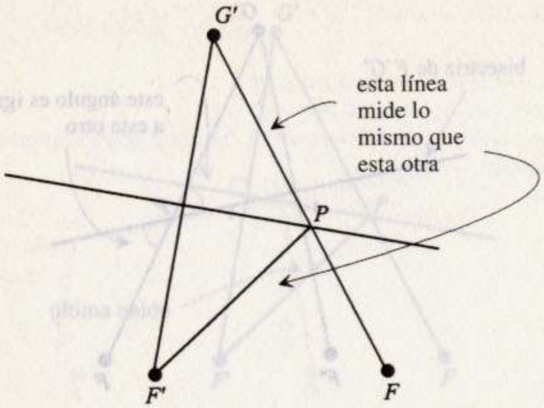
Y el ángulo *G'Pt* es asimismo igual al ángulo opuesto que se forma cuando *G'PF* se cruza con la bisectriz (cuando dos rectas se cruzan, los ángulos opuestos son siempre iguales):



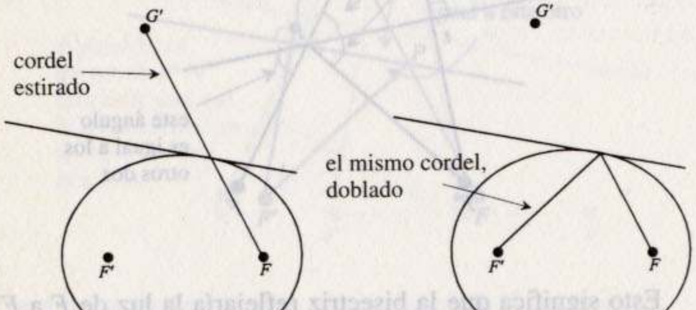
Por lo tanto, todos estos ángulos son iguales:



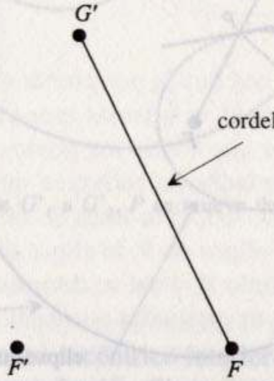
Esto significa que la bisectriz reflejaría la luz de *F* a *F'* en el punto *P* (pues en ese punto el ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales). Más aún: la línea *FPG'* tiene una propiedad realmente espectacular que podemos ver volviendo a los triángulos congruentes:



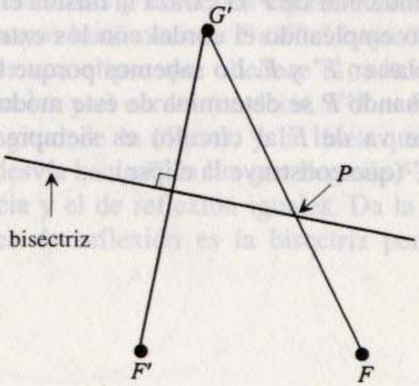
A causa de la congruencia de los triángulos, la longitud $F'P$ es la misma que la longitud $G'P$. De aquí se sigue que la distancia de F' a P y de aquí a F es la misma que la de la recta FG'. Pero dicha distancia no es más que la longitud del cordel que utilizamos para trazar la elipse del principio. En otras palabras, si trazamos una elipse con el método del cordel, G' será el punto al que llegaremos estirando el cordel.



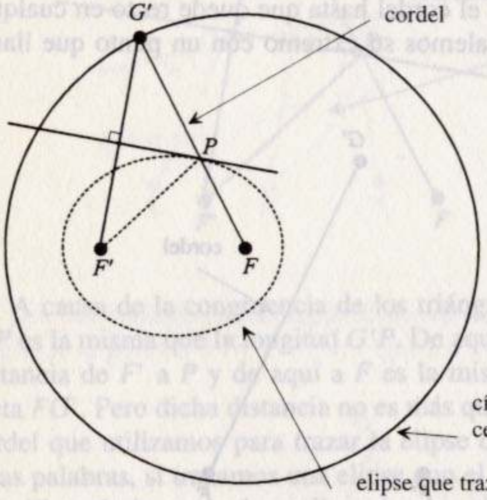
De esta manera hemos descubierto una modalidad nueva, extraña y sorprendente de construir una elipse. He aquí cómo funciona. Tomemos dos puntos en un plano, F' y F. Tomemos luego un cordel de longitud constante (más largo que la distancia $F'F$) y conectemos un extremo al punto F. Estiremos el cordel hasta que quede recto en cualquier dirección y señalemos su extremo con un punto que llamaremos G':



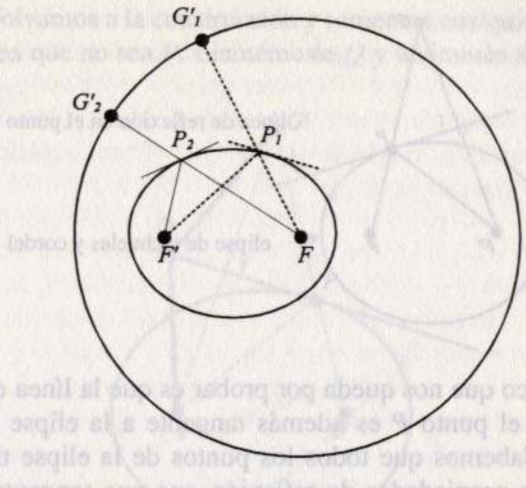
A continuación unamos F' y G', y tracemos la bisectriz perpendicular de $F'G'$. La bisectriz se cruza con la línea FG' en un punto P:



Hagamos ahora que el punto *G'* del extremo del cordel se mueva trazando un círculo de radio constante, con el centro en *F*:



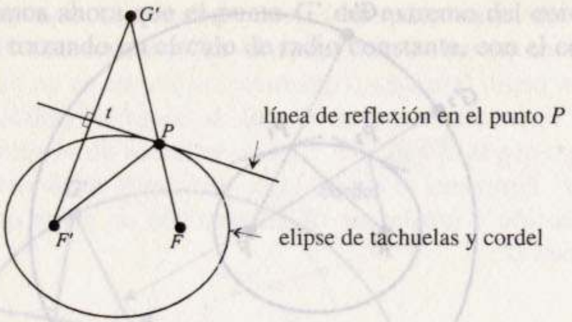
Así pues, el punto *P*, formado por el cruce de *FG'* y la bisectriz perpendicular de *F'G'*, traza la misma elipse que se habría formado empleando el cordel con los extremos sujetos con tachuelas en *F'* y *F*. Lo sabemos porque hemos probado ya que cuando *P* se determina de este modo, la distancia *FPG'* (que va de *F* al círculo) es siempre igual a la distancia *FPF'* (que construye la elipse):



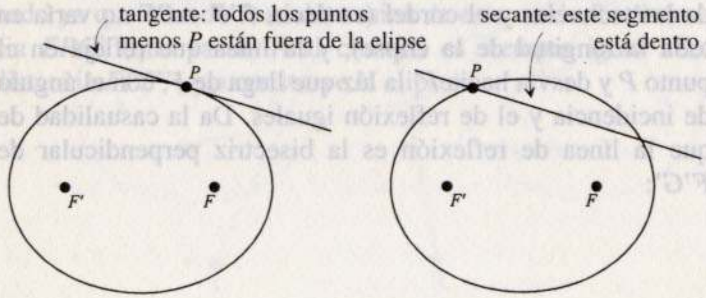
Cuando *G'* se mueve de G'_1 a G'_2, *P* se mueve de P_1 a P_2, trazando la elipse

Así, por cada punto excéntrico interior a un círculo anda al acecho una elipse excéntrica. Sin embargo, aunque esto es muy interesante (y luego nos será muy valioso), no es la propiedad que queríamos probar.

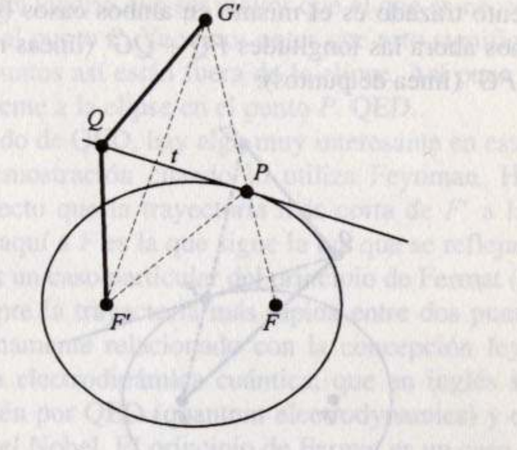
Lo que queríamos probar es que la construcción de la elipse con tachuelas y cordel es equivalente a su propiedad de reflejar rayos luminosos de *F* a *F'*. Lo que tenemos por el momento es una elipse que obedece el método constructor de las tachuelas y el cordel (es decir, $F'P + PF$ no varía en toda la longitud de la elipse), y la línea que refleja en el punto *P* y desvía hacia *F'* la luz que llega de *F*, con el ángulo de incidencia y el de reflexión iguales. Da la casualidad de que la línea de reflexión es la bisectriz perpendicular de *F'G'*:



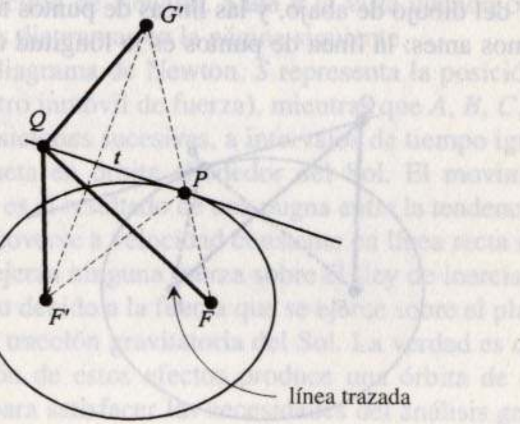
Lo único que nos queda por probar es que la línea de reflexión en el punto P es además tangente a la elipse en el punto P. Sabemos que todos los puntos de la elipse tienen las mismas propiedades de reflexión que una tangente que pase por ese punto. Así, si la línea de reflexión en P es también tangente a la elipse en P, la elipse reflejará la luz de F a F' en cualquier punto P, y así se demuestra que las dos propiedades (método de tachuelas y cordel y luz refleja que va de un foco a otro) son equivalentes. La prueba se hace mostrando que, aunque el punto P está (por construcción) a la vez en la línea y en la elipse, todos los demás puntos de la línea quedarán fuera de la elipse. Es la propiedad característica de las tangentes a las curvas: que tocan la curva en un punto sin cortarla. Si la línea cortara la elipse en P, parte de la línea quedaría forzosamente dentro de la elipse:



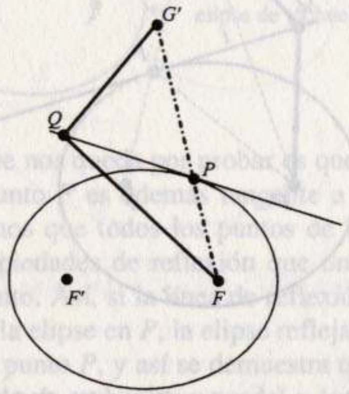
Volvamos a la construcción y tomemos cualquier punto de la línea que no sea P. Llamémosle Q y unámoslo a F' y a G':



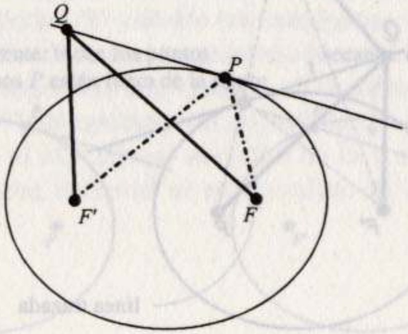
Se verá fácilmente que las distancias $F'Q$ y $G'Q$ son iguales (PQ es la bisectriz de $F'G'$, los triángulos $F'tQ$ y $G'tQ$ son congruentes, etc., QED). Tracemos ahora la línea QF:



La distancia de F' a Q y a F es igual a la distancia de G' a Q y a F; lo sabemos porque sabemos que los primeros segmentos trazados ($F'Q$ y $G'Q$) son iguales y que el segundo segmento trazado es el mismo en ambos casos (QF). Comparemos ahora las longitudes $FQ + QG'$ (líneas negras) con $FP + PG'$ (línea de puntos):



Evidentemente, FPG' es más corta, porque es una línea recta, y la línea recta es la distancia más corta entre dos puntos. Pero acabamos de ver que las líneas negras $G'QF$ del dibujo de arriba tienen la misma longitud que las líneas negras $F'QF$ del dibujo de abajo, y las líneas de puntos también (ya lo vimos antes: la línea de puntos es la longitud del cordel):



Hemos probado que las líneas negras son más largas que las de puntos. En otras palabras: si queremos llegar al punto Q con un cordel sujeto por los extremos con tachuelas en F' y F, el cordel tendría que ser mayor que el que se necesitaba para llegar al punto P. Ya vimos antes que esto significa que todos los puntos así están fuera de la elipse. Así pues, la línea es tangente a la elipse en el punto P. QED.

Hablando de QED, hay algo muy interesante en este método de demostración cuando lo utiliza Feynman. Hemos visto en efecto que la trayectoria más corta de F' a la tangente y de aquí a F es la que sigue la luz que se refleja en el punto P. Es un caso particular del principio de Fermat (la luz sigue siempre la trayectoria más rápida entre dos puntos) y está estrechamente relacionado con la concepción feynmaniana de la electrodinámica cuántica, que en inglés se conoce también por QED (quantum electrodynamics) y que le hizo ganar el Nobel. El principio de Fermat es un caso particular del principio de mínima acción.

De todos modos, Feynman nos ha contado ya todo lo que necesitábamos saber sobre la elipse. A continuación pasa a la dinámica, esto es, a las fuerzas y a los movimientos que resultan de ellas. El diagrama que Feynman dibujó en sus apuntes para la conferencia está copiado directamente de los *Principia* de Newton. Salta a la vista cuando cotejamos los dos diagramas en la página siguiente.

En el diagrama de Newton, S representa la posición del Sol (el centro inmóvil de fuerza), mientras que A, B, C, D, E y F son posiciones sucesivas, a intervalos de tiempo iguales, de un planeta en órbita alrededor del Sol. El movimiento del planeta es el resultado de una pugna entre la tendencia del planeta a moverse a velocidad constante en línea recta mientras no se ejerza ninguna fuerza sobre él (ley de inercia) y el movimiento debido a la fuerza que se ejerce sobre el planeta, es decir, la tracción gravitatoria del Sol. La verdad es que la combinación de estos efectos produce una órbita de curva lisa, pero para satisfacer las necesidades del análisis geomé-

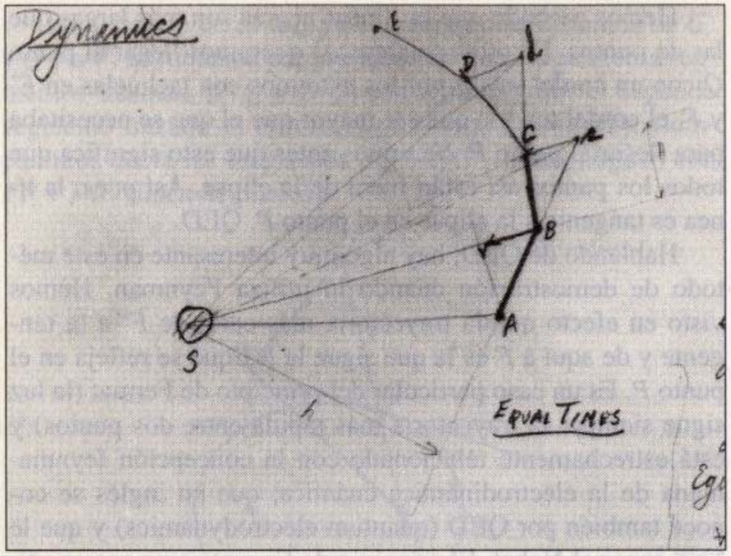


Diagrama de Feynman

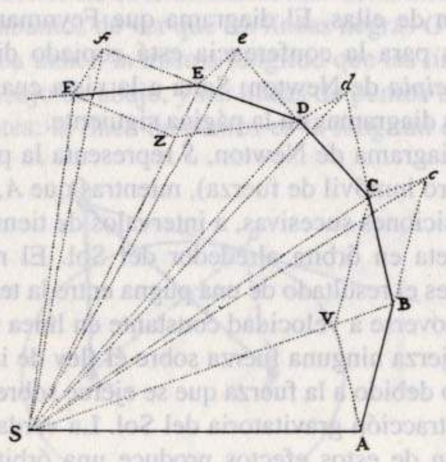
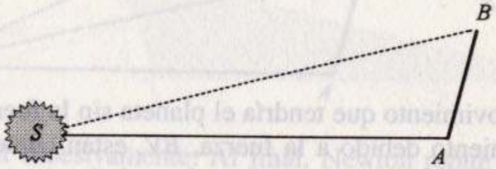
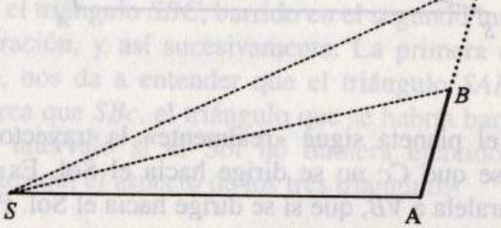


Diagrama de Newton.

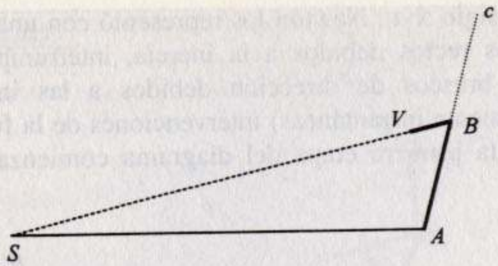
trico del siglo XVII, Newton los representó con una serie de segmentos rectos debidos a la inercia, interrumpidos por cambios bruscos de dirección debidos a las impulsivas (esencialmente instantáneas) intervenciones de la fuerza solar. Así, la primera etapa del diagrama comienza de este modo:



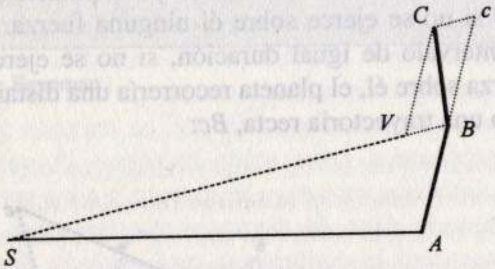
En determinado intervalo de tiempo el planeta se moverá de *A* a *B* si no se ejerce sobre él ninguna fuerza. En el siguiente intervalo de igual duración, si no se ejerciera ninguna fuerza sobre él, el planeta recorrería una distancia igual siguiendo una trayectoria recta, *Bc*:



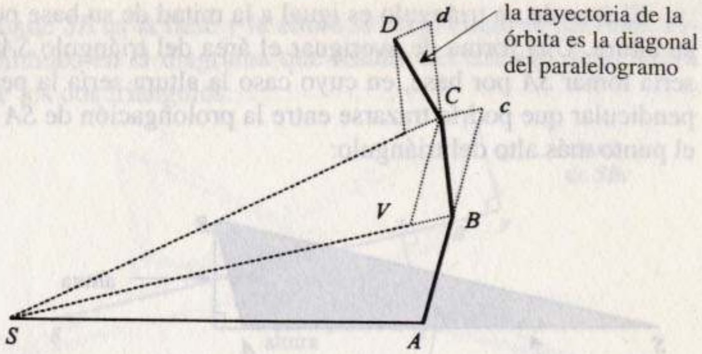
Sin embargo, la fuerza del Sol (que se ejerce de manera continua) se representa mediante un impulso ejercido en el punto *B*, que se traduce en un componente de movimiento dirigido hacia el Sol, *BV*:



El movimiento que tendría el planeta sin la fuerza, *Bc*, y el movimiento debido a la fuerza, *BV*, están contenidos en un paralelogramo; su diagonal es el movimiento «real»:

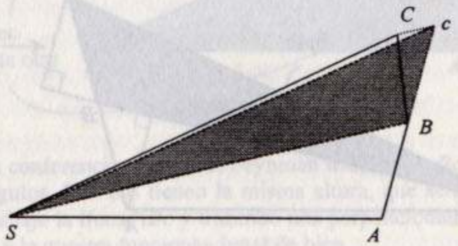


Así, el planeta sigue «realmente» la trayectoria *ABC*. Adviértase que *Cc* no se dirige hacia el Sol. Es rigurosamente paralela a *VB*, que sí se dirige hacia el Sol. Por cierto, todos estos puntos están en un plano; tres puntos cualesquiera, *S*, *A*, *B*, definen un plano. El segmento *BV* se encuentra en el mismo plano, porque está en la línea *BS*. El segmento *Bc* está en el plano porque prolonga la línea *AB*. La línea *BC* está en el plano porque es la diagonal del paralelogramo formado por *BV* y *Bc*. El mismo procedimiento se repite en cada punto, de modo que la siguiente etapa tiene este aspecto:

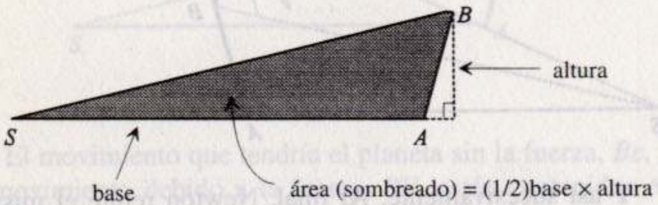


Y así sucesivamente. Al final, Newton repite el mismo análisis para intervalos de tiempo decrecientes, y la trayectoria resultante, *ABCD*..., se aproxima arbitrariamente a una órbita lisa, sobre la que se ejercen a la vez y de manera continua la inercia y la fuerza del Sol. La órbita está siempre en un solo plano.

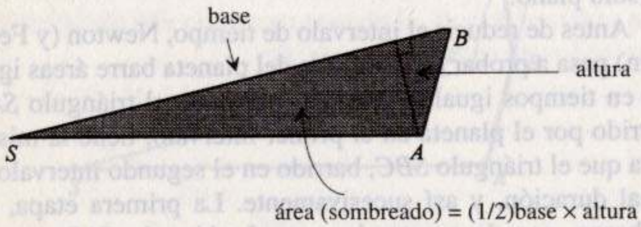
Antes de reducir el intervalo de tiempo, Newton (y Feynman) pasa a probar que la órbita del planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. En otras palabras: el triángulo *SAB*, barrido por el planeta en el primer intervalo, tiene la misma área que el triángulo *SBC*, barrido en el segundo intervalo de igual duración, y así sucesivamente. La primera etapa, sin embargo, nos da a entender que el triángulo *SAB* tiene la misma área que *SBc*, el triángulo que se habría barrido en el segundo intervalo si el Sol no hubiera ejercido ninguna fuerza. He aquí el aspecto de los tres triángulos:



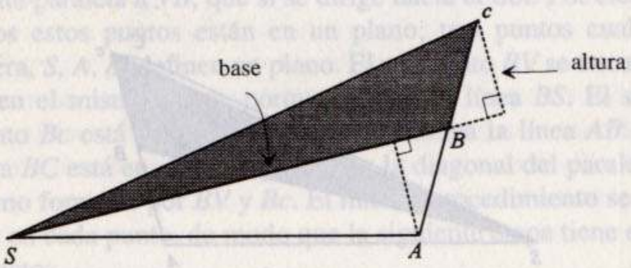
El área de un triángulo es igual a la mitad de su base por su altura. Una forma de averiguar el área del triángulo *SAB* sería tomar *SA* por base, en cuyo caso la altura sería la perpendicular que podría trazarse entre la prolongación de *SA* y el punto más alto del triángulo:



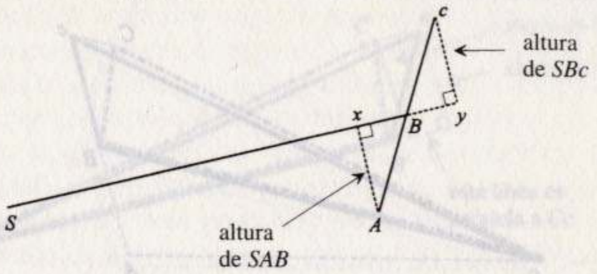
Obtenemos el mismo resultado si tomamos *SB* por base y trazamos la altura así:



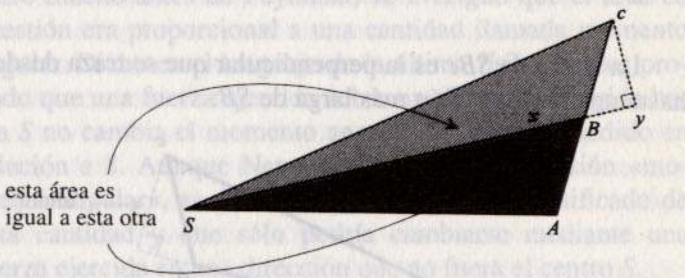
Comparemos ahora esta área con el área de *SBc*,



donde *SB* es la base y la altura se traza como se ha visto. Fijémonos en el diagrama que resulta del trazado de la altura de los dos triángulos:



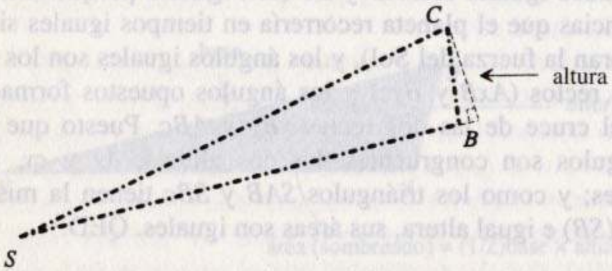
Llamemos por el momento *x* e *y* a los rincones donde se han formado ángulos rectos. Los triángulos *ABx* y *cBy* son congruentes porque tienen un lado y dos ángulos iguales. Los lados iguales son *AB* y *Bc* (son iguales porque son las distancias que el planeta recorrería en tiempos iguales si no sintieran la fuerza del Sol), y los ángulos iguales son los ángulos rectos (*AxB* y *Byc*) y los ángulos opuestos formados por el cruce de las dos rectas *xBy* y *ABc*. Puesto que los triángulos son congruentes, las dos alturas, *Ax* y *cy*, son iguales; y como los triángulos *SAB* y *SBc* tienen la misma base (*SB*) e igual altura, sus áreas son iguales. QED.[1]



1. En la conferencia, pág. 166, Feynman toma *AB* y *Bc* por bases de los dos triángulos. Los dos tienen la misma altura, que se forma prolongando hacia abajo la línea *ABc* y trazando una perpendicular que pase por *S*. Su prueba y la nuestra funcionan igual de bien.

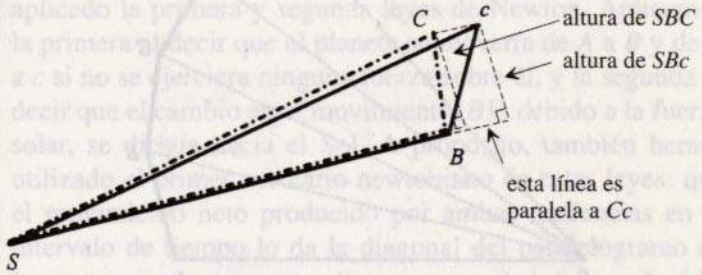
A continuación (siguiendo a Newton y a Feynman) demostramos que el área de *SBc* (líneas negras) es también igual al área de *SBC* (líneas discontinuas):

Los dos triángulos tienen la misma base, *SB*. La altura de *SBC* es la perpendicular que se traza desde *C* hasta la prolongación de *SB*:



La altura de *SBc* es la perpendicular que se traza desde *c* hasta una prolongación más larga de *SB*:

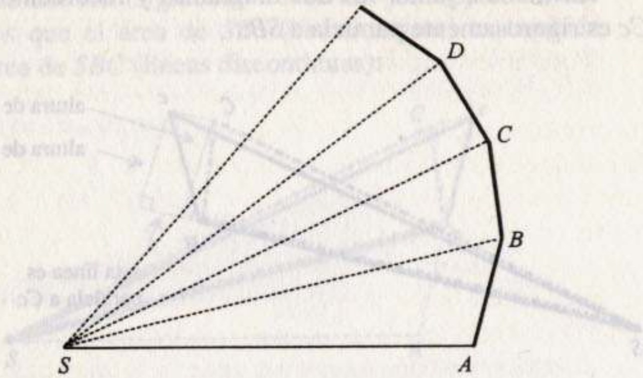
Volvamos a juntar los dos diagramas y recordemos que *Cc* es rigurosamente paralela a *SB*:



Las dos alturas son perpendiculares que unen dos paralelas y, por tanto, son iguales. Así pues, los triángulos *SBC* y *SBc* tienen la misma base e iguales alturas, y por lo tanto la misma área. Una vez más, QED.

Aparte de ser una geometría preciosa, la última prueba es muy importante en física. Si no se ejerciera ninguna fuerza en absoluto, la trayectoria del planeta sería *Bc*. Pero hay una fuerza, dirigida hacia *S*. Esta fuerza hace que se cambie la trayectoria *Bc* por *BC*, pero no cambia las áreas barridas en un tiempo dado. Tiempo después de Newton (pero mucho antes de Feynman) se averiguó que el área en cuestión era proporcional a una cantidad llamada momento angular. Dicho en el lenguaje de la última física, hemos probado que una fuerza ejercida sobre un planeta y dirigida hacia *S* no cambia el momento angular del planeta medido en relación a *S*. Aunque Newton no utilizó la expresión «momento angular», es evidente que entendió el significado de esta cantidad y que sólo podría cambiarse mediante una fuerza ejercida en una dirección que no fuera el centro *S*.

En cualquier caso, hemos demostrado ya que el área de *SAB* es igual al área de *SBc*, y que el área de *SBc* es igual al área de *SBC*. De aquí se sigue que *SAB* y *SBC* tienen la misma área. Si volvemos al primer diagrama de esta última serie,



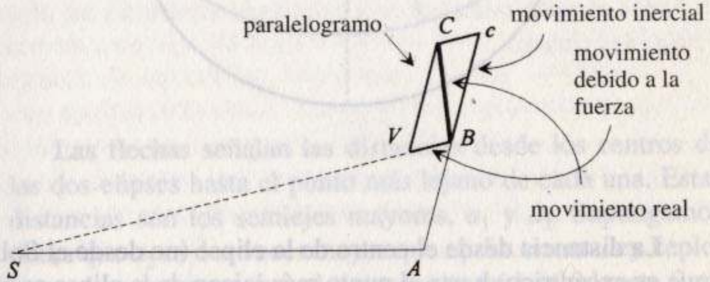
salta a la vista que podríamos aplicar los mismos argumentos a los triángulos siguientes, *SCD*, *SDE*, etc. Son los triángulos barridos por el planeta en tiempos iguales. De este modo hemos probado la segunda ley kepleriana del movimiento planetario: que un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

Ya que sabemos adónde hemos llegado, vale la pena volver atrás y ver cómo hemos llegado. ¿Qué había que saber en concreto de dinámica (es decir, de las fuerzas y de los movimientos que generan) para llegar tan lejos?

La respuesta es la siguiente: hemos aplicado la primera ley de Newton (ley de la inercia), la segunda ley de Newton (cualquier cambio de movimiento se verifica en la dirección de la fuerza ejercida) y la idea de que la fuerza gravitatoria sobre el planeta se dirige hacia el Sol. Nada más. Por ejemplo, no hemos aplicado la idea de que la fuerza de la gravedad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Así pues, el carácter «inverso cuadrático» no tiene nada que ver con la segunda ley de Kepler. Cualquier otra fuerza produciría el mismo resultado, con la única condición de que se dirigiera hacia el Sol. Lo que hemos aprendido es que si la primera y segunda leyes de Newton son ciertas, la observación kepleriana de que los planetas barren áreas iguales en

tiempos iguales significa que la fuerza de gravedad ejercida sobre el planeta se dirige hacia el Sol.

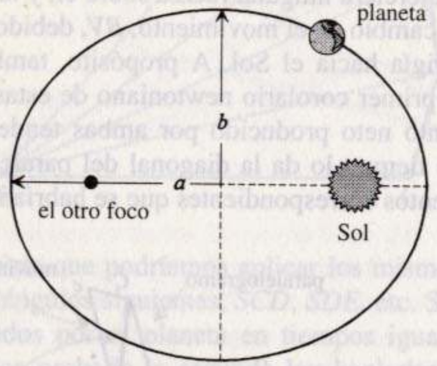
Podríamos preguntarnos en qué momento exacto hemos aplicado la primera y segunda leyes de Newton. Aplicamos la primera al decir que el planeta se movería de *A* a *B* y de *B* a *c* si no se ejerciera ninguna fuerza sobre él, y la segunda al decir que el cambio en el movimiento, *BV*, debido a la fuerza solar, se dirigía hacia el Sol. A propósito, también hemos utilizado el primer corolario newtoniano de estas leyes: que el movimiento neto producido por ambas tendencias en el intervalo de tiempo lo da la diagonal del paralelogramo de los movimientos correspondientes que se habrían producido:



En este punto de la charla, dice Feynman que «la prueba que acabáis de ver es una reproducción exacta de la que figura en los *Principia Mathematica* de Newton», pero añade que no pudo ir más allá con la argumentación newtoniana y que «inventó» el resto de la prueba de la ley de las elipses. Antes de pasar a la prueba de Feynman, introduzcamos otro argumento que baraja al principio de su conferencia: ¿dónde entra la ley de la inversa del cuadrado?

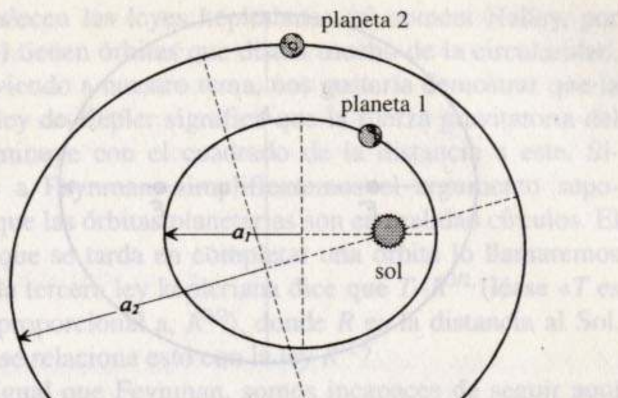
La proporcionalidad inversa al cuadrado de la distancia (en lo sucesivo R^{-2}) de la gravedad se deduce de la tercera ley de Kepler, que dice que el tiempo que tarda un planeta en completar una órbita (es decir, un año de la vida del planeta) es proporcional a la potencia 3/2 de la distancia planetaria al

Sol. En realidad, puesto que las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en un foco, un planeta dado no siempre está a la misma distancia del Sol:



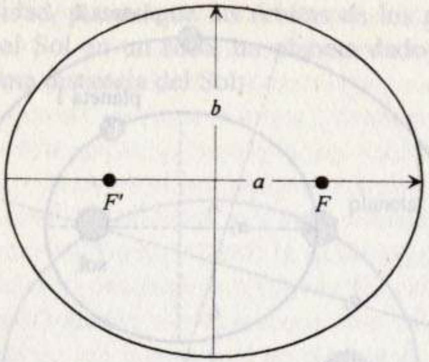
La distancia desde el centro de la elipse (no desde el Sol, que es excéntrico) hasta el punto más lejano de la elipse es el semieje mayor, y lo llamaremos *a* (el eje más corto, que llamaremos *b*, es el semieje menor). El semieje mayor se denomina así porque es la mitad del eje más largo de la elipse. La tercera ley de Kepler dice que el tiempo que tarda un planeta en completar una órbita es proporcional a la potencia 3/2 de *a*, el semieje mayor.

Para asegurarnos de que el significado de esta afirmación está claro, imaginemos un sol alrededor del cual evolucionan dos planetas (o un planeta con dos satélites a su alrededor, ya que se seguiría la misma ley):

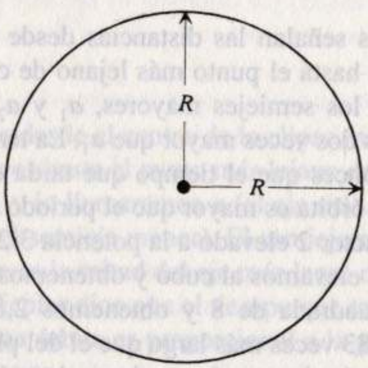


Las flechas señalan las distancias desde los centros de las dos elipses hasta el punto más lejano de cada una. Estas distancias son los semiejes mayores, a_1 y a_2. Supongamos ahora que a_2 es dos veces mayor que a_1. La tercera ley kepleriana dice entonces que el tiempo que tarda el planeta 2 en completar una órbita es mayor que el periodo orbital del planeta 1 en un factor 2 elevado a la potencia 3/2; es decir: partiendo de 2, lo elevamos al cubo y obtenemos 8, luego sacamos la raíz cuadrada de 8 y obtenemos 2,83. El año del planeta 2 es 2,83 veces más largo que el del planeta 1.

Esta ley sería cierta, y la conducta de todos los planetas sería mucho más sencilla (aunque mucho menos interesante), si Platón hubiera tenido razón y las órbitas planetarias fueran círculos perfectos. Un círculo puede considerarse una elipse particularmente sencilla. Partiendo de una elipse,



se puede construir un círculo desplazando los dos focos, *F'* y *F*, hacia el centro:



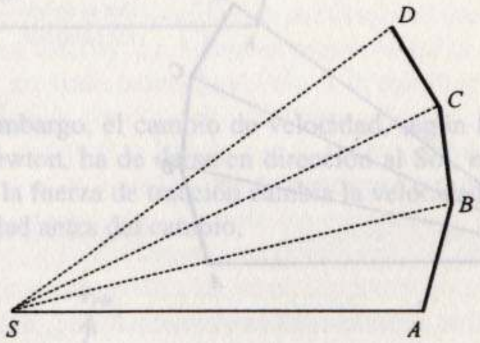
El semieje mayor *a* tendrá así la misma longitud que el semieje menor *b*, y podremos llamar a los dos *R*. Adviértase que, puesto que un círculo es una elipse (un caso especial de elipse, para ser exactos), las leyes keplerianas permiten que las órbitas planetarias sean círculos, pero no lo exigen. En realidad, las órbitas de los planetas de nuestro sistema solar son casi (pero no totalmente) circulares, pero otros objetos

que obedecen las leyes keplerianas (el cometa Halley, por ejemplo) tienen órbitas que distan mucho de la circularidad.

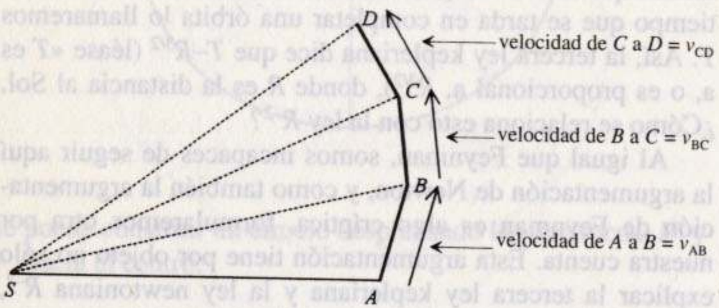
Volviendo a nuestro tema, nos gustaría demostrar que la tercera ley de Kepler significa que la fuerza gravitatoria del Sol disminuye con el cuadrado de la distancia a este. Siguiendo a Feynman, simplificaremos el argumento suponiendo que las órbitas planetarias son en realidad círculos. El tiempo que se tarda en completar una órbita lo llamaremos *T*. Así, la tercera ley kepleriana dice que $T{\sim}R^{3/2}$ (léase «*T* es a, o es proporcional a, $R^{3/2}$), donde *R* es la distancia al Sol. ¿Cómo se relaciona esto con la ley R^{-2}?

Al igual que Feynman, somos incapaces de seguir aquí la argumentación de Newton, y como también la argumentación de Feynman es algo críptica, formularemos otra por nuestra cuenta. Esta argumentación tiene por objeto no sólo explicar la tercera ley kepleriana y la ley newtoniana R^{-2}, sino también introducir algunas técnicas geométricas que necesitaremos en la apoteosis final.

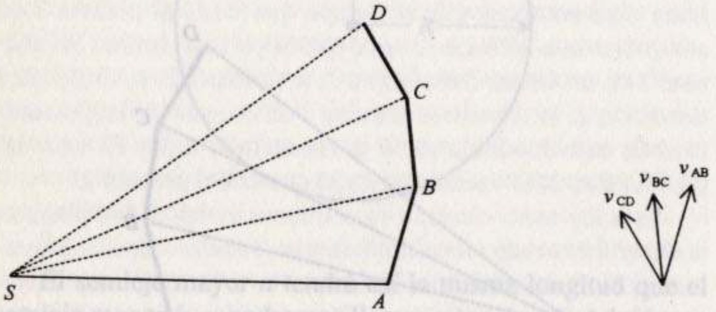
El diagrama que nosotros (y Feynman) hemos copiado de Newton muestra posiciones sucesivas de un planeta en el espacio:



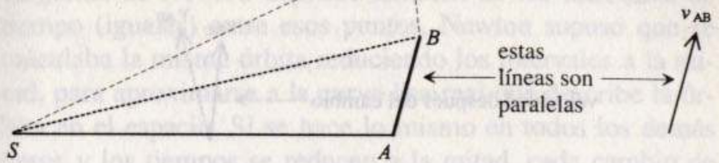
Empleando tiempos iguales, el planeta se mueve de *A* a *B*, de *B* a *C*, etc. También podemos representar en el diagrama la velocidad del planeta durante cada segmento (debido a la inercia, el planeta pasa de A a B a velocidad constante, de B a C a velocidad constante, etc.). La velocidad puede representarse por una flecha que apunte en la dirección del movimiento (recordemos que, en física, velocidad significa rapidez y dirección):



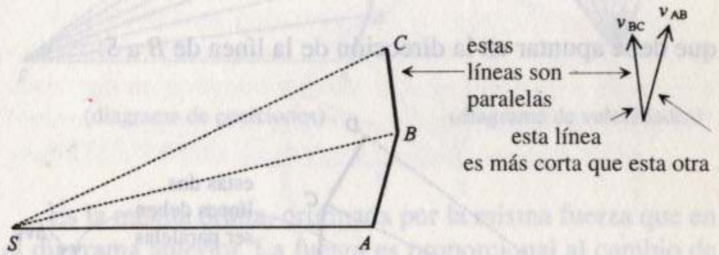
No hay razón para que las flechas de la velocidad se tracen junto al correspondiente segmento de la órbita; las podemos poner juntas al lado, con un origen común:



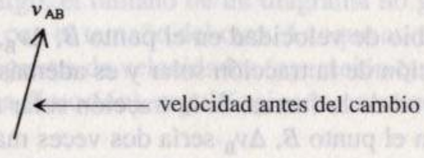
El nuevo diagrama es un diagrama de velocidades y no de posiciones. La dirección de la flecha señala la dirección del movimiento del planeta, de modo que v_{AB} tiene que ser paralela a AB,



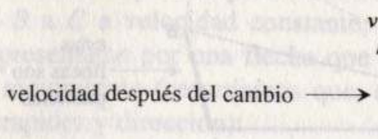
y la longitud de la flecha es proporcional a la aceleración. En otras palabras, cuanto más aprisa se mueva el planeta en ese tramo, más larga será la flecha. Si el planeta se mueve en el segmento de B a C más despacio que de A a B, podríamos dibujar un diagrama así:



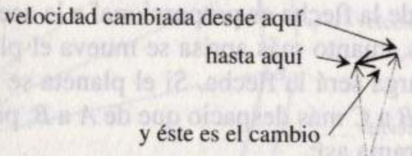
Sin embargo, el cambio de velocidad, según la segunda ley de Newton, ha de darse en dirección al Sol, en el punto B, donde la fuerza de tracción cambia la velocidad: Si v_{AB} es la velocidad antes del cambio,



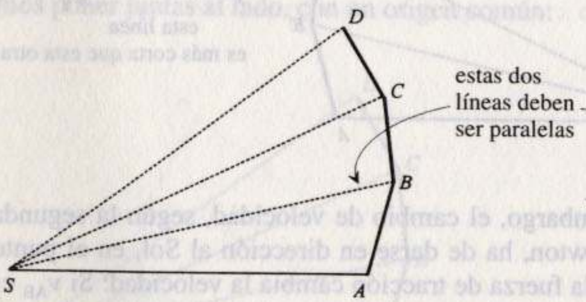
y v_{BC} es la velocidad después del cambio,



entonces el cambio de velocidad es también una flecha



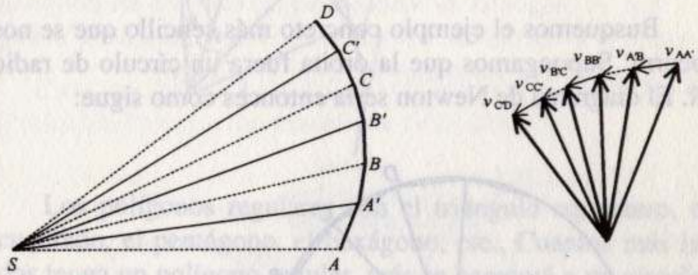
que debe apuntar en la dirección de la línea de B a S:



(diagrama de posiciones) (diagrama de velocidades)

El cambio de velocidad en el punto B, Δv_B, se hace pues en la dirección de la tracción solar y es además proporcional a la magnitud de la fuerza. Si la tracción solar fuera el doble de fuerte en el punto B, Δv_B sería dos veces mayor. Tal es el significado de la segunda ley de Newton. El cambio de velo-

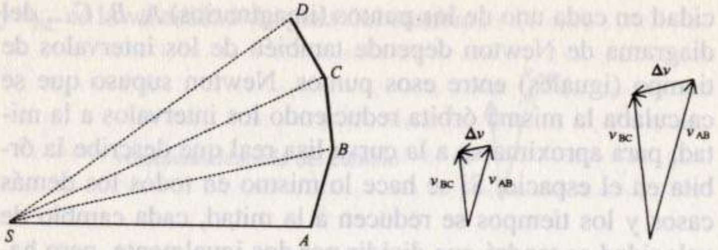
cidad en cada uno de los puntos (imaginarios) A, B, C… del diagrama de Newton depende también de los intervalos de tiempo (iguales) entre esos puntos. Newton supuso que se calculaba la misma órbita reduciendo los intervalos a la mitad, para aproximarse a la curva lisa real que describe la órbita en el espacio. Si se hace lo mismo en todos los demás casos y los tiempos se reducen a la mitad, cada cambio de velocidad se tendrá que dividir por dos igualmente, pero habrá el doble de cambios:



(diagrama de posiciones) (diagrama de velocidades)

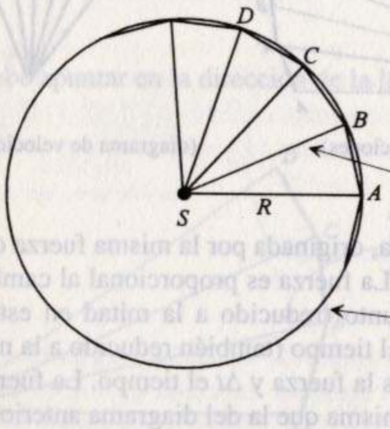
Es la misma órbita, originada por la misma fuerza que en el diagrama anterior. La fuerza es proporcional al cambio de velocidad en cada punto (reducido a la mitad en este diagrama) dividido por el tiempo (también reducido a la mitad): $F \sim \Delta v/\Delta t$, donde F es la fuerza y Δt el tiempo. La fuerza, en este diagrama, es la misma que la del diagrama anterior.

Como hemos visto, hay una correspondencia real de las direcciones entre el diagrama de posiciones y el de velocidades. Sin embargo, el tamaño de un diagrama no guarda ninguna relación con el tamaño del otro. Aunque aumentáramos el doble el diagrama de velocidades (operación que no modificaría ninguna dirección), seguiría siendo correcto:



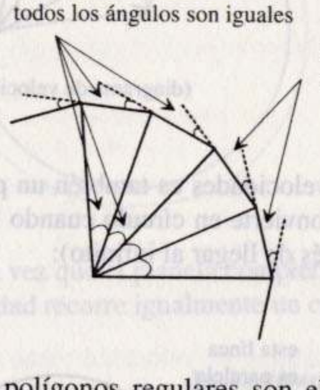
los dos diagramas de velocidades son correctos

Busquemos el ejemplo concreto más sencillo que se nos ocurra. Supongamos que la órbita fuera un círculo de radio *R*. El diagrama de Newton sería entonces como sigue:

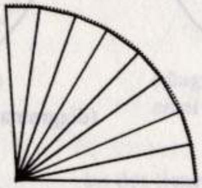


Todas las distancias (*SA*, *SB*, *SC*, etc.) serían iguales a *R*, el radio del círculo. Además, los cambios de velocidad debidos a la fuerza de tracción en *A*, *B*, *C*, *D*, etc., serían iguales al margen de que la fuerza solar dependa de la distancia, dado que todos los puntos en cuestión están a la misma distancia del Sol. Se sigue de aquí que las aceleraciones en *AB*, *BC*, etc., tienen que ser iguales, y que las longitudes de los segmentos *AB*, *BC*, etc., también son iguales. Es la única

forma de que el planeta siga siempre la misma trayectoria, una y otra vez. En otras palabras: la figura dibujada por Newton es un polígono regular, una figura con los lados y los ángulos iguales, inscrito en un círculo, que es la órbita real.

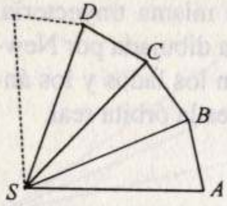


Los polígonos regulares son el triángulo equilátero, el cuadrado, el pentágono, el hexágono, etc., Cuantos más lados tenga un polígono regular, más se parecerá a un círculo. Newton imaginó que empleaba tiempos menores en su diagrama, que obtenía un polígono regular con más lados

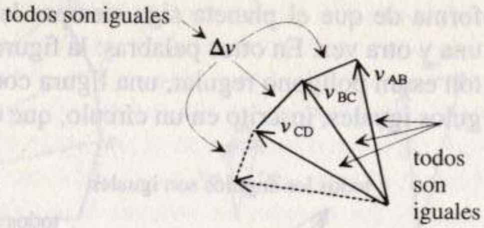


y que se iba aproximando al círculo real, en el infinito, hasta obtener la órbita real.

En el diagrama de velocidades de una órbita circular, todas las velocidades tienen la misma longitud y están separadas por los mismos ángulos, de modo que todos los cambios Δv son iguales:

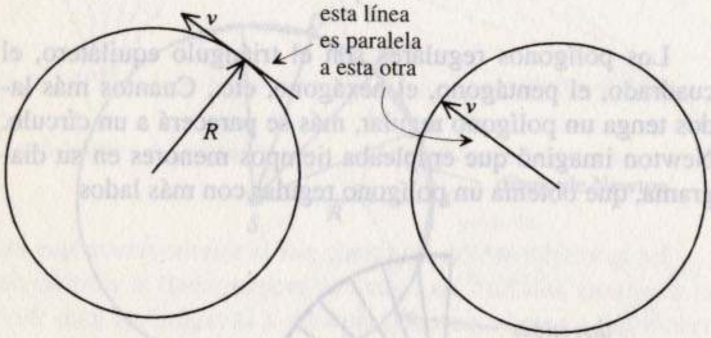


(diagrama de la órbita)



(diagrama de velocidades)

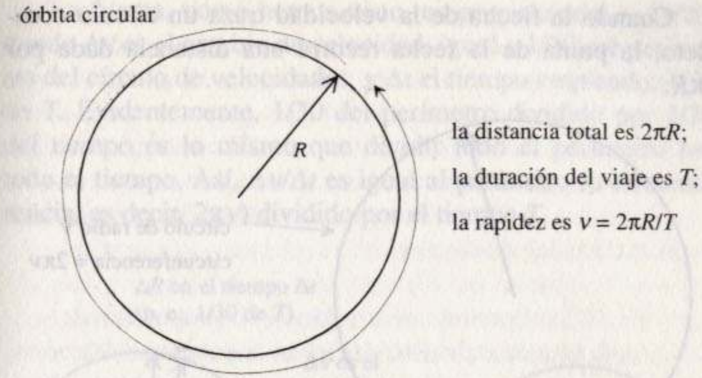
Así, el diagrama de velocidades es también un polígono regular, que además se convierte en círculo cuando la órbita se vuelve circular (después de llegar al infinito):



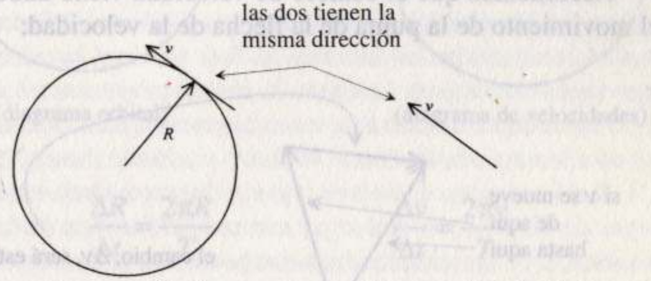
(órbita circular)

(diagrama de velocidades circulares)

El radio del círculo, en el diagrama de velocidades, es v, la rapidez uniforme del planeta en toda la órbita. Esta rapidez viene dada por la distancia que recorre el planeta dividida por el tiempo que tarda. La distancia recorrida por el planeta es la longitud de la circunferencia orbital, es decir, $2\pi R$, y el tiempo que tarda el planeta en recorrerla es lo que hemos llamado T, el periodo de la órbita. Por lo tanto, v es igual a $2\pi R/T$.

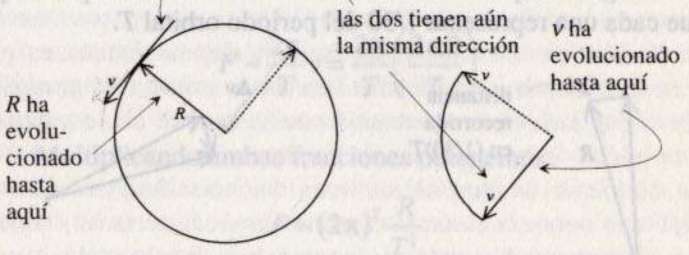


Cada vez que el planeta completa una órbita, la flecha de la velocidad recorre igualmente un ciclo completo:



(diagrama orbital)

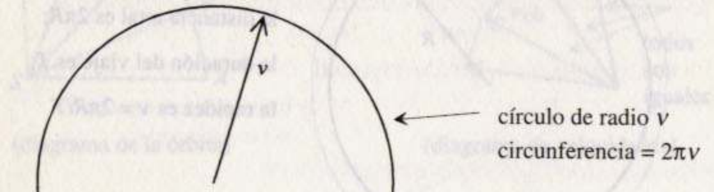
(diagrama de velocidades en el mismo instante)



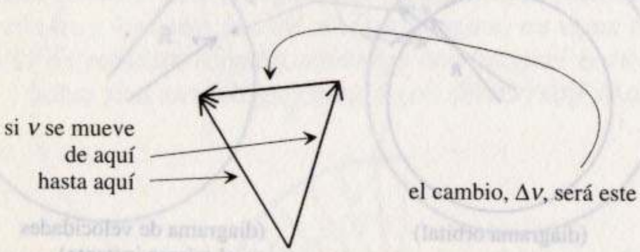
(diagrama orbital más tarde)

(diagrama de velocidades en el mismo instante)

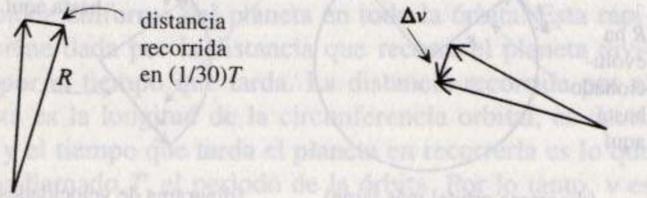
Cuando la flecha de la velocidad traza un círculo completo, la punta de la fecha recorre una distancia dada por $2\pi R$:



Recordemos que el cambio de velocidad viene dado por el movimiento de la punta de la flecha de la velocidad:

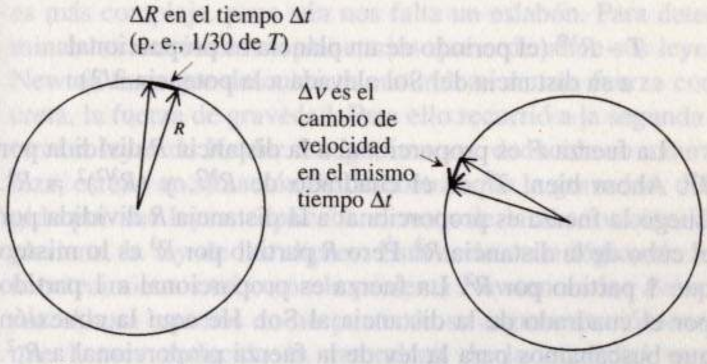


Pongamos que el círculo se ha dividido en 30 partes y que cada una representa 1/30 del periodo orbital T.



(diagrama orbital) (diagrama de velocidades)

La fuerza, como hemos visto, es proporcional a $\Delta v/\Delta t$, donde Δv es el cambio de velocidad, igual a 1/30 del perímetro del círculo de velocidades, y Δt el tiempo empleado, 1/30 de T. Evidentemente, 1/30 del perímetro dividido por 1/30 del tiempo es lo mismo que dividir todo el perímetro por todo el tiempo. Así, $\Delta v/\Delta t$ es igual al perímetro (o circunferencia, es decir, $2\pi v$) dividido por el tiempo T.



(diagrama orbital) (diagrama de velocidades)

$$\frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{2\pi R}{T} \qquad \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\pi v}{T}$$

Así, la fuerza F es proporcional a $2\pi v/T$, y la velocidad v es igual a $2\pi R/T$. Algebraicamente:

$$F \sim \frac{2\pi}{T} v = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{2\pi R}{T}\right)$$

Multiplicando ambas fracciones obtenemos

$$F \sim (2\pi)^2 \frac{R}{T^2}$$

Esto significa, por ejemplo, que si hubiera un planeta que distara el doble del Sol (que estuviera a una distancia $2R$ en vez de R) y que completara su órbita en el mismo tiempo, entonces la fuerza de tracción del Sol, que es proporcional a R, tendría que ser el doble de intensa. Sin embargo, los planetas no suelen hacer estas cosas. Hemos visto que si un planeta estuviera en $2R$, su tiempo sería $2{,}83T$. Esto viene dado por la tercera ley de Kepler:

$T \sim R^{3/2}$ (el periodo de un planeta es proporcional a su distancia del Sol elevada a la potencia 3/2)

La fuerza F es proporcional a la distancia R dividida por T^2. Ahora bien, T^2 es el cuadrado de $R^{3/2}$, y $(R^{3/2})^2 = R^3$. Luego la fuerza es proporcional a la distancia R dividida por el cubo de la distancia R^3. Pero R partido por R^3 es lo mismo que 1 partido por R^2. La fuerza es proporcional a 1 partido por el cuadrado de la distancia al Sol. He aquí la conexión que buscábamos para la ley de la fuerza proporcional a R^{-2}.

Antes de continuar, este es un buen sitio para detenernos un momento y ver de dónde venimos y adónde vamos.

Kepler nos ha dado tres leyes y Newton otras tres. Las leyes de Kepler, sin embargo, son muy diferentes de las de Newton. Las leyes keplerianas son generalizaciones de observaciones celestes. Lo que hacen es ajustar una curva, como diríamos hoy. Kepler tomaba unos cuantos puntos en el espacio (las posiciones observadas del planeta Marte en momentos conocidos) y decía: «¡Ajá! Todos estos puntos están contenidos en una línea curva llamada elipse». Esta descripción trivializa la obra de toda la vida de uno de los grandes genios de la historia, pero es bastante exacta. Es la naturaleza básica de las tres leyes de Kepler.

Las leyes de Newton son muy distintas. Son verdaderas hipótesis sobre la naturaleza profunda de la realidad física: las relaciones entre materia, fuerza y movimiento. Si la conducta deducida de estas hipótesis se observa en la naturaleza,

las hipótesis pueden ser ciertas y, si tal es el caso, entonces hemos visto el alma de la naturaleza, o la mente de Dios, según el gusto metafórico de cada cual. En el importantísimo terreno de los movimientos planetarios, la prueba de que las hipótesis newtonianas son ciertas es que den lugar a las leyes de Kepler, las cuales resumen con admirable precisión gran cantidad de datos astronómicos.

La conexión entre leyes newtonianas y leyes keplerianas es más compleja, pues aún nos falta un eslabón. Para determinar los movimientos planetarios que ordenaban sus leyes, Newton tuvo que descubrir la naturaleza de una fuerza concreta, la fuerza de gravedad. Para ello recurrió a la segunda y tercera leyes de Kepler. Luego, una vez deducida su naturaleza, estuvo en situación de demostrar que la gravedad, dirigida por sus leyes, explicaba el resto de la observación kepleriana, la ley de las elipses. Ésta es la serie lógica de los acontecimientos tal como la presenta Newton en los *Principia*. Ahora estamos en un punto de su argumentación en el que hemos deducido la naturaleza de la gravedad recurriendo a las leyes newtonianas y a la segunda y tercera leyes de Kepler. Repasemos cómo lo hemos hecho antes de que se levante el telón y empiece el acto final, la primera ley de Kepler, la ley de las elipses.

Aplicada a los movimientos planetarios, la primera ley de Newton, la ley de la inercia, dice que si sobre un planeta no se ejerce ninguna fuerza, entonces permanecerá en reposo si ya lo estaba o, si estaba en movimiento, viajará eternamente en línea recta a velocidad constante. Por qué es así es un misterio, aunque Newton se refiere a veces al mecanismo llamándolo «fuerza interior» del planeta. Lo que importa de las leyes de Newton, sin embargo, no es por qué son verdaderas, sino sólo si lo son.

La segunda ley de Newton dice que si se ejerce una fuerza F sobre un planeta, su efecto lo desvía de la línea recta que habría seguido a velocidad constante en virtud de la inercia. En concreto, si se ejerce una fuerza durante un tiempo dado Δt, se produce un cambio de velocidad (es decir, una desviación de la trayectoria inercial) Δv, proporcional a la fuerza y en la misma dirección de la fuerza. Esto significa que si ejerce una fuerza doble ($2F$), se producirá un cambio de velocidad doble ($2\Delta v$). También significa que $2\Delta v$ puede obtenerse ejerciendo la misma fuerza el doble de tiempo ($2\Delta t$). Algebraicamente lo escribiríamos $\Delta v \sim F\Delta t$. Lo cual significa a su vez que, si la fuerza apunta al Sol, el cambio de velocidad será hacia el Sol.

La tercera ley de Newton dice que las fuerzas que se ejercen mutuamente las partes de un planeta no generan ninguna fuerza sobre el planeta entero, de modo que para analizar los movimientos planetarios podemos olvidarnos del hecho de que los planetas son cuerpos complejos grandes y tratarlos como si su masa estuviera concentrada en un punto matemático situado en su centro.

La imagen que bosqueja Newton a continuación es la de que el Sol, hipotéticamente inmóvil, ejerce sobre los planetas una fuerza, la gravedad, que los desvía de las rectas inerciales que de otro modo seguirían hacia las órbitas que describen en la realidad.

Una propiedad de estas órbitas reales, descrita por la segunda ley de Kepler, es que la línea hipotética que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales mientras el planeta evoluciona en su órbita. Newton demuestra, como hemos hecho ya nosotros, que el sentido de la observación kepleriana es que la gravedad se ejerce en la dirección de la línea que une el Sol con el planeta.

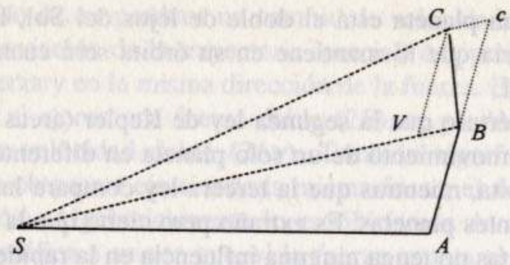
Otra propiedad del movimiento planetario es que cuanto más lejos esté del Sol la órbita de un planeta, más despacio la recorrerá éste. En concreto, el tiempo que tarda el planeta en completar una vuelta aumenta con la potencia 3/2 de la distancia de la órbita al Sol. Newton demuestra, como lo hemos hecho ya nosotros, que para generar este resultado la fuerza desviadora de los planetas debe disminuir proporcionalmente al cuadrado de la distancia al Sol. En otras palabras, si un planeta está el doble de lejos del Sol, la fuerza gravitatoria que lo mantiene en su órbita será cuatro veces más débil.

Adviértase que la segunda ley de Kepler (áreas iguales) trata del movimiento de un solo planeta en diferentes partes de la órbita, mientras que la tercera ley compara las órbitas de diferentes planetas. Es extraño pero cierto que la masa de los planetas no tenga ninguna influencia en la rapidez de sus trayectorias respectivas. Un año (una órbita completa) del planeta Tierra es más corto que un año del planeta Júpiter sólo en proporción a la potencia 3/2 de sus distancias respectivas al Sol, y eso que la masa de Júpiter es más de trescientas veces la de la Tierra.

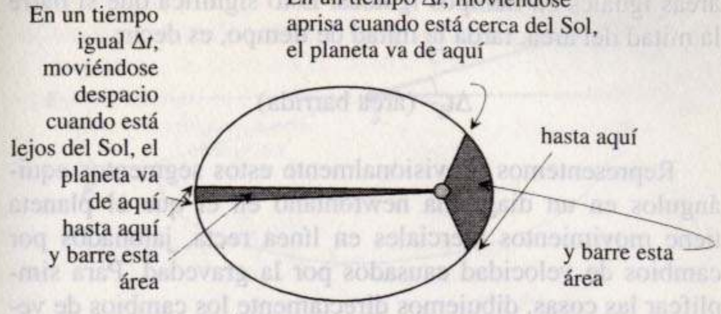
En cualquier caso, sabemos ya que la fuerza ejercida por la gravedad solar sobre un planeta se dirige hacia el Sol, y que su intensidad disminuye proporcionalmente al cuadrado de la distancia al Sol. Hemos empleado para averiguarlo la segunda y tercera leyes de Kepler. La triunfante hazaña final será demostrar que una fuerza como la gravedad, comportándose de acuerdo con las leyes de Newton, hace elípticas las órbitas planetarias.

En la conferencia, éste es el punto en el que Feynman no puede seguir la argumentación de Newton y decide inventar otra. Su primera desviación de Newton se parece mucho a un movimiento brillante e inesperado de un maestro de ajedrez. En vez de dividir la órbita en segmentos imaginarios que representen intervalos de tiempo iguales, como hace Newton, Feynman divide la órbita en segmentos que formen ángulos iguales con centro en el Sol. Tendremos que hacer algunos dibujos para ver qué significa esto.

Recordemos el diagrama de los *Principia* que Feynman copió en sus apuntes para la conferencia:

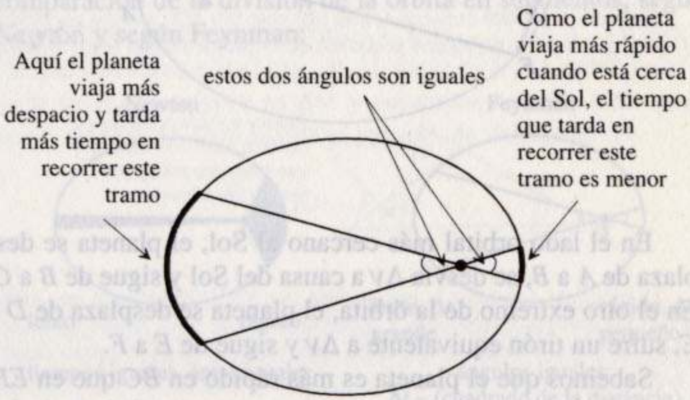


En un tiempo dado, si el Sol no ejerciera ninguna fuerza un planeta se trasladaría de *A* a *B*. El tiempo podría ser, por ejemplo, un segundo, un minuto o un mes. En el siguiente intervalo recorrería una distancia igual de *B* a *c*. Pero la fuerza del Sol produce una tracción en *B* que obliga a un desplazamiento en dirección al Sol igual a *BV*. Durante el segundo intervalo el planeta combina realmente la trayectoria *Bc*, exigida por la inercia, y la trayectoria *BV*, exigida por la gravedad solar: el planeta sigue la diagonal del paralelogramo formado por los dos movimientos y llega a *C*. Ya demostramos que los triángulos barridos en tiempos iguales, *SAB* y *SBC*, tienen áreas iguales. Newton calcula así la órbita como una serie de puntos equidistantes en el tiempo (*A*, *B*, *C*...), en cada uno de los cuales el planeta se desvía de la recta inercial en virtud del tirón instantáneo del Sol. Cuanto menores sean los tiempos, más frecuentes serán los tirones solares y más se parecerá la trayectoria a la órbita real, que es una curva lisa, ya que la gravedad solar tira continuamente del planeta. La órbita lisa del final conserva la propiedad que nosotros (y Newton, y Feynman) hemos demostrado en el caso de la órbita esquemática: que barre áreas iguales en tiempos iguales, lo que significa que el planeta se mueve más aprisa cuando está más cerca del Sol.



Las dos áreas son iguales

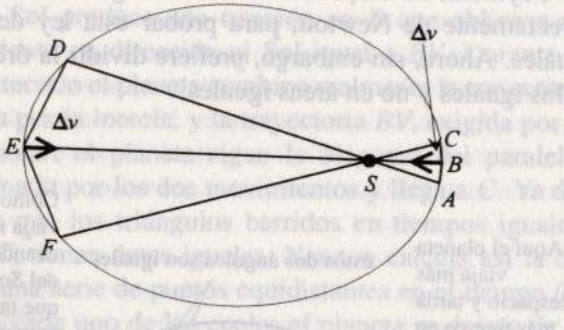
Feynman ha empleado el mismo argumento, tomándolo directamente de Newton, para probar esta ley de las áreas iguales. Ahora, sin embargo, prefiere dividir la órbita en ángulos iguales y no en áreas iguales.



Los dos segmentos de la órbita que acabamos de ver tienen ángulos iguales, pero barren áreas diferentes y por lo tanto no tardan lo mismo. La ley dice que el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. Esto significa que si barre la mitad del área, tarda la mitad de tiempo, es decir:

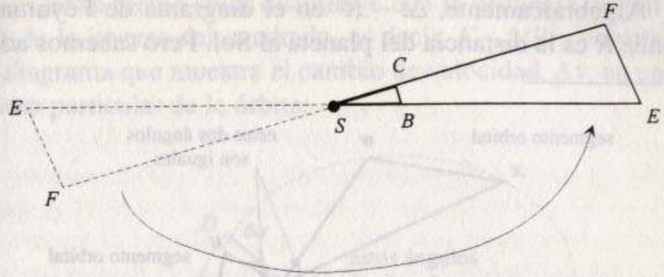
$$\Delta t \sim \text{(área barrida)}$$

Representemos provisionalmente estos segmentos equiángulos en un diagrama newtoniano en el que el planeta tiene movimientos inerciales en línea recta, jalonados por cambios de velocidad causados por la gravedad. Para simplifcar las cosas, dibujemos directamente los cambios de velocidad, Δv, en el diagrama de la órbita:

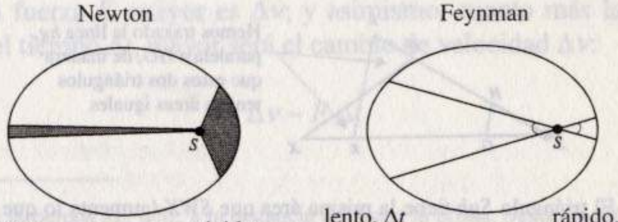


En el lado orbital más cercano al Sol, el planeta se desplaza de A a B, se desvía Δv a causa del Sol y sigue de B a C. En el otro extremo de la órbita, el planeta se desplaza de D a E, sufre un tirón equivalente a Δv y sigue de E a F.

Sabemos que el planeta es más rápido en BC que en EF. Para ver cuánto más tenemos que comparar el área de los triángulos SBC y SEF, porque los tiempos son proporcionales a las áreas barridas. Recordemos que los dos triángulos tienen el mismo ángulo central en S. Dando la vuelta a SEF y superponiéndolo a SBC, vemos que:



El área de cada triángulo es 1/2 (base) × (altura). Además, son triángulos semejantes. Esto significa que si la base del triángulo mayor mide el doble que la base del menor, la altura debe medir también el doble; en tal caso, el área del triángulo mayor rebasaría al menor en $2 \times 2 = 4$. La norma general es que el área es proporcional al cuadrado de la distancia al Sol.[2] Así, el tiempo invertido en recorrer una parte cualquiera de la órbita es proporcional al área barrida, que es proporcional al cuadrado de la distancia al Sol. He aquí una comparación de la división de la órbita en segmentos, según Newton y según Feynman:



lento — rápido — lento, Δt grande — rápido, Δt pequeño

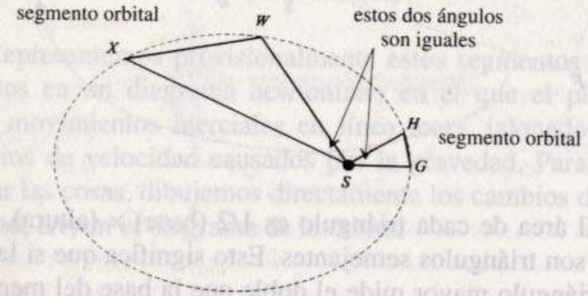
tiempos iguales, áreas iguales

ángulos iguales;
$\Delta t \sim$ (cuadrado de la distancia)

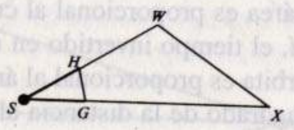
2. Feynman comenta este punto en su charla dedicándole sólo una línea. No es tan sencillo, sin embargo, y tampoco nosotros lo hemos probado en realidad. He aquí una prueba más completa. Pensemos en dos segmentos orbitales cualesquiera que tengan ángulos centrales iguales:

Algebraicamente, $\Delta t \sim R^2$ en el diagrama de Feynman, donde R es la distancia del planeta al Sol. Pero sabemos ade-

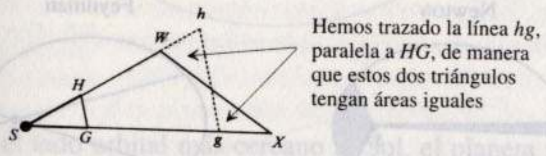
---



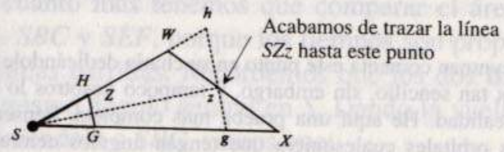
Pongamos el triángulo *SWX* encima de *SGH*:



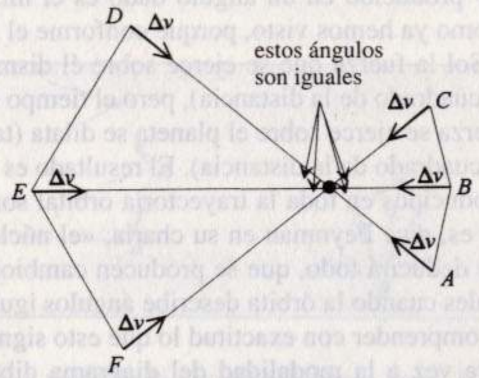
Siempre es posible trazar una línea que pase por *WX*, que sea paralela a *HG* y tal que los dos triángulos pequeños que resulten tengan áreas iguales:



El triángulo *Sgh* tiene la misma área que *SWX* (aumenta lo que mide uno de los triángulos pequeños y disminuye lo que mide el otro) y es semejante a *SGH*. Tracemos ahora una línea desde *S* hasta el punto donde *WX* cruza *hg*:



más que la fuerza solar disminuye con la distancia, según la ley de la inversa del cuadrado, es decir, $F \sim 1/R^2$. Volvamos al diagrama que muestra el cambio de velocidad, Δv, en cada punto particular de la órbita:



En cada punto de la órbita (*A*, *B*, *C*... *D*, *E*, *F*..., y todos los que hay entre ellos) hay un Δv hacia el Sol. Cuanto mayor es la fuerza *F*, mayor es Δv; y asimismo, cuanto más largo sea el tiempo Δt, mayor será el cambio de velocidad Δv:

$$\Delta v \sim F\,\Delta t$$

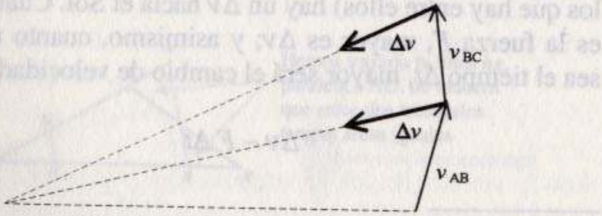
Llamemos *SZ*, o *Sz*, a la distancia del Sol a la órbita. Según la propiedad de los triángulos semejantes (base y altura aumentan con la dimensión, de modo que el área es proporcional al cuadrado de la dimensión), los triángulos semejantes *SGH* y *Sgh* tienen áreas proporcionales al cuadrado de las longitudes *SZ* y *Sz*. Pero *SWX* tiene la misma área que *Sgh*, así que el área de *SWX* también es proporcional al cuadrado de *Sz*. Si imaginamos ahora que reducimos el ángulo central hasta el infinito, la línea *SZz* queda siempre dentro del ángulo, y como los puntos *W* y *X* de la órbita están cada vez más juntos, la longitud *Sz* se vuelve al final igual a *SW* o a *SX*, que es lo que antes llamábamos distancia al Sol. QED.

Pero como $F \sim 1/R^2$ y $\Delta t \sim R^2$,

$$\Delta v \sim (1/R^2) \times R^2 = 1$$

Esto significa que Δv no depende de R en absoluto. En todos los puntos de la órbita, estén éstos cerca o lejos del Sol, el Δv producido en un ángulo dado es el mismo. Esto sucede, como ya hemos visto, porque conforme el planeta se aleja del Sol la fuerza que se ejerce sobre él disminuye (en razón del cuadrado de la distancia), pero el tiempo durante el cual la fuerza se ejerce sobre el planeta se dilata (también en razón del cuadrado de la distancia). El resultado es que todos los Δv producidos en toda la trayectoria orbital son los mismos. Éste es, dice Feynman en su charla, «el núcleo central del que se deducirá todo, que se producen cambios de velocidad iguales cuando la órbita describe ángulos iguales».

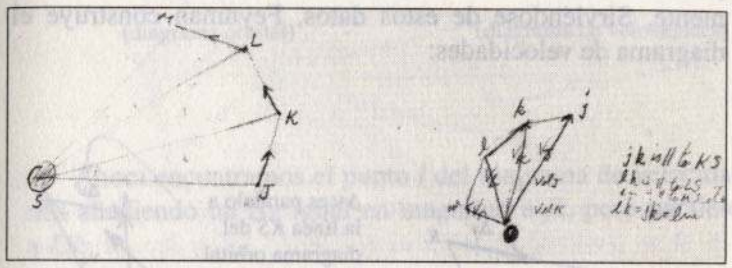
Para comprender con exactitud lo que esto significa, volvamos otra vez a la modalidad del diagrama dibujado por Newton y copiado por Feynman. En vez de representar con él posiciones de los planetas, representemos velocidades:



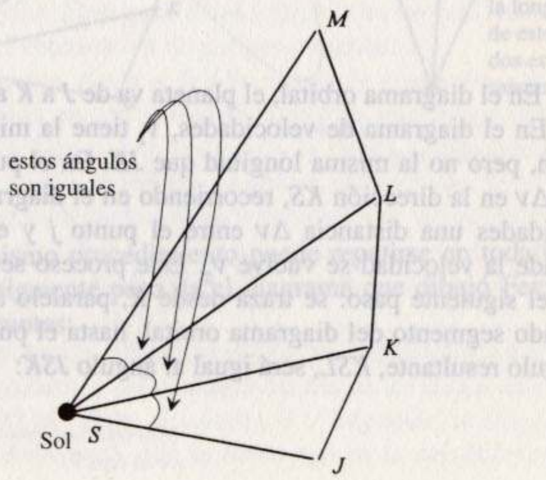
Según el estilo newtoniano, los tiempos eran iguales y todos los Δv estaban dirigidos hacia el Sol, pero unos Δv eran mayores que otros (los mayores se producían cuando el planeta estaba más cerca del Sol). En el esquema de Feynman, los ángulos centrales son iguales, de modo que los tiempos son distintos. Todos los Δv están orientados hacia el Sol (es necesario, según la segunda ley de Newton) y ahora

tienen todos exactamente el mismo tamaño durante toda la trayectoria orbital. Esto tiene consecuencias que se verán en seguida.

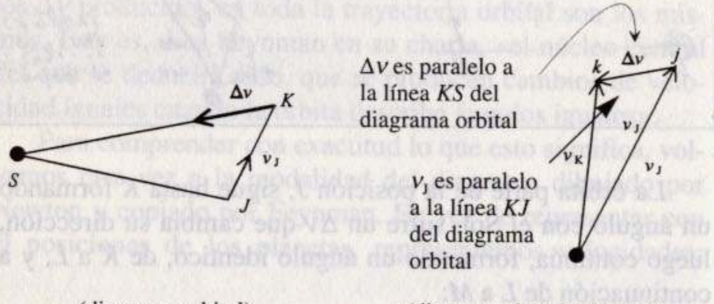
En este punto Feynman dibuja en sus apuntes el diagrama de la órbita y el correspondiente diagrama de velocidades para los segmentos de ángulos iguales. He aquí el resultado:



La órbita parte de la posición J, sigue hasta K formando un ángulo con el Sol, sufre un Δv que cambia su dirección, luego continúa, formando un ángulo idéntico, de K a L, y a continuación de L a M:

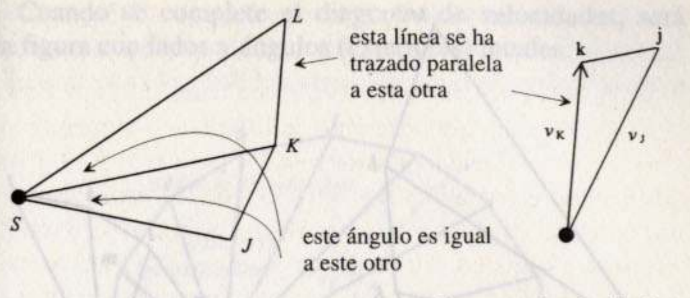


A diferencia de la versión newtoniana de este esquema, los tiempos de estos segmentos no son necesariamente iguales. Las velocidades tienen la dirección *JK*, *KL*, etc. Son, en general, de magnitud diferente en diferentes segmentos. Los cambios de velocidad sufridos en los puntos *J*, *K*, *L* y *M* se dirigen todos hacia el Sol y son todos de la misma magnitud. En otras palabras, en *J* hay un Δv en la dirección *JS*; en *K* se produce el mismo Δv en la dirección *KS*, y así sucesivamente. Sirviéndose de estos datos, Feynman construye el diagrama de velocidades:



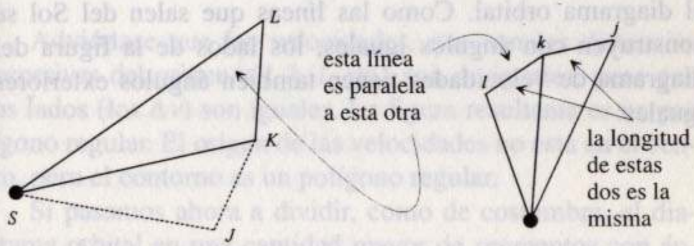
(diagrama orbital) (diagrama de velocidades)

En el diagrama orbital, el planeta va de *J* a *K* a velocidad v_J. En el diagrama de velocidades, v_J tiene la misma dirección, pero no la misma longitud que *JK*. En el punto *K* hay un Δv en la dirección *KS*, recorriendo en el diagrama de velocidades una distancia Δv entre el punto *j* y el punto *k*, donde la velocidad se vuelve v_g. Este proceso se reproduce en el siguiente paso: se traza desde *K*, paralelo a v_g, el segundo segmento del diagrama orbital, hasta el punto *L*, y el ángulo resultante, *KSL*, será igual al ángulo *JSK*:

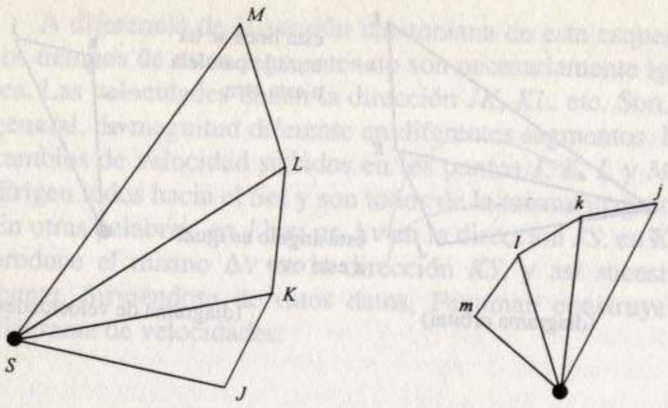


(diagrama orbital) (diagrama de velocidades)

Ahora encontramos el punto *l* del diagrama de velocidades añadiendo un Δv igual en magnitud a *jk*, pero paralelo a *LS*:

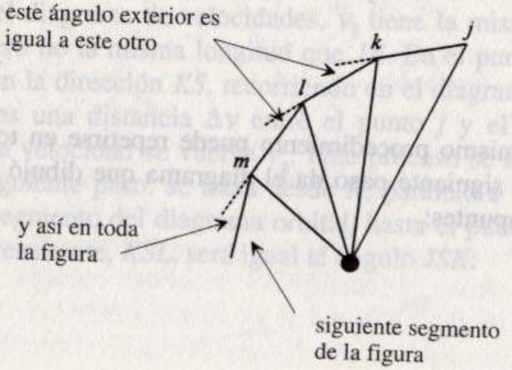


El mismo procedimiento puede repetirse en toda la órbita. El siguiente paso da el diagrama que dibujó Feynman en sus apuntes:

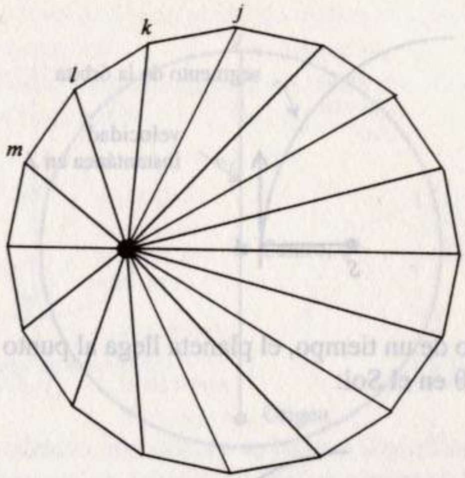


Como escribió Feynman en sus apuntes, *jk* es paralela a *KS*, *lk* es paralela a *LS*, *lm* es paralela a *MS* y *lk* = *jk* = *lm*.

Cada uno de los lados del diagrama de velocidades (*jk*, *kl*, *lm*...) es paralelo a una de las líneas que salen del Sol en el diagrama orbital. Como las líneas que salen del Sol se construyen con ángulos iguales, los lados de la figura del diagrama de velocidades tienen también ángulos exteriores iguales:



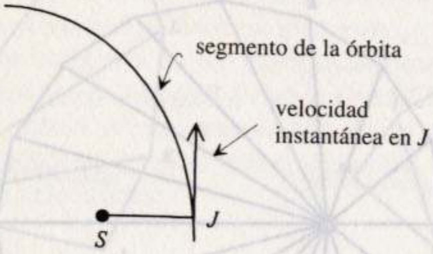
Cuando se complete el diagrama de velocidades, será una figura con lados y ángulos (exteriores) iguales:



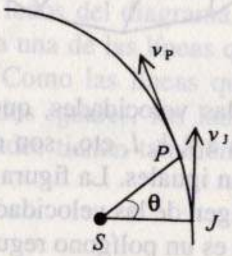
Adviértase que las velocidades, que son las distancias respetivas del origen a *j*, *k*, *l*, etc., son desiguales, pero que los lados (los Δv) son iguales. La figura resultante es un polígono regular. El origen de las velocidades no está en el centro, pero el contorno es un polígono regular.

Si pasamos ahora a dividir, como de costumbre, el diagrama orbital en una cantidad mayor de segmentos con ángulos iguales pero más pequeños, la órbita se aproximará a una curva lisa, y lo mismo pasará en el diagrama de velocidades. Como el diagrama de velocidades es un polígono regular, la curva lisa a la que se aproxima es un círculo. Pero el origen de las velocidades no está necesariamente en el centro del círculo.

En este punto, Feynman dibuja en sus apuntes unos diagramas orbitales y velocidades en forma de curva lisa. Primero la órbita. Parte del punto *J* y Feynman la dibuja de forma convencional, con la línea que parte del Sol prolongándose horizontalmente; al contrario que en el diagrama orbital segmentado, la velocidad en el punto *J* es una vertical, perpendicular a la línea que parte del Sol:



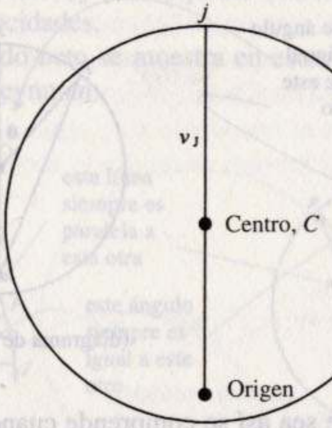
Al cabo de un tiempo, el planeta llega al punto *P* y forma un ángulo θ en el Sol:



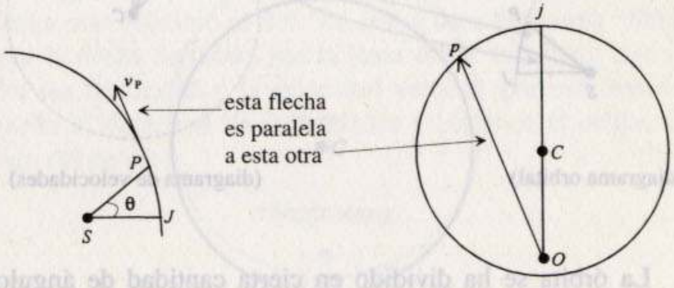
En cada punto, la velocidad instantánea es tangente a la curva lisa.

Construyamos ahora el correspondiente diagrama de velocidades. Será un círculo y el origen será excéntrico. La longitud de la línea que trazaremos para representar v_J dependerá de la aceleración del planeta en el punto *J* de la órbita. Recordemos que, en un diagrama de velocidades, cuanto mayor sea la línea más rápida será la aceleración. El punto *J* del diagrama orbital de Feynman es también el punto más cercano al Sol (Feynman lo resuelve en su cabeza sin mencionarlo en la conferencia), punto donde la acelera-

ción orbital es mayor. Por lo tanto, la línea v_J debe pasar por el centro del círculo, dado que debe ser la línea más larga del diagrama de velocidades:

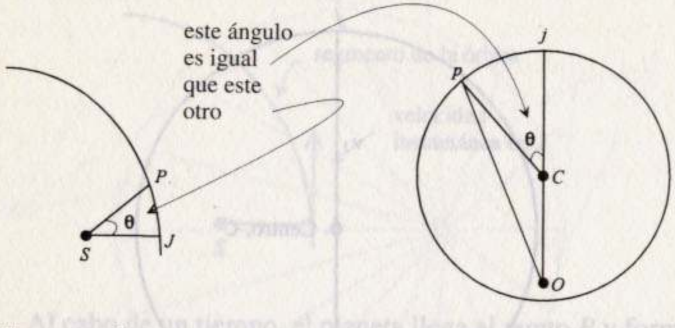


Trazada así, v_J es vertical (paralela a la v_J del diagrama orbital) y es la distancia más larga entre el origen y un punto del círculo. La velocidad en el punto *p* del diagrama de velocidades, correspondiente al punto *P* del diagrama orbital, es una línea que sale del origen y es paralela a v_P:



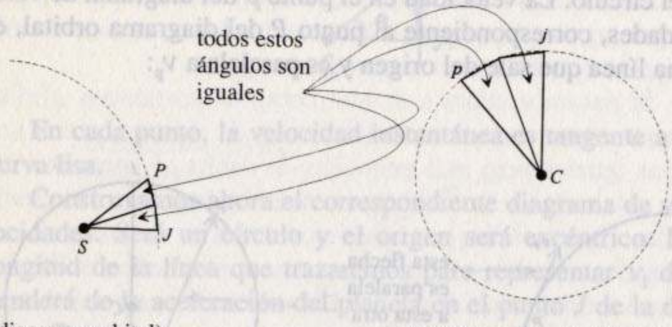
(diagrama orbital) **(diagrama de velocidades)**

Es verdad igualmente que el ángulo *jCp* del diagrama de velocidades es el mismo ángulo, θ, que *JSP* en el diagrama orbital:



(diagrama orbital) (diagrama de velocidades)

La razón de que sea así se comprende cuando volvemos al diagrama completo de las velocidades de los segmentos de la órbita, al polígono regular, y trazamos líneas desde el centro y no desde el origen de velocidades:

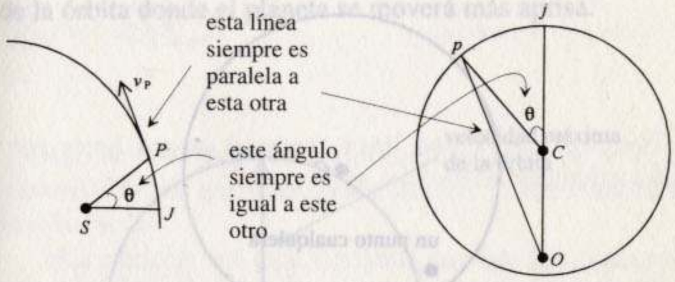


(diagrama orbital) (diagrama de velocidades)

La órbita se ha dividido en cierta cantidad de ángulos iguales, que en total deben sumar 360°. El polígono tiene por

fuerza la misma cantidad de lados iguales, y todos han de estar en la misma fracción de 360°. Por lo tanto, el ángulo que forme *SJ* con un punto cualquiera de la órbita será igual al ángulo que forme *Cj* con el punto correspondiente del diagrama de velocidades.

El resultado neto se muestra en estos dos diagramas dibujados por Feynman:



(diagrama orbital) (diagrama de velocidades)

Puesto que ya hemos establecido todas las correspondencias entre ambos diagramas, construyamos la órbita partiendo del diagrama de velocidades. Es un punto de partida más sencillo, pues sabemos que se trata sólo de un círculo:

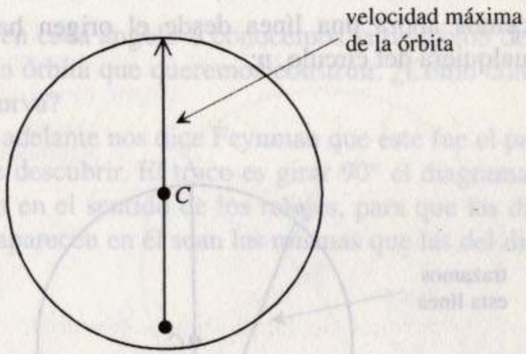
(diagrama de velocidades)

Toda órbita permitida por las leyes de Newton y la fuerza de la gravedad tendrá siempre este diagrama de velocidades. La forma concreta de la órbita dependerá del lugar donde pongamos el origen de las velocidades. Elijamos un punto cualquiera del interior del círculo, pero que no esté en *C*, el centro (ya veremos lo que ocurre, en el círculo o fuera de él, si el punto está en *C*):

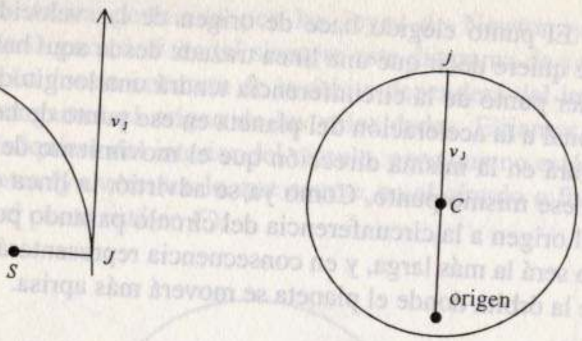
(diagrama de velocidades)

Sólo por razones de familiaridad, giremos el diagrama hasta que el punto elegido quede exactamente debajo de *C*:

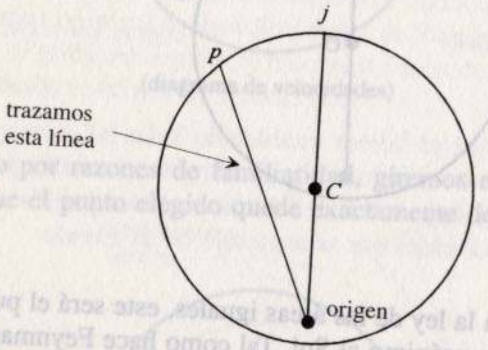
El punto elegido hace de origen de las velocidades, lo que quiere decir que una línea trazada desde aquí hasta cualquier punto de la circunferencia tendrá una longitud proporcional a la aceleración del planeta en ese punto de la órbita y estará en la misma dirección que el movimiento del planeta en ese mismo punto. Como ya se advirtió, la línea que vaya del origen a la circunferencia del círculo pasando por el centro será la más larga, y en consecuencia representará el punto de la órbita donde el planeta se moverá más aprisa.



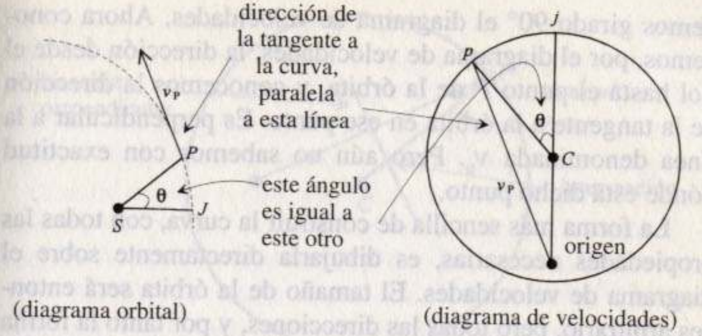
Según la ley de las áreas iguales, este será el punto de la órbita más próximo al Sol. Tal como hace Feynman, dibujemos la órbita de modo que la línea desde ese punto hasta el Sol sea horizontal y la velocidad vertical (por eso dimos la vuelta al diagrama de velocidades y pusimos el origen debajo del centro):



Tracemos ahora una línea desde el origen hasta otro punto cualquiera del círculo, *p*:

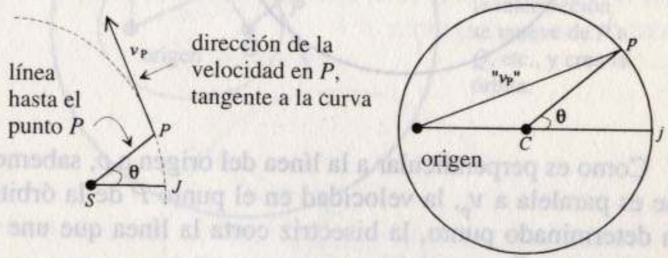


Este punto corresponde a un punto *P* de la órbita que tiene las siguientes propiedades: la línea entre el origen y *p*, en el diagrama de velocidades, es paralela a la tangente al punto *P* del diagrama orbital, y el ángulo *jCp* es el mismo que *JSP*:



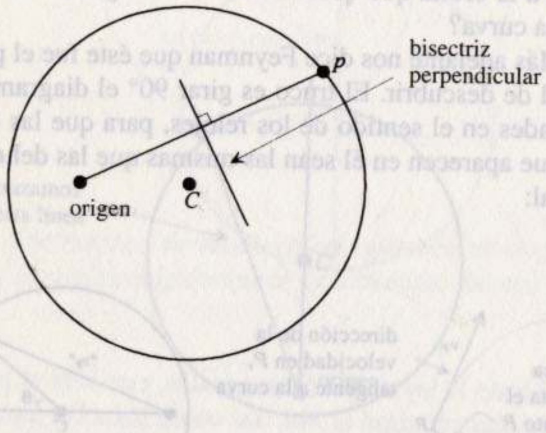
Así, en cada ángulo θ conocemos la dirección de la tangente a la órbita que queremos construir. ¿Cómo construiremos la curva?

Más adelante nos dice Feynman que éste fue el paso más difícil de descubrir. El truco es girar 90° el diagrama de velocidades en el sentido de los relojes, para que las direcciones que aparecen en él sean las mismas que las del diagrama orbital:

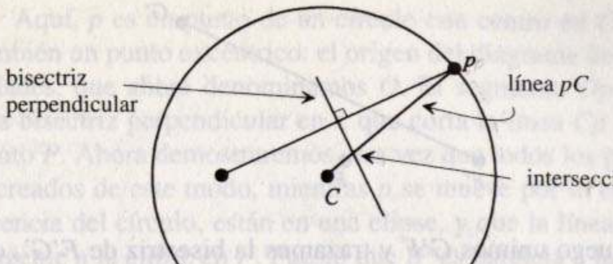


Ahora el ángulo central θ es el mismo en ambos diagramas, pero la línea denominada v_p, que era paralela a la velocidad en *P* en la órbita, ahora es perpendicular a ella, porque hemos girado 90° el diagrama de velocidades. Ahora conocemos, por el diagrama de velocidades, la dirección desde el Sol hasta el punto *P* de la órbita, y conocemos la dirección de la tangente a la órbita en ese punto. Es perpendicular a la línea denominada v_p. Pero aún no sabemos con exactitud dónde está dicho punto.

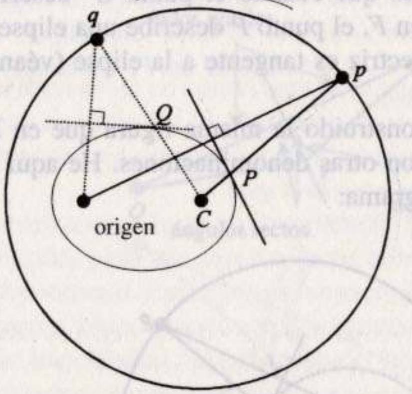
La forma más sencilla de construir la curva, con todas las propiedades necesarias, es dibujarla directamente sobre el diagrama de velocidades. El tamaño de la órbita será entonces arbitrario, pero todas las direcciones, y por tanto la forma de la órbita, serán correctas. Para obtener la órbita, basta con construir la bisectriz de la línea que va del origen a *p*:



Como es perpendicular a la línea del origen a *p*, sabemos que es paralela a v_p, la velocidad en el punto *P* de la órbita. En determinado punto, la bisectriz corta la línea que une *P* con el centro *C*:

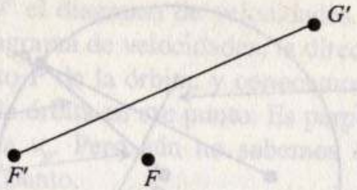


Como el punto *p* se mueve por la circunferencia del círculo, la intersección de *pC* y la bisectriz se mueve describiendo una curva propia:

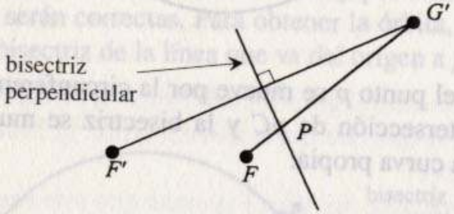


Cuando *p* se mueve hasta *q*, la intersección se mueve de *P* a *Q*, etc., y crea la órbita.

La verdad es que ya habíamos hecho esta misma construcción. Partiendo de dos puntos del plano, denominados *F'* y *F* (correspondientes al origen y a *C*, respectivamente), dibujamos una línea de *F'* a un punto *G'* (*p* en el último diagrama):

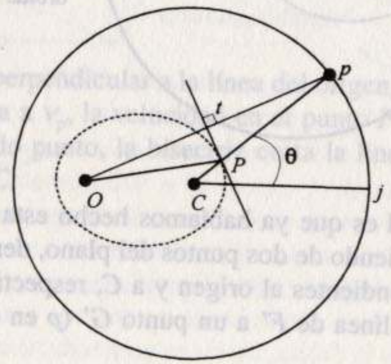


Luego unimos $G'F$ y trazamos la bisectriz de $F'G'$, que corta FG' en el punto P:



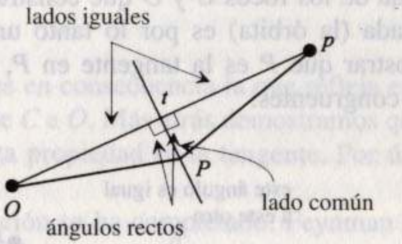
Así demostramos que cuando el punto G' describe un círculo con centro en F, el punto P describe una elipse, y en cada punto P la bisectriz es tangente a la elipse (véanse las páginas 79-88).

Ahora hemos construido la misma figura que en la página 86, solo que con otras denominaciones. He aquí el aspecto del nuevo diagrama:

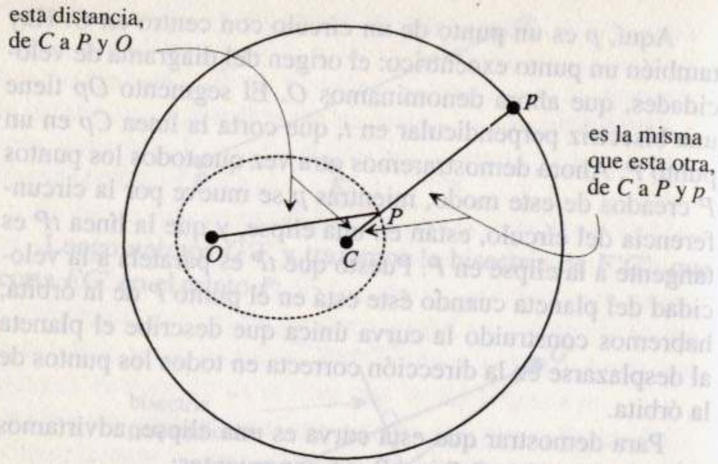


Aquí, p es un punto de un círculo con centro en C. Hay también un punto excéntrico: el origen del diagrama de velocidades, que ahora denominamos O. El segmento Op tiene una bisectriz perpendicular en t, que corta la línea Cp en un punto P. Ahora demostraremos otra vez que todos los puntos P creados de este modo, mientras p se mueve por la circunferencia del círculo, están en una elipse, y que la línea tP es tangente a la elipse en P. Puesto que tP es paralela a la velocidad del planeta cuando éste está en el punto P de la órbita, habremos construido la curva única que describe el planeta al desplazarse en la dirección correcta en todos los puntos de la órbita.

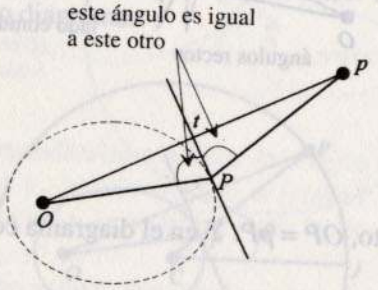
Para demostrar que esta curva es una elipse, advirtamos que los triángulos OtP y ptP son congruentes:



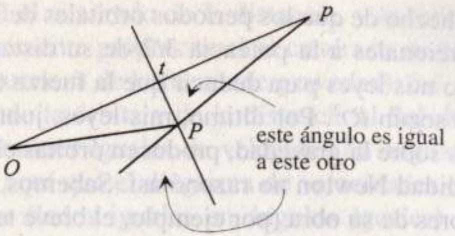
Por lo tanto, $OP = pP$. Y en el diagrama completo,



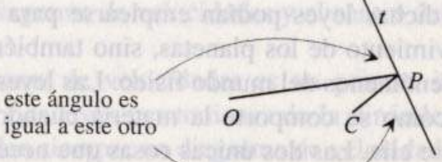
CPp, que es el radio del círculo, y por tanto el mismo para toda la circunferencia, es igual a *CP* + *PO*, la longitud de la cuerda de los focos *C* y *O* que construye la elipse. La curva trazada (la órbita) es por lo tanto una elipse, QED. Para demostrar que *P* es la tangente en *P*, volvamos a los triángulos congruentes:



Hagamos ahora que las líneas *Pp* y *tP* se crucen:



Por lo tanto,



La línea *tP* es en consecuencia la que refleja en el punto *P* la luz que va de *C* a *O*. Más atrás demostramos que la línea *tP* que posee esta propiedad es la tangente. Por última vez, QED.

La demostración se ha completado. Feynman no ha terminado aún, pero por nuestra parte hemos expuesto lo que nos proponíamos. Las leyes de Newton, junto con una fuerza gravitatoria proporcional a R^{-2} y orientada hacia el Sol, hacen que los planetas tengan órbitas elípticas. Antes de abandonar el tema, volvamos una vez más a la lógica de los argumentos que nos han permitido (con la ayuda de Newton y Feynman) realizar esta hazaña heroica.

Newton viene a decir: partiendo del hecho de que los planetas barren áreas iguales en tiempos iguales, he aplicado mis leyes para deducir que la fuerza de gravedad solar sobre un planeta apunta directamente hacia el Sol. Luego, partiendo del hecho de que los periodos orbitales de los planetas son proporcionales a la potencia 3/2 de su distancia al Sol, he aplicado mis leyes para deducir que la fuerza de gravedad disminuye según R^{-2}. Por último, mis leyes, junto con estos dos hechos sobre la gravedad, producen órbitas elípticas.

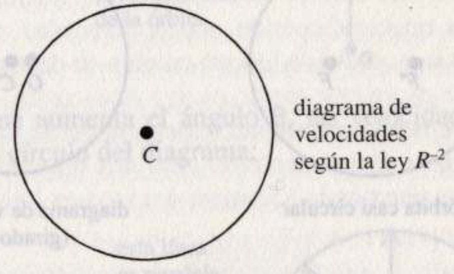
En realidad Newton no razonó así. Sabemos, por versiones anteriores de su obra (por ejemplo, el breve texto que envió a Halley en 1684), que ensayó varias formulaciones de los axiomas de la dinámica. Al final los redujo a tres y los llamó «leyes». Reducir toda la dinámica a tres leyes fundamentales fue de importancia suprema, porque, como Newton y sus seguidores demostrarían en el curso de los tres siglos siguientes, dichas leyes podían emplearse para explicar no sólo el movimiento de los planetas, sino también casi todos los demás fenómenos del mundo físico. Las leyes de Newton nos dicen cómo se comporta la materia cuando se ejercen fuerzas sobre ella. Las dos únicas cosas que necesitamos conocer sobre el mundo físico y que las leyes de Newton no nos dicen son la naturaleza de la materia y la naturaleza de las fuerzas que actúan entre pedazos de materia. Estas dos incógnitas son todavía el problema central de las ciencias físicas.

Esta tremenda reestructuración general de nuestro conocimiento del mundo comienza con la prueba de las órbitas elípticas. Para esto no necesitamos saber mucho de la naturaleza de la materia, porque la gravedad afecta a toda la materia del mismo modo. No obstante, la naturaleza de la fuerza de gravedad es muy importante, y Newton la deduce sirviéndose de dos leyes de Kepler.

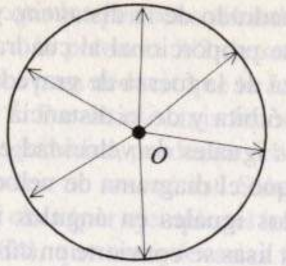
Por último, hemos visto la prueba de las órbitas elípticas, no la versión de Newton, sino la de Richard Feynman. Feynman divide la órbita en ángulos iguales. En cada segmento angular, el cambio de velocidad se orienta al Sol y es proporcional a la magnitud de la fuerza y al tiempo durante el que se ejerce. Es la segunda ley de Newton. El tiempo es proporcional al área barrida, que (por geometría pura y simple) es

proporcional al cuadrado de la distancia, y la fuerza está en razón inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (tal es la naturaleza de la fuerza de gravedad); así, al margen de la forma de la órbita y de la distancia al Sol del planeta, éste sufre cambios iguales de velocidad en ángulos iguales. Se sigue de aquí que el diagrama de velocidades es un polígono regular (lados iguales en ángulos iguales) que en el caso de las órbitas lisas se convierte en círculo. Sin embargo, el origen del diagrama de velocidades *no está en el centro del círculo*. A continuación, con ayuda de una construcción geométrica astutamente preparada de antemano, se demuestra que la órbita tiene forma de elipse y que sus focos son el origen del diagrama de velocidades y el centro del círculo de velocidades.

El diagrama de velocidades es un potente instrumento geométrico. Las leyes newtonianas de la dinámica, más una fuerza R^{-2}, dan siempre un diagrama de velocidades circular:

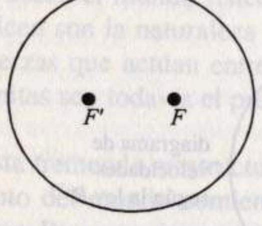


La forma de la órbita depende de dónde esté O, el origen del diagrama de velocidades. Si coincide con C, el centro del diagrama, entonces los dos focos de la elipse coincidirán y el planeta tendrá la misma rapidez en todas las partes de la órbita:



En este caso, la órbita no es más que un círculo.

Si el punto *O* está en algún lugar situado entre *C* y la circunferencia del diagrama, la órbita es entonces una elipse. Cuanto más cerca esté *O* de *C*, más circular será la elipse. Cuanto más alejados estén ambos puntos, más alargada será:



órbita casi circular

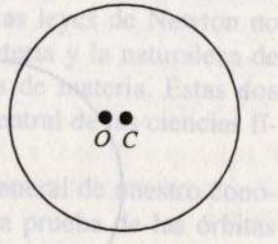
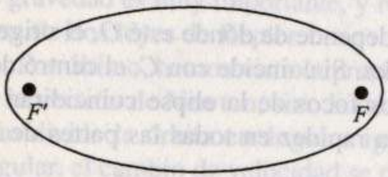


diagrama de velocidades (girado 90°)



órbita muy excéntrica

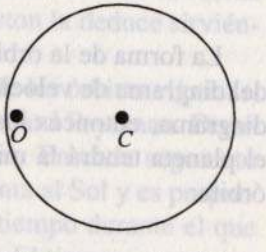
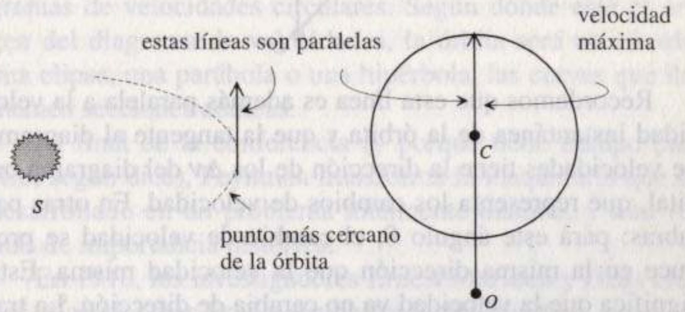


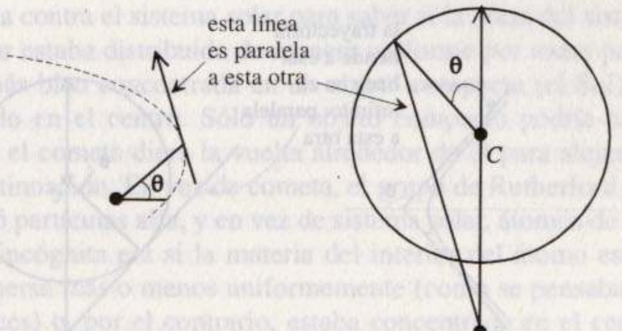
diagrama de velocidades (girado 90°)

Todas las órbitas planetarias de nuestro sistema solar son casi circulares. En la órbita de la Tierra, la distancia entre focos viene a ser 1/100 del diámetro de la órbita; en la de Marte es alrededor de 9/100; en las de Mercurio y Plutón (las más excéntricas), algo más de 20/100. El cometa Halley, por el contrario, tiene una órbita elíptica muy excéntrica. La distancia entre focos es 97/100 del diámetro de su órbita.

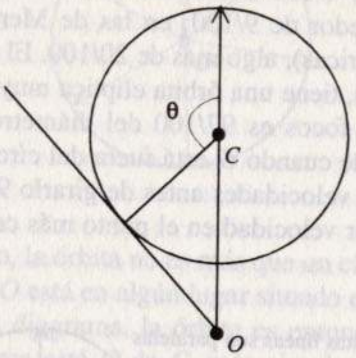
¿Qué sucede cuando *O* está fuera del círculo? Volvamos al diagrama de velocidades antes de girarlo 90°. Todavía tenemos la mayor velocidad en el punto más cercano de la órbita:



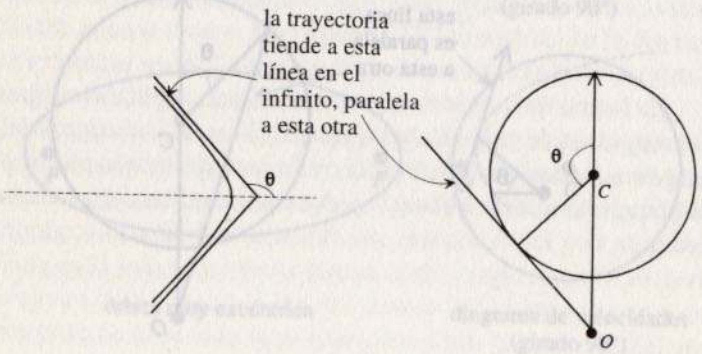
Conforme aumenta el ángulo θ, las velocidades evolucionan en el círculo del diagrama:



Para algún valor de θ la línea de O será tangente al círculo de velocidades:



Recordemos que esta línea es además paralela a la velocidad instantánea de la órbita y que la tangente al diagrama de velocidades tiene la dirección de los Δv del diagrama orbital, que representa los cambios de velocidad. En otras palabras: para este ángulo θ, el cambio de velocidad se produce en la misma dirección que la velocidad misma. Esto significa que la velocidad ya no cambia de dirección. La trayectoria no es ya una curva, es una línea recta. La «órbita» no será por tanto una elipse, figura imposible de trazar con una línea recta. Por el contrario, será una hipérbola, otra sección cónica, que tiende a alejarse del foco en línea recta:



En esta trayectoria, el «planeta» cae hacia el Sol desde el infinito, da una vuelta alrededor suyo y huye otra vez hacia el infinito. Esta trayectoria no es en realidad una órbita. Cuando parte del infinito y cuando vuelve, su velocidad no es cero; la velocidad es proporcional a la longitud de la línea que va de O al punto de tangencia con el círculo de velocidades.

Si el punto O está en la circunferencia, el «planeta» huye igualmente hacia el infinito, pero cuando llega tiene velocidad cero; su trayectoria será una parábola. Así, la dinámica newtoniana, más una fuerza cuadrática inversa, genera diagramas de velocidades circulares. Según dónde esté el origen del diagrama de velocidades, la órbita será un círculo, una elipse, una parábola o una hipérbola, las curvas que llamamos secciones cónicas.

Al final de la conferencia (y porque tiene tiempo para ello, según dice), Feynman transforma la maquinaria que ha desarrollado en un problema totalmente distinto, y una vez más de importancia histórica.

En 1910, los investigadores Ernest Marsden y Hans Geiger, dirigidos por Ernest Rutherford, descubrieron que si se proyectaba un rayo de partículas alfa (núcleos de átomos de helio) sobre una delgada lámina de oro, algunas rebotaban en vez de atravesar la lámina. El experimento podría compararse a grandes rasgos con un alienígena que lanzase un cometa contra el sistema solar para saber si la masa del sistema solar estaba distribuida de manera uniforme por todas partes o más bien concentrada en un objeto compacto (el Sol), situado en el centro. Sólo un objeto compacto podría hacer que el cometa diera la vuelta alrededor de él para alejarse a continuación. En vez de cometa, el grupo de Rutherford manejó partículas alfa, y en vez de sistema solar, átomos de oro. La incógnita era si la materia del interior del átomo estaba dispersa más o menos uniformemente (como se pensaba entonces) o, por el contrario, estaba concentrada en el centro. El que algunas partículas alfa rebotasen demostró que la masa estaba concentrada en el centro, y con este experimento se descubrió el núcleo atómico.

La fuerza que operaba aquí entre el proyectil y los componentes del sistema no era la gravedad, sino la electricidad. La electricidad es una fuerza que opera entre cargas eléctricas positivas y negativas (términos acuñados por un científico newtoniano y autodidacta del siglo XVIII, Benjamín Franklin). Al igual que la gravedad, la electricidad es una fuerza tipo R^{-2} que actúa a lo largo de la línea que une las cargas; a diferencia de la gravedad, puede hacer que las cargas se atraigan entre sí (cargas opuestas) o que se repelan (cargas iguales). La fuerza de la gravedad siempre es atractiva, nunca repulsiva. La fuerza eléctrica es muchísimo más potente que la de gravedad. En realidad, es tan potente que se neutraliza a sí misma. Todos los átomos de la lámina de oro tienen exactamente la misma cantidad de cargas positivas y negativas, por eso el átomo es neutro por fuera, ya que si no es perturbado no ejerce ninguna fuerza eléctrica. La cuestión es: ¿qué sucede cuando un proyectil con carga eléctrica (la partícula alfa, que es eléctricamente positiva) se lanza dentro de un átomo? La respuesta dice que lo repele el núcleo atómico, que contiene toda la carga positiva y casi toda la masa del átomo. De vez en cuando, por pura casualidad, una partícula alfa se acercará tanto al núcleo que saldrá rebotada por el mismo camino de entrada, y eso es lo que Marsden y Geiger observaron.

Dado que la electricidad es una fuerza proporcional a R^{-2} que actúa siguiendo la línea que une las cargas, y si las partículas obedecen la dinámica de Newton, todos los argumentos geométricos utilizados por Feynman son aplicables a este problema. Se trata de averiguar la probabilidad de que un proyectil salga despedido hacia atrás, de modo que el experimento pueda compararse con una teoría cuantitativa. El punto de partida es el diagrama de velocidades (válido para toda fuerza tipo R^{-2} a lo largo de la línea que une las partículas) con el origen fuera del círculo. Las «órbitas» de las partículas alfa no serán elipses atrapadas para siempre en los alrededores del núcleo, sino más bien hipérbolas que enviarán las partículas alfa hacia el infinito después de curvar su trayectoria en un ángulo mayor o menor. No seguiremos todos los pasos aquí, porque Feynman ya no se siente obligado a ceñirse a los argumentos geométricos. Antes bien, se salta todos los semáforos con objeto de llegar a lo que, por emplear sus propias palabras, es una fórmula celebérrima.

Dicha fórmula merece esta celebridad porque condujo directamente al descubrimiento de la mecánica cuántica, y de aquí al derrocamiento de la dinámica newtoniana empleada para llegar a ella. Pero esta historia da para otro libro. Ha llegado el momento de ponernos en manos del maestro. Sale Feynman.

4
La conferencia: «El movimiento de los planetas alrededor del Sol» *(13 de marzo de 1964)*

El título de esta lección es «El movimiento de los planetas alrededor del Sol».

... Después de daros esta mala noticia, os daré otra buena, y es que, dado que el martes que viene hay exámenes, no es cuestión de dar una clase que os obligue a estudiar, de manera que voy a daros una charla por puro placer, para pasar el rato *[aplausos]*. Basta, basta, o no me dejaréis empezar. Guardaos todo eso para el final y decidid entonces.

La historia de nuestro tema físico llegó a uno de sus momentos culminantes cuando Newton, repentinamente, comprendió tanto partiendo de tan poco. La historia de este descubrimiento es también la larga historia de Copérnico, de Tycho Brahe cuando midió las posiciones de los planetas, y de Kepler cuando averiguó las leyes que empíricamente describían el movimiento de esos planetas. Fue entonces cuando Newton descubrió que podía entender el movimiento planetario formulando otra ley. Todo esto lo sabéis ya por la lección sobre la gravedad, así que continuaré desde aquí con un rápido resumen de la cuestión.

Primero, Kepler observó que los planetas describían elipses alrededor del Sol, con éste como foco de cada elipse. Observó también (se apoyó en tres observaciones para describir las órbitas) que el área barrida por una línea trazada desde el Sol a la órbita es proporcional —esta área de aquí—, es proporcional al tiempo. Por último, para comparar planetas con distintas órbitas, descubrió que los planetas con órbitas diferentes tienen periodos (los tiempos que tardan en completar una órbita) que guardan con el eje mayor de la elipse una razón proporcional a la potencia 3/2. Si fueran círculos (para simplificar las cosas), el cuadrado del tiempo que se tarda en recorrer la circunferencia del círculo sería proporcional al cubo del radio del círculo.

Ahora bien, Newton supo extraer dos consecuencias de esto. Primero advirtió que áreas iguales y tiempos iguales significaban, según su concepción de la inercia, que el móvil seguiría en línea recta a velocidad uniforme si no sufriera ninguna perturbación, que las desviaciones de la velocidad uniforme se dirigen siempre hacia el Sol, y que áreas iguales en tiempos iguales equivale a decir que las fuerzas se dirigen hacia el Sol. Así, aplicó una de las leyes de Kepler para deducir que las fuerzas eran hacia el Sol; y entonces resulta fácil argumentar (sobre todo cuando se aplica la tercera ley al caso especial de los círculos) que, en estos círculos, la fuerza dirigida hacia el Sol debe ser inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

La razón es más o menos como sigue. Supongamos que tomamos una fracción de la órbita, un cierto ángulo (un ángulo pequeño) y que una partícula tiene cierta velocidad en una parte de la órbita y otra después. Luego los cambios de velocidad en un ángulo determinado son evidentemente proporcionales a la velocidad; y el cambio de velocidad durante un cierto intervalo de tiempo, que es la fuerza, es evidentemente proporcional a la velocidad orbital por el tiempo que se tarda en recorrer esa fracción de la órbita (quiero decir, partida por el tiempo). Así, la velocidad cambia proporcionalmente a la velocidad, y el tiempo que ha durado este cambio es proporcional al tiempo que se tarda en completar la órbita. Por lo tanto, la aceleración centrípeta, es decir, el cambio por segundo de la velocidad en la dirección del centro, es proporcional a la velocidad en la órbita partida por el periodo de la misma.[1]

1. Feynman está diciendo que $\Delta v/\Delta t$ es proporcional a v/T. Véase el

Se puede decir de muchas otras formas, porque, lógicamente, el periodo de revolución está relacionado con la velocidad a través de esta proporción. Se puede decir que la aceleración por el tiempo es la distancia o, mejor dicho, que la aceleración por el tiempo es proporcional al radio, y así podemos sustituir el tiempo y obtener nuestra famosa v^2/R. Mejor aún, yo sustituiré la velocidad R/T. La velocidad es evidentemente proporcional al radio partido por el periodo de revolución, así que la aceleración centrífuga está en razón directamente proporcional al radio e inversamente proporcional al cuadrado del periodo de revolución. Ahora bien, Kepler nos dice que el periodo al cuadrado es proporcional al cubo del radio. Es decir, que el denominador es proporcional al cubo del radio y, por tanto, la aceleración hacia el centro es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Así dedujo Newton (la verdad es que Robert Hooke dedujo lo mismo antes que Newton) que esta fuerza tendría que ser inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Partiendo de dos leyes de Kepler llegamos a dos únicas conclusiones. Nadie puede verificar nada de este modo. Quizá no tenga ningún interés, porque el número de hipótesis introducidas es igual al número de hechos cotejados y al número de supuestos.

Por otra parte, lo que Newton descubrió (y fue el más espectacular de sus descubrimientos) fue que la tercera ley de Kepler *[Feynman se refiere en realidad a la primera]* era ahora consecuencia de las otras dos. Dado que la fuerza es hacia el Sol, y dado que varía en razón inversa al cuadrado de la distancia, calcular esta sutil combinación de variaciones y velocidad para determinar la forma de la órbita y averiguar que es una elipse es una aportación de Newton; supo que la ciencia estaba avanzando porque podía conocer tres cosas formulando dos.

Como ya sabéis, al final conoció mucho más, que las ór-

capítulo 3, página 115. Aquí llama «aceleración centrípeta» a $\Delta v/\Delta t$; más abajo dice «aceleración centrífuga».

bitas en realidad no son elipses perfectas, que se perturban mutuamente, que el movimiento de los satélites de Júpiter se explica de la misma manera, así como el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra, etc.; pero concentrémonos en un caso en el que pueda desestimarse la interacción mutua entre los planetas.

Resumamos lo que dijo Newton sobre el movimiento de un planeta: que los cambios de velocidad en tiempos iguales se dirigen hacia el Sol, y que en magnitud son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia. Nuestro problema ahora es demostrar (y el objetivo de esta charla es sobre todo demostrar) que en consecuencia la órbita es una elipse.

No es difícil, si se sabe escribir las ecuaciones diferenciales y resolverlas, demostrar que es una elipse. Creo que en las clases que os han dado, o por lo menos en el manual, calculáis la órbita mediante métodos numéricos y veis que parece una elipse. Esto no es lo mismo que *demostrar* que es exactamente una elipse. La demostración se suele confiar al departamento de matemáticas: ¡allí se las compongan con sus ecuaciones diferenciales! *[Risas.]*

Prefiero demostraros que es una elipse de un modo completamente extraño, original y distinto del que soléis emplear. Voy a daros lo que yo llamaría una demostración elemental. Pero «elemental» no quiere decir fácil de entender *[risas]*. «Elemental» significa que para comprenderlo se necesitan muy pocos conocimientos previos, además de una cantidad infinita de inteligencia *[risas]*. Para entender una demostración elemental no hacen falta conocimientos, sino inteligencia. Tal vez haya muchos pasos difíciles de seguir, pero son pasos que no exigen saber cálculo de antemano, ni transformadas de Fourier, etc. Así, cuando digo «demostración elemental» quiero decir una demostración que retrocede todo lo que se puede en relación con lo aprendido.

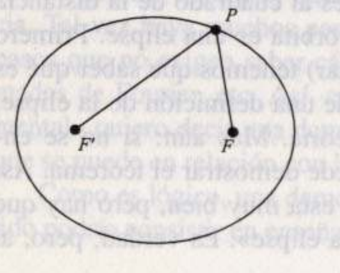
Como es lógico, una demostración elemental en este sentido podría consistir en enseñaros cálculo primero y luego explicar la demostración igual. Pero esto sería más largo que la demostración que deseo presentaros aquí. En segundo lugar, esta demostración es interesante por otro motivo: se sirve sólo de métodos geométricos. Puede que a alguno de vosotros le gustara la geometría del bachillerato y se divirtiera probando, o descubriendo con ingenio, las líneas correctas de una construcción. Mucha gente sabe apreciar la elegancia y belleza de las demostraciones geométricas. Por otro lado, después de Descartes toda la geometría se puede reducir a álgebra, y actualmente toda la mecánica y demás se reduce a análisis con símbolos escritos en papel, y no se emplean métodos geométricos.

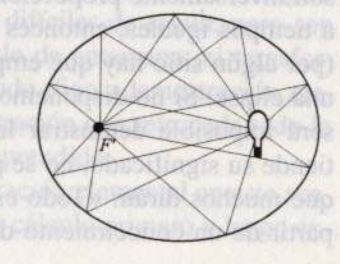
Además, en los comienzos de nuestra ciencia, es decir, en la época de Newton, el método de análisis geométrico de tradición euclidiana era la forma habitual de hacer las cosas. En realidad, los *Principia* de Newton se escribieron casi totalmente de forma geométrica; todos los cálculos de esta obra se hicieron mediante diagramas geométricos. Hoy se hacen escribiendo símbolos analíticos en la pizarra, pero para entreteneros y hacerlo más interesante quiero que viajéis en coche de caballos, por su elegancia, en vez de subir a un coche de carreras. Así que vamos a deducir este hecho mediante argumentos puramente geométricos (bueno, esencialmente geométricos, porque no sé qué significa eso de argumentos puramente geométricos) y veamos lo bien que nos sale.

Así pues, nuestro problema es demostrar que si es cierto que los cambios de velocidad se dirigen hacia el Sol y que son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia a tiempos iguales, entonces la órbita es una elipse. Primero (por algún sitio hay que empezar) tenemos que saber qué es una elipse. Si no disponemos de una definición de la elipse, será imposible demostrar la teoría. Más aún: si no se entiende su significado, no se puede demostrar el teorema. Así que muchos dirán: «Todo esto está muy bien, pero hay que partir de un conocimiento de la elipse». Es verdad; pero, al margen de esto, no creo que haga falta mucho conocimiento extra, sólo mucha atención, por favor, y meditación cuidadosa. No es fácil, cuesta lo suyo y no vale la pena. Es mucho más fácil recurrir al cálculo, pero lo vamos a hacer de este otro modo, y recordad que lo hacemos únicamente para ver cómo resulta.

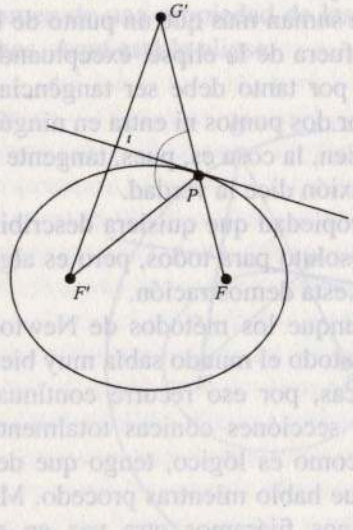
Hay varias formas de definir una elipse y elegiré una. Supongo que todo el mundo sabe que una elipse puede trazarse (o que la elipse es la curva que puede trazarse) cogiendo un cordel y dos clavos, poniendo un lápiz aquí y dando una vuelta. Dicho matemáticamente, es el lugar... hoy se dice conjunto de puntos, pues muy bien, el conjunto de puntos... tal que la suma de la distancia FP y la distancia $F'P$, donde F y F' son los dos puntos fijos, permanece constante. Supongo que ya sabéis que esto es la definición de la elipse. Puede que hayáis oído otra definición; si queréis, llamaremos focos a estos dos puntos, y esto significa que la luz emitida en F llegará a F' tras rebotar en un punto cualquiera de la elipse.

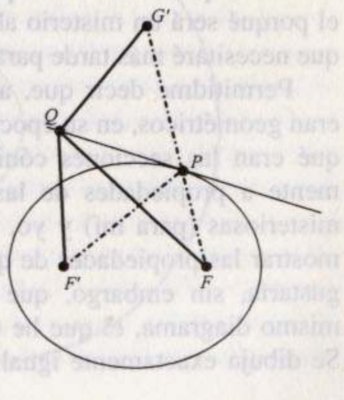
Permitidme demostrar por lo menos la equivalencia de estas dos proposiciones. El siguiente paso será, pues, demostrar que la luz se refleja de F a F'. La luz se refleja como si la superficie fuera aquí un plano tangente a la curva real. Ya sabéis que la ley de la reflexión de la luz en un plano dice que los ángulos de incidencia y reflexión son iguales. Por lo tanto, lo que tengo que probar es esto: si trazo una línea aquí tal que sus ángulos con las líneas FP y $F'P$ sean iguales, entonces esta línea es tangente a la elipse.





Demostración: He aquí la línea trazada tal como he descrito. Tracemos el punto imagen de F' según esta línea; o lo que es lo mismo, prolonguemos la perpendicular que va de F' a la línea hasta la misma distancia por el otro lado para obtener G', imagen refleja de F'. Adviértase que, como los ángulos son iguales, este ángulo de aquí es el ángulo vertical. Pues bien, este ángulo es igual a este otro, porque estos dos triángulos rectos son exactamente iguales. Es una imagen refleja, así que este lado es igual a este otro, y estos dos ángulos son iguales; esto es una línea recta. Así que PG', esta línea de aquí, es igual al segmento $F'P$ y, dicho sea de paso, FG' es una recta, así que $FP + F'P$, que es la suma de estas dos distancias, es en realidad $FP + G'P$, porque $F'P = G'P$. Ahora bien, la cuestión es que, si tomamos cualquier otro punto de la tangente, por ejemplo Q, y llevamos a Q la suma de estas dos distancias, vemos fácilmente que la dis-





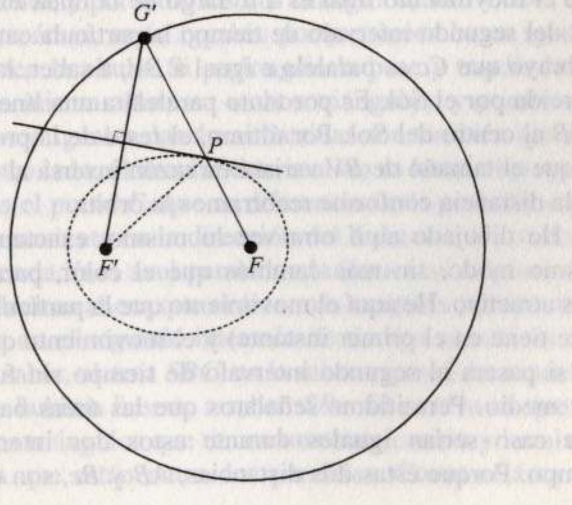
tancia $F'Q$ es, nuevamente, la misma que $G'Q$. Así pues, la suma de estas dos distancias, de F' a Q y de Q a F, es la misma que la distancia de F a Q y de Q a G'. En otras palabras, la suma de las distancias entre ambos focos y un punto cualquiera de la línea es igual a la distancia de F a G', subiendo hasta este punto y pasando al otro lado. Evidentemente es más larga, evidentemente es siempre más larga que pasar al otro lado en línea recta. En otras palabras, la suma de las dos distancias hasta un punto Q es mayor que para la elipse (para cualquier punto Q menos el punto P). Así pues, para cualquier punto de esta línea, la suma de las distancias a estos dos puntos es mayor que en el caso de un punto de la elipse.

Ahora daré por evidente lo que sigue, para que ideéis vosotros mismos una prueba satisfactoria: si la elipse es la curva tal que la suma de los dos puntos es constante, entonces los puntos exteriores a la elipse darán una suma mayor, y los puntos interiores a la elipse darán una suma menor; y como estos puntos de la línea suman más que un punto de la elipse, toda esta línea queda fuera de la elipse, exceptuando únicamente el punto P, que por tanto debe ser tangencial, porque la recta no se cruza por dos puntos ni entra en ningún momento en la elipse. Muy bien, la cosa es, pues, tangente y sabemos que la ley de la reflexión dice la verdad.

Las elipses tienen otra propiedad que quisiera describir, el porqué será un misterio absoluto para todos, pero es algo que necesitaré más tarde para esta demostración.

Permitidme decir que, aunque los métodos de Newton eran geométricos, en su época todo el mundo sabía muy bien qué eran las secciones cónicas, por eso recurre continuamente a propiedades de las secciones cónicas totalmente misteriosas (para mí) y yo, como es lógico, tengo que demostrar las propiedades de que hablo mientras procedo. Me gustaría, sin embargo, que nos fijáramos otra vez en el mismo diagrama, el que he trazado aquí, y lo repitiéramos. Se dibuja exactamente igual: F' y F, aquí está la tangente,

aquí el punto imagen de F', G'. Pero me gustaría que imaginarais lo que le ocurre al punto imagen G' cuando P recorre la elipse. Es evidente, como ya he señalado, que PG' es igual a $F'P$, de manera que $FP + F'P$ es constante, lo que implica que $FP + PG'$ es constante. En otras palabras, FG' es constante. En resumen: el punto imagen G' da la vuelta alrededor del punto F describiendo un círculo de radio constante. Muy bien. Al mismo tiempo, trazo una línea de F' a G' y veo que mi tangente es perpendicular a ella. Es lo mismo que dije antes. Sólo quiero resumirlo, recordaros una propiedad de las elipses, que es la siguiente: cuando un punto G' describe un círculo, una línea trazada entre un punto excéntrico y un punto G' (este punto es excéntrico respecto de G') será siempre perpendicular a la tangente. Dicho al revés: la tangente es siempre perpendicular a la línea, o a una línea, trazada desde un punto excéntrico. Muy bien, esto es todo, volveremos sobre ello, lo recordaremos y lo repasaremos otra vez, así que no hay por qué preocuparse. Esto es sólo un resumen de una propiedad de las elipses, partiendo de los hechos. Aquí está la elipse.



Por otro lado tenemos que saber dinámica, así que explicaré ahora qué es la dinámica. Quiero esta proposición, esto es la geometría; ahora la dinámica, qué sentido tiene esta proposición. Lo que Newton quiere decir con esto es lo siguiente: si esto es el Sol, por ejemplo, el centro de la atracción, y en un instante dado una partícula, por ejemplo, estuviera aquí (y permitidme suponer que se mueve hasta otro punto, de *A* a *B*, en cierto intervalo de tiempo), entonces, si no hay fuerzas ejercidas hacia el Sol, esta partícula seguiría en la misma dirección y recorrería exactamente la misma distancia hasta un punto *c*. Pero durante este movimiento hay un impulso hacia el Sol, y en beneficio del análisis imaginaremos todas las curvas en el instante medio (en este instante). En otras palabras, concentramos todos nuestros impulsos, como si dijéramos, en este momento medio. En consecuencia, el impulso es en la dirección del Sol, y esto podría representar el cambio de movimiento. Esto significa que en vez de moverse de aquí hasta aquí, se mueve hasta otro punto, que es *C*, que a su vez es diferente de *c*, porque el movimiento resultante es el movimiento compuesto del original más el impulso adicional hacia el centro del Sol. Así que el movimiento final es a lo largo de la línea *BC*, y al final del segundo intervalo de tiempo la partícula estará en *C*. Subrayo que *Cc* es paralela e igual a *BV*, a saber, la tracción ejercida por el Sol. Es por tanto paralela a una línea trazada de *B* al centro del Sol. Por último, el resto de la proposición es que el tamaño de *BV* variará en razón inversa al cuadrado de la distancia conforme recorramos la órbita.

He dibujado aquí otra vez lo mismo, exactamente del mismo modo, sin más cambios que el color, para hacerlo más atractivo. He aquí el movimiento que la partícula tendría (que tiene en el primer instante) y el movimiento que seguiría si pasara al segundo intervalo de tiempo sin fuerzas de por medio. Permitidme señalaros que las áreas barridas en este caso serían iguales durante estos dos intervalos de tiempo. Porque estas dos distancias, *AB* y *Bc*, son evidente-

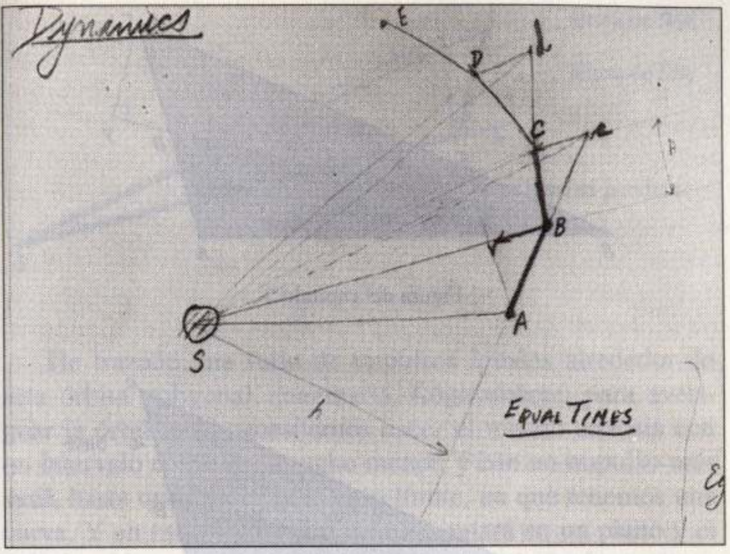


Diagrama de los apuntes de Feynman

mente iguales, y por tanto los dos triángulos, *SAB* y *SBc*, que son las dos áreas, serán iguales: porque tienen bases iguales y comparten la altura. Si prolongáis la base y trazáis la altura, es la misma altura en ambos triángulos; y puesto que las bases son iguales, las áreas barridas son también iguales.

Por otro lado, el movimiento real no es hacia el punto *c*, sino hacia el punto *C*, que se diferencia de la posición *c* por un desplazamiento en la dirección del Sol en el momento *B*, es decir, en la línea azul paralela a la línea azul original. Me gustaría deciros ahora que el área más ocupada (quiero decir la barrida en el segundo intervalo de tiempo si hubiera una fuerza, a saber, el área *SBC*) es la misma que el área que habría si no hubiera fuerza, a saber, *SBc*. El motivo es que tenemos dos triángulos que tienen una base común y la misma altura, ya que están entre dos paralelas. Como el área del

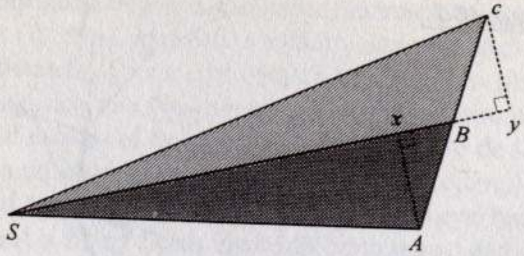
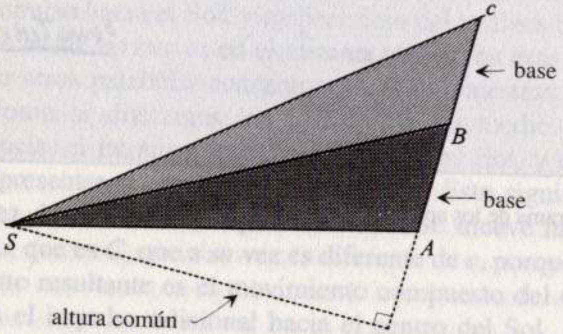
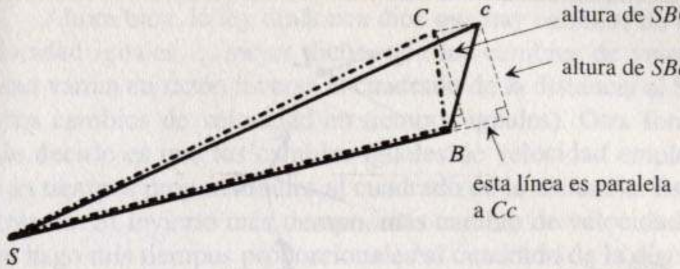


Figura del capítulo 3



Feynman, sin embargo, lo dibuja así

triángulo *SBC* y la del triángulo *SAB* son iguales, pero los puntos *A*, *B* y *C* representaban posiciones sucesivas en la órbita en tiempos iguales, vemos que las áreas recorridas en tiempos iguales son iguales. Vemos igualmente que la órbita sigue siendo un plano, que estando el punto *c* en el plano y estando la línea *Cc* en el plano de *ABS*, el movimiento restante está en el plano *ABS*.



He trazado una serie de impulsos iguales alrededor de esta órbita poligonal imaginaria. Lógicamente, para averiguar la órbita real necesitamos hacer el mismo análisis con un intervalo de tiempo mucho menor, y con un impulso más sutil, hasta que llegamos al caso límite, en que tenemos una curva. Y en este caso límite la curva estará en un plano y el área barrida será proporcional al tiempo. Así sabemos que tenemos áreas iguales en tiempos iguales. La demostración que acabáis de ver es una reproducción exacta de otra que hay en los *Principia mathematica* de Newton, y el ingenio y la belleza que podáis o no ver en ella ya existía de buen principio.

La prueba que falta no procede de Newton, porque me di cuenta de que no podía seguirla bien, pues comporta muchísimas propiedades de las secciones cónicas. Así que ideé otra.

Tenemos áreas iguales y tiempos iguales. Me gustaría pensar ahora qué aspecto tendría la órbita si en vez de emplear tiempos iguales imagináramos la sucesión de posiciones correspondientes a *ángulos iguales* desde el centro del Sol. En otras palabras, vuelvo a trazar la órbita con la sucesión de puntos *J*, *K*, *L*, *M*, *N*, que corresponden, no a instantes iguales, como en el diagrama anterior, sino a ángulos de inclinación iguales, desde la posición inicial. Para simplificarlo un poco, aunque esto no es esencial en absoluto, he supuesto que el movimiento inicial era perpendicular al Sol en

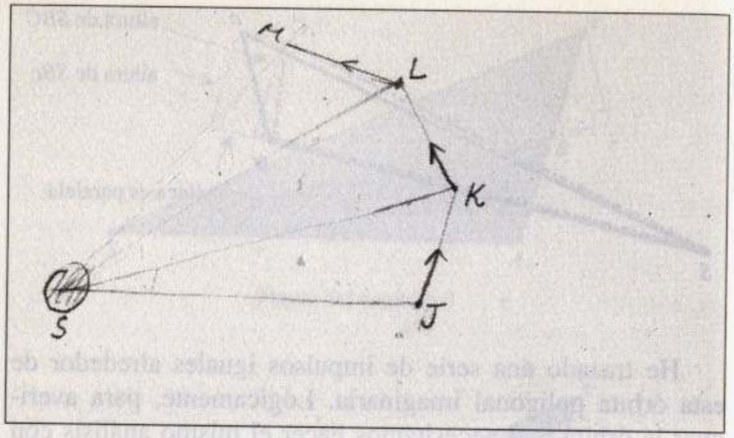


Diagrama de los apuntes de Feynman

el primer punto; pero esto no es esencial, sólo nos da un diagrama más limpio.

Sabemos ya por la proposición anterior que las áreas iguales tardan tiempos iguales en ser barridas. Escuchad ahora: me gustaría señalaros que... ángulos iguales, y a esto es a lo que voy, no significa que las áreas sean iguales, no, sino que son proporcionales al cuadrado de la distancia al Sol; pues si tengo un triángulo con un ángulo dado, está claro que si construyo dos, serán semejantes; y el área proporcional de los triángulos semejantes es proporcional al cuadrado de sus dimensiones.[2] Ángulos iguales significa, por tanto, que el tiempo que se tarda en barrer estos ángulos iguales es proporcional al cuadrado de la distancia. En otras palabras, los puntos *J*, *K*, *L*, etc., no representan imágenes de la órbita en tiempos iguales, sino imágenes de la órbita en tiempos sucesivos que son proporcionales al cuadrado de la distancia.

2. Éste es el punto que se explica en la nota del capítulo 3, páginas 123-125 de este libro.

Ahora bien, la ley dinámica dice que hay cambios de velocidad iguales..., mejor dicho, que los cambios de velocidad varían en razón inversa al cuadrado de la distancia al Sol (los cambios de velocidad en tiempos iguales). Otra forma de decirlo es que los cambios iguales de velocidad emplearán tiempos proporcionales al cuadrado de la distancia. Es lo mismo. Si invierto más tiempo, más cambio de velocidad, y si hago mis tiempos proporcionales al cuadrado de la distancia, entonces los cambios de velocidad serán iguales. O, como reza la ley dinámica: hay cambios iguales de velocidad en tiempos proporcionales al cuadrado de la distancia. Ahora bien, fijaos en que los ángulos iguales equivalían a tiempos proporcionales al cuadrado de la distancia. Así llegamos a la conclusión, por la ley de la gravedad, de que habrá cambios iguales de velocidad describiendo ángulos iguales en la órbita. Aquí tenemos el núcleo central del que se deducirá todo: tenemos cambios iguales de velocidad cuando la órbita se mueve mediante ángulos iguales. Trazo ahora en este diagrama una pequeña línea que representa las velocidades. A diferencia del otro diagrama, estas líneas no son la línea completa de *J* a *K*, porque en aquel diagrama eran proporcionales a las velocidades, ya que los tiempos eran iguales y la longitud partida por tiempos iguales representaba las velocidades. Aquí tengo que emplear otra escala para representar lo lejos que la partícula habría ido en una unidad dada de tiempo, y no en los tiempos que son de hecho proporcionales al cuadrado de la distancia. Así pues, estas líneas representan la sucesión de velocidades. Es difícil apreciar qué ha cambiado en este diagrama.

Dibujaré, por lo tanto, otro diagrama (que llamaré diagrama de velocidades) a escala ampliada, sólo para entendernos. Las líneas representadas son, se supone, las mismas. Ésta representa el movimiento por segundo (o por un intervalo de tiempo dado) de una partícula en *J*. Ésta representa el movimiento que tendría una partícula desde el comienzo en un intervalo de tiempo dado. A todas les doy un ori-

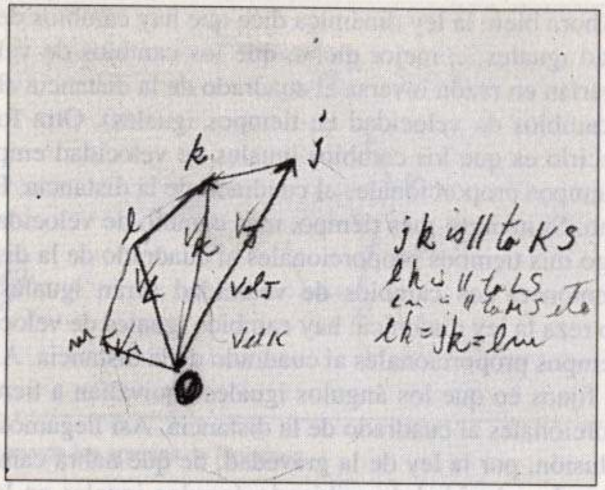


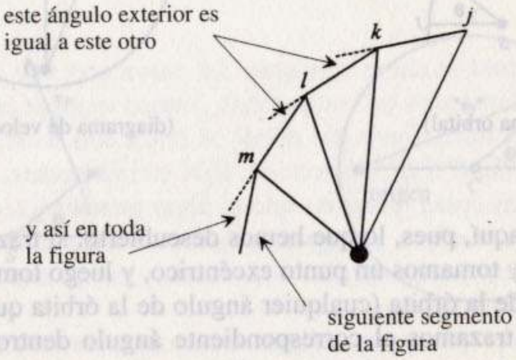
Diagrama de los apuntes de Feynman

gen común, para poder comparar las velocidades. Así pues, tengo una serie de velocidades para la sucesión de estos puntos.

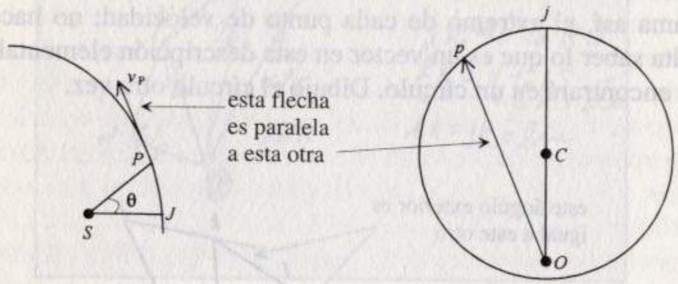
Ahora bien, ¿qué son los cambios de velocidad? El punto en el primer movimiento está aquí y esto es la velocidad. Sin embargo, hay un impulso hacia el Sol, y por tanto hay un cambio de velocidad, señalado por la línea verde que genera la segunda velocidad v_K. Hay igualmente otro impulso hacia el Sol, pero esta vez con un ángulo diferente, que produce el siguiente cambio de velocidad v_L, etc. Ahora bien, la proposición de que los cambios de velocidad eran iguales (para ángulos iguales, que es lo que dedujimos) quiere decir que las longitudes de estos segmentos en sucesión son iguales. Eso es lo que quiere decir.

¿Y qué hay de sus ángulos comunes? Puesto que esta línea va en la dirección del Sol con este radio, puesto que esta otra va en la dirección del Sol con este radio, puesto que esta otra va en la dirección del Sol con este radio, etc., etc., y como estos radios tienen ángulos comunes sucesivos, es

igualmente cierto que estos pequeños cambios de velocidad tienen ángulos comunes iguales. En resumen, estamos construyendo un polígono regular. Una serie de pasos iguales, con cambios de sentido en ángulos iguales, dará una serie de puntos en la superficie, aproximándose a un círculo. Dará un círculo. Por lo tanto, el extremo del vector velocidad (si se le llama así, el extremo de cada punto de velocidad; no hace falta saber lo que es un vector en esta descripción elemental) se encontrará en un círculo. Dibujo el círculo otra vez.



Repaso lo que hemos obtenido. Tomo el límite continuo, donde los intervalos angulares son muy pequeños, para obtener una curva continua. Pongamos que θ es el ángulo, ángulo total, hasta un punto *P*, y pongamos que v_p representa la velocidad de dicho punto del mismo modo que antes. Entonces el diagrama de velocidades tendrá este aspecto. Este punto es el origen del diagrama de velocidades, lo mismo que aquí, y esto es el vector velocidad correspondiente a este punto *P*. Así pues, este punto está en el círculo, pero no es necesariamente el centro de dicho círculo. Sin embargo, el ángulo que hemos descrito siguiendo el círculo es el mismo θ. El motivo es que el ángulo descrito desde el comienzo por esta cosa es proporcional al ángulo descrito por la órbita, porque es la sucesión de la misma cantidad de ángulos pequeños. Por lo tanto, este ángulo de aquí es el mismo que este otro.

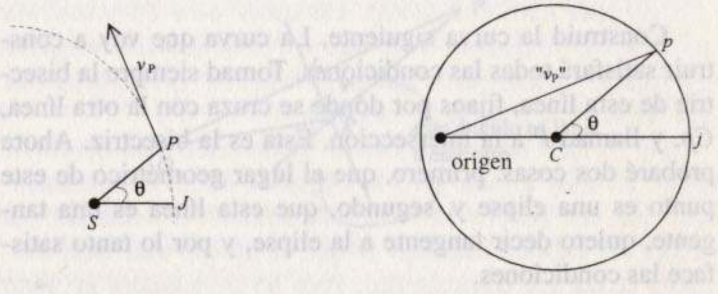


(diagrama orbital) (diagrama de velocidades)

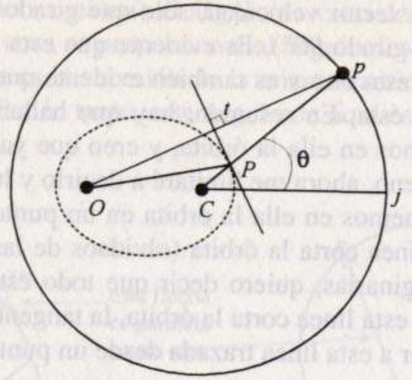
He aquí, pues, lo que hemos descubierto: si trazamos un círculo y tomamos un punto excéntrico, y luego tomamos un ángulo de la órbita (cualquier ángulo de la órbita que queramos) y trazamos el correspondiente ángulo dentro de este círculo, y trazamos luego una línea que salga del punto excéntrico, entonces esta línea será la dirección de la tangente. Porque la velocidad es, evidentemente, la dirección del movimiento en el momento, y lleva la dirección de la tangente a la curva. Así, nuestro problema es hallar la curva tal que si trazamos un punto a partir de un centro excéntrico, la dirección de la tangente a esa curva sea siempre paralela a ésta cuando el ángulo de la curva venga dado por el ángulo en el centro de ese círculo.

Para aclarar aún más por qué debe salir de este modo, giraré 90° el diagrama de velocidades de manera que los ángulos se correspondan exactamente y sean paralelos entre sí. Este diagrama de abajo es, pues, el mismo diagrama de arriba, pero girado 90°, para que la cosa se vea mejor. Esto

de aquí es el vector velocidad, sólo que girado 90° (todo el diagrama ha girado 90°). Es evidente que esta línea es perpendicular a esta otra y es también evidente que ésta es perpendicular a ésta. En resumen, hay que hallar la curva tal que si ponemos en ella la órbita, y creo que ya lo estoy haciendo... (bueno, ahora me limitaré a decirlo y luego la dibujaré...) si ponemos en ella la órbita en un punto dado, aquí, donde esta línea corta la órbita (olvidaos de las escalas, todas son imaginarias, quiero decir que todo está en proporción), donde esta línea corta la órbita, la tangente debería ser perpendicular a esta línea trazada desde un punto excéntrico.



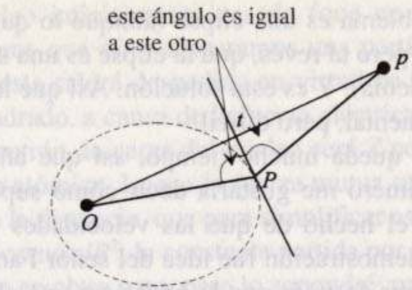
La vuelvo a dibujar para enseñaros cómo es. Ya sabéis cuál es la solución. Aquí tenemos otra vez un dibujo del mismo círculo de velocidades, pero esta vez la órbita se traza en el interior a una escala distinta, para que podamos ver este dibujo superpuesto a este otro, de manera que los ángulos se correspondan. Así pues, como los ángulos se corresponden, puedo trazar la línea que representa tanto el punto P de la órbita como el punto p del círculo de velocidades. Ahora bien, lo que hemos descubierto es que la órbita tiene tal naturaleza que una línea trazada desde el punto excéntrico, aquí, por la prolongación de este punto que está en un círculo exterior, será siempre perpendicular a la tangente a la curva. Bueno, esa curva es una elipse, y lo podéis averiguar mediante la siguiente construcción.

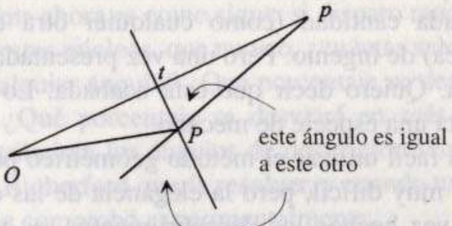


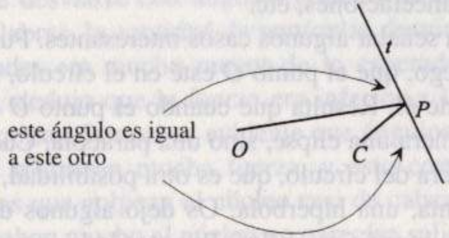
Construid la curva siguiente. La curva que voy a construir satisfará todas las condiciones. Tomad siempre la bisectriz de esta línea, fijaos por dónde se cruza con la otra línea, *Cp*, y llamad *P* a la intersección. Ésta es la bisectriz. Ahora probaré dos cosas: primero, que el lugar geométrico de este punto es una elipse y, segundo, que esta línea es una tangente, quiero decir tangente a la elipse, y por lo tanto satisface las condiciones.

Primero, que es una elipse: como ésta era la bisectriz, está a igual distancia de *O* y de *p*; está claro por tanto que *Pp* es igual a *PO*; esto quiere decir que $CP + PO$, que es por tanto igual que $CP + Pp$, es el radio del círculo, que es constante, evidentemente. Así pues, la curva es una elipse, o lo que es lo mismo, la suma de estas dos distancias es constante.

A continuación, que esta línea es tangente a la elipse: porque, como... los dos triángulos son congruentes, este ángulo de aquí es igual a este otro ángulo de aquí.







Pero si prolongo la línea por el otro lado, entonces también este ángulo es igual. Así pues, la línea en cuestión forma un ángulo igual con las dos líneas trazadas hasta los focos. Ya demostramos que eso era una de las propiedades de las elipses, la propiedad de reflexión. Por lo tanto, la solución del problema es una elipse (aunque lo que he probado es lo mismo pero al revés, que la elipse es una solución posible del problema). Y es esta solución. Así que las órbitas son elipses. Elemental, pero difícil.

Aún me queda mucho tiempo, así que añadiré algo al respecto. Primero me gustaría decir cómo supe de esta demostración, el hecho de que las velocidades describan un círculo. La demostración fue idea del señor Fano y yo la leí. Para demostrar después que la órbita era una elipse tardé un tiempo espantosamente largo, me refiero al paso evidente y simple, girar de este modo y trazar esto y aquello. Muy difícil, y es que todas estas demostraciones elementales exigen una elevada cantidad (como cualquier otra demostración geométrica) de ingenio. Pero una vez presentada, es elegante y sencilla. Quiero decir que está acabada. Lo divertido es que resulta una especie de mecano.

No es fácil utilizar el método geométrico para descubrir cosas. Es muy difícil, pero la elegancia de las demostraciones, una vez hechos los descubrimientos, es tremenda. La fuerza del método analítico es que es mucho más fácil descubrir cosas que demostrarlas. Pero no si se quiere un poco de elegancia. Hay mucho papel emborronado, con equis, íes y tachaduras, cancelaciones, etc.

Me gustaría señalar algunos casos interesantes. Puede suceder, desde luego, que el punto *O* esté en el círculo, incluso que esté fuera de él. Resulta que cuando el punto *O* está en el círculo no genera una elipse, sino una parábola. Cuando el punto *O* está fuera del círculo, que es otra posibilidad, genera una curva distinta, una hipérbola. Os dejo algunos de estos objetos para que juguéis con ellos. Por otro lado, me gustaría hacer ahora algunas aplicaciones de lo que sabemos y volver al argumento del señor Fano con otra finalidad. Él iba en una dirección diferente y me gustaría explicarlo.

Lo que el señor Fano buscaba era una prueba elemental de una ley que fue muy importante para la historia de la física en 1914: la llamada ley de la dispersión de Rutherford. Si tenemos un núcleo infinitamente pesado (que no es el caso, pero supongamos que sí) y disparamos una partícula contra dicho núcleo, ésta saldrá despedida en virtud de la ley de la inversa del cuadrado, a causa de la fuerza eléctrica. Si q_e es la carga de un electrón, la carga del núcleo será Z por q_e, donde Z es el número atómico. Luego la fuerza mutua será $4\pi\varepsilon_0$ por el cuadrado de la distancia, que para simplificar escribiré provisionalmente como z/R^2, la constante partida por R^2. No sé si lo habéis hecho en clase o no, pero lo supondré: para abreviar, escribiré $q_e^2/4\pi\varepsilon_0$ como e^2. Luego esto no es más que Ze^2/R^2. Bueno, esto es la fuerza en razón inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, pero es repulsiva en vez de atractiva. El problema ahora es como sigue: si disparo muchas partículas contra estos núcleos, que no veo, ¿cuántas saldrán desviadas con cualquier ángulo? ¿Qué porcentaje se desviará en más de 30°? ¿Qué porcentaje se desviará en más de 45°? ¿Cómo se distribuirán los ángulos de desviación? Este era el problema que Rutherford quería resolver, y cuando tuvo la solución buena la comprobó experimentalmente.

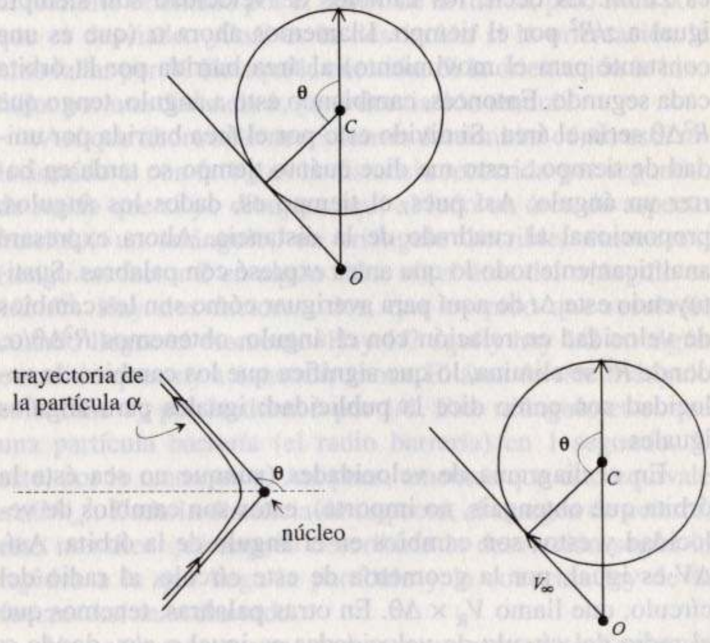
[Feynman parte en dirección contraria en este momento. No tardará en dar la vuelta.]

Rutherford averiguó que las partículas que en teoría tenían que desviarse con ángulos grandes no estaban allí. En otras palabras, la cantidad de partículas desviadas con ángulos grandes era mucho menor de lo esperado y, en consecuencia, dedujo que la fuerza era inferior a $1/R^2$ en las distancias cortas. Porque es evidente que ángulos de desviación grandes requieren mucha fuerza, y esto corresponde a las partículas que golpean el núcleo casi de cabeza. Así, las que se acercaban mucho al núcleo no parecían salir como debían, y la razón es que el núcleo tiene cierto tamaño... Estoy contándolo al revés. Si el núcleo fuera lo bastante grande, entonces las partículas que en teoría deberían salir con un ángulo grande no serían repelidas con toda la fuerza, porque entrarían en la distribución de carga y se desviarían menos. Me he hecho un lío. Disculpadme. Empiezo de nuevo.

Rutherford dedujo cómo debería funcionar el asunto si todas las fuerzas estuvieran concentradas en el centro. En su época se creía que la carga del átomo estaba distribuida de manera uniforme por todo el átomo, y para confirmar esta distribución pensó que, si dispersaba las partículas, éstas nunca tendrían una desviación muy grande, como correspondería a una aproximación máxima al centro de repulsión, porque en realidad no habría centro. Rutherford, sin embargo, observó desviaciones con ángulos grandes, de lo cual dedujo que el átomo tenía toda su masa concentrada en un punto central muy pequeño. Lo expongo al revés. Fue después cuando se probó, otra vez por lo mismo, que el núcleo tenía cierto tamaño. Pero lo primero que se probó fue que el átomo no es tan grande a efectos eléctricos como el átomo entero a todos los efectos: es decir, que toda la carga estaba concentrada en el centro, y así se descubrió el núcleo. Sin embargo, lo que hay que entender es que necesitamos saber cuál es la ley del ángulo de desviación, y sólo podemos averiguarlo de este modo.

Supongamos que repetimos lo anterior y dibujamos la órbita. He aquí la carga y aquí el movimiento de una partícula cercana, solo que esta vez se trata de una repulsión. Comienzo el dibujo en este punto, porque me da la gana, y trazo mis círculos de velocidades como antes. Esto es la velocidad. Sabemos que la velocidad, la velocidad inicial en este punto (debería emplear los mismos colores para que sepáis lo que estoy haciendo… esto debería ser azul, esta órbita roja), lo que quiero decir es que los cambios de velocidad están en un círculo. Ahora bien, los cambios de velocidad son esta vez repulsiones, por lo que el signo se invierte. Tras pensar un poco, vemos que las desviaciones van así, y que el centro del cálculo, que solía llamarse origen del espacio de velocidades O, está fuera del círculo. La sucesión de pequeños cambios de velocidad está en el círculo, y entonces la sucesión de velocidades sobre la órbita corresponde a estas líneas, hasta que llegamos a algo muy interesante: esta tangente.

¿Qué significa este punto tangente a la curva? Quiere decir que todos los cambios de velocidad se hacen en la dirección de la velocidad. Pero los cambios de la velocidad son en la dirección del Sol, lo que significa que esta velocidad, en esta parte del diagrama, está en la dirección del Sol, porque está en la dirección de los cambios. Es decir, este punto de aquí, cuando nos aproximamos a este punto de aquí, que llamaré x, corresponde al acercamiento hacia el Sol desde el infinito por esta línea de aquí. Es decir: desde muy lejos llegamos hasta muy cerca del Sol (no del Sol, sino del núcleo) y entonces, tras dar la vuelta por aquí... (este diagrama debería estar al revés, las flechas deberían estar aquí) se va por este lado, e irse por este lado equivale a salir con la velocidad en esta dirección.



(diagrama «orbital») (diagrama de velocidades)

Ahora bien, si dibujamos la órbita con más cuidado, se parecerá mucho a esto. Si a este punto de aquí lo llamo V_∞, entonces la velocidad de la partícula al comienzo es V_∞. A la misma escala, llamo V al radio de este círculo (la velocidad correspondiente al radio del círculo). Tengo que hacer una ecuación, no voy a hacerlo de modo totalmente geométrico; pero, para ahorrar tiempo y demás, ya traigo el trabajo hecho. No hay que ir todo el tiempo en coche de caballos. La cosa se disfruta y luego se deja. Ahora quiero hallar primero la velocidad del centro, el radio del círculo de velocidades. En otras palabras, voy a apearme para hacer más analíticas algunas de estas cosas geométricas.

Supondré que la fuerza es una constante: la fuerza (mejor dicho, la aceleración) es una constante partida por R^2. Para la gravedad, esta constante es GM, y para la electricidad es Ze^2/m. Es decir, los cambios de velocidad son siempre igual a z/R^2 por el tiempo. Llamemos ahora α (que es una constante para el movimiento) al área barrida por la órbita cada segundo. Entonces, cambiando esto a ángulo, tengo que $R^2\Delta\theta$ sería el área. Si divido esto por el área barrida por unidad de tiempo... esto me dice cuánto tiempo se tarda en barrer un ángulo. Así pues, el tiempo es, dados los ángulos, proporcional al cuadrado de la distancia. Ahora expresaré analíticamente todo lo que antes expresé con palabras. Sustituyendo este Δt de aquí para averiguar cómo son los cambios de velocidad en relación con el ángulo, obtenemos $R^2\Delta\theta/\alpha$, donde R^2 se elimina, lo que significa que los cambios de velocidad son como dice la publicidad: iguales para ángulos iguales.

En el diagrama de velocidades (aunque no sea ésta la órbita que obtengáis, no importa), estos son cambios de velocidad y estos son cambios en el ángulo de la órbita. Así, ΔV es igual, por la geometría de este círculo, al radio del círculo, que llamo $V_R \times \Delta\theta$. En otras palabras, tenemos que el radio del círculo de velocidades es igual a z/α, donde α es el área barrida por segundo, y z es una constante que

tiene que ver con la ley de la fuerza. Ahora bien, el ángulo en que este planeta se ha desviado es este de aquí (quiero decir el ángulo de desviación de la partícula cargada respecto del núcleo). Salta a la vista, por lo que vengo diciendo, que es igual a este ángulo de aquí, Φ, porque estas velocidades son paralelas a las dos direcciones primeras. Está claro, pues, que podemos hallar Φ si obtenemos la relación con V_∞ y V_R. Bueno, ya lo veis: tangente de $\Phi/2 = V_R/V_\infty$, y esto nos da el ángulo. Lo único que necesitamos es sustituir V_R por $z/\alpha R$, y ya lo tenemos.

Sin embargo, no nos servirá de mucho mientras no conozcamos α en esta órbita. He aquí una idea atractiva: pensemos en este objeto que se dirige hacia este otro, de modo que si no hubiera ninguna fuerza fallase por cierta distancia, b. Esto se llama parámetro de impacto. Imaginemos que el objeto viene del infinito orientado por el centro de la fuerza, pero falla porque es desviado. ¿Cuál es la desviación si la orientación le hizo fallar por b? He aquí la cuestión. Si la orientación le hizo fallar por una distancia b, ¿qué desviación tendrá?

Así que ahora sólo necesitamos determinar cómo está relacionado α con b. V_∞ es la distancia recorrida por segundo, de modo que si yo dibujara aquí al lado un área de aspecto horrible, un triángulo, un triángulo horrible, entonces... (tengo un factor 2 en algún sitio, sí) el área del triángulo es 1/2 R^2. Hay dos factores, dos, que os pido que resolváis cuando llegue el momento. Hay 1/2 aquí y hay 1/2 en algún otro sitio que voy a construir ahora. El área de este triángulo es la base V_∞ por la altura b por 1/2. Este triángulo es el que una partícula barrería (el radio barrería) en 1 segundo. Y esto, por lo tanto, es α. Así pues, tenemos que esto equivale a z/bV_∞^2. Dada la distancia de impacto, el margen de acierto, esto nos dice qué ángulo describiría la desviación según la rapidez a la que llega la partícula y la conocida ley de la fuerza. Así se acaba todo.

Una cosa más que me parece muy interesante. Supongamos que quisiéramos saber la probabilidad de obtener una desviación superior a un cierto ángulo. Tomemos un cierto Φ (digamos Φ_O) y queremos una desviación mayor que Φ_O. Esto sólo significa que tenemos que acertar en un área más céntrica que la b correspondiente a esta Φ. Cualquier impacto más centrado que b_O producirá una desviación mayor que Φ_O. Si nos alejamos, tenemos menos desviación, menos fuerza. Así pues, la sección del área en que hay que acertar para que la desviación sea mayor que Φ (borro el cero) es πb^2, donde b es $z/V_\infty^2 \operatorname{tg}^2 \Phi/2$. En otras palabras, $\pi z^2/V_\infty^4 \operatorname{tg}^2 \Phi/2$. Y esta es la ley de la dispersión de Rutherford. La ley nos dice la probabilidad del área en que hay que acertar, el área efectiva de incidencia, para obtener una desviación mayor que determinada cantidad. Esta z es igual a Ze^2/m; es una cuarta potencia y es una fórmula muy famosa.

Es tan famosa que, como suele suceder, no se escribió así cuando se dedujo, por eso yo, a causa de su «famosidad», la escribiré de otra forma... bueno, dejaré que la escribáis vosotros. Yo sólo daré la solución y vosotros veréis si podéis demostrarla. En vez de preguntarnos por la sección correspondiente a una desviación mayor que cierto ángulo, podemos preguntarnos por el elemento de sección, $d\sigma$, que corresponde a la desviación en el intervalo $d\Phi$ en que debería estar el ángulo, entre... aquí y ahí. Sólo hay que diferenciar esta cosa y el resultado final es la famosa fórmula de Rutherford: $4Z^2e^4$ por 2π senΦ $d\Phi$ partido por $4m^2 V_\infty^4$ por el seno de $\Phi/2$ elevado a la cuarta potencia. Lo escribo sólo porque es una fórmula famosa que aparece mucho en física. La combinación 2π senΦ $d\Phi$ es en realidad el ángulo sólido que tenemos en el intervalo $d\Phi$. Así, en una unidad de ángulo sólido, la sección está en razón inversa a la cuarta potencia del seno de $\Phi/2$. Y esta ley se vio que era verdadera para la dispersión de partículas alfa por los átomos, lo que demostraba que los átomos tenían un punto duro en el centro, un núcleo. Y a través de esta fórmula se descubrió el núcleo atómico.

Muchas gracias.

Epílogo

Richard Feynman ideó una brillante demostración propia de la ley de las elipses, pero no fue el primero a quien se le ocurrió. La misma prueba, hasta el inspirado momento de dar la vuelta al diagrama de velocidades, puede verse en las páginas de *Matter and Motion*, de James Clerk Maxwell, publicado en 1877. Maxwell atribuye el método de la prueba a sir William Hamilton, un nombre conocido por todos los físicos. (El hamiltoniano es un elemento crucial en mecánica cuántica.) Al parecer, Hamilton fue el primero en utilizar el diagrama de velocidades, que él llamó odógrafo, para analizar el movimiento de un cuerpo. En la conferencia, Feynman atribuye generosamente a un misterioso «señor Fano» la idea del diagrama circular de velocidades. Se refiere a U. Fano y L. Fano, autores de *Basic Physics of Atoms and Molecules* (1959), donde se utiliza un diagrama circular de velocidades para derivar la ley de dispersión de Rutherford, de la que habla Feynman al final de la conferencia. Si Fano y Fano conocían a Hamilton y su odógrafo, no lo dicen.

Hamilton pertenecía a la secular tradición dedicada a ajustar la mecánica de Newton con formulaciones de elegancia y sutileza crecientes. Más de doscientos años después de publicarse los *Principia*, el universo newtoniano gobernaba con autoridad absoluta. A comienzos del siglo XX, sin embargo, tuvo lugar en física otra revolución científica de casi tanta repercusión como la primera. Cuando pasó, las leyes de Newton ya no se podían considerar reveladoras de la naturaleza íntima de la realidad física.

La segunda revolución se produjo en dos frentes separados que ni siquiera hoy se han conciliado del todo. Uno produjo la teoría de la relatividad. La otra produjo la mecánica cuántica.

Las huellas de la teoría de la relatividad pueden rastrearse hasta el descubrimiento de Galileo de que todos los cuerpos caen a la misma velocidad, tengan la masa que tengan. La explicación newtoniana decía que la masa de un cuerpo tiene dos papeles diferentes en física: uno consiste en resistirse a los cambios de movimiento del cuerpo, el otro en aplicar la fuerza gravitatoria al cuerpo. Así, cuanto mayor es la masa de un cuerpo, más fuerte es la gravedad sobre él, pero también es más difícil moverlo. Los cuerpos muy pesados (que caen hacia la Tierra, por ejemplo) sufren un tirón mucho mayor, pero se oponen con más fuerza a la aceleración. Los cuerpos ligeros sufren un tirón menor, pero aceleran con más facilidad. El resultado neto es que todos los cuerpos caen exactamente a la misma velocidad. Esta curiosa coincidencia se admitió sin más como parte del precio de la tremenda eficacia de la mecánica de Newton.

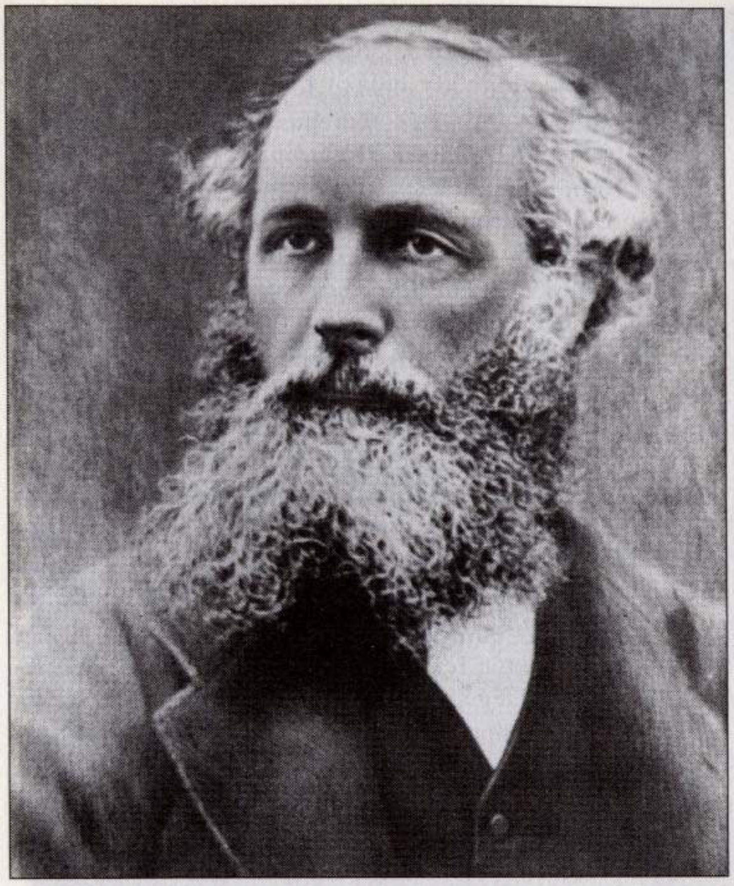
A fines del siglo XIX, sin embargo, se había puesto en duda otra parte de las leyes newtonianas como consecuencia de los descubrimientos efectuados precisamente por James Clark Maxwell. Hacía mucho que se sabía que la luz no se transmite instantáneamente, sino que más bien viaja a una velocidad concreta. Esa velocidad es muy elevada, unos 300.000 kilómetros por segundo, pero no infinita. También se sabía ya en la época de Maxwell (que vivió de 1831 a 1879, el año en que nació Einstein, y que murió, como Feynman, de cáncer de estómago) que así como la electricidad es una fuerza que opera entre cargas eléctricas, el magnetismo, la fuerza que orienta las agujas de las brújulas, no es un fenómeno ajeno a ella. Antes bien, el magnetismo es una fuerza que se genera entre corrientes eléctricas, y las corrientes eléctricas no son más que cargas eléctricas en movimiento. Maxwell descubrió que la razón entre la magnitud de la

fuerza eléctrica entre cargas en reposo y la magnitud de la fuerza magnética entre cargas de movimiento lento era igual al cuadrado de una velocidad que era precisamente la misma que la de la luz. Maxwell sabía que esto no era casual y elaboró una elegante teoría matemática, muy pronto confirmada por los experimentos, que decía que todo el espacio está lleno de campos de fuerza eléctricos y magnéticos, y que cuando estos campos se perturban, la perturbación se propaga a la velocidad de la luz; en realidad, la perturbación *es* la luz.

Que este descubrimiento socavaba las leyes de Newton no se advirtió enseguida, pero Albert Einstein no tardó en comprenderlo. En el antiguo mundo aristotélico, el estado natural de un cuerpo es el reposo. En el mundo newtoniano no existe el estado de reposo absoluto. Un cuerpo tiende a estar en movimiento, a velocidad constante y en línea recta. Si un cuerpo parece estar en reposo, eso se debe sólo a que el observador se mueve con él. La primera ley de Newton, la de la inercia, es lógica porque el estado de reposo no existe. En un universo donde no existe el reposo, donde un movimiento es tan válido como cualquier otro, la hipótesis más sencilla posible es que un cuerpo conservará el estado de movimiento que tenga, que es precisamente lo que postula la ley de la inercia. Sin embargo, si no hay reposo absoluto, tampoco debería haber velocidad absoluta. La velocidad aparente de cualquier objeto debería depender de si el observador se mueve con él o no. Aquí es donde aparece el punto crítico: las leyes de la física no deberían contener en ningún momento una velocidad definida, porque la velocidad de cualquier objeto debería depender de la velocidad del observador. Pero James Clerk Maxwell había demostrado que la luz tiene una velocidad definida, una velocidad que se puede encontrar en las fuerzas fundamentales entre imanes y entre cargas eléctricas.

Para resolver esta anomalía, Albert Einstein creó un universo completamente nuevo. Sus axiomas centrales, de los que se deduce todo lo demás, son que hay una sola velocidad absoluta de la luz, sea cual fuere la velocidad del observador, y que todos los cuerpos, sea cual fuere su masa, caen a la misma velocidad porque el tirón de la gravedad hacia abajo sobre un cuerpo es indistinguible de una aceleración hacia arriba de todo menos dicho cuerpo. Para remachar que la velocidad de la luz es la misma para todos los observadores, tiempo y distancia deben perder su significado independiente, newtoniano, y mezclarse en el espaciotiempo. Para que todos los cuerpos caigan a la misma velocidad, la fuerza de gravedad se sustituye por el espaciotiempo curvo en el que todos los cuerpos se mueven inercialmente, no en líneas rectas (que ya no existen), sino en curvas llamadas geodésicas, que son las distancias más cortas entre dos puntos situados en el espaciotiempo curvo. Todo esto en conjunto se conoce con el nombre de teoría de la relatividad (especial y general).

El otro frente de conocimiento avanzado que minó la supremacía de Newton fue la naturaleza del átomo. La existencia de los átomos se venía sospechando por lo menos desde la época de Lucrecio, en el siglo I a. C. Casi todos los científicos (sin excluir a Newton) creían en ellos, y al final obtuvieron cierto apoyo empírico en los albores del siglo XIX, gracias al químico inglés John Dalton. Dalton hizo experimentos que demostraban que las especies químicas, como el nitrógeno y el oxígeno, tendían a combinarse en razones de números enteros simples (uno y uno, uno y dos, dos y tres, y así sucesivamente; las cantidades se medían por su volumen en estado gaseoso). Estos resultados experimentales venían a decir claramente que las partes constituyentes de los gases eran átomos, que se combinaban en lo que en la actualidad llamaríamos moléculas simples (NO, NO_2, N_2O_3, etc.). Dalton, que era un experimentador mediocre pero un firme creyente en los átomos, anunció su descubrimiento basándose en muy pocas pruebas (un caso bastante corriente en la historia de la ciencia); sin embargo, químicos más expertos con-



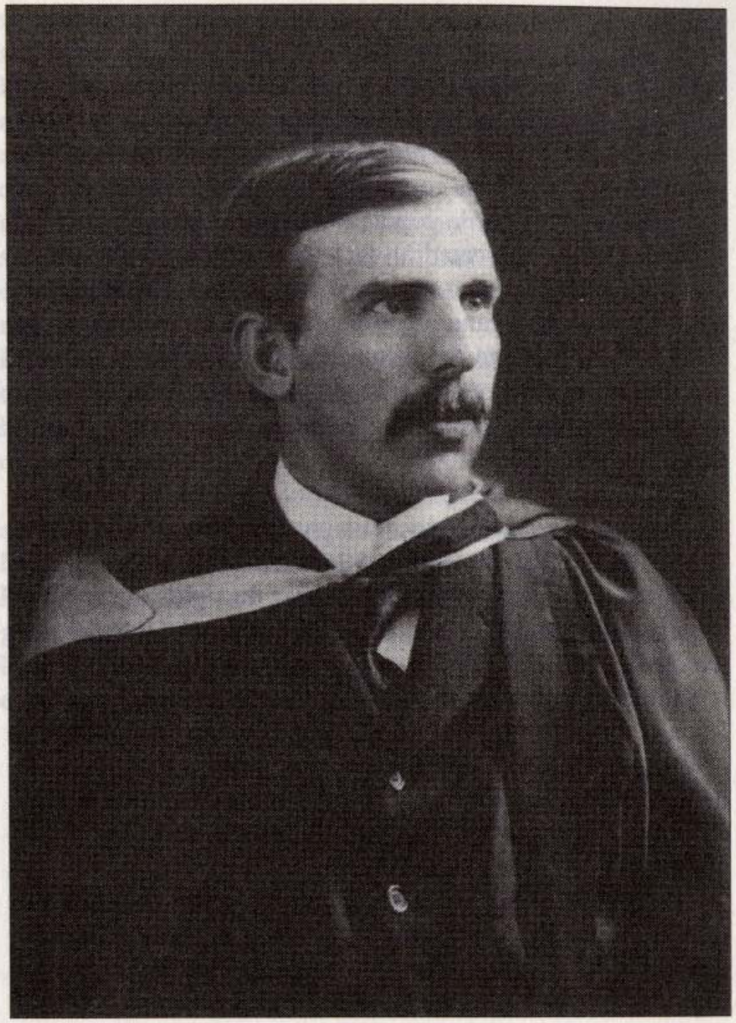
James Clerk Maxwell.

siguieron convertir su ley de proporciones simples y múltiples en uno de los dogmas fundamentales de la química experimental. Durante todo el siglo XIX el conocimiento de las propiedades de los átomos no hizo sino progresar. El artículo «Atoms» de la edición de 1875 de la *Encyclopaedia Britannica* era un soberbio resumen del estado de los conocimientos del momento, y lo firmaba «JCM», James Clerk Maxwell. El siguiente avance auténtico, sin embargo, se produjo en 1896, cuando el físico inglés J.J. Thomson demostró que todos los átomos tenían en común un elemento constituyente interior que acabó llamándose electrón.

La cuestión palpitante pasó a ser entonces la arquitectura del átomo. El experimento que hicieron Ernest Rutherford y sus colegas, y que Feynman describe en su charla, venía a decir que el átomo era una especie de sistema solar en miniatura, con un diminuto pero pesado núcleo central y electrones muy ligeros que daban vueltas en torno a él, y que estaban donde estaban, no en virtud de la gravedad, sino de la fuerza eléctrica generada entre su propia carga negativa y el núcleo positivamente cargado. Sin embargo, esta tranquilizadora concepción de que en el interior de todos los átomos había un sistema solar newtoniano en miniatura tenía una serie de defectos fundamentales, el principal de los cuales era absolutamente insalvable gracias, una vez más, a James Clerk Maxwell y su teoría del electromagnetismo. Si los electrones estuvieran realmente en órbita alrededor del núcleo, perturbarían sin cesar el campo electromagnético. Esta perturbación se propagaría a la velocidad de la luz, llevándose energía del átomo hasta que éste se viniera abajo y los electrones murieran enterrados en el núcleo, como cometas cansados que cayeran hacia el Sol. Como la experiencia corriente nos dice que casi todos los átomos son estables y longevos, el sistema solar newtoniano no sirve como descripción del funcionamiento interno del átomo.

La solución del dilema fue la invención de la mecánica cuántica. Las leyes de Newton no describen el comportamiento de lo muy pequeño. Como dice el personaje Kerner (un físico feynmaniano que se hace espía) en *Hapgood*, una obra teatral de Tom Stoppard:

«No existen electrones con una posición definida y un momento definido; si se determina una, se escapa el otro, y



Ernest Rutherford.

todo se hace sin trucos. [...] Cuando las cosas se hacen muy pequeñas, se vuelven realmente locas. [...] Cerremos el puño. Si nuestro puño representa el núcleo de un átomo, entonces el átomo es tan grande como la catedral de San Pablo, y si fuera un átomo de hidrógeno, entonces tiene un solo electrón que revolotea como una mariposa en una catedral vacía, unas veces por la cúpula, otras por el altar mayor. [...] Cada átomo es una catedral. [...] Un electrón no da vueltas como un planeta, es como una mariposa que ha estado ahí hace un momento, gana o pierde un cuanto de energía, da un salto y en el instante del salto cuántico es como si hubiera dos mariposas, una que estará aquí y otra que dejará de estar ahí; un electrón es como dos gemelos, donde cada uno es único, un único gemelo».

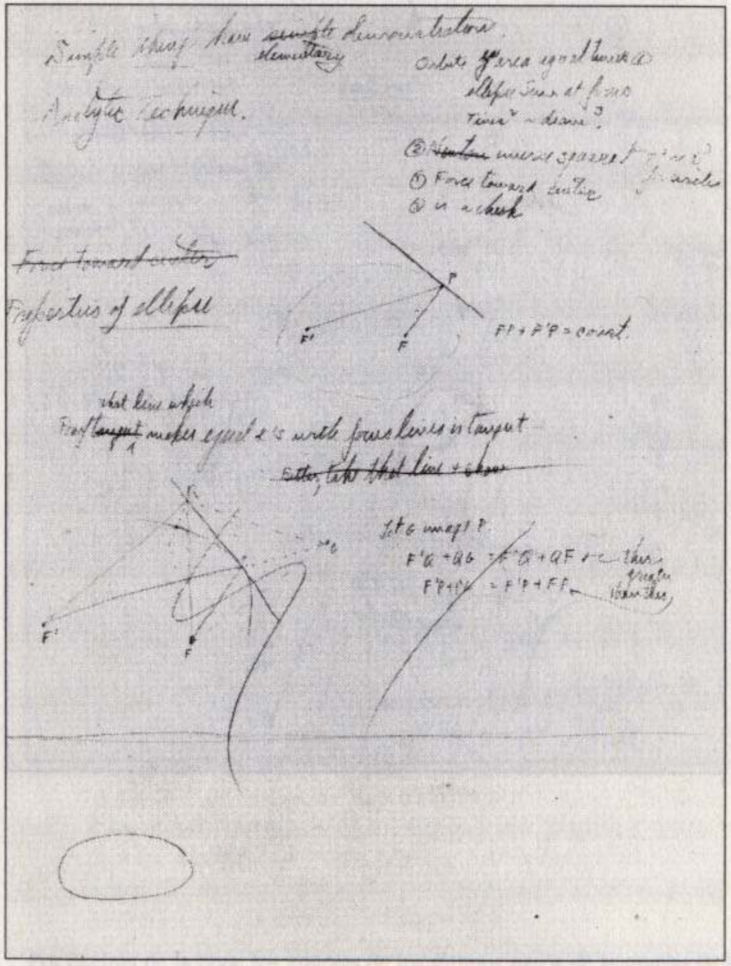
Así pues, a comienzos del siglo XX, Newton fue derrocado y en su lugar se implantó la relatividad y la mecánica cuántica, del mismo modo que un par de siglos antes Newton había desplazado a Aristóteles del centro del universo intelectual. ¿Por qué, en tal caso, seguimos enseñando física newtoniana en las escuelas? Más concretamente, ¿por qué Richard Feynman (el mismo Richard Feynman que prácticamente reinventó la mecánica cuántica y que a menudo daba brillantes conferencias sobre la teoría einsteniana de la relatividad) se molestó en reinventar la prueba de la ley de las elipses del desfasado Isaac Newton?

La respuesta es que la segunda revolución en física fue muy diferente de la primera. La primera destronó el aristotelismo y lo sustituyó por algo radicalmente diferente. La segunda revolución no destronó la física newtoniana demostrando que fuera falsa; por el contrario, la afianzó demostrando por qué era verdadera. Ya no creemos que las leyes de Newton pongan al descubierto la naturaleza profunda de la realidad física; además, ni siquiera son válidas cuando se aplican a objetos muy pequeños (electrones) o muy rápidos (velocidades próximas a la luz) o muy densos (agujeros

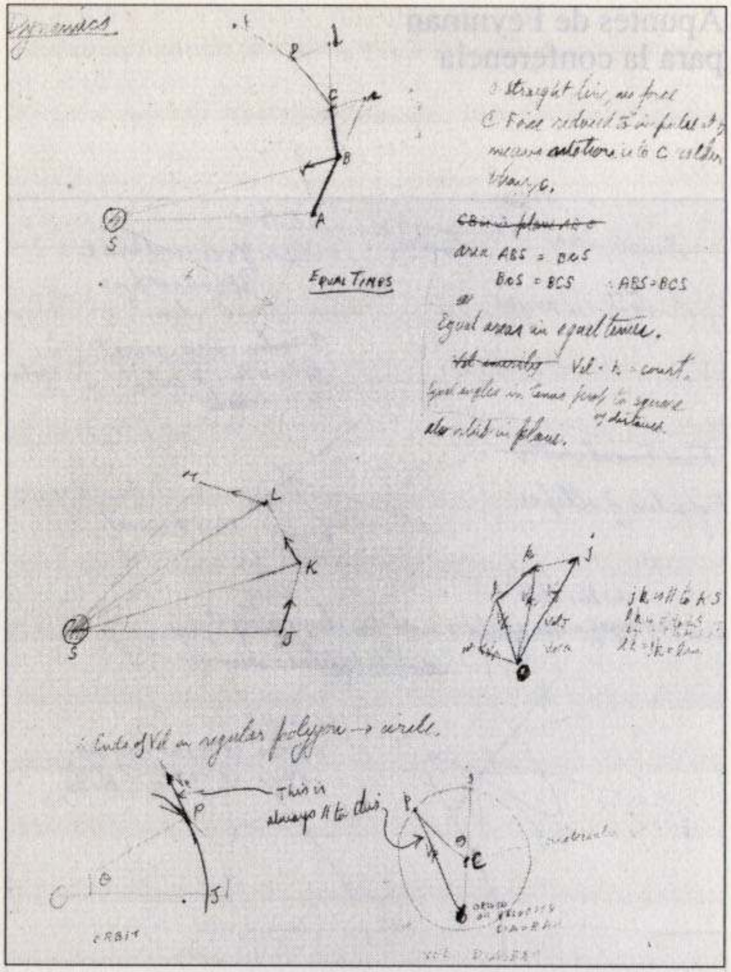
negros). Hay condiciones menos extremas en las que pueden advertirse faltas de concordancia con las predicciones de las leyes de Newton, si se sabe dónde mirar. No obstante, el mundo posterior a la segunda revolución es, casi todo él, muy parecido al mundo anterior a ella. La principal diferencia es que hoy sabemos no sólo que las leyes newtonianas nos dan una versión precisa del comportamiento del mundo, sino también por qué dichas leyes funcionan tan bien. Funcionan porque emergen de manera natural de leyes mucho más profundas, llamadas relatividad y mecánica cuántica. Estas leyes más profundas son imprescindibles para contar toda la historia (la verdad es que aún no conocemos toda la historia), pero en casi toda ella las leyes de Newton cumplen un buen papel.

Ésta es la razón de que aún enseñemos a los estudiantes a resolver problemas utilizando la física newtoniana, pero no la física aristotélica. Es también la razón de que Richard Feynman pensara que valía la pena idear una demostración geométrica personal de que las leyes de Newton, aplicadas a los planetas que giran alrededor del Sol, producen órbitas elípticas. Ésta es, en definitiva, la razón de este libro.

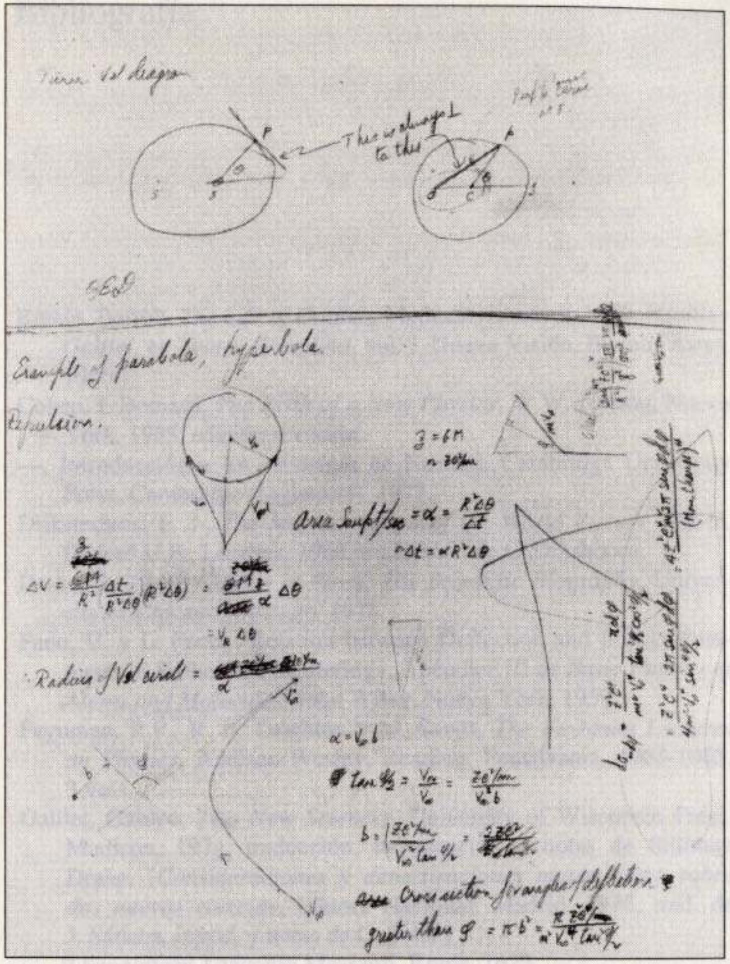
Apuntes de Feynman para la conferencia



Apuntes para las observaciones preliminares, 1964.



Casi toda la conferencia se basa en esta página. La figura superior izquierda está copiada de los *Principia* de Newton.



Por encima de la raya, los apuntes de los últimos pasos de la prueba de la ley de las elipses. Por debajo de la raya, ley de la dispersión de Rutherford.

Bibliografía

Brecht, Bertolt, *The Life of Galileo*, Methuen, Londres, 1960. [*Galileo Galilei*, en *Teatro Completo*, vol. I, Nueva Visión, Buenos Aires, 1966.]

Cohen, I. Bernard, *The Birth of a New Physics*, W.W. Norton, Nueva York, 1985, edición revisada.

—, Introducción a los *Principia* de Newton, Cambridge University Press, Cambridge (Inglaterra), 1971.

Dijksterhuis, E. J., *The Mechanization of the World Picture* (1961), Oxford U.P., Londres, 1969, traducción de C. Dikshoorn.

Drake, Stillman, *Galileo at Work: His Scientific Biography*, University of Chicago, Chicago, 1978.

Fano, U. y L. Fano, «Relation between Deflection and Impact Parameter in Rutherford Scattering», Apéndice III de *Basic Physics of Atoms and Molecules*, John Wiley, Nueva York, 1959.

Feynman, R.P., R. B. Leighton y M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Addison-Wesley, Reading, Pensilvania, 1963-1965, 3 vols.

Galilei, Galileo, *Two New Sciences*, University of Wisconsin Press, Madison, 1974, traducción, introducción y notas de Stillman Drake. [*Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, Editora Nacional, Madrid, 1976, trad. de J. Sádaba, introd. y notas de C. Solís.]

—, *Il Saggiatore*, Giacomo Massardi, Roma, 1623.

—, *Dialogue Concerning the Two Chief World Systems -Ptolemaic & Copernican*, University of California Press, Berkeley, 1962, traducción de Stillman Drake. [*Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo, ptolemaico y copernicano*, Alianza Editorial, Madrid, 1995, trad. de A. Beltrán Marí.]

Gingerich, Owen, *The Great Copernicus Chase and Other Adventures in Astronomical History*, Sky Publishing, Cambridge (Mass.), 1992.

Kepler, Johannes, *New Astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge (Inglaterra), 1992, traducción y edición de William H. Donahue.
Koestler, Arthur, *The Slepwalkers* (1959), Grosset and Dunlap, Nueva York, 1963.
Maxwell, J. Clerk, *Matter and Motion* (1887), Society for Promoting Christian Knowledge, Londres, 1920, con notas y apéndices de Sir Joseph Larmor.
Newton, Isaac, *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World*, University of California Press, Berkeley, 1934, edición de Florian Cajori. [*Principios matemáticos de la filosofía natural*, Tecnos, Madrid, 1987, trad. de A. Escohotado y M. Sáenz de Heredia, estudio preliminar y notas de A. Escohotado.]
Santillana, Giorgio de, *The Crime of Galileo*, University of Chicago Press, Chicago, 1955.
Stoppard, Tom, *Hapgood* (1988), Faber and Faber, Londres, 1994, reimpresión corregida.
—, *Arcadia*, Faber and Faber, Londres, 1993.
—, «Playing with Science», *Engineering & Science* 58 (1994), 3-13.
Thoren, Victor E., con John R. Christianson, *The Lord of Uraniborg: A Biography of Tycho Brahe*, Cambridge University Press, Cambridge (Inglaterra), 1990.
Westfall, Richard S., *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton*, Cambridge University Press, Cambridge (Inglaterra), 1980.

Índice de nombres y conceptos

Los números de página en *cursiva* se refieren a fotografías. Los números en **negrita** se refieren al texto de la conferencia perdida.

Colección Metatemas

1. ¿Qué es la vida?, Erwin Schrödinger
   (También referenciado como C. Ínfimos 107)

2. Mente y materia, Erwin Schrödinger
   (También referenciado como C. Ínfimos 110)

3. ¿Tan sólo una ilusión? Una exploración del caos al orden, Ilya Prigogine
   (También referenciado como C. Ínfimos 111)

4. Pensar la matemática, AA VV.
   (También referenciado como C. Ínfimos 114)

5. Hombre versus naturaleza, Sir Charles Sherrington
   (También referenciado como C. Ínfimos 117)

6. El azar y la necesidad, Jacques Monod
   (También referenciado como C. Ínfimos 100)

7. Controversia sobre mentes y máquinas, Edición de Alan Ross Anderson
   (También referenciado como C. Ínfimos 124)

8. Cibernética, Norbert Wiener
   (También referenciado como Superínfimos 2)

9. Ideas sobre la complejidad del mundo, Jorge Wagensberg
   (También referenciado como Superínfimos 3)

Colección Metatemas

1. ¿Qué es la vida?, Erwin Schrödinger
(También referenciado como C. Infimos 107)

2. Mente y materia, Erwin Schrödinger
(También referenciado como C. Infimos 110)

3. ¿Tan sólo una ilusión? Una exploración del caos al orden, Ilya Prigogine
(También referenciado como C. Infimos 111)

4. Pensar la matemática, AA.VV.
(También referenciado como C. Infimos 114)

5. Hombre *versus* naturaleza, Sir Charles Sherrington
(También referenciado como C. Infimos 117)

6. El azar y la necesidad, Jacques Monod
(También referenciado como C. Infimos 100)

7. Controversia sobre mentes y máquinas, Edición de Alan Ross Anderson
(También referenciado como C. Infimos 124)

8. Cibernética, Norbert Wiener
(También referenciado como Superínfimos 2)

9. Ideas sobre la complejidad del mundo, Jorge Wagensberg
(También referenciado como Superínfimos 3)

10. Ciencia y humanismo, Erwin Schrödinger
(También referenciado como C. Infimos 126)

11. Parábolas y catástrofes, René Thom
(También referenciado como Superínfimos 5)

12. Proceso al azar, P.T. Landsberg, G. Ludwig, R. Thom, E. Schatzman, R. Margalef e I. Prigogine
(También referenciado como Superínfimos 7)

12. Procés a l'atzar, P.T. Landsberg, G. Ludwig, R. Thom, E. Schatzman, R. Margalef e I. Prigogine
(También referenciado como Superínfimos 7)

13. Los objetos fractales, Benoît Mandelbrot
(También referenciado como Superínfimos 8)

14. Gödel, Escher, Bach, Douglas R. Hofstadter
(También referenciado como Superínfimos 9)

15. Física de las noches estrelladas, Eduardo Battaner
(También referenciado como Superínfimos 11)

16. Mi concepción del mundo, Erwin Schrödinger
(También referenciado como Superínfimos 12)

17. La estatua interior, François Jacob
(También referenciado como Andanzas 90)

18. Los porqués de un escriba filósofo, Martin Gardner
(También referenciado como Superínfimos 13)

19. Qué loco propósito, Francis Crick
(También referenciado como Superínfimos 14)

20. El hombre anumérico, John Allen Paulos

21. Einstein, profeta y hereje, Luis Navarro

22. Sobre la imaginación científica, H. Haken, D.R. Hofstadter, B. Mandelbrot, R. Margalef, C.U. Moulines, A. Okubo, y A. Wunderlin

23. El nacimiento del tiempo, Ilya Prigogine

24. Con razón y sin ella, Henri Atlan

25. El infinito en todas direcciones, Freeman J. Dyson

26. El siglo de la física, S. Bergia, L.J. Boya, K. von Meyenn, A. Molina, L. Navarro, F. Rohrlich, J.M. Sánchez-Ron

27. Controversias sobre las distancias cósmicas y los cuasares, Halton Arp

28. El porvenir está abierto, Karl R. Popper y Konrad Lorenz

29. Las edades de Gaia, James Lovelock

30. Materia de reflexión, Jean-Pierre Changeux y Alain Connes

31. Más allá de los números, John Allen Paulos

32. La ciencia natural del hombre, Konrad Lorenz

33. La evolución y sus metáforas, Jordi Agustí

34. Interacciones, Sheldon L. Glashow

35. De Eros a Gaia, Freeman Dyson

36. Correspondencia, Albert Einstein/Michele Besso

37. El encanto de la física, Sheldon L. Glashow

38. El quark y el jaguar, Murray Gell-Mann

39. Microcosmos, Lynn Margulis y Dorion Sagan

40. Inventar, Norbert Wiener

41. Complejidad, Roger Lewin

42. La lógica de las extinciones, Jordi Agustí

43. La tercera cultura, edición de John Brockman

44. Un matemático lee el periódico, John Allen Paulos

45. ¿Qué es la vida?, Lynn Margulis y Dorion Sagan

46. Razón y placer, Jean-Pierre Changeux

47. Cuestiones vitales, Henri Atlan y C. Bousquet

48. La naturaleza y los griegos, Erwin Schrödinger

49. La geometría fractal de la naturaleza, Benoît Mandelbrot

50. La sexta extinción, Richard Leakey y Roger Lewin

51. Las manchas del leopardo, Brian Goodwin

52. El progreso. ¿Un concepto acabado o emergente?, Jordi Agustí, Pere Alberch, Brian Goodwin, David Hull, Michael McKinney, Ramón Margalef, Michael Ruse y Jorge Wagensberg

53. Escalando el monte Improbable, Richard Dawkins

54. Ideas para la imaginación impura, Jorge Wagensberg

55. ¿Qué es el sexo?, Lynn Margulis y Dorion Sagan

Conocido incluso fuera de los ambientes científicos por su naturaleza excéntrica, **Richard Feynman** (1918-1988) ha sido uno de los físicos más eminentes e imaginativos de la segunda mitad del siglo. Profesor de física teórica y experto en la teoría cuántica del campo electromagnético, fue galardonado con el **Premio Albert Einstein** en 1954 y el **Premio Nobel** de física en 1965. ***La conferencia perdida*** pone al descubierto con toda su espontaneidad al verdadero **Richard Feynman**, un brillante y habilidoso orador capaz de hacer comprensibles los más arduos conceptos de la física a un público muy amplio.

El 13 de marzo de 1964 **Feynman** dio a los estudiantes del primer curso del Instituto Tecnológico de California una charla sobre «**El movimiento de los planetas alrededor del Sol**», en la que expuso, sirviéndose de unas matemáticas elementales como si de una clase de bachillerato se tratara, por qué los planetas se mueven describiendo elipses y no círculos perfectos. Era algo que ya había explicado trescientos años antes Isaac Newton en su obra maestra, *Principia*. Pero **Feynman** idea una nueva prueba geométrica y demuestra de manera concluyente el asombroso fenómeno que ha intrigado a todos los grandes filósofos: que la naturaleza obedece a leyes matemáticas, un descubrimiento que separó el mundo antiguo del moderno y que supuso la culminación de la revolución científica... En esta edición **David** y **Judith Goodstein** no sólo reconstruyen tan brillante charla —que había permanecido **dormida en los archivos del Instituto durante treinta años**—, sino que complementan con todo detalle la evolución de las ideas sobre el movimiento de los planetas.

Fundació "la Caixa"
Museu de la Ciència

ISBN 84-8310-619-1
9 788483 106198

TUSQUETS EDITORES