

Física

para ciencias e ingeniería

DÉCIMA EDICIÓN













Volumen 1












SERWAY | JEWETT












Carta pedagógica de colores









Mecánica y termodinámica

Desplazamiento y vectores de posición	
Vectores desplazamiento y componentes de los vectores de posición	
Vectores de velocidad lineal (\vec{v}) y angular ($\vec{\omega}$)	
Vectores componentes de la velocidad	
Vectores de fuerza (\vec{F})	
Vectores componentes de fuerza	
Vectores aceleración (\vec{a})	
Vectores componentes de aceleración	
Flechas de transferencia de energía	  
Flecha de proceso	


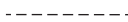


vectores cantidad de movimiento lineal (\vec{p}) y cantidad de movimiento angular (\vec{L})	
Vectores componentes de cantidad de movimiento lineal y angular	
Vectores de momento de fuerza ($\vec{\tau}$)	
Vectores componentes de momento de fuerza	
Direcciones de diagramas de movimiento lineal o rotacional	
Flecha de dimensión rotacional	
Flecha ampliada	
Resortes	
Poleas	





Electricidad y magnetismo

Líneas de campo eléctrico	
Vectores de campo eléctrico	
Vectores componentes de campo eléctrico	
Líneas de campo magnético	
Vectores de campo magnético	
Vectores componentes de campo magnético	
Cargas positivas	
Cargas negativas	
Resistencias	
Baterías y otros Fuentes de alimentación de CC	
Interruptores	

Capacitores	
Inductores (bobinas)	
Voltímetros	
Amperímetros	
Fuentes de CA	
Lamparas	
Símbolo de tierra	
Corriente	

Luz y óptica

Rayos de luz	
Extensión del rayo de luz	
Lente convergente	
Lente divergente	

Espejo plano	
Espejo curvo	
Objetos	
Imágenes	





Física

1

para ciencias e ingeniería

DÉCIMA EDICIÓN

Raymond A. Serway

Emeritus, James Madison University

John W. Jewett, Jr.

Emeritus, California State Polytechnic University, Pomona

Con las contribuciones de Vahé Peromian, University of Southern California

Traducción

Ana Elizabeth García Hernández

Revisión técnica

Misael Flores Rosas

Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas

Instituto Politécnico Nacional

Revisión técnica

Luis González Urbán

Instituto Politécnico Nacional

Marcela Martha Villegas Garrido

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Estado de México

Mario Alberto Montante Garza

Instituto Tecnológico de Querétaro

Miguel Ángel Alonzo Flores

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente

Omar Olmos López

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Monterrey

Oswaldo Monroy Nava

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Toluca

Raymundo Escamilla Sánchez

Universidad Autónoma del Estado de México

Rodolfo Felix Acosta

Universidad LaSalle del Noroeste

Rodolfo Rodríguez y Masegosa

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Monterrey

Samuel Rosalio Cuevas

Universidad de Guadalajara

Costa Rica

Fernando Ureña Elizondo

Universidad de Costa Rica

Germán Vidaurre

Universidad de Costa Rica

México

Adrián Arreola Pérez

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Querétaro

Aurelio Domínguez González

Universidad Autónoma de Querétaro

Carlos Alberto Pereyda Pierre

Instituto Tecnológico de Hermosillo

Claudia Camacho Zuñiga

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Toluca

Fredy Jiménez Rojas

Instituto Tecnológico de Celaya

Jaime Castillo Torres

Universidad Iberoamericana

Jaime Jiménez

Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey, campus Toluca

Javier León Cárdenas

Instituto Politécnico Nacional

José García Romero

Universidad Autónoma del Estado de México

José Luis Luna Segovia

Instituto Tecnológico de Celaya

Juan Méndez Ramírez

Tecnológico de Estudios Superiores de Jocotitlán

Judith Pérez Morales

Universidad Autónoma del Estado de México

Lucio López Cavazos

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Querétaro



Física para ciencias e ingeniería 1**Décima edición**

Raymond A. Serway

John W. Jewett, Jr.

Director Higher Education**Latinoamérica:**

Renzo Casapía Valencia

Gerente editorial Latinoamérica:

Jesús Mares Chacón

Editor Senior Hardside:

Pablo Miguel Guerrero Rosas

Coordinador de manufactura:

Rafael Pérez González

Diseño de portada:

Edgar Maldonado Hernández

Imágenes de portada:

Zhang Jian/Chengdu Economic Daily/

VCG/Getty Images

Composición tipográfica:

Ediciones OVA

© D.R. 2018 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una Compañía de Cengage Learning, Inc. Carretera México-Toluca núm. 5420, oficina 2301. Col. El Yaqui. Del. Cuajimalpa. C.P. 05320. Ciudad de México.

Cengage Learning® es una marca registrada usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de este trabajo amparado por la Ley Federal del Derecho de Autor, podrá ser reproducida, transmitida, almacenada o utilizada en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo, pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado, reproducción, escaneo, digitalización, grabación en audio, distribución en internet, distribución en redes de información o almacenamiento y recopilación en sistemas de información a excepción de lo permitido en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor, sin el consentimiento por escrito de la Editorial. Reg. 453

Traducido del libro:

Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics

Volume 1, Tenth Edition

Raymond A. Serway, John W. Jewett, Jr

© 2019

ISBN: 978-1-337-55358-2

Datos para catalogación bibliográfica:

Serway, Raymond A. y Jewett, John W

Física para ciencias e ingeniería 1,

Décima edición

ISBN: 978-607-526-671-8

Visite nuestro sitio web en:

<http://latinoamerica.cengage.com>



*Dedicamos este libro a nuestras esposas
Elizabeth y Lisa,
y a todos nuestros hijos y nietos,
por su amorosa comprensión cuando
pasamos tiempo escribiendo en lugar de estar con ellos.*



Contenido Breve

P A R T E 1 Mecánica 1

- 1 Física y medición 2
- 2 Movimiento en una dimensión 20
- 3 Vectores 52
- 4 Movimiento en dos dimensiones 68
- 5 Las leyes del movimiento 95
- 6 Movimiento circular y otras aplicaciones de las leyes de Newton 127
- 7 Energía de un sistema 150
- 8 Conservación de la energía 181
- 9 Equilibrio estático y elasticidad 210
- 10 Rotación de un objeto rígido en torno a un eje fijo 249
- 11 Cantidad de movimiento angular 285
- 12 Equilibrio estático y elasticidad 310
- 13 Gravitación universal 332
- 14 Mecánica de fluidos 358

P A R T E 2 Oscilaciones y ondas mecánicas 385

- 15 Movimiento oscilatorio 386
- 16 Movimiento ondulatorio 415
- 17 Sobreposición y ondas estacionarias 451

P A R T E 3 Termodinámica 481

- 18 Temperatura 482
- 19 Primera ley de la termodinámica 501
- 20 Teoría cinética de los gases 533
- 21 Máquinas térmicas, entropía y segunda ley de la termodinámica 556



Contenido

Acerca de los autores viii
Prefacio ix
Al estudiante xxiv

P A R T E 1 Mecánica 1

1 Física y medición 2

- 1.1 Estándares de longitud, masa y tiempo 3
- 1.2 Modelado y representaciones alternativas 6
- 1.3 Análisis dimensional 10
- 1.4 Conversión de unidades 12
- 1.5 Estimaciones y cálculos de orden de magnitud 12
- 1.6 Cifras significativas 13

2 Movimiento en una dimensión 20

- 2.1 Posición, velocidad y rapidez de una partícula 21
- 2.2 Velocidad y rapidez instantáneas 24
- 2.3 Modelo de análisis: La partícula bajo velocidad constante 27
- 2.4 Propuesta del modelo de análisis para resolver problemas 30
- 2.5 Aceleración 32
- 2.6 Diagramas de movimiento 36
- 2.7 Modelo de análisis: La partícula bajo aceleración constante 37
- 2.8 Objetos en caída libre 41
- 2.9 Ecuaciones cinemáticas deducidas del cálculo 44

3 Vectores 52

- 3.1 Sistemas coordenados 53
- 3.2 Cantidades vectoriales y escalares 54
- 3.3 Aritmética vectorial básica 55
- 3.4 Componentes de un vector y vectores unitarios 58

4 Movimiento en dos dimensiones 68

- 4.1 Vectores de posición, velocidad y aceleración 69
- 4.2 Movimiento en dos dimensiones con aceleración constante 71
- 4.3 Movimiento de proyectil 74
- 4.4 Modelo de análisis: Partícula en movimiento circular uniforme 81
- 4.5 Aceleraciones tangencial y radial 84
- 4.4 Velocidad y aceleración relativas 85

5 Las leyes del movimiento 95

- 5.1 Concepto de fuerza 96
- 5.2 Primera ley de Newton y marcos inerciales 97
- 5.3 Masa 99
- 5.4 Segunda ley de Newton 99
- 5.5 Fuerza gravitacional y peso 102
- 5.6 Tercera ley de Newton 103
- 5.7 Modelos de análisis utilizando la segunda ley de Newton 105

6 Movimiento circular y otras aplicaciones de las leyes de Newton 127

- 6.1 Extensión del modelo de partícula en el movimiento circular uniforme 128
- 6.2 Movimiento circular no uniforme 133
- 6.3 Movimiento en marcos acelerados 135
- 6.4 Movimiento en presencia de fuerzas resistivas 138

7 Energía de un sistema 150

- 7.1 Sistemas y entornos 151
- 7.2 Trabajo realizado por una fuerza constante 151
- 7.3 Producto escalar de dos vectores 154
- 7.4 Trabajo realizado por una fuerza variable 156
- 7.5 Energía cinética y el teorema trabajo-energía cinética 161
- 7.6 Energía potencial de un sistema 165
- 7.7 Fuerzas conservativas y no conservativas 169
- 7.8 Diagramas de energía y equilibrio de un sistema 171
- 7.9 Diagramas de energía y equilibrio de un sistema 173

8 Conservación de la energía 181

- 8.1 Modelo de análisis: Sistema aislado (Energía) 182
- 8.2 Modelo de análisis: El sistema aislado (Energía) 185
- 8.3 Situaciones que incluyen fricción cinética 191
- 8.4 Cambios en energía mecánica para fuerzas no conservativas 196
- 8.5 Potencia 200

9 Cantidad de movimiento lineal y colisiones 210

- 9.1 Cantidad de movimiento lineal 211
- 9.2 Modelo de análisis: Sistema aislado (cantidad de movimiento) 213
- 9.3 Modelo de análisis: Sistema no aislado (cantidad de movimiento) 215
- 9.4 Colisiones en una dimensión 219



- 9.5 Colisiones en dos dimensiones 227
- 9.6 El centro de masa 230
- 9.7 Sistemas de muchas partículas 234
- 9.8 Sistemas deformables 237
- 9.9 Propulsión de cohetes 239
- 10 Rotación de un objeto rígido en torno a un eje fijo 249**
- 10.1 Posición, velocidad y aceleración angular 250
- 10.2 Análisis de modelo: Objeto rígido bajo aceleración angular constante 252
- 10.3 Cantidades angulares y traslacionales 254
- 10.4 Momento de torsión 257
- 10.5 Análisis de modelo: Objeto rígido bajo un momento de torsión neto 259
- 10.6 Cálculo de momentos de inercia 263
- 10.7 Energía cinética rotacional 267
- 10.8 Consideraciones energéticas en el movimiento rotacional 269
- 10.9 Movimiento de rodamiento de un objeto rígido 272
- 11 Cantidad de movimiento angular 285**
- 11.1 Producto vectorial y momento de torsión 286
- 11.2 Modelo de análisis: sistema no aislado (cantidad de movimiento angular) 288
- 11.3 Cantidad de movimiento angular de un objeto rígido rotatorio 293
- 11.4 Modelo de análisis: sistema aislado (cantidad de movimiento angular) 295
- 11.5 El movimiento de giroscopios y trompos 301
- 12 Equilibrio estático y elasticidad 310**
- 12.1 Modelo de análisis: Objeto rígido en equilibrio 311
- 12.2 Más acerca del centro de gravedad 312
- 12.3 Ejemplos de objetos rígidos en equilibrio estático 313
- 12.4 Propiedades elásticas de los sólidos 319
- 13 Gravitación universal 332**
- 13.1 Ley de Newton de gravitación universal 333
- 13.2 Aceleración en caída libre y fuerza gravitacional 335
- 13.3 Modelo de análisis: Partícula en un campo (gravitacional) 336
- 13.4 Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas 339
- 13.5 Energía potencial gravitacional 345
- 13.6 Consideraciones energéticas en el movimiento planetario y de satélites 347
- 14 Mecánica de fluidos 358**
- 14.1 Presión 359
- 14.2 Variación de la presión con la profundidad 360
- 14.3 Mediciones de presión 364
- 14.4 Fuerzas de flotación y principio de Arquímedes 365
- 14.5 Dinámica de fluidos 368
- 14.6 Ecuación de Bernoulli 371
- 14.7 Flujo de fluidos viscosos en tuberías 375
- 14.8 Otras aplicaciones de la dinámica de fluidos 377
- P A R T E 2**
- Oscilaciones y ondas mecánicas 385**
- 15 Movimiento oscilatorio 386**
- 15.1 Movimiento de un objeto unido a un resorte 387
- 15.2 Partícula en movimiento armónico simple 388
- 15.3 Energía del oscilador armónico simple 394
- 15.4 Comparación de movimiento armónico simple con movimiento circular uniforme 398
- 15.5 El péndulo 400
- 15.6 Oscilaciones amortiguadas 404
- 15.7 Oscilaciones forzadas 405
- 16 Movimiento ondulatorio 415**
- 16.1 Propagación de una perturbación 416
- 16.2 Modelo de análisis: onda viajera 419
- 16.3 La rapidez de ondas en cuerdas 423
- 16.4 Rapidez de transferencia de energía mediante ondas sinusoidales sobre cuerdas 426
- 16.5 La ecuación de onda lineal 428
- 16.6 Ondas sonoras 429
- 16.7 Rapidez de ondas sonoras 431
- 16.8 Intensidad de ondas sonoras 433
- 16.9 El efecto Doppler 438
- 17 Sobreposición y ondas estacionarias 451**
- 17.1 Modelo de análisis: Ondas en interferencia 452
- 17.2 Ondas estacionarias 456
- 17.3 Efectos de frontera: Reflexión y transmisión 459
- 17.4 Modelo de análisis: Ondas bajo condiciones de frontera 461
- 17.5 Resonancia 465
- 17.6 Ondas estacionarias en columnas de aire 466
- 17.7 Batimientos: Interferencia en el tiempo 469
- 17.8 Patrones de ondas no sinusoidales 472
- P A R T E 3**
- Termodinámica 481**
- 18 Temperatura 482**
- 18.1 Temperatura y ley cero de la termodinámica 483
- 18.2 Termómetros y escala de temperatura Celsius 484
- 18.3 Termómetro de gas a volumen constante y escala absoluta de temperatura 485



- 18.4 Expansión térmica de sólidos y líquidos 488
- 18.5 Descripción macroscópica de un gas ideal 492

19 Primera ley de la termodinámica 501

- 19.1 Calor y energía interna 502
- 19.2 Calor específico y calorimetría 505
- 19.3 Calor latente 509
- 19.4 Trabajo y calor en procesos termodinámicos 513
- 19.5 Primera ley de la termodinámica 514
- 19.6 Mecanismos de transferencia de energía en procesos térmicos 518

20 Teoría cinética de los gases 533

- 20.1 Modelo molecular de un gas ideal 534
- 20.2 Calor específico molar de un gas ideal 539
- 20.3 Equipartición de la energía 542
- 20.4 Procesos adiabáticos para un gas ideal 545
- 20.5 Distribución de rapidez molecular 547

21 Máquinas térmicas, entropía y segunda ley de la termodinámica 556

- 21.1 Máquinas térmicas y segunda ley de la termodinámica 557
- 21.2 Bombas de calor y refrigeradores 559
- 21.3 Procesos reversibles e irreversibles 562
- 21.4 La máquina de Carnot 563
- 21.5 Motores de gasolina y diesel 567
- 21.6 Entropía 570
- 21.7 Entropía en sistemas termodinámicos 572
- 21.8 Entropía y la segunda ley 578

Apéndices

A Tablas A-1

- Tabla A.1 Factores de conversión A-1
- Tabla A.2 Símbolos, dimensiones y unidades de cantidades físicas A-2

B Repaso matemático A-4

- B.1 Notación científica A-4
- B.2 Álgebra A-5
- B.3 Geometría A-10
- B.4 Trigonometría A-11
- B.5 Desarrollo de series A-13
- B.6 Cálculo diferencial A-13
- B.7 Cálculo Integral A-16
- B.8 Propagación de incertidumbre A-20

C Tabla periódica de los elementos A-22

D Unidades del SI A-24

- D.1 Unidades del SI A-24
- D.2 Algunas unidades derivadas del SI A-24

Respuestas a exámenes rápidos y problemas con numeración impar A-25

Índice I-1



Acerca de los autores



Raymond A. Serway recibió su doctorado en el Illinois Institute of Technology y es profesor emérito en la James Madison University. En 2011 fue galardonado con un doctorado honorario por parte de su alma mater, Utica College. En 1990 recibió el Madison Scholar Award en la James Madison University, donde enseñó durante 17 años. El doctor Serway comenzó su carrera docente en la Clarkson University, donde dirigió investigaciones y enseñó de 1967 a 1980. En 1977 recibió el Distinguished Teaching Award en la Clarkson University y el Alumni Achievement Award del Utica College en 1985. Como científico invitado en el IBM Research Laboratory en Zurich, Suiza, trabajó con K. Alex Muller, ganador del premio Nobel 1987. El doctor Serway también fue científico visitante en el Argonne National Laboratory, donde colaboró con su mentor y amigo, Sam Marshall. Además, el doctor Serway es coautor de *College Physics*, novena edición; *Principles of Physics*, quinta edición; *Essentials of College Physics*; *Modern Physics*, tercera edición. También es coautor del libro de bachillerato *Physics*, publicado por Holt, Rinehart y Winston. Además, el doctor Serway ha publicado más de 40 artículos de investigación en el campo de física de materia condensada y ha impartido más de 60 conferencias en reuniones profesionales. El doctor Serway y su esposa, Elizabeth, disfrutaban viajar, jugar al golf, pescar, acampar cantar en un coro de iglesia y pasar tiempo de calidad con sus cuatro hijos y diez nietos, y recientemente, otro grandioso nieto.



John W. Jewett, Jr. obtuvo su licenciatura en Física en la Drexel University y su doctorado en la Ohio State University, con especialidad en las propiedades ópticas y magnéticas de la materia condensada. El doctor Jewett comenzó su carrera académica en el Richard Stockton College de Nueva Jersey, donde enseñó de 1974 a 1984. En la actualidad es profesor emérito de física en la California State Polytechnic University, en Pomona. A lo largo de su carrera docente, el doctor Jewett ha sido un activo promotor de la educación en ciencias físicas. Además de recibir cuatro becas National Science Foundation, ayudó a fundar y dirigir el Southern California Area Modern Physics Institute (SCAMPI) y el Science IMPACT (Institute of Modern Pedagogy and Creative Teaching), que trabaja con profesores y escuelas para desarrollar curricula efectiva en ciencia. Los premios del doctor Jewett incluyen el Stockton Merit Award en el Richard Stockton College en 1980, el Outstanding Professor Award en la California State Polytechnic University de 1991-1992 y el Excellence in Undergraduate Physics Teaching Award de la American Association of Physics Teachers (AAPT) en 1998. En 2010, recibió el Alumni Lifetime Achievement Award de la Drexel University en reconocimiento a sus contribuciones en la educación en física. Ha impartido más de 100 conferencias en reuniones profesionales, incluidas conferencias en la AAPT. También ha publicado 25 artículos sobre física de la materia condensada e investigaciones en la enseñanza de la física. Además, es autor de *The World of Physics: Mysteries, Magic and Myth*, el cual proporciona un gran número de conexiones entre la física y las experiencias cotidianas. Aparte de su trabajo en este libro, es coautor de *Principles of Physics*, quinta edición, así como de *Global Issues*, un conjunto de cuatro manuales de ciencia integral para educación secundaria. Al doctor Jewett le gusta tocar piano con su banda de físicos, viajar, la fotografía submarina, las lenguas extranjeras y coleccionar antigüedades que se puedan usar como aparatos de demostración en clases de física. Lo más importante, le gusta pasar el tiempo con su esposa, Lisa, su hijo y nieto.



Prefacio

Al escribir esta décima edición de *Física para ciencias e ingeniería*, continuamos con nuestros esfuerzos por mejorar la claridad de la presentación e incluir nuevas características pedagógicas que ayudan a apoyar los procesos de aprendizaje y enseñanza. Al retroalimentar las sugerencias de los usuarios de la novena edición, información obtenida de los alumnos y profesores que utilizan WebAssign, así como de los revisores, hemos refinado el texto para satisfacer mejor las necesidades de los estudiantes y profesores.

Este libro está pensado para un curso introductorio de física para estudiantes que se especializan en ciencia o ingeniería. Todo el contenido del libro en su versión de 2 volúmenes podría cubrirse en un curso de tres semestres, pero es posible usar el material en secuencias más breves con la omisión de capítulos y secciones seleccionados. Los antecedentes matemáticos ideales de los estudiantes que tomen este curso deben incluir un semestre de cálculo. Si esto no es posible, el estudiante debe inscribirse en un curso simultáneo de introducción al cálculo.

Contenido

El material en este libro cubre temas fundamentales de física clásica y proporciona una introducción a la física moderna. El libro se divide en seis partes. En el volumen 1, la parte 1 (capítulos 1 a 14) se relaciona con los fundamentos de la mecánica newtoniana y la física de fluidos; la parte 2 (capítulos 15 a 17) cubre oscilaciones, ondas mecánicas y sonido; la parte 3 (capítulos 18 a 21) aborda el calor y la termodinámica. En el volumen 2, la parte 4 (capítulos 22 a 33) trata la electricidad y el magnetismo; la parte 5 (capítulos 34 a 37) cubre luz y óptica; la parte 6 (capítulos 38 a 44) aborda la relatividad y la física moderna.

Objetivos

Este libro de introducción a la física tiene tres objetivos principales: proporcionar al estudiante una presentación clara y lógica de los conceptos básicos y principios de la física, fortalecer la comprensión de los conceptos y principios a través de un amplio rango de interesantes aplicaciones al mundo real y desarrollar habilidades para resolver problemas por medio de un enfoque efectivamente organizado. Para alcanzar estos objetivos hemos enfatizado en argumentos físicos bien organizados y nos hemos concentrado en estrategias para resolver problemas. Al mismo tiempo hemos intentado motivar al estudiante mediante ejemplos prácticos que demuestren el papel de la física en otras disciplinas, incluidas ingeniería, química y medicina.

Un método integrador de los materiales del curso

Esta nueva edición tiene un *enfoque integrador* del material del curso con una experiencia de problemas en línea optimizada y protegida, combinada con el contenido enriquecido del libro de texto diseñado para apoyar una experiencia de aula activa. Este nuevo conjunto optimizado de tareas en línea se basa en respuestas asignadas al azar contextualizadas dependientes de la corrección del estudiante para cada problema. En esta edición, tendrá un enfoque integrador que combina a la perfección el contenido depurado con el entorno de aprendizaje, desde la resolución de problemas grupales en clase a las tareas en línea que utilizan la retroalimentación dirigida. Este enfoque guía a los estudiantes donde están, ya sea que estén estudiando en línea o con el libro de texto. Los estudiantes a menudo se acercan a un problema de tarea en línea buscando en google para encontrar la ecuación o la explicación correcta del concepto importante; sin embargo, este enfoque ha desgastado el valor atribuido a la tarea en línea cuando los estudiantes dejan el apoyo del programa por la ayuda no relacionada de otro lugar y se encuentran con información poco precisa.



Los estudiantes no necesitan salir la herramienta en línea para obtener ayuda cuando están atascados, cada uno de los problemas tiene retroalimentación que aborda la idea errónea o el error que un estudiante hizo para llegar a la respuesta equivocada. Cada problema optimizado también ofrece amplias soluciones escritas, y muchos tienen soluciones de vídeo de apoyo que van a través de una variante contextual del problema paso a paso. Dado que el conjunto optimizado de problemas no está impreso, el contenido se protege de “proveedores de soluciones” y aumentará cada año con actualizaciones de retroalimentación dirigida con base en las respuestas reales de los estudiantes.

Trabajando en conjunto con la tarea en línea optimizada y el libro de texto impreso como una experiencia de aprendizaje activa que apoye las actividades en el aula, así como la práctica y revisión después de clase. El nuevo contenido incluye actividades de *Trabajo colaborativo*, problemas ricos en contexto, y un mayor énfasis en los problemas simbólicos y conceptuales. Todos los problemas del libro de texto impreso también estarán disponibles para asignar en la herramienta en línea WebAssign.

Cambios en la décima edición

Para la décima edición se realizaron un gran número de cambios y mejoras. Algunas de las nuevas características se basan en nuestras experiencias y en las tendencias actuales en la educación científica. Se incorporaron otros cambios en respuesta a los comentarios y sugerencias ofrecidas por los usuarios de la novena edición y por los revisores del manuscrito. Las características que se presentan a continuación representan los cambios principales de la décima edición.



WebAssign para *Física en ciencia e ingeniería* (disponible en inglés y se comercializa por separado)

WebAssign es una solución educacional en línea flexible y totalmente personalizable que pone herramientas poderosas en manos de los docentes, permitiéndoles asignar, y evaluar instantáneamente el desempeño individual del estudiante y de la clase, y ayudar a sus estudiantes a dominar los conceptos del curso. Con la poderosa plataforma digital de WebAssign y el contenido específico de *Física para ciencias e ingeniería*, puede adaptar su curso con una amplia gama de ajustes de tareas, agregar sus propias preguntas y contenido, y acceder al análisis de estudiantes, cursos y herramientas de comunicación. WebAssign de *Física para ciencias e ingeniería* incluye las siguientes nuevas características para esta edición.

Problemas optimizados. Sólo disponibles en línea a través de WebAssign, este conjunto de problemas combina nuevas evaluaciones con problemas clásicos de Física para ciencias e ingeniería que se han optimizado con las retroalimentaciones justo a tiempo diseñadas por las respuestas de los estudiantes y completamente enfocadas en las soluciones de los mismos. Al mover estos problemas para que sólo estén disponibles en línea le permite a los docentes hacer pleno uso de la capacidad de WebAssign para dar a sus estudiantes contenido dinámico de evaluación, y reduce la oportunidad de que los estudiantes encuentren soluciones en línea a través de motores de búsqueda en internet. Estos problemas reducen estas opciones tanto haciendo que el texto del problema no se encuentre fácilmente y dando asistencia inmediata a los estudiantes dentro de la plataforma de tareas.

Viñetas de videos interactivos (IVV) anime a los estudiantes a que dirijan sus conocimientos fuera del aula y puedan ser usados para actividades previas a la clase en las aulas de física tradicionales e incluso en talleres. Las viñetas de vídeo interactivas incluyen análisis de vídeo en línea y tutoriales individuales interactivos para abordar las dificultades de aprendizaje identificadas por PER (investigación en educación de física). Dentro de la plataforma WebAssign hay preguntas conceptuales adicionales inmediatamente después de cada IVV con el fin de evaluar el conocimiento del estudiante con el material y refuerzan el mensaje alrededor de estos conceptos erróneos típicos. En la siguiente página aparece una imagen de una de las viñetas de vídeo interactivas:

Nuevos problemas de Ciencias de la vida. Los problemas en línea establecidos para cada capítulo en WebAssign presentan dos nuevos problemas de Ciencias de la vida que destacan la relevancia de los principios físicos a los estudiantes que toman el curso y que se están especializando en Ciencias de la vida.



Nuevas ampliaciones de problemas ¿Qué pasaría si? Los problemas en línea establecidos para cada capítulo en WebAssign tienen 6 nuevas **extensiones** ¿Qué pasaría si? a los problemas existentes. Las extensiones ¿Qué pasaría si? amplían la comprensión de los conceptos de la física más allá del simple acto de obtener un resultado numérico.

Exploraciones previas a la clase Combinan simulaciones interactivas con análisis de preguntas conceptuales y analíticas que guían a los estudiantes a una comprensión más profunda y ayudan a promover una intuición física robusta.

Una amplia oferta de nuevos tutoriales integrados. Estos tutoriales integrados fortalecen las habilidades de resolución de problemas de los estudiantes al guiarlos a través de los pasos en el proceso de resolución de problemas del libro e incluye retroalimentación importante en cada paso por lo que los estudiantes pueden practicar el proceso de resolución de problemas y mejorar sus habilidades. La retroalimentación también aborda las preconcepciones de los estudiantes y les ayuda a encontrar errores algebraicos y otros errores matemáticos. Las soluciones se llevan a cabo simbólicamente siempre que sea posible, con valores numéricos sustituidos al final. Esta característica promueve la comprensión por encima de la memorización, ayuda a los estudiantes a entender los efectos de cambiar los valores de cada variable en el problema, evita la repetición innecesaria de sustitución de los mismos números, y elimina los errores de redondeo. Mayor número de soluciones elaboradoras de problemas. Cientos de soluciones se han agregado recientemente a problemas de fin de capítulo en línea. Las soluciones de paso a paso a través de las estrategias de resolución de problemas conforme se aplican a problemas específicos.

Preguntas objetivas y conceptuales ahora exclusivamente disponibles en WebAssign. Las **preguntas objetivas** son de opción múltiple, verdadero/falso, clasificación u otro tipo de preguntas múltiples. Algunas requieren cálculos diseñados para facilitar la familiaridad de los estudiantes con las ecuaciones, las variables utilizadas, los conceptos que las variables representan, y las relaciones entre los conceptos. Otras son de naturaleza más conceptual y están diseñadas para motivar el pensamiento conceptual. Las preguntas objetivas también están escritas para dar una respuesta del sistema pensando en el sistema, y la mayoría de las preguntas podrían ser fácilmente utilizadas en estos sistemas. Las **preguntas conceptuales** son preguntas más tradicionales de respuesta corta y de tipo ensayo que requieren que los estudiantes piensen conceptualmente acerca de una situación física. Más de 900 preguntas objetivas y conceptuales están disponibles en WebAssign.



Nueva guía de implementación de WebAssign de Física para ciencias e ingeniería. La guía de implementación proporciona a los docentes de los diferentes problemas asignables, tutoriales, preguntas y actividades que están disponibles con cada capítulo de *Física para ciencias e ingeniería* en WebAssign. Los profesores pueden utilizar esta guía al tomar decisiones sobre cuál y cuántos elementos de evaluación asignar. Para facilitar esto, se incluye una visión general de cómo se integran los elementos asignables en el curso.

Nuevos elementos de evaluación

Nuevos problemas ricos en contexto de evaluación. Problemas ricos en el contexto (identificados con un icono de **CE**) siempre sitúa a “usted” como el individuo en el problema para que tenga una conexión del mundo real en vez de discutir bloques en planos o bolas en cuerdas. Se estructuran como un cuento corto y no siempre se identifica explícitamente la variable que necesita ser evaluada. Los problemas ricos en contexto pueden relacionarse con la semblanza del capítulo, podría incluir escenarios de “testigo experto”, que permiten a los estudiantes ir más allá del manejo matemático mediante el diseño de un argumento basado en resultados matemáticos, o pedir que las decisiones sean hechos en situaciones reales. Los nuevos problemas contextuales seleccionados sólo aparecerán en línea en WebAssign. Un ejemplo de un nuevo problema rico en contexto se presenta a continuación:

20. Hay la caminata 5K que tendrá lugar en su ciudad. Mientras habla con su abuela, que usa una motoneta eléctrica para moverse, ella le dice que le gustaría acompañarle con su motoneta mientras usted camina la distancia de 5.00 km. El manual que venía con su motoneta indica que con batería completamente cargada puede proporcionar 120 Wh de energía antes de que se agote. Para prepararse para la carrera, usted va para una “unidad de prueba”: comenzando con una batería completamente cargada, su abuela va a su lado mientras camina 5.00 km en terreno plano. Al final de la caminata, el indicador de uso de la batería muestra que permanece 40.0% de la carga original en la batería. Usted también sabe que el peso combinado de la motoneta y su abuela es de 890 N. Unos días más tarde, lleno de confianza de que la batería tiene suficiente energía, usted y su abuela se dirigen hacia el evento 5K. Usted no sabe, que la ruta 5K no es en terreno plano, sino que es toda cuesta arriba, terminando en un punto más alto que la línea de salida. Un funcionario de la carrera le dice que la cantidad total de desplazamiento vertical en la ruta es de 150 m. ¿Podría acompañarle su abuela en la caminata, o se quedará varado cuando la batería se agote? Suponga que la única diferencia entre su prueba en la unidad y el evento real es el desplazamiento vertical.

Nuevos problemas y actividades de Trabajo Colaborativo; Piense, dialogue y comparta. Los problemas y actividades de Trabajo Colaborativo son similares a los problemas ricos en contexto, pero tienden a beneficiarse más de las discusiones grupales porque la solución no es tan directa como para un problema de un sólo concepto. Algunos problemas de trabajo colaborativo requieren que el grupo discuta y tome decisiones; otros se hacen más desafiantes por el hecho de que alguna información no está y no se puede conocer. Todos los capítulos del texto tienen al menos un problema o actividad de trabajo colaborativo y más problemas o actividades por capítulo estarán disponibles sólo en WebAssign. En la siguiente página se presentan ejemplos de un problema de “Trabajo colaborativo” y una actividad de “Trabajo colaborativo”:

Cambios de contenido

En el volumen 1, el *capítulo 16 fue reorganizado (movimiento ondulatorio)*. Esta combinación de los capítulos 16 y 17 de la última edición tiene todo el material fundamental sobre ondas mecánicas que viajan en cuerdas y ondas sonoras a través de materiales juntos en un capítulo. Esto permite comparaciones más cercanas entre las características de los dos tipos de ondas que son similares, tales como deducciones de la velocidad de la onda. La sección de reflexión



1. Usted está trabajando haciendo entregas para una tienda de lácteos. En la parte de atrás de su camioneta hay una caja de huevos. En la tienda de lácteos se han agotado las cuerdas elásticas, por lo que la caja no está atada. Se le ha dicho que conduzca con cuidado porque el coeficiente de fricción estática entre el cajón y la cama del camión es 0.600. No está preocupado, porque están viajando por una carretera que parece perfectamente recta. Debido a su confianza y falta de atención, su velocidad ha aumentado arriba de 45.0 mi/h. De repente, ve una curva adelante con un letrero de advertencia que dice, “Peligro: curva no peraltada con radio de curvatura de 35.0 m.” Usted está a 15.0 m de donde empieza la curva. ¿Qué puede hacer para salvar los huevos: (i) tomar la curva a 45.0 mi/h, (ii) frenar hasta detenerse antes de entrar en la curva para pensar en esto, o (iii) reducir la velocidad para tomar la curva a una velocidad más lenta? Discuta estas opciones con su grupo y determine si hay un mejor camino a seguir.

3. **ACTIVIDAD** (a) Coloque diez centavos en una regla graduada horizontal, con un centavo a 10 cm, 20 cm, 30 cm, etc., hasta 100 cm. Levante con cuidado la regla, manténgala horizontal, y haga que un miembro del grupo realice una grabación de video del siguiente evento, usando un teléfono inteligente u otro dispositivo. Mientras la grabación de video está en curso, suelte el extremo de 100 cm de la regla mientras que el extremo de 0 cm descansa en el dedo de alguien o en el borde de la mesa. Al pasar las imágenes de video o ver el video en cámara lenta, determine qué centavo primero pierde contacto con la regla mientras cae. (b) Haga una determinación teórica de qué centavos deberían primero perder contacto y compararlo con su resultado experimental.

y transmisión de ondas, cuyos detalles no son necesarios en un capítulo sobre ondas viajeras, se movió al capítulo 17 (Sobreposición y ondas estacionarias) para esta edición, que se ajusta más naturalmente en una discusión sobre los efectos de condiciones frontera en ondas.

En el volumen 2, se reorganizaron los capítulos 22–24. El movimiento del material de distribución continua de la carga se movió del capítulo 22 (Campos eléctricos) al capítulo 23 (Distribuciones continuas de carga y ley de Gauss) dio como resultado un capítulo que es una introducción más gradual para los estudiantes en el nuevo y desafiante tema de electricidad. El capítulo ahora implica solamente campos eléctricos debido a cargas puntuales y a campos eléctricos uniformes debido a placas paralelas.

El capítulo 23 antes incluía sólo el análisis de campos eléctricos debido a distribuciones continuas de la carga usando la ley de Gauss. El movimiento del material de la distribución continua de carga al capítulo 23 da como resultado un capítulo completo basado en el análisis de campos de distribuciones de carga continua, utilizando dos técnicas: la integración y la ley de Gauss.

El capítulo 23 antes contenía una discusión de las cuatro características de conductores cargados aislados. Tres de estas características fueron discutidas con argumentos de principios básicos, mientras que el estudiante era referido al material necesario del capítulo siguiente (Potencial eléctrico) para una discusión de la cuarta característica. Con el movimiento de esta discusión al capítulo 24 para esta edición, el estudiante ha aprendido todo el material básico necesario antes de la discusión de las características de los conductores cargados aislados, y pueden discutir las cuatro características a partir de principios básicos.

Reorganización del capítulo 43 (física nuclear). En esta edición se han combinado los capítulos 44 (estructura nuclear) y 45 (aplicaciones de la física nuclear) en la última edición. Este nuevo capítulo 43 permite estudiar todo el material sobre física nuclear. Como consecuencia, ahora tenemos una serie de los cinco capítulos finales del texto donde cada una de las portadas de un capítulo se centró en las aplicaciones de los principios fundamentales estudiados antes: Capítulo 40 (Mecánica cuántica), Capítulo 41 (Física atómica), Capítulo 42 (Moléculas y sólidos), Capítulo 43 (Física nuclear), y Capítulo 44 (Física de partículas).

Nueva sección llamada “Imagine” como introducción al texto del capítulo. Cada capítulo se abre con una sección de *Imagine*. Esta característica proporciona una historia continua a través de todo el libro de “usted” como un estudiante de física inquisitivo observando y analizando fenómenos que ve en la vida cotidiana. Esta sección en muchos capítulos implica medidas hechas con un teléfono inteligente, observaciones de videos de YouTube, o investigaciones en Internet.

Nuevas conexiones de apertura de capítulos. El inicio de cada capítulo también se incluye una sección de conexiones que muestra cómo el material del capítulo se conecta con el material previamente estudiado y con el material futuro. La sección de conexiones proporciona un “panorama general” de los conceptos, explica por qué este capítulo se coloca en este lugar en particular en relación con los otros capítulos, y muestra cómo la estructura de la física se basa en material previo.



Características del texto

La mayoría de los profesores creen que el libro de texto seleccionado para un curso debe ser la guía principal del estudiante para entender y aprender el tema. Además, el libro de texto debe ser fácilmente accesible y debe ser estilizado y escrito para facilitar la instrucción y el aprendizaje. Con estos puntos en mente, hemos incluido muchas características pedagógicas, enumeradas a continuación, que están destinadas a mejorar su utilidad tanto para los estudiantes como para los docentes.

Resolución de problemas y comprensión conceptual

Enfoque del modelo de análisis para resolver problemas. Los estudiantes se enfrentan a cientos de problemas durante sus cursos de física. Un número relativamente pequeño de principios fundamentales forman la base de estos problemas. Cuando se enfrenta a un nuevo problema, un físico forma un modelo del problema que se puede resolver de una manera sencilla identificando el principio fundamental que es aplicable en el problema. Por ejemplo, muchos problemas implican la conservación de la energía, la segunda ley de Newton, o las ecuaciones cinemáticas. Debido a que el físico ha estudiado estos principios y sus aplicaciones ampliamente, él o ella puede aplicar este conocimiento como un modelo para resolver un nuevo problema. Aunque sería ideal que los estudiantes siguieran este mismo proceso, la mayoría de los estudiantes tienen dificultades para familiarizarse con toda la paleta de principios fundamentales que están disponibles. Es más fácil que los estudiantes identifiquen una situación en lugar de un principio fundamental.

El *enfoque de modelo de análisis* establece un conjunto estándar de situaciones que aparecen en la mayoría de los problemas de la física. Estas situaciones se basan en una entidad en uno de los cuatro modelos de simplificación: partícula, sistema, objeto rígido y onda. Una vez que se identifica el modelo de simplificación, el estudiante piensa acerca de lo que la entidad está haciendo o cómo interactúa con su entorno. Esto conduce al estudiante a identificar un modelo de análisis específico para el problema. Por ejemplo, si un objeto está cayendo, el objeto se reconoce como una partícula que experimenta una aceleración debida a la gravedad que es constante. El estudiante ha aprendido que el modelo de análisis de una partícula bajo aceleración constante describe esta situación. Además, este modelo tiene un pequeño número de ecuaciones asociadas con él para su uso en el inicio de problemas, las ecuaciones cinemáticas presentadas en el capítulo 2. Por tanto, una comprensión de la situación ha llevado a un modelo de análisis, que luego identifica un número muy pequeño de ecuaciones para iniciar el problema, en lugar de las múltiples ecuaciones que los estudiantes ven en el libro. De esta manera, el uso de modelos de análisis lleva al estudiante a identificar el principio fundamental. A medida que el estudiante gane más experiencia, él o ella se recargará menos en el enfoque del modelo de análisis y comenzará a identificar los principios fundamentales directamente.

El enfoque del modelo de análisis para la resolución de problemas se presenta en su totalidad en el capítulo 2 (sección 2.4, páginas 30–32), y proporciona a los estudiantes un proceso estructurado para resolver problemas. En todos los capítulos restantes, la estrategia se emplea explícitamente en todos los ejemplos para que los alumnos aprendan cómo se aplica. Se motiva a los estudiantes a seguir esta estrategia cuando trabaje con problemas de fin de capítulo.

Los **cuadros descriptivos del modelo de análisis** se presentan al final de cualquier sección que introduce un nuevo modelo de análisis. Esta característica recapitula el modelo de análisis introducido en la sección y proporciona ejemplos de los tipos de problemas que un estudiante podría resolver utilizando el modelo de análisis. Estas cajas funcionan como un “repaso” antes de que los estudiantes vean los modelos de análisis en uso en los ejemplos trabajados para una sección dada. El enfoque se refuerza en el resumen de final de capítulo bajo el encabezado de los *Modelos de análisis para la resolución de problemas*, y a través de **Tutoriales del modelo de análisis** que se basan en los problemas de fin de capítulo seleccionados y que se presentan en webAssign.

Tutoriales del modelo de análisis. John Jewett desarrolló 165 tutoriales (que aparecen en los conjuntos de problemas del texto impreso están indicados por un icono **AMT**) que fortalecen las habilidades de resolución de problemas de los estudiantes al guiarlos a través de los pasos en el proceso de resolución de problemas. Los primeros pasos importantes incluyen hacer predicciones y enfocarse en conceptos de física antes de resolver el pro-



blema cuantitativamente. Un componente crítico de estos tutoriales es la selección de un modelo de análisis apropiado para describir lo que está sucediendo en el problema. Este paso permite a los estudiantes hacer el importante vínculo entre la situación en el problema y la representación matemática de la situación. Los tutoriales del modelo de análisis incluyen retroalimentación significativa en cada paso para ayudar a los estudiantes a practicar el proceso de resolución de problemas y mejorar sus habilidades. Además, la retroalimentación se refiere a los conceptos erróneos de los estudiantes y les ayuda a detectar otros errores algebraicos y matemáticos. Las soluciones se llevan a cabo simbólicamente cada vez que sea posible, sustituyendo valores numéricos al final. Esta función ayuda a los estudiantes a comprender los efectos de cambiar los valores de cada variable en el problema, evita la sustitución repetitiva innecesaria de los mismos números y elimina los errores de redondeo. Los comentarios al final del tutorial motivan a los estudiantes a comparar la respuesta final con sus predicciones originales.

Ejemplos trabajados. Todos los ejemplos trabajados en el libro se presentan en un formato de dos columnas para reforzar mejor los conceptos físicos. La columna de la izquierda muestra información textual que describe los pasos para resolver el problema. La columna derecha muestra las manipulaciones matemáticas y los resultados al seguir estos pasos. Esta disposición facilita la relación del concepto con su ejecución matemática y ayuda a los alumnos a organizar su trabajo. Los ejemplos siguen de cerca el enfoque del modelo de análisis para la resolución de problemas introducidos en la sección 2.4 para reforzar los hábitos eficaces de resolución de problemas. Todos los ejemplos trabajados en el texto se pueden asignar para la tarea en WebAssign. Una muestra de un ejemplo trabajado se puede encontrar en la página siguiente.

Los ejemplos consisten en dos tipos. El primer tipo (y más común) de ejemplo presenta un problema y una respuesta numérica. El segundo tipo de ejemplo es de naturaleza conceptual. Para dar cabida a un mayor énfasis en la comprensión de los conceptos físicos, los muchos ejemplos conceptuales están etiquetados como tales y están diseñados para ayudar a los estudiantes a centrarse en la situación física en el problema. Las soluciones de los ejemplos trabajados se presentan simbólicamente en la medida de lo posible, con valores numéricos sustituidos al final. Este enfoque ayudará a los estudiantes a pensar simbólicamente cuando se resuelven problemas en lugar de insertar innecesariamente números en ecuaciones intermedias.

¿Qué pasaría si? Aproximadamente un tercio de los ejemplos trabajados en el libro tienen una característica ¿qué pasaría si? Al final de la solución del ejemplo, ¿qué pasaría si? la pregunta ofrece una variación de la situación planteada en el ejemplo del libro. Esta característica motiva a los estudiantes a pensar en los resultados del ejemplo, y también ayuda a la comprensión conceptual de los principios. ¿Qué pasaría si? las preguntas también preparan a los estudiantes para encontrar problemas novedosos que se pueden incluir en los exámenes. Los problemas de fin de capítulo seleccionados también incluyen esta característica.

Cuestionarios rápidos. Se les proporcionan a los estudiantes una oportunidad de probar su comprensión de los conceptos físicos presentados a través de cuestionarios rápidos. Las preguntas requieren que los estudiantes tomen decisiones con base en el razonamiento sólido, y se han escrito algunas de preguntas para ayudar a los estudiantes a superar los conceptos erróneos comunes. Los cuestionarios rápidos se han escrito en un formato objetivo, incluyendo opción múltiple, verdadero-falso y clasificación. Las respuestas a todas las preguntas del cuestionario rápido se encuentran al final del libro. Muchos docentes optan por usar estas preguntas en un estilo de enseñanza de “Instrucción peer” o con el uso del sistema de respuesta personal “contador”, pero también se pueden usar en formato de cuestionario estándar. A continuación, se presenta un ejemplo de un cuestionario rápido.

EJAMEN RÁPIDO 7.5 Un dardo se carga en una pistola de resorte al comprimir a éste por una distancia x . En la segunda carga, al resorte se le comprime una distancia $2x$. ¿Qué tan rápido, comparado con el primero, el segundo dardo abandona la pistola? (a) cuatro veces más, (b) dos veces más, (c) igual, (d) la mitad, (e) la cuarta parte.





Todos los problemas trabajados están también disponibles para asignarse como ejemplos interactivos en WebAssign.

Ejemplo 3.2 Un viaje de vacaciones

Un automóvil viaja 20.0 km al norte y luego a 35.0 km en una dirección 60.0° al noroeste, como se muestra en la figura 3.11a. Encuentre la magnitud y dirección del desplazamiento resultante del automóvil.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Los vectores \vec{A} y \vec{B} dibujados en la figura 3.11a ayudan conceptualizar el problema. También se ha dibujado el vector resultante \vec{R} . Esperamos que su magnitud sea de unas pocas decenas de kilómetros. El ángulo β que hace que el vector resultante con el eje y se espera que sea menos de 60° , el ángulo que el vector \vec{B} hace con el eje y .

Categorizar Este ejemplo se puede clasificar como un simple problema de análisis acerca de suma vectorial. El desplazamiento \vec{R} es la resultante cuando se añaden los dos desplazamientos individuales \vec{A} y \vec{B} . Además, se puede clasificar como un problema acerca del análisis de triángulos, así que se acude a la experiencia en geometría y trigonometría.

Analizar En este ejemplo se muestran dos formas para analizar el problema de encontrar la resultante de dos vectores. La primera es resolver el problema mediante la geometría, con el uso de papel graficado y un transportador para medir la magnitud de \vec{R} y su dirección en la figura 3.11a. (De hecho, aun cuando sepa que va a realizar un cálculo, debe bosquejar los vectores para comprobar sus resultados.) Con una regla y transportador ordinarios, típicamente un buen diagrama da respuestas con dos dígitos pero no con una precisión de tres dígitos. ¡Intente usar estas herramientas en \vec{R} en la figura 3.11a y compare con el análisis trigonométrico que se muestra a continuación!

La segunda forma de resolver el problema es analizarlo con álgebra. La magnitud de \vec{R} se obtiene a partir de la ley de cosenos, tal como se aplica al triángulo en la figura 3.11a (véase el apéndice B.4).

Aplique $R^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$ de la ley de cosenos para encontrar R :

Sustituya valores numéricos y Note que $\theta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$:

Aplique la ley de senos (apéndice B.4) para encontrar la dirección de \vec{R} medida desde la dirección norte:

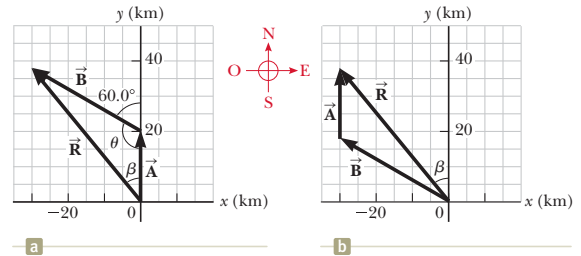


Figura 3.11 (Ejemplo 3.2) (a) Método gráfico para encontrar el vector de desplazamiento resultante $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$. (b) Sumando los vectores en orden inverso ($\vec{B} + \vec{A}$) da el mismo resultado para \vec{R} .

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta}$$

$$R = \sqrt{(20.0 \text{ km})^2 + (35.0 \text{ km})^2 - 2(20.0 \text{ km})(35.0 \text{ km}) \cos 120^\circ} = 48.2 \text{ km}$$

$$\frac{\sin \beta}{B} = \frac{\sin \theta}{R}$$

$$\sin \beta = \frac{B}{R} \sin \theta = \frac{35.0 \text{ km}}{48.2 \text{ km}} \sin 120^\circ = 0.629$$

$$\beta = 38.9^\circ$$

El desplazamiento resultante del automóvil es 48.2 km con una dirección de 38.9° al noroeste.

Finalizar ¿El ángulo β , que se calculó, concuerda con una estimación realizada al observar la figura 3.11a o con un ángulo medido del diagrama con el uso del método de la poligonal? ¿Es razonable que la magnitud de \vec{R} sea mayor que la de \vec{A} y \vec{B} ? ¿Las unidades de \vec{R} son correctas?

Aunque el método de la poligonal para sumar vectores funciona bien, tiene dos desventajas. Primera, algunas personas

encuentran abrumador el uso de las leyes de cosenos y senos. Segunda, sólo resulta un triángulo si suma dos vectores. Si suma tres o más vectores, la forma geométrica resultante no es un triángulo. En la sección 3.4 se explora un nuevo método para sumar vectores que abordará estas dos desventajas.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que el viaje se realiza considerando los dos vectores en orden inverso: 35.0 km con dirección 60.0° al noroeste primero y después 20.0 km al norte. ¿Cómo cambiarían la magnitud y dirección del vector resultante?

Respuesta No cambiarían. La ley conmutativa para la suma vectorial dice que el orden de los vectores en una suma es irrelevante. Gráficamente, la figura 3.11b muestra que los vectores Añadidos en orden inverso proporcionan el mismo vector resultante.

Cada solución se ha escrito para seguir de cerca el enfoque de modelo de análisis para resolver problemas cómo se describe en la sección 2.4 (páginas 30–32), para reforzar buenos hábitos para resolver problemas.

Cada paso de la solución se detalla en un formato de dos columnas. La columna izquierda proporciona una explicación para cada paso matemático en la columna derecha, para mejorar el reforzamiento de los conceptos físicos.

Las expresiones ¿Qué pasaría si? se presentan en aproximadamente un tercio de los ejemplos trabajados y ofrecen una variación en la situación de lo que se plantea en el texto del ejemplo. Por ejemplo, esta característica podría explorar los efectos de cambiar las condiciones de la situación, determinar qué sucede cuando una cantidad se lleva a un valor limitador particular, o pregunta si se puede determinar información adicional sobre la situación del problema. Esta característica motiva a los estudiantes a pensar en los resultados del ejemplo y ayuda a la comprensión conceptual de los principios.



Prevencciones de riesgos ocultos. Se proporcionan más de 200 prevencciones de riesgos (como la de la derecha) para ayudar a los estudiantes a evitar errores comunes y desacuerdos. Estas características, que se colocan en los márgenes del texto, abordan los conceptos erróneos comunes de los estudiantes y las situaciones en las que los estudiantes suelen seguir caminos improductivos.

Resúmenes. Cada capítulo contiene un resumen que revisa los conceptos y ecuaciones importantes que se discuten en ese capítulo. El resumen se divide en tres secciones: definiciones, conceptos y principios, y modelos de análisis para la resolución de problemas. En cada sección, recuadros tipo ficha de estudio se enfocan en cada definición, concepto, principio o análisis del modelo por separado.

Conjunto de problemas. Para la décima edición, los autores revisaron cada pregunta y problema e incorporaron revisiones diseñadas para mejorar la legibilidad y la asignación.

Problemas. Al final de cada capítulo se incluye un extenso conjunto de problemas; en total, el libro de texto impreso contiene más de 2 000 problemas, además de otros 1 500 problemas optimizados están disponibles sólo en WebAssign. Las respuestas para problemas con números impares en el texto impreso se proporcionan al final del libro, y las soluciones para todos los problemas de texto impreso se encuentran en el *Manual de soluciones del profesor*.

Los problemas de fin de capítulo están organizados por las secciones de cada capítulo (aproximadamente dos tercios de los problemas están codificados en secciones específicas del capítulo). Dentro de cada sección, los problemas ahora están en la “plataforma” de los estudiantes ordenados en forma ascendente de pensamiento en la presentación de todos los problemas sencillos en la primera sección, seguida por los problemas intermedios. (Los números de problema para problemas sencillos se imprimen en negro; los problemas de nivel intermedio están en azul.) La sección de *Problemas adicionales* contiene problemas que no están codificados en secciones específicas. Al final de cada capítulo está la sección de *Problemas de desafío*, que reúne los problemas más difíciles de un capítulo en un lugar dado. (Los problemas de desafío tienen números de problema marcados en rojo).

Hay varios tipos de problemas que aparecen en este texto:

V Vea las soluciones de vídeo disponibles en WebAssign explican las estrategias fundamentales de resolución de problemas para ayudar a los estudiantes a superar los problemas seleccionados.

C|C Los *Problemas cuantitativos/conceptuales* tienen partes que le piden a los estudiantes que piensen cuantitativa y conceptualmente. Un ejemplo de un problema cuantitativo/conceptual se presenta a continuación:

35. Un resorte horizontal unido a una pared tiene una constante elástica $k = 850 \text{ N/m}$. Un bloque de masa $m = 1.00 \text{ kg}$ se une al resorte y descansa sobre una superficie horizontal sin fricción como en la figura P8.35. (a) El bloque se jala a una posición $x_i = 6.00 \text{ cm}$ desde la posición de equilibrio y se suelta. Encuentre la energía potencial elástica almacenada en el resorte cuando el bloque está 6.00 cm de la posición de equilibrio y cuando el bloque pasa por la posición de equilibrio. (b) Encuentre la rapidez del bloque cuando pasa por el punto de equilibrio. (c) ¿Cuál es la rapidez del bloque cuando está en una posición $x_i/2 = 3.00 \text{ cm}$? (d) ¿Por qué no es la respuesta al inciso (c) la mitad de la respuesta del inciso (b).

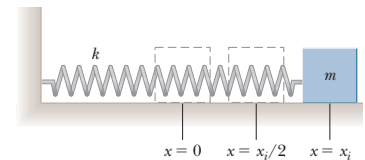


Figura P8.35

La parte d) le pide contestar una pregunta conceptual acerca de la situación.

S Los *problemas simbólicos* le piden a los estudiantes resolver un problema usando solamente la manipulación simbólica. Los revisores de la novena edición (así como la mayoría de los encuestados de una gran muestra) pidieron específicamente un aumento en el número de problemas simbólicos encontrados en el libro porque refleja mejor la forma en que los docentes quieren que sus estudiantes piensen cuando resuelven problemas de física. Un ejemplo de un problema simbólico se presenta en la siguiente página:



PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 16.2
Dos clases de rapidez/velocidad
 No confunda v , la rapidez de la onda a medida que se propaga a lo largo de la cuerda, con v_y , la velocidad transversal de un punto en la cuerda. La rapidez v es constante para un medio uniforme, mientras que v_y varía en forma senoidal.

El problema se identifica con un icono **S**

No aparece ningún número en el enunciado del problema

S 36. Un camión se mueve con aceleración constante a en una colina que hace un ángulo ϕ con la horizontal como en la figura P6.36. Una pequeña esfera de masa m está suspendida desde el techo de la camioneta por un cable ligero. Si el péndulo hace un ángulo constante θ con la perpendicular al techo, ¿a qué es igual a ?

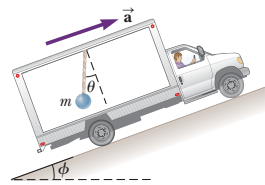


Figura P6.36

La figura muestra sólo cantidades simbólicas

La respuesta al problema es totalmente simbólica

36. $g(\cos \phi \tan \theta - \text{sen } \phi)$

PG Los problemas guiados ayudan a los estudiantes a descomponer los problemas. Un problema de la física generalmente pide una cantidad física en un contexto dado. Sin embargo, con frecuencia, se deben utilizar varios conceptos y se requieren una serie de cálculos para obtener esa respuesta final. Muchos estudiantes no están acostumbrados a este nivel de complejidad y a menudo no saben por dónde empezar. Un problema guiado descompone un problema común en pasos más pequeños, permitiendo a los estudiantes comprender todos los conceptos y estrategias requeridas para llegar a una solución correcta. A diferencia de los problemas comunes de física, la orientación se incorpora a menudo en el enunciado del problema. Los problemas guiados son una reminiscencia de cómo un estudiante podría interactuar con un profesor en una visita a su oficina. Estos problemas (hay uno en cada capítulo del texto) ayudan a entrenar a los estudiantes a descomponer problemas complejos en una serie de problemas más simples, una habilidad esencial para resolver problemas. A continuación, se presenta un ejemplo de un problema guiado:

El problema se identifica con **PG**

PG 24. Una viga uniforme que descansa sobre dos pivotes tiene una longitud $L = 6.00$ m y una masa $M = 90.0$ kg. El pivote bajo el extremo izquierdo ejerce una fuerza normal n_1 sobre la viga, y el segundo pivote ubicado a una distancia $\ell = 4.00$ m del extremo izquierdo ejerce una fuerza normal n_2 . Una mujer de masa $m = 55.0$ kg se para en el extremo izquierdo de la viga y comienza a caminar hacia la derecha, como se indica en la figura P12.24. El objetivo es encontrar la posición de la mujer cuando la viga se empieza a inclinar. (a) ¿Cuál es el análisis de modelo apropiado para la viga antes de que se incline? (b) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la viga, marque las fuerzas gravitacionales y las normales que actúan sobre la viga y coloque a la mujer a una distancia x hacia la derecha del primer pivote, el cual es el origen. (c) ¿Dónde está la mujer cuando la fuerza normal n_1 es máxima? (d) ¿Cuánto vale n_1 cuando la viga está por inclinarse? (e) Utilice la ecuación 12.1 para encontrar el valor de n_2 cuando la viga está a punto de inclinarse. (f) Empleando el resultado del inciso (d) y la ecuación 12.2, con los momentos de torsión calculados en torno al segundo pivote, determine la posición x de la mujer cuando la viga tiende a inclinarse. (g) Verifique la respuesta al inciso (a) mediante el cálculo de momentos de torsión alrededor del primer punto pivote.

Se identifica el objetivo

El análisis comienza al identificar cual es el modelo de análisis apropiado

Al estudiante se le dan sugerencias de los pasos a seguir para resolver el problema

Se pide el cálculo asociado con el objetivo

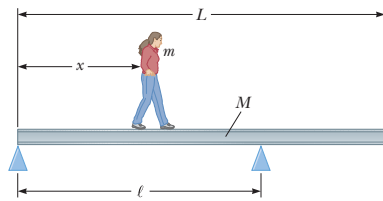


Figura P12.24

Problemas biomédicos. Estos problemas (indicados con un icono **BIO**) resaltan la relevancia de los principios de la física para los estudiantes que toman este curso que se especializan en una de las Ciencias de la vida.

T Los *tutoriales Master it* disponibles en WebAssign ayudan a los estudiantes a resolver problemas al hacerlos trabajar a través de una solución por pasos.

Problemas de imposibilidad. La investigación en física se ha centrado en gran medida en las habilidades de los estudiantes para la resolución de problemas. Aunque la mayoría de los problemas en este libro están estructurados en forma de proporcionar datos y pedir el cálculo de un resultado, dos problemas por cada capítulo, en promedio, se estructuran como problemas de imposibilidad. Comienzan con la frase *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Seguida de la descripción de una situación. El aspecto sorprendente de estos problemas es que no se hace una pregunta a los estudiantes, excepto la que aparece en cursivas al inicio. El estudiante debe determinar las preguntas que se tienen que hacer y que cálculos se deben realizar. Con base en los resultados de estos cálculos, el estudiante debe determinar por qué la situación descrita no es posible. Esta determinación puede requerir información de la experiencia personal, sentido común, de Internet o de investigación impresa, la medición, las habilidades matemáticas, el conocimiento de las normas humanas o el pensamiento científico.

Estos problemas se pueden asignar para desarrollar habilidades de pensamiento crítico en los estudiantes. También son divertidos, tienen el aspecto de “misterios” de la física que hay que resolver por parte de los alumnos de forma individual o en grupos. Un ejemplo de problema de imposibilidad se presenta a continuación:

39. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Albert Pujols hace un jonrón, de forma que la pelota libra la fila superior de las gradas, 24.0 m de altura, situada a 130 m de la base de home. La bola es golpeada a 41.7 m/s en un ángulo de 35.0° con la horizontal, y la resistencia del aire es despreciable.

Problemas dobles. Estos problemas son idénticos, uno pidiendo una solución numérica y otro una deducción simbólica. Hay al menos tres pares de estos problemas en la mayoría de los capítulos indicados por un sombreado azul claro, en los conjuntos de problemas de fin de capítulo.

Problemas de repaso. Muchos capítulos incluyen problemas de repaso que requieren que el estudiante combine conceptos cubiertos en el capítulo con los que se explicaron en capítulos anteriores. Estos problemas (indicados como problemas de **repaso**) reflejan la naturaleza cohesiva de los principios en el libro y verifican que la física no es un conjunto de ideas dispersas. Cuando se observan problemas del mundo real como el calentamiento global o las armas nucleares, puede ser necesario invocar ideas físicas de varias partes de un libro como este.

Problemas “Fermi” o que parecen imposibles. En la mayoría de los capítulos se plantea al estudiante uno o más problemas donde debe razonar en términos de orden y magnitud.

Problemas de diseño. Varios capítulos contienen problemas que le solicitan al estudiante determinar parámetros de diseño para un dispositivo práctico, de modo que pueda funcionar como se requiere.

Problemas basados en cálculo. Todos los capítulos contienen al menos un problema que aplica ideas y métodos del cálculo diferencial y un problema que usa cálculo integral.

Ilustraciones. Cada ilustración en la Décima edición es de estilo moderno que ayuda a expresar los principios de la física en el trabajo de una manera clara y precisa. Se incluyen *punteros de enfoque* en muchas figuras del texto; estos señalan aspectos importantes de una figura o guían a los estudiantes a través de un proceso ilustrado por la fotografía o las ilustraciones. Este formato ayuda a los estudiantes que están aprendiendo de forma más visual. Un ejemplo de figura con un puntero de enfoque se presenta en la figura siguiente.



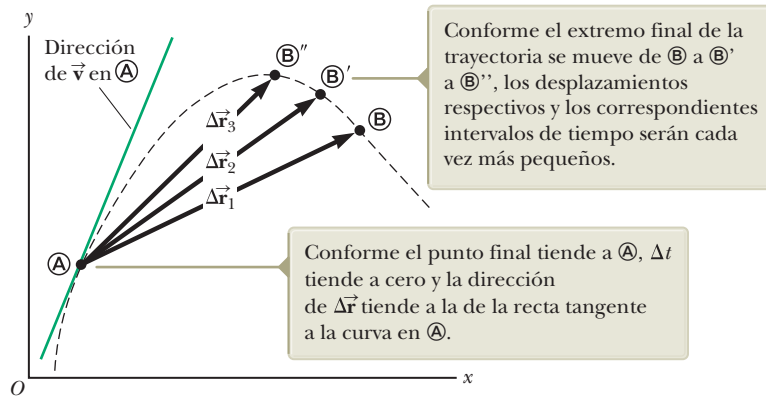


Figura 4.2 A medida que una partícula se mueve entre dos puntos, su velocidad promedio está en la dirección del vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$. Por definición, la velocidad instantánea en \textcircled{A} se dirige a lo largo de la recta tangente a la curva en \textcircled{A} .

Apéndice matemático. El apéndice matemático (Apéndice B), una valiosa herramienta para los estudiantes se actualizó para mostrar las herramientas matemáticas en un contexto físico. Este recurso es ideal para los estudiantes que necesitan un repaso rápido acerca de temas tales como álgebra, trigonometría y cálculo.

Características útiles

Estilo. Para facilitar la rápida comprensión, hemos escrito el libro en un estilo claro, lógico y atractivo. Elegimos un estilo de escritura que es un poco informal y relajado, de modo que los estudiantes encontraran el texto atractivo y agradable para leer. Los nuevos términos se definen cuidadosamente y hemos evitado el uso de vocabulario especial.

Definiciones y ecuaciones importantes. Las definiciones más importantes se ponen en **negritas** o se resaltan con una **pantalla de fondo** para dar más énfasis y facilitar la revisión.

De igual modo, las ecuaciones importantes se resaltan con una pantalla para facilitar su ubicación.

Notas al margen. Los comentarios y notas que aparecen en el margen con un icono ► se pueden usar para ubicar enunciados, ecuaciones y conceptos importantes en el texto.

Uso pedagógico del color. Los lectores deben consultar la **carta pedagógica de color** (al inicio del libro) para una lista de los símbolos en color que se usan en los diagramas del texto. Este sistema se usa consistentemente en todas las partes del texto.

Nivel matemático. Introducimos el cálculo de manera gradual, teniendo en mente que los estudiantes con frecuencia toman cursos introductorios de cálculo y física simultáneamente. La mayoría de las etapas se muestra cuando se desarrollan ecuaciones básicas, y con frecuencia se hace referencia a los apéndices matemáticos cerca del final del texto. Aunque los vectores son analizados en el capítulo 3, los productos vectoriales se introducen más adelante en el texto, donde se necesitan en aplicaciones físicas. El producto punto se introduce en el capítulo 7, que aborda la energía de un sistema; el producto cruz se introduce en el capítulo 11, que se relaciona con cantidad de movimiento angular.

Cifras significativas. Las cifras significativas, tanto en los ejemplos trabajados como en los problemas de fin de capítulo, se manejaron con cuidado. La mayoría de los ejemplos numéricos se trabaja a dos o a tres cifras significativas, dependiendo de la precisión de los datos proporcionados. Los problemas de fin de capítulo por lo regular establecen datos y respuestas a tres dígitos de precisión. En la realización de los cálculos de estimación se suele trabajar con una sola cifra significativa. (Se puede encontrar más acerca del análisis de cifras significativas en el capítulo 1, páginas 13-15.)

Unidades. A lo largo del texto se usa el sistema internacional de unidades (SI). El sistema estadounidense de unidades usuales sólo se usa en una medida limitada en los capítulos sobre mecánica y termodinámica.



Apéndices y Notas finales. Casi al final del texto se proporcionan varios apéndices. La mayoría del material de los apéndices representa un repaso de conceptos y técnicas matemáticas aplicadas en el texto, incluidos notación científica, álgebra, geometría, trigonometría, cálculo diferencial y cálculo integral. En todas las partes del texto se hace referencia a estos apéndices. La mayor parte de las secciones de repaso matemático en los apéndices incluyen ejemplos y ejercicios con respuestas. Además de los repasos matemáticos, los apéndices contienen tablas de datos físicos, factores de conversión y las unidades del SI de cantidades físicas, así como una tabla periódica de los elementos. Otra información útil (constantes fundamentales y datos físicos, datos planetarios, una lista de prefijos estándar, símbolos matemáticos, el alfabeto griego y abreviaturas estándar de unidades de medición) aparecen en las páginas finales del libro.

Soluciones al curso que se adaptan a sus metas de enseñanza y a las necesidades de aprendizaje de sus alumnos.

Los avances recientes en tecnología educativa han hecho que los sistemas de gestión de la tarea y los sistemas de respuesta de la audiencia potentes y asequibles herramientas para mejorar la forma de enseñar su curso. Si usted ofrece un curso más tradicional basado en libro, está interesado en utilizar o está utilizando actualmente un sistema de gestión de tareas en línea como WebAssign, o está listo para convertir su clase en un entorno de aprendizaje interactivo, usted puede estar seguro de que el contenido probado del libro proporciona la base para todos y cada uno de los componentes de nuestra tecnología y paquete auxiliar.

Recursos de presentaciones de clases para docentes (en inglés)

Sitio web de recursos del profesor para Física para ciencias e ingeniería Serway/Jewett, décima edición. El sitio web de recursos del profesor tiene una variedad de recursos para ayudarle a preparar y presentar material de texto de una manera que satisfaga sus preferencias personales y necesidades del curso. El *Manual de soluciones del profesor* publicado presenta soluciones completas trabajadas para todos los problemas de fin de capítulo del libro impreso y respuestas para todos los problemas con números pares. Se encuentran disponibles clases robustas esquematizadas en PowerPoint que han sido diseñadas para un aula activa, con preguntas de comprobación de lectura y preguntas de trabajo colaborativo, así como el esquema tradicional de sección por sección. Las imágenes del libro de texto se pueden utilizar para personalizar sus propias presentaciones. Disponible en línea en www.cengage.com/login.

Para mayor información acerca de estos recursos, consulte a su representante local de Cengage Learning.

Recursos del estudiante

El sitio web de recursos del estudiante tiene una variedad de recursos para ayudarle a preparar material de texto de una manera que satisfaga sus preferencias personales y necesidades del curso. Entre los recursos destacan Figuras activas, Videos y Cuestionarios interactivos.

El material se encuentra disponible en el sitio

<http://latam-cm.cengage.com/moodle/course/view.php?id=51>



Código de acceso:



Reconocimientos

Esta Décima edición de *Física para ciencias e ingeniería* se preparó con la guía y asistencia de muchos profesores que revisaron selecciones del manuscrito, la revisión previa del texto o ambos. Queremos agradecer a los siguientes académicos y expresar nuestro sincero aprecio por sus sugerencias, críticas y aliento:

John F. DiTusa, *Louisiana State University*; Hani Dulli, *Texas Tech University*; Eric Hudson, *Pennsylvania State University*; David Joffe, *Kennesaw State University*; Yibin Pan, *University of Wisconsin-Madison*; Mark Rzczowski, *University of Wisconsin-Madison*; Joseph Scanio, *University of Cincinnati*; Brian Utter, *Bucknell University*

Durante nuestro trabajo en esta revisión, trabajamos con socios de desarrollo para ayudarnos a determinar el curso de la revisión; Quisiéramos agradecerles:

Tom Barrett, *The Ohio State University*; Ken Bolland, *The Ohio State University*; Colleen Countryman, *North Carolina State University*; Dawn Hollenbeck, *Rochester Institute of Technology*; Kathleen Koenig, *University of Cincinnati*; David Lamp, *Texas Tech University*; Rafael Lopez-Mobilia, *The University of Texas at San Antonio*; Yibin Pan, *University of Wisconsin-Madison*; Chandralekha Singh, *University of Pittsburgh*; Michael Thackston, *Kennesaw State University*; Michael Ziegler, *The Ohio State University*

Antes de nuestro trabajo en esta revisión, realizamos una encuesta de profesores; su retroalimentación y sugerencias ayudaron a dar forma a esta revisión, por lo que quisiéramos agradecer a los participantes de la encuesta:

Steve Alexander, *Southwestern University*; Sanjeev Arora, *Fort Valley State University*; Erik Aver, *Gonzaga University*; David Berube, *Loyola Marymount University*; Muhammad Bhatti, *The University of Texas Rio Grande Valley*; Jeffrey Bierman, *Gonzaga University*; Ken Bolland, *The Ohio State University*; John Bulman, *Loyola Marymount University*; Hani Dulli, *Texas Tech University*; Eric Hudson, *Pennsylvania State University*; Satyanaraya Kachiraju, *The University of Texas Rio Grande Valley*; Brent McDaniel, *Kennesaw State University*; Lisa Paulius, *Western Michigan University*; Linh Pham, *University of San Diego*; Charles Ruggiero, *The Ohio State University at Marion*; Mackay Salley, *Wofford College*; Jeff Sanny, *Loyola Marymount University*; Joseph Scanio, *University of Cincinnati*; Jeffrey Schwartz, *University of California en Los Angeles*; Amit Sharma, *Wright State University*; Mark Spraker, *University of North Georgia*; Anthony Teate, *James Madison University*; Lih-Sin The, *Clemson University*.

Este título fue cuidadosamente revisado por la precisión de Michael faux, Universidad de SUNY en Oneonta. Le agradecemos por sus diligentes esfuerzos bajo la presión del programa.

Belal Abas, Zinoviy Akkerman, Eric Boyd, Hal Falk, Melanie Martin, Steve McCauley, y Glenn Stracher correcciones a problemas tomados de ediciones anteriores. Harvey Leff proporcionó una orientación inestimable sobre la reestructuración de la discusión de la entropía en el capítulo 21. Estamos agradecidos a Vahé Peroomian para preparar un excelente manual de soluciones para profesores. Matt Kohlmyer (desarrollador Senior de contenido instruccional en Cengage), Marllin L. Simon (Profesor emérito, Auburn University), y Susan English todos trabajaron arduamente en la optimización de los problemas de tarea en línea, y les agradecemos. Linnea Cookson proporcionó una comprobación excelente de la exactitud de los tutoriales del modelo del análisis.

Agradecimiento especial y reconocimiento ir al staff profesional en Cengage en particular, Rebecca Berardy Schwartz, Michael Jacobs, Ed Dodd, Tanya Nigh, Teresa Trego, Lorreen Towle, Tom Ziolkowski, Cate Barr, y Caitlin Ghegan por su buen trabajo durante el desarrollo, producción y promoción de este libro de texto. Reconocemos el servicio de producción calificado y las ilustraciones excelentes proporcionadas por Ed Dionne y el personal en MPS limitado y la investigación dedicada de la imagen y del texto de Cheryl Du Bois y Ragu Veeraragavan, respectivamente.

Por último, estamos profundamente en deuda con nuestras esposas, hijos y nietos por su amor, apoyo y sacrificios a largo plazo.

Raymond A. Serway
St. Petersburg, Florida

John W. Jewett, Jr.
Anaheim, California



Al estudiante

Es apropiado ofrecer algunas palabras de consejo que deben ser de beneficio para el estudiante. Antes de hacerlo, suponemos que ha leído el Prefacio, que describe las diferentes características del texto y materiales de apoyo que le ayudaran a lo largo del curso.

Cómo estudiar

Con frecuencia preguntan a los docentes: “¿Cómo debo estudiar física y prepararme para los exámenes?” No hay una respuesta simple a esta pregunta, pero podemos ofrecer algunas sugerencias de acuerdo con nuestra experiencia en el aprendizaje y enseñanza a través de los años.

Ante todo, mantenga una actitud positiva hacia el tema de estudio, considerando que la física es la más esencial de todas las ciencias naturales. Otros cursos de ciencia que siguen usaran los mismos principios físicos, de modo que es importante que entienda y sea capaz de aplicar los diversos conceptos y teorías explicadas en el libro.

Conceptos y principios

Es esencial que entienda los conceptos y principios básicos antes de intentar resolver los problemas asignados. Esta meta la puede lograr al leer con cuidado el texto antes de asistir a su clase acerca del material cubierto. Cuando lea el texto, debe anotar aquellos puntos que no sean claros. También haga un intento diligente por responder los Exámenes rápidos, conforme los encuentra en su lectura. Hemos trabajado duro para preparar preguntas que le ayuden a juzgar por sí mismo que tan bien entiende el material. Estudie cuidadosamente las preguntas **¿Qué pasaría si?** que aparecen en muchos de los ejemplos trabajados. Ellas le ayudaran a extender su comprensión más allá del simple acto de llegar a un resultado numérico. Las Prevenciones de riesgos ocultos también le ayudaran a alejarse de las malas interpretaciones comunes con respecto a la física. Durante la clase tome notas y pregunte acerca de aquellas ideas que no le sean claras. Considere que pocas personas son capaces de absorber todo el significado del material científico después de sólo una lectura; pueden ser necesarias muchas lecturas del texto y sus notas. Sus clases y trabajo de laboratorio complementan la lectura del libro y deben clarificar algo del material más difícil. Debe minimizar su memorización del material. La memorización exitosa de pasajes del texto, ecuaciones y deducciones no necesariamente indican que comprende el material. Su comprensión del material mejorará mediante la combinación de hábitos eficientes de estudio, discusiones con otros estudiantes y con docentes, y su habilidad para resolver los problemas que se presentan en el libro. Pregunte siempre que crea que es necesario aclarar un concepto.

Agenda de estudio

Es importante que configure una agenda de estudio regular, de preferencia que sea diaria. Asegúrese de leer el programa de estudio del curso y que este coincide con el calendario establecido por el instructor. Las clases tendrán mucho más sentido si lee el texto correspondiente antes de asistir a ellas. Como regla general, debe dedicar aproximadamente dos horas de tiempo de estudio por cada hora que esté en clase. Si tiene problemas con el curso, busque el consejo del instructor u otros estudiantes que hayan tomado el curso. Puede ser necesario buscar más instrucción de estudiantes experimentados. Con mucha frecuencia, los docentes ofrecen sesiones de repaso, además de los periodos de clase regulares. Evite la práctica de demorar el estudio hasta un día o dos antes de un examen.

Por lo general, este enfoque tiene resultados desastrosos. En lugar de emprender una sesión de estudio de toda la noche antes del examen, repase brevemente los conceptos y ecuaciones básicos, y luego tenga una buena noche de descanso.



Usted puede comprar cualquier producto Cengage Learning en inglés en nuestra tienda online **CengageBrain.com**.

Use las características

Debe usar por completo las diferentes características del texto explicadas en el Prefacio. Por ejemplo, las notas al margen son útiles para localizar y describir ecuaciones y conceptos importantes, y las **negritas** indican enunciados y definiciones importantes. En los apéndices hay muchas tablas útiles, pero la mayoría se incorpora al texto, donde su referencia es útil. El Apéndice B es un repaso conveniente de técnicas matemáticas.

Las respuestas a los exámenes rápidos y a los problemas con número impar se proporcionan al final del libro, las respuestas a los exámenes rápidos se ubican al final de cada capítulo. La tabla de contenido proporciona un panorama de todo el texto y el índice le permite ubicar rápidamente material específico. En ocasiones se usan notas a pie de página para complementar el texto o citar otras referencias acerca del tema explicado. Después de leer un capítulo debe ser capaz de definir cualquier cantidad nueva introducida en dicho capítulo y explicar los principios y suposiciones que se usaron para llegar a ciertas relaciones clave. Los resúmenes de capítulo y las secciones de repaso le ayudan a este respecto. En algunos casos puede encontrar necesario remitirse al índice del libro para ubicar ciertos temas. Debe ser capaz de asociar a cada cantidad física el símbolo correcto para representar dicha cantidad y la unidad en que se especifica la cantidad. Además, debe ser capaz de expresar cada ecuación importante en prosa concisa y exacta.

Resolución de problemas

R. P. Feynman, laureado Nobel en física, dijo una vez: “No sabes nada hasta que lo has practicado.” Para estar de acuerdo con este enunciado, le recomendamos encarecidamente que desarrolle las habilidades necesarias para resolver una amplia serie de problemas. Su habilidad para resolver problemas será una de las principales pruebas de su conocimiento en física; por lo tanto, debe intentar resolver tantos problemas como sea posible. Es esencial que comprenda los conceptos y principios básicos antes de intentar resolver problemas. Es buena práctica intentar encontrar soluciones alternas al mismo problema. Por ejemplo, puede resolver problemas en mecánica usando las leyes de Newton, pero con mucha frecuencia un método alternativo que se apoye en consideraciones sobre la energía es más directo. No debe engañarse y creer que entiende un problema simplemente porque ha visto como se resolvió en clase. Debe ser capaz de resolver el problema y problemas similares por cuenta propia.

El enfoque para resolver problemas se debe planear cuidadosamente. Un plan sistemático es especialmente importante cuando un problema involucra muchos conceptos. Primero, lea el problema muchas veces hasta que este seguro de que entiende que se pide. Busque palabras clave que le ayuden a interpretar el problema y tal vez le posibiliten la formulación de ciertas suposiciones. Su habilidad para interpretar adecuadamente una pregunta es una parte integral de la resolución del problema. Segundo, debe adquirir el hábito de escribir la información conocida en un problema y aquellas cantidades que necesite encontrar; por ejemplo, puede construir una tabla que mencione tanto las cantidades conocidas como las cantidades a encontrar. Este procedimiento se usa a veces en los ejemplos trabajados del libro. Por último, después de decidir el método que considere apropiado para un problema determinado, proceda con su solución. La Estrategia General para Resolver Problemas le guiara a través de problemas complejos. Si sigue las etapas de este procedimiento (*Conceptualizar*, *Categorizar*, *Analizar*, *Finalizar*), le será más fácil llegar a una solución y ganará más por sus esfuerzos. Dicha estrategia, en la sección 2.4 (páginas 30–32), se usa en todos los ejemplos en los capítulos restantes, de modo que puede aprender cómo aplicarla. En el texto se incluyen estrategias específicas para resolución de problemas para ciertos tipos de situaciones y aparecen con un encabezado especial. Dichas estrategias específicas siguen el esbozo del enfoque del Modelo de análisis para resolver problemas.

Con frecuencia los estudiantes fracasan en el reconocimiento de las limitaciones de ciertas ecuaciones o leyes físicas en una situación particular. Es muy importante que entienda y recuerde las suposiciones que subyacen a una teoría o formalismo particular.



Por ejemplo, ciertas ecuaciones en cinemática sólo se aplican a una partícula en movimiento con aceleración constante. Estas ecuaciones no son válidas para describir el movimiento cuya aceleración no sea constante, como el movimiento de un objeto conectado a un resorte o el movimiento de un objeto a través de un fluido. Estudie cuidadosamente los modelos de análisis para resolver problemas en los resúmenes de capítulo, de modo que sepa cómo se aplica cada modelo a una situación específica. Los modelos de análisis le proporcionan una estructura lógica para resolver problemas y ayudan a desarrollar sus habilidades de pensamiento para ser más como los de un físico. Utilice el enfoque del modelo de análisis para ahorrar horas de búsqueda de la ecuación correcta y para hacer de usted un solucionador de problemas más rápido y más eficiente.

Experimentos

La física es una ciencia que se apoya en observaciones experimentales. Por lo tanto, recomendamos que intente complementar el texto, realizando varios tipos de experimentos “prácticos”, en casa o en el laboratorio. Estos experimentos se pueden usar para poner a prueba ideas y modelos explicados en clase o en el libro. Por ejemplo, el juguete común Slinky es excelente para estudiar ondas viajeras, una bola que se balancea en el extremo de una cuerda larga se puede usar para investigar el movimiento pendular, diferentes masas unidas al extremo de un resorte o banda de goma vertical se pueden usar para determinar su naturaleza elástica, un viejo par de lentes de sol y algunos lentes de desecho y una lupa son los componentes de diferentes experimentos en óptica, y una medida aproximada de la aceleración en caída libre se puede determinar simplemente al medir con un cronómetro el tiempo que una bola tarda en caer desde una altura conocida. La lista de tales experimentos es interminable. Cuando no estén disponibles los modelos físicos, sea imaginativo e intente desarrollar los suyos por cuenta propia.

Nuevos medios (en inglés y se comercializa por separada)



Le recomendamos enormemente usar el producto **WebAssign** que está disponible con este libro. Es mucho más fácil comprender la física si la ve en acción, y estos nuevos materiales le permitirán volverse parte de dicha acción.

Es nuestro sincero deseo que encuentre en la física una experiencia excitante y agradable, y que se beneficie de esta experiencia sin importar la profesión que elija. Bienvenido al excitante mundo de la física!

El científico no estudia la naturaleza porque sea útil; la estudia porque se deleita en ella, y se deleita en ella porque es hermosa. Si la naturaleza no fuera hermosa, no valdría la pena conocerla, y si no valiera la pena conocer la naturaleza, no valdría la pena vivir la vida.

—Henri Poincaré



Física

para ciencias e ingeniería

DÉCIMA EDICIÓN

1



Acerca de la portada

La portada muestra un dron de seis hélices que lleva un cable piloto de casi 5 kilómetros a través del profundo cañón a través del río Dadu que fluye por el puente de Xingkang en proyecto de construcción en la provincia de Sichuan en China. Este método evita el requisito de utilizar lanchas en el río que fluye rápidamente u otros métodos tales como helicópteros tripulados y pequeños cohetes. También reduce los costos por tender el cable en aproximadamente el 20% que el de los métodos tradicionales. Una vez que se ha tendido el cable piloto, él se puede utilizar para jalar cables más pesados al otro lado del desfiladero.



Mecánica

La física, fundamental entre las ciencias, se ocupa de los principios esenciales del Universo. Es el cimiento sobre el que se erigen las otras ciencias: astronomía, biología, química y geología. También es el fundamento de un gran número de aplicaciones de ingeniería. La belleza de la física consiste en la simplicidad de sus principios y en la forma en que con sólo un pequeño número de conceptos y modelos modifica y expande nuestra visión del mundo.

El estudio de la física se divide en seis áreas primordiales:

1. La *mecánica clásica*, que estudia el movimiento de los objetos de gran magnitud en comparación con los átomos y se mueven con una rapidez mucho más lenta que la de la luz;
2. La *relatividad*, una teoría que describe los objetos que se mueven con cualquier rapidez, incluso los que se aproximan a la rapidez de la luz;
3. La *termodinámica*, que trata del calor, el trabajo, la temperatura y el comportamiento estadístico de los sistemas con gran número de partículas;
4. El *electromagnetismo*, que le compete la electricidad, el magnetismo y los campos electromagnéticos;
5. La *óptica*, que estudia el comportamiento de la luz y su interacción con los materiales;
6. La *mecánica cuántica*, un conjunto de teorías que conectan el comportamiento de la materia al nivel submicroscópico con las observaciones macroscópicas.

Las disciplinas de la mecánica y el electromagnetismo son primordiales para todas las otras ramas de la física clásica (desarrolladas antes de 1900) y la física moderna (c. 1900–presente). La primera parte de este libro estudia a la mecánica clásica, conocida como *mecánica newtoniana* o simplemente *mecánica*. Muchos principios y modelos que se aplican para comprender los sistemas mecánicos conservan su importancia en las teorías de otras áreas de la física y sirven para describir muchos fenómenos naturales. Debido a eso, la mecánica clásica es trascendente para los estudiantes de todas las disciplinas. ■

El Toyota Mirai, es un automóvil de celdas de combustible disponibles para el público, aunque en cantidades limitadas. Una pila o celda de combustible convierte la fuente de hidrógeno en electricidad para impulsar el motor conectado a las ruedas del auto. Los automóviles, ya sean alimentados por celdas de combustible, motores de gasolina o baterías, utilizan muchos de los conceptos y principios de mecánica que estudiaremos en esta primera parte del libro. Las cantidades que podemos utilizar para describir el funcionamiento de los vehículos incluyen la posición, la velocidad, la aceleración, la fuerza, la energía, y la cantidad de movimiento. (Chris Graythen/Getty Images Sport/Getty Images)



1

Stonehenge, en el sur de Inglaterra, fue construido hace miles de años. Varias teorías se han propuesto acerca de su función, incluyendo un cementerio, un lugar de curación, y un lugar de culto a los antepasados. Una de las teorías más intrigantes sugiere que Stonehenge era un observatorio, lo que permite mediciones de algunas de las cantidades analizadas en este capítulo, como la posición de los objetos en el espacio y en intervalos de tiempo entre eventos celestes periódicos.

Física y medición



- 1.1 Estándares de longitud, masa y tiempo
- 1.2 Modelado y representaciones alternativas
- 1.3 Análisis dimensional
- 1.4 Conversión de unidades
- 1.5 Estimaciones y cálculos de orden de magnitud
- 1.6 Cifras significativas

IMAGINE Cada capítulo de este libro comenzará con un párrafo relacionado con un suceso que se desarrolla a lo largo del capítulo. La historia se centra en *usted*: un estudiante curioso de física. Pudiera vivir en cualquier parte del mundo, pero digamos que vive en el sur de California, donde vive uno de los autores. La mayoría de sus observaciones ocurrirán allí, aunque usted realizará viajes a otros lugares. A medida que realiza sus actividades diarias, usted ve la física en acción a su alrededor. De hecho, ¡no se puede alejar de la física! Al observar los fenómenos al comienzo de cada capítulo, usted se preguntará, “¿por qué sucede eso?”. Puede tomar mediciones con su teléfono inteligente. Puede buscar vídeos relacionados en YouTube o fotografías en un sitio de búsqueda de imágenes. De hecho tiene suerte porque, además de esos recursos, tiene este libro y la experiencia de su profesor para ayudarle a entender la física emocionante que le rodea. Veamos sus primeras observaciones a medida que comenzamos su historia acaba de comprar este libro y ha hojeado algunas de sus páginas nota una página de conversiones en la contraportada interior observa en las entradas de “longitud” la unidad de un *año luz*. Dice: “¡espera un minuto! (dirá esto a menudo en los próximos capítulos.) ¿Cómo puede una unidad basada en un *año* ser una unidad de *longitud*?” Hojeando más páginas, ve $1 \text{ kg} \approx 2.2 \text{ lb}$ (lb es la abreviatura de *libra*; lb es del latín *libra pondo*) bajo el título “Algunas aproximaciones útiles para problemas de cálculo”. Observa el signo “aproximadamente igual” (\approx), se pregunta cuál es la conversión *exacta* y ve en la parte superior de la página el encabezado “Masa”, ya que un kilogramo es una unidad de masa. La relación entre kilogramos y libras ¡no se encuentra aquí! ¿Por qué no? ¡Su aventura en física ha empezado!

CONEXIONES El segundo párrafo de cada capítulo le explicará cómo se conecta el material en el capítulo con capítulos anteriores y/o futuros. Esta característica le ayudará a ver que el libro no es una colección de capítulos no relacionados, más bien estamos construyendo una estructura de entendimiento, paso a paso. Estos párrafos proporcionarán una guía a través de los conceptos y principios que se introducen en el texto.

Estos justificarán por qué el material en ese capítulo se presenta en ese momento y le ayudará a ver el “panorama general” del estudio de la física. En este primer capítulo, por supuesto, no podemos conectarnos a un capítulo anterior. Simplemente veremos hacia adelante en este capítulo, en el que se discuten algunos conceptos preliminares de medición, unidades, modelado y cálculo que vamos a necesitar en *todos* los capítulos del libro.

1.1 Estándares de longitud, masa y tiempo

Para describir los fenómenos naturales, es necesario hacer mediciones de varios aspectos de la naturaleza. Cada medición se asocia con una cantidad física, como la longitud de un objeto. Las leyes de la física se expresan como relaciones matemáticas entre cantidades físicas que se introducirán y analizarán a lo largo del libro. En mecánica, las tres cantidades fundamentales son *longitud, masa y tiempo*. Todas las otras cantidades en mecánica se pueden expresar en función de estas tres.

Si tuviese que reportar los resultados de una medición a alguien que desea reproducir esa medición, tendría que definir un *estándar*. Por ejemplo, si alguien familiarizado con el sistema de medición reporta que una pared tiene 2 metros de alto y la unidad de longitud se define como 1 metro, se sabe que la altura de la pared es el doble de la unidad de longitud básica. Cualquier unidad que se elija como estándar debe ser accesible y tener alguna propiedad que se pueda medir confiablemente. Los estándares de medición que diferentes personas de lugares distintos aplican en el Universo, deben producir el mismo resultado. Además, los estándares que se usan para mediciones no deben cambiar con el tiempo.

En 1960 un comité internacional estableció un conjunto de estándares para las cantidades fundamentales de la ciencia. Se llama SI (Sistema Internacional) y sus unidades fundamentales de longitud, masa y tiempo son *metro, kilogramo y segundo*, respectivamente. Otros estándares para las unidades fundamentales SI establecidas por el comité son las de temperatura (el *kelvin*), corriente eléctrica (el *ampere*), la intensidad luminosa (la *candela*) y la cantidad de sustancia (el *mol*).

Longitud

La distancia entre dos puntos en el espacio se identifica como **longitud**. En 1120 el rey de Inglaterra decretó que el estándar de longitud en su país se llamaría *yarda* y sería precisamente igual a la distancia desde la punta de su nariz hasta el final de su brazo extendido. De igual modo, el estándar original para el pie adoptado por los franceses era la longitud del pie real del rey Luis XIV. Ninguno de dichos estándares es constante en el tiempo; cuando un nuevo rey subía al trono, ¡cambiaban las longitudes! El estándar francés prevaleció hasta 1799, cuando el estándar legal de longitud en Francia se volvió el **metro** (m), definido como una diezmillonésima de la distancia del ecuador al Polo Norte a lo largo de una línea longitudinal particular que pasa por París. Observe que este valor es un estándar razonado en la Tierra, que no satisface el requerimiento de que se puede usar a través del Universo.

La tabla 1.1 (página 4) enlista valores aproximados de algunas longitudes observadas. Debe estudiar esta tabla, así como las siguientes dos tablas y comenzar a desarrollar una intuición de lo que significa, por ejemplo, una longitud de 20 centímetros, una masa de 100 kilogramos o un intervalo de tiempo de 3.2×10^7 segundos.

Tan recientemente como 1960, la longitud del metro se definió como la distancia entre dos líneas en una barra específica de platino-iridio que se almacena bajo condiciones controladas en Francia. Sin embargo, los requerimientos actuales de la ciencia y la tecnología necesitan más precisión que la dada por la separación entre las líneas en la barra. En las décadas de los sesenta y setenta del milenio pasado, el metro se definió como 1 650 763.73 longitudes de onda¹ de la luz naranja-rojo emitida de una lámpara de cripton 86.

¹Se usará la notación internacional estándar para números con más de tres dígitos, en éstos los grupos de tres dígitos se separan por espacios en lugar de comas. Por tanto, 10 000 es lo mismo que la notación estadounidense común de 10000. De igual modo, $\pi = 3.14159265$ se escribe como 3.141 592 65.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 1.1

Valores razonables Es importante desarrollar la intuición acerca de valores típicos de cantidades cuando se resuelven problemas, porque debe pensar acerca de su resultado final y determinar si parece razonable. Si calcula la masa de una mosca y obtiene un valor de 100 kg, esta respuesta es *irracional* y hay un error en alguna parte.



TABLA 1.1 Valores aproximados de algunas longitudes medidas

	Longitud (m)
Distancia de la Tierra al quasar conocido más remoto	2.7×10^{26}
Distancia de la Tierra a las galaxias normales más remotas	3×10^{26}
Distancia de la Tierra a la galaxia más cercana (Andrómeda)	2×10^{22}
Distancia del Sol a la estrella más cercana (Proxima Centauri)	4×10^{16}
Un año luz	9.46×10^{15}
Radio orbital medio de la Tierra en torno al Sol	1.50×10^{11}
Distancia media de la Tierra a la Luna	3.84×10^8
Distancia del ecuador al Polo Norte	1.00×10^7
Radio medio de la Tierra	6.37×10^6
Altitud típica (sobre la superficie) de un satélite que orbita la Tierra	2×10^5
Longitud de un campo de fútbol	9.1×10^1
Longitud de una mosca	5×10^{-3}
Tamaño de las partículas de polvo más pequeñas	$\sim 10^{-4}$
Tamaño de las células de la mayoría de los organismos vivos	$\sim 10^{-5}$
Diámetro de un átomo de hidrógeno	$\sim 10^{-10}$
Diámetro de un núcleo atómico	$\sim 10^{-14}$
Diámetro de un protón	$\sim 10^{-15}$



Jacques Brillon/AP Images

a



Focke Strangmann/AP Images

b

Figura 1.1 a) El Kilogramo Estándar Nacional, una copia exacta del Kilogramo Estándar Internacional que se conserva en Sèvres, Francia, se alberga bajo una doble campana en una bóveda en el Instituto Nacional de Estándares y Tecnología. b) Un reloj atómico con fuente de cesio. El reloj nunca ganará ni perderá un segundo en 20 millones de años.

No obstante, en octubre de 1983, el metro se redefinió como **la distancia recorrida por la luz en el vacío durante un tiempo de 1/299 792 458 segundos**. En efecto, esta última definición establece que la rapidez de la luz en el vacío es precisamente 299 792 458 metros por segundo. Esta definición del metro es válida a través del Universo con la suposición de que la luz es la misma en todas partes. La rapidez de la luz también nos permite definir el **año luz**, como se mencionó en la historia introductoria: la distancia que la luz viaja a través del espacio vacío en un año. Utilice esta definición y la rapidez de la luz para verificar la longitud de un año luz en metros como se da en la tabla 1.1.

Masa

Vamos a encontrar que la **masa** de un objeto está relacionada con la cantidad de material que está presente en el objeto, o de qué tanto resiste ese objeto cambios en su movimiento. La masa es una propiedad inherente de un objeto y es independiente del entorno del objeto y del método utilizado para medirla. La unidad fundamental de masa en el SI, el **kilogramo (kg)**, está definido como **la masa de un cilindro de aleación platino-iridio específico que se conserva en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, Francia**. Esta masa estándar fue establecida en 1887 y no ha cambiado desde esa época porque el platino-iridio es una aleación inusualmente estable. Un duplicado del cilindro de Sevres se conserva en el Instituto Nacional de Estándares y Tecnología (NIST, por sus siglas en inglés) en Gaithersburg, Maryland (figura 1.1a). La tabla 1.2 menciona valores aproximados de las masas de varios objetos.

En el capítulo 5, vamos a discutir la diferencia entre masa y peso. En previsión de esa discusión, veamos de nuevo la equivalencia aproximada mencionada en la historia introductoria: $1 \text{ kg} \approx 2.2 \text{ lb}$. Nunca sería correcto afirmar que un número de kilogramos es *igual* un número de libras, porque estas unidades representan diferentes variables. Un kilogramo es una unidad de *masa*, mientras que una libra es una unidad de *peso*. Por lo que, una igualdad entre kilogramos y libras no se presenta en la sección de conversiones de masa en la contraportada interior del libro.



TABLA 1.2 Masas aproximadas de varios objetos

	Masa (kg)
Universo observable	$\sim 10^{52}$
Galaxia Vía Láctea	$\sim 10^{42}$
Sol	1.99×10^{30}
Tierra	5.98×10^{24}
Luna	7.36×10^{22}
Tiburón	$\sim 10^3$
Humano	$\sim 10^2$
Rana	$\sim 10^{-1}$
Mosquito	$\sim 10^{-5}$
Bacteria	$\sim 1 \times 10^{-15}$
Átomo de hidrógeno	1.67×10^{-27}
Electrón	9.11×10^{-31}

TABLA 1.3 Valores aproximados de algunos intervalos de tiempo

	Intervalo de tiempo (s)
Edad del Universo	4×10^{17}
Edad de la Tierra	1.3×10^{17}
Edad promedio de un estudiante universitario	6.3×10^8
Un año	3.2×10^7
Un día	8.6×10^4
Un periodo de clase	3.0×10^3
Intervalo de tiempo entre latidos normales	8×10^{-1}
Periodo de ondas sonoras audibles	$\sim 10^{-3}$
Periodo de ondas de radio típicas	$\sim 10^{-6}$
Periodo de vibración de un átomo en un sólido	$\sim 10^{-13}$
Periodo de ondas de luz visible	$\sim 10^{-15}$
Duración de una colisión nuclear	$\sim 10^{-22}$
Intervalo de tiempo para que la luz cruce un protón	$\sim 10^{-24}$

Tiempo

Antes de 1967, el estándar de **tiempo** fue definido en términos del *día solar medio*. (Un día solar es el intervalo de tiempo entre apariciones sucesivas del Sol en el punto más alto que alcanza en el cielo cada día.) La unidad fundamental de un segundo (s) fue definida como $(\frac{1}{60})(\frac{1}{60})(\frac{1}{24})$ de un día solar medio. Esta definición se basa en la rotación de un planeta, la Tierra. Debido a eso, este movimiento no proporciona un tiempo estándar que sea universal.

En 1967, el segundo fue redefinido para sacar ventaja de la enorme precisión que se logra con un dispositivo conocido como *reloj atómico* (figura 1.1b), que mide vibraciones de átomos de cesio. Ahora un segundo se define como **9 192 631 770 veces el periodo de vibración de la radiación del átomo de cesio 133**.² En la tabla 1.3 se presentan valores aproximados de intervalos de tiempo.

Debe observar que vamos a utilizar las notaciones *tiempo* e *intervalo de tiempo* en forma diferente. Un **tiempo** es una descripción de un instante relativo a un tiempo de referencia. Por ejemplo, $t = 10.0$ s se refiere a un instante 10.0 s después del instante que hemos identificado como $t = 0$. Como otro ejemplo, un *tiempo* de 11:30 a.m. significa un instante 11.5 horas después de nuestra hora de referencia de medianoche. Por otro lado, un **intervalo de tiempo** se refiere a *duración*: requirió 30.0 minutos para terminar la tarea. Es común escuchar un “tiempo de 30.0 minutos” en este último ejemplo, pero tendremos cuidado de referirnos a las mediciones de duración como intervalos de tiempo.

Unidades y cantidades Además del SI, otro sistema de unidades, el *sistema usual U.S.*, todavía se utiliza en Estados Unidos a pesar de la aceptación del SI en el resto del mundo. En este sistema las unidades de longitud, masa y tiempo son pie (ft), slug y segundo, respectivamente. En este libro se usarán las unidades del SI porque tienen aceptación mundial en la ciencia y en la industria. En el estudio de la mecánica clásica se hará un uso limitado de las unidades U.S. usuales.

Además de las unidades del SI fundamentales de metro, kilogramo y segundo, también se usan otras unidades, como milímetros y nanosegundos, donde los prefijos mili y nano denotan multiplicadores de las unidades básicas establecidas en varias potencias de diez. En la tabla 1.4 se citan los prefijos para las diversas potencias de diez y sus prefijos. Por ejemplo, 10^{-3} m es equivalente a 1 milímetro (mm), y 10^3 m corresponde a 1 kilómetro (km). Del mismo modo, 1 kilogramo (kg) es 10^3 gramos (g), y 1 megavolt (MV) es 10^6 volts (V).

²El *periodo* se define como el intervalo de tiempo necesario para una vibración completa.

TABLA 1.4 Prefijos para potencias de diez

Potencia	Prefijo	Abreviatura	Potencia	Prefijo	Abreviatura
10^{-24}	yocto	y	10^3	kilo	k
10^{-21}	zepto	z	10^6	mega	M
10^{-18}	atto	a	10^9	giga	G
10^{-15}	femto	f	10^{12}	tera	T
10^{-12}	pico	p	10^{15}	peta	P
10^{-9}	nano	n	10^{18}	exa	E
10^{-6}	micro	μ	10^{21}	zetta	Z
10^{-3}	milli	m	10^{24}	yotta	Y
10^{-2}	centi	c			
10^{-1}	deci	d			

Las variables longitud, tiempo y masa son ejemplos de *cantidades fundamentales*. La mayoría de las otras variables son *cantidades deducidas*, aquellas expresadas como una combinación matemática de cantidades fundamentales. Ejemplos comunes son *área* (un producto de dos longitudes) y *rapidez* (una relación cuantitativa de una longitud a un intervalo de tiempo).

Otro ejemplo de una cantidad deducida es la **densidad**. La densidad ρ (letra griega rho) de cualquier sustancia se define como su *masa por unidad de volumen*:

$$\rho \equiv \frac{m}{V} \quad (1.1)$$

En términos de cantidades fundamentales, la densidad es una proporción de una masa a un producto de tres longitudes. Por ejemplo, el aluminio tiene una densidad de $2.70 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, y el hierro tiene una densidad de $7.86 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. Es factible pensar en una diferencia extrema en densidad al imaginar que sostiene un cubo de 10 centímetros (cm) de espuma de estireno en una mano y un cubo de 10 cm de plomo en la otra. Vea la tabla 14.1 del capítulo 14 para densidades de diferentes materiales.

- E XAMEN RÁPIDO 1.1** En un taller mecánico se producen dos levas, una de aluminio y la otra de hierro. Ambas levas tienen la misma masa. ¿Cuál leva es más larga?
- (a) La leva de aluminio es más larga. (b) La leva de hierro es más larga. (c) Ambas levas tienen el mismo tamaño.

1.2 Modelado y representaciones alternativas

La mayoría de los cursos de física general requieren que el estudiante aprenda las habilidades de resolución de problemas, y los exámenes usualmente incluyen problemas que prueban tales habilidades. En esta sección se describe algunas ideas útiles que le permitirán mejorar su comprensión de conceptos físicos, aumentar su precisión en la solución de problemas, y eliminar el pánico inicial o la falta de dirección para abordar un problema, y organizar su trabajo.

Uno de los primeros métodos de resolución de problemas en física es hacer un **modelo** del problema. **Un modelo es un sustituto simplificado del problema real eso nos permite resolver el problema de una manera relativamente simple.** Siempre y cuando las predicciones del modelo concuerden a nuestra satisfacción con el comportamiento real del sistema real, el modelo es válido. Si las predicciones no concuerdan, se debe refinar el modelo o sustituir con otro modelo. El poder del modelado está en su capacidad de reducir una gran variedad de problemas muy complejos a un número limitado de clases de problemas que se puede abordar de maneras similares.

En ciencia, un modelo es muy diferente de, por ejemplo, un modelo a escala de un edificio propuesto por un arquitecto se presenta como una versión más pequeña de lo

Se proporciona una tabla de las letras en el alfabeto griego en la cubierta posterior de este libro.



que representa. Un modelo científico es una construcción teórica y puede no tener similitud visual con el problema físico. En el ejemplo 1.1, se presenta una simple aplicación de modelado y vamos a encontrar muchos más ejemplos de modelos a medida que avanzamos en el libro.

Los modelos son necesarios porque la operación real del universo es extremadamente complicada. Por ejemplo, supongamos, que se nos pide resolver un problema del movimiento de la Tierra alrededor del Sol. La Tierra es muy complicada, con muchos procesos ocurriendo simultáneamente. Estos procesos incluyen el clima, la actividad sísmica, y los movimientos oceánicos, así como la multitud de procesos que involucran la actividad humana. Tratar de mantener el conocimiento y la comprensión de todos estos procesos es una tarea imposible.

El enfoque de modelado reconoce que ninguno de estos procesos afecta el movimiento de la Tierra alrededor del Sol en un grado mensurable. Por tanto, no se consideran todos estos detalles. Además, como se encuentra en el capítulo 13, el tamaño de la Tierra no afecta la fuerza gravitacional entre la Tierra y el Sol; sólo las masas de la Tierra y el Sol y la distancia entre sus centros determinan esta fuerza. En un modelo simplificado, imaginamos que la Tierra es una partícula, un objeto con masa, pero de tamaño cero. Este remplazo de un objeto extendido por una partícula se llama el **modelo de partícula**, que se utiliza ampliamente en física. Al analizar el movimiento de una partícula con la masa de la Tierra en órbita alrededor del Sol, encontramos que las predicciones del movimiento de partícula están en excelente acuerdo con el movimiento real de la Tierra.

Las dos condiciones principales para el uso del modelo de partícula son las siguientes:

- El tamaño del objeto real no tiene ninguna consecuencia en el análisis de su movimiento.
- Cualquier proceso interno que ocurra en el objeto no tiene consecuencias en el análisis de su movimiento.

Ambas condiciones están en acción para modelar a la Tierra como partícula. Su radio no es un factor en la determinación de su movimiento, y los procesos internos como tormentas, terremotos y procesos de fabricación se pueden despreciar.

En este libro se utilizan cuatro categorías de modelos nos ayudarán a entender y resolver problemas de la física. La primera categoría es el **modelo geométrico**. En este modelo, formamos una construcción geométrica que representa la situación real. Luego aislamos el problema real y se analiza la construcción geométrica. Consideramos un problema común de trigonometría elemental, como el del ejemplo siguiente.

Ejemplo 1.1 Encontrar la altura de un árbol

Usted desea encontrar la altura de un árbol, pero no puede medirlo directamente. Se encuentra de pie a 50.0 m del árbol y determina que la línea de visión desde el suelo hasta la parte superior del árbol hace un ángulo de 25.0° con el suelo. ¿Qué altura tiene el árbol?

SOLUCIÓN

La figura 1.2 muestra el árbol y el triángulo rectángulo correspondiente a la información en el problema sobrepuesta sobre ésta. (Suponemos que el árbol es exactamente perpendicular a un suelo plano perfecto.) En el triángulo, conocemos que la longitud del cateto horizontal y el ángulo entre la hipotenusa y el cateto horizontal. Podemos encontrar la altura del árbol calculando la longitud del cateto vertical. Lo hacemos con la función tangente:

$$\tan \theta = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}} = \frac{h}{50.0 \text{ m}}$$

$$h = (50.0 \text{ m}) \tan \theta = (50.0 \text{ m}) \tan 25.0^\circ = 23.3 \text{ m}$$

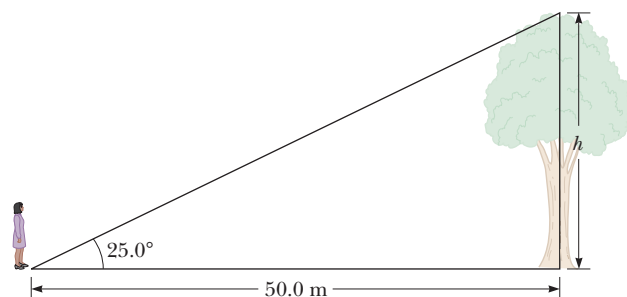


Figura 1.2 (Ejemplo 1.1) La altura de un árbol se puede encontrar midiendo la distancia desde el árbol y el ángulo de visión a la parte superior sobre el suelo. Este problema es un ejemplo simple del modelado geométrico de un problema real.

Es posible que haya resuelto un problema muy similar al ejemplo 1.1, pero nunca pensó en el concepto de modelado. Sin embargo, en el enfoque del modelado, una vez que dibuja el triángulo en la figura 1.2, el triángulo es un modelo geométrico del problema real; se trata de un *sustituto*. Hasta que lleguemos al final del problema, no nos imaginamos que el problema de un *árbol* sea un *triángulo*. Usamos trigonometría para encontrar el cateto vertical del triángulo, lo que da un valor de 23.3 m. Ya que este cateto *representa* la altura del árbol, ahora podemos regresar al problema original y afirmar que la altura del árbol es de 23.3 m.

Otros ejemplos de modelos geométricos incluyen modelar a la tierra como una esfera perfecta, una pizza como un disco perfecto, una regla de un metro como una varilla larga sin espesor, y un cable eléctrico como un cilindro largo y recto.

El modelo de partícula es un ejemplo de la segunda categoría de modelos, que se conocen como **modelos de simplificación**. En un modelo de simplificación, los detalles no son importantes por lo que se omiten para determinar el resultado del problema. Cuando estudiamos rotación en el capítulo 10, los objetos se modelarán como *cuerpos rígidos*. Todas las moléculas en un cuerpo rígido mantienen sus posiciones exactas con respecto a la otra. Adoptamos este modelo de simplificación porque es mucho más fácil analizar una roca giratoria que un pedazo giratorio de gelatina, que es *no* un cuerpo rígido. Otros modelos de simplificación supondrán que las cantidades como las fuerzas de fricción son insignificantes, permanecen constantes, o son proporcionales a alguna potencia de la rapidez del objeto. En el capítulo 12, vamos a suponer vigas metálicas *uniformes*, en el capítulo 14 flujos *laminares* de fluidos, en el capítulo 15, resortes *sin masa*, en el capítulo 23, distribuciones *simétricas* de carga eléctrica, en el capítulo 27, alambres *sin resistencia*, en el capítulo 34 *lentes delgadas*. Estos, y muchos más, son modelos de simplificación.

La tercera categoría es la de **modelos de análisis**, que son tipos generales de problemas que hemos resuelto antes. Una técnica importante en la de simplificación de problemas es plantear un nuevo problema en una forma similar a una que ya hemos resuelto y que se puede utilizar como modelo. Como veremos, hay unas dos docenas de modelos de análisis que se pueden utilizar para resolver la mayor parte de los problemas que usted encontrará. Todos los modelos de análisis de física clásica se basarán en cuatro modelos de simplificación: *partícula*, *sistema*, *cuerpo rígido*, y *ondas*. Vamos a ver nuestros primeros modelos de análisis en el capítulo 2, donde vamos a hablar de ellos con más detalle.

La cuarta categoría de modelos es la de **modelos estructurales**. Estos modelos generalmente se utilizan para entender el comportamiento de un sistema que es muy diferente en la escala de nuestro mundo macroscópico, sea mucho más pequeño o mucho más grande, por lo que no podemos interactuar con éste directamente. Como ejemplo, la noción de un átomo de hidrógeno como un electrón en una órbita circular alrededor de un protón es un modelo estructural del átomo. El antiguo modelo *geocéntrico* del universo, en el que se teoriza que la tierra está en el centro del universo, es un ejemplo de un modelo estructural para algo más grande en escala que nuestro mundo macroscópico.

Íntimamente relacionado con la noción de modelado está la de formar **representaciones alternativas** del problema que está resolviendo. **Una representación es un método de visualización o representación de la información relacionada con el problema**. Los científicos deben ser capaces de comunicar ideas complejas a persona sin bases científicas. La mejor representación a utilizar en la transmisión de la información con éxito variará de una persona a otra. Algunas estarán convencidas con una gráfica bien dibujado, y otros requerirán una imagen. Los físicos a menudo son persuadidos de estar de acuerdo con un punto de vista mediante el examen de una ecuación, pero los no físicos puede no estar convencidos con esta representación matemática de la información.

Un problema en palabras, como los que se presentan al final de los capítulos en este libro, es una representación de un problema. En el “mundo real” al que va a entrar después de la graduación, la representación inicial de un problema puede ser sólo una situación existente, como los efectos del cambio climático o un paciente en peligro de morir. Es posible que tenga que identificar los datos e información importantes, y luego ¡plantear la situación usted mismo con un problema en palabras equivalente!

Considerar representaciones alternativas pueden ayudarle a pensar en la información del problema de varias maneras diferentes para ayudarle a entenderlo y resolverlo. Varios tipos de representaciones pueden ser de ayuda en este esfuerzo:



- **Representación mental.** De la descripción del problema, imagine una escena que describe lo que está sucediendo en el problema en palabras, entonces deje que el tiempo pase para que entienda la situación y pueda predecir qué cambios ocurrirán en la situación. Este paso es importante para acercarse a cada problema.
- **Representación pictórica.** Dibuje una imagen de la situación descrita en el problema con palabras puede ser de gran ayuda en la comprensión del problema. En el ejemplo 1.1, la representación pictórica de la figura 1.2 nos permite identificar al triángulo como modelo geométrico del problema. En arquitectura, un proyecto es una representación pictórica de un edificio propuesto.

En general, una representación gráfica describe *lo que vería* si estaba observando la situación del problema. Por ejemplo, la figura 1.3 muestra una representación pictórica de un jugador de béisbol que golpea un foul corto. Cualquier sistema de ejes coordenados incluidos en su representación pictórica estará en dos dimensiones: ejes x y y .

- **Representación pictórica simplificada.** A menudo es útil redibujar la representación pictórica sin complicar los detalles aplicando un modelo simplificado. Este proceso es similar al análisis del modelo de partícula descrito anteriormente. En una representación pictórica de la Tierra en órbita alrededor del Sol, usted puede dibujar la Tierra y el Sol como esferas, con la posibilidad de que algunos intenten dibujar continentes para identificar cuál esfera es la Tierra. En la representación pictórica simplificada, la Tierra y el Sol se dibujan simplemente como puntos, representando partículas, con leyendas apropiadas. La figura 1.4 muestra una representación pictórica simplificada que corresponde a la representación pictórica de la trayectoria de la pelota de béisbol en la figura 1.3. Las notaciones v_x y v_y se refieren a las componentes del vector velocidad para la pelota de béisbol. Estudiaremos los componentes vectoriales en el capítulo 3. Vamos a utilizar estas representaciones pictóricas simplificadas a lo largo del libro.
- **Representación gráfica.** En algunos problemas, dibujar una gráfica que describa la situación puede ser muy útil. En mecánica, por ejemplo, las gráficas posición-tiempo pueden ser de gran ayuda. Del mismo modo, en termodinámica, las gráficas presión-volumen son esenciales para entender. La figura 1.5 muestra una representación gráfica de la posición en función del tiempo de un bloque en el extremo de un resorte vertical, que oscila hacia arriba y hacia abajo. Esta gráfica es útil para entender el movimiento armónico simple, que estudiamos en el capítulo 15.

Una representación gráfica es diferente de una representación pictórica, que es también un despliegue en dos dimensiones de la información, pero cuyos ejes, cualesquiera, representa las coordenadas de *longitud*. En una representación gráfica, los ejes pueden representar dos variables relacionadas. Por ejemplo, una representación gráfica puede tener ejes para la temperatura y el tiempo. La gráfica de la figura 1.5 tiene ejes de posición vertical y y el tiempo t . Por tanto, en comparación con una representación pictórica, una representación gráfica *no* es generalmente algo que vería cuando observa la situación del problema con sus ojos.

- **Representación tabular.** A veces es útil organizar la información en forma tabular para ayudar a que sea más claro. Por ejemplo, algunos estudiantes encuentran que es útil hacer tablas de cantidades conocidas y cantidades desconocidas. La tabla periódica de los elementos es una representación tabular extremadamente útil de información en química y física.
- **Representación matemática.** El objetivo final de resolver un problema es a menudo la representación matemática. Desea pasar de la información contenido en el problema en palabras, a través de diversas representaciones del problema que le permitan entender lo que está sucediendo, a una o más ecuaciones que representan la situación del problema y que se puede resolver matemáticamente para el resultado deseado.

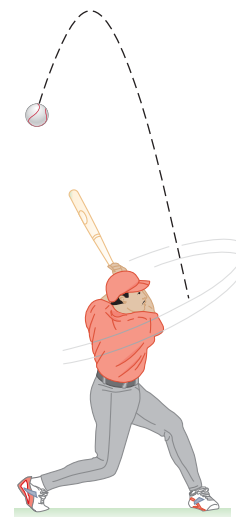


Figura 1.3 Una representación pictórica de un foul bateado por un jugador de béisbol.

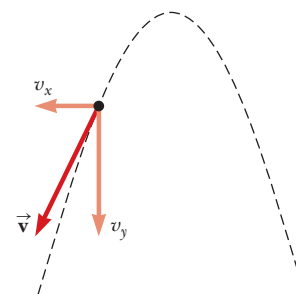


Figura 1.4 Una representación pictórica simplificada para la situación que se muestra en la figura 1.3.

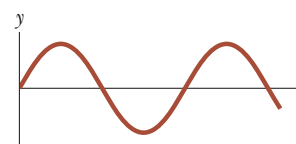


Figura 1.5 Una representación gráfica de la posición como función del tiempo de un bloque que cuelga de un resorte y está oscilando.



1.3 Análisis dimensional

En Física la palabra *dimensión* denota la naturaleza física de una cantidad. La distancia entre dos puntos, por ejemplo, puede medirse en pies, metros o estadios, que son todas diferentes formas de expresar la dimensión de longitud.

Los símbolos que se usan en este libro para especificar las dimensiones de longitud, masa y tiempo son L, M y T, respectivamente.³ Con frecuencia se usarán los corchetes [] para denotar las dimensiones de una cantidad física. Por ejemplo, el símbolo que se usa en este libro para rapidez es v , y en esta notación, las dimensiones de rapidez se escriben $[v] = L/T$. Como otro ejemplo, las dimensiones del área A son $[A] = L^2$. En la tabla 1.5 se mencionan las dimensiones y unidades de área, volumen, rapidez y aceleración. Las dimensiones de otras cantidades, como fuerza y energía, se describirán conforme se introduzcan en el texto.

En muchas situaciones es posible que deba verificar una ecuación específica, para ver si satisface sus expectativas. Un procedimiento útil y poderoso llamado **análisis dimensional** ayuda para esta comprobación porque **las dimensiones son tratadas como cantidades algebraicas**. Por ejemplo, las cantidades se suman o restan sólo si tienen las mismas dimensiones. Además, los términos en ambos lados de una ecuación deben tener las mismas dimensiones. Al seguir estas simples reglas le será posible usar el análisis dimensional para determinar si una expresión tiene la forma correcta. Cualquier correspondencia es correcta sólo si las dimensiones en ambos lados de la ecuación son las mismas.

Para ilustrar este procedimiento, suponga que está interesado en una ecuación para la posición x de un automóvil en un tiempo t si el automóvil parte del reposo en $x = 0$ y se mueve con aceleración constante a . La expresión correcta para esta situación es $x = \frac{1}{2}at^2$ como se muestra en el capítulo 2. La cantidad x en el lado izquierdo tiene la dimensión de longitud. Para que la ecuación sea correcta en términos dimensionales, la cantidad en el lado derecho también debe tener la dimensión de longitud. Es posible realizar una verificación dimensional al sustituir las dimensiones para aceleración, L/T^2 (tabla 1.5), y tiempo, T, en la ecuación. Esto es, la forma dimensional de la ecuación $x = \frac{1}{2}at^2$ es

$$L = \frac{L}{T^2} \cdot T^2 = L$$

Las dimensiones de tiempo se eliminan, como se muestra, lo que deja a la dimensión de longitud en el lado derecho para igualar con la de la izquierda.

Un procedimiento más general de análisis dimensional es establecer una expresión de la forma

$$x \propto a^n t^m$$

donde n y m son exponentes que se deben determinar y el símbolo \propto indica una proporcionalidad. Esta correspondencia es correcta sólo si las dimensiones de ambos lados son las mismas. Puesto que la dimensión del lado izquierdo es longitud, la dimensión del lado derecho también debe ser longitud. Esto es,

$$[a^n t^m] = L = L^1 T^0$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 1.2

Símbolos para cantidades Algunas cantidades tienen un pequeño número de símbolos que las representan. Por ejemplo, el símbolo para tiempo casi siempre es t . Otras cantidades tienen varios símbolos que se aplican según el uso. La longitud se describe con símbolos como x , y y z (para posición); r (para radio); a , b y c (para los lados de un triángulo rectángulo); ℓ (para la longitud de un objeto); d (para una distancia); h (para una altura); y así por el estilo.

TABLA 1.5 Dimensiones y unidades de cuatro cantidades derivadas

Cantidad	Área (A)	Volumen (V)	Rapidez (v)	Aceleración (a)
Dimensiones	L^2	L^3	L/T	L/T^2
Unidades del SI	m^2	m^3	m/s	m/s^2
Sistema usual U.S.	ft^2	ft^3	ft/s	ft/s^2

³Las *dimensiones* de una cantidad se simbolizarán mediante letras mayúsculas no cursivas, como L o T. El *símbolo algebraico* para la cantidad en sí estará en cursiva, como L para la longitud de un objeto o t para tiempo.

Puesto que las dimensiones de la aceleración son L/T^2 y la dimensión de tiempo es T , tenemos

$$(L/T^2)^n T^m = L^1 T^0 \rightarrow (L^n T^{m-2n}) = L^1 T^0$$

Los exponentes de L y T deben ser los mismos en ambos lados de la ecuación. A partir de los exponentes de L , se ve de inmediato que $n = 1$. De los exponentes de T , $m - 2n = 0$, lo que, una vez que se sustituye para n , produce $m = 2$. Al regresar a la expresión original $x \propto a^n t^m$, se concluye que $x \propto at^2$.

- EJEMPLO RÁPIDO 1.2** Verdadero o falso: El análisis dimensional le proporciona el
- valor numérico de las constantes de proporcionalidad que aparecen en una expresión
 - algebraica.

Ejemplo 1.2 Análisis de una ecuación

Demuestre que la expresión $v = at$, es dimensionalmente correcta, donde v representa rapidez, a aceleración y t un instante de tiempo.

SOLUCIÓN

Identifique las dimensiones de v en la tabla 1.5:

$$[v] = \frac{L}{T}$$

Encuentre las dimensiones de a en la tabla 1.5 y multiplique por las dimensiones de t :

$$[at] = \frac{L}{T^2} T = \frac{L}{T}$$

Por tanto, $v = at$ es dimensionalmente correcta porque se tienen las mismas dimensiones en ambos lados. (Si la expresión se hubiese dado como $v = at^2$, sería dimensionalmente *incorrecta*. ¡Inténtelo y verá!)

Ejemplo 1.3 Análisis de una ley de potencias

Suponga que la aceleración a de una partícula que se mueve con rapidez uniforme v en un círculo de radio r es proporcional a alguna potencia de r , por decir r^n , y alguna potencia de v , digamos v^m . Determine los valores de n y m y escriba la forma más simple de una ecuación para la aceleración.

SOLUCIÓN

Escriba una expresión para a con una constante adimensional de proporcionalidad k :

$$a = kr^n v^m$$

Sustituya las dimensiones de a , r y v :

$$\frac{L}{T^2} = L^n \left(\frac{L}{T}\right)^m = \frac{L^{n+m}}{T^m}$$

Igual los exponentes de L y T de modo que la ecuación dimensional se balancee:

$$n + m = 1 \text{ and } m = 2$$

Resuelva las dos ecuaciones para n :

$$n = -1$$

Escriba la expresión de aceleración:

$$a = kr^{-1} v^2 = k \frac{v^2}{r}$$

En la sección 4.4 acerca del movimiento circular uniforme, se muestra que $k = 1$ si se usa un conjunto consistente de unidades. La constante k no sería igual a 1 si, por ejemplo, v estuviese en km/h y usted quisiera a en m/s^2 .



PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 1.3**Siempre incluya unidades**

Cuando realice cálculos, incluya las unidades para toda cantidad y lleve las unidades a través de todo el cálculo. Evite la tentación de quitar pronto las unidades y luego poner las unidades esperadas una vez que tiene una respuesta. Al incluir las unidades en cada paso, detecte errores si las unidades para la respuesta evidencian ser incorrectas.

1.4 Conversión de unidades

A veces debe convertir unidades de un sistema de medición a otro o convertir dentro de un sistema (por ejemplo, de kilómetros a metros). Las igualdades entre unidades de longitud del SI y las usuales U.S. son las siguientes:

$$\begin{aligned} 1 \text{ milla} &= 1\,609 \text{ m} = 1.609 \text{ km} & 1 \text{ ft} &= 0.3048 \text{ m} = 30.48 \text{ cm} \\ 1 \text{ m} &= 39.37 \text{ in.} = 3.281 \text{ ft} & 1 \text{ in.} &= 0.0254 \text{ m} = 2.54 \text{ cm (exactamente)} \end{aligned}$$

En el apéndice A se encuentra una lista más completa de factores de conversión.

Como las dimensiones, las unidades se manipulan como cantidades algebraicas que se cancelan mutuamente. Por ejemplo, suponga que desea convertir 15.0 pulg a centímetros. Puesto que 1 pulg se define exactamente como 2.54 cm, se encuentra que

$$15.0 \text{ in.} = (15.0 \text{ in.}) \left(\frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ in.}} \right) = 38.1 \text{ cm}$$

donde el cociente entre paréntesis es igual a 1. Se expresa 1 como 2.54 cm/1 in. (en lugar de 1 in./2.54 cm) para que la unidad “pulgada” en el denominador se elimine con la unidad en la cantidad original. La unidad restante es el centímetro, el resultado deseado.

- E XAMEN RÁPIDO 1.3** La distancia entre dos ciudades es de 100 mi. ¿Cuál es el número de kilómetros entre las dos ciudades? (a) menor que 100, (b) mayor que 100, (c) igual a 100.

Ejemplo 1.4 ¿Está acelerando?

En una autopista interestatal en una región rural de Wyoming, un automóvil viaja con una rapidez de 38.0 m/s. ¿El conductor rebasó el límite de rapidez de 75.0 mi/h?

SOLUCIÓN

De la rapidez en m/s convierta metros en millas:

$$\text{Convierta segundos a horas: } (38.0 \text{ m/s}) \left(\frac{1 \text{ mi}}{1\,609 \text{ m}} \right) \left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \right) \left(\frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} \right) = 85.0 \text{ mi/h}$$

En efecto, el conductor rebasó el límite de rapidez y debe reducirla.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si el conductor viniese de fuera de Estados Unidos y estuviese familiarizado con magnitudes de velocidad medidas en km/h? ¿Cuál es la rapidez del automóvil en km/h?

Respuesta Se puede convertir la respuesta final a las unidades adecuadas:

$$(85.0 \text{ mi/h}) \left(\frac{1.609 \text{ km}}{1 \text{ mi}} \right) = 137 \text{ km/h}$$

La figura 1.6 muestra un indicador de velocidad de un automóvil que muestra magnitudes de velocidad tanto en mi/h como en km/h. ¿Le es posible verificar la conversión que acaba de realizar con esta fotografía?



Figura 1.6 Indicador de velocidad de un vehículo que muestra magnitudes de velocidad tanto en millas por hora como en kilómetros por hora.

1.5 Estimaciones y cálculos de orden de magnitud

Suponga que alguien le pregunta el número de bits de datos en un disco Blu-ray común. Su respuesta que por lo general no se espera que proporcione el número exacto, sino más bien una estimación, se debe expresar como notación científica. El **orden de magnitud** de un número de potencia de diez se determina del modo siguiente:



1. Exprese el número en notación científica, con el multiplicador de la potencia de diez entre 1 y 10 y una unidad.
2. Si el multiplicador es menor que 3.162 (la raíz cuadrada de diez), el orden de magnitud del número es la potencia de diez en la notación científica. Si el multiplicador es mayor que 3.162, el orden de magnitud es uno más grande que la potencia de diez en la notación científica.

Se usa el símbolo \sim para “es del orden de”. Use el procedimiento anterior para verificar los órdenes de magnitud para las siguientes longitudes:

$$0.0086 \text{ m} \sim 10^{-2} \text{ m} \quad 0.0021 \text{ m} \sim 10^{-3} \text{ m} \quad 720 \text{ m} \sim 10^3 \text{ m}$$

Por lo general, cuando se hace una estimación del orden de magnitud, los resultados son confiables hasta dentro de un factor aproximado de 10.

Las imprecisiones provocadas por suponer muy poco para un número, con frecuencia se cancelan por otras suposiciones que son muy altas. Descubrirá que con la práctica, sus estimaciones se vuelven cada vez mejores. Los problemas de estimación pueden ser divertidos de trabajar porque usted escoge con libertad los dígitos, aventuras aproximaciones razonables para números desconocidos, hace suposiciones simplificadoras y convierte la pregunta en algo factible de responder, en su cabeza o con una mínima manipulación matemática en el papel. Debido a la simplicidad de este tipo de cálculos, se realizan en un *pequeño* trozo de papel y con frecuencia se llaman “*cálculos de servilleta*”.

Ejemplo 1.5 Respiraciones en una vida

Estime el número de respiraciones realizadas durante una vida humana promedio.

SOLUCIÓN

Comience por estimar que la vida humana promedio es de alrededor de 70 años. Piense acerca del número promedio de respiraciones que una persona realiza en 1 min. Este número varía dependiendo de si la persona se ejercita, duerme, está enojada, serena y cosas por el estilo. Al orden de magnitud más cercano, debe elegir 10 respiraciones por minuto como estimación. (Es cierto que dicha estimación está más cerca al valor promedio verdadero que 1 respiración por minuto o 100 respiraciones por minuto.)

Encuentre el número aproximado de minutos en un año:

$$1 \text{ año} \left(\frac{400 \text{ días}}{1 \text{ año}} \right) \left(\frac{25 \text{ h}}{1 \text{ día}} \right) \left(\frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} \right) = 6 \times 10^5 \text{ min}$$

Encuentre el número aproximado de minutos en una vida de 70 años:

$$\begin{aligned} \text{número de minutos} &= (70 \text{ años})(6 \times 10^5 \text{ min/año}) \\ &= 4 \times 10^7 \text{ min} \end{aligned}$$

Encuentre el número aproximado de respiraciones en una vida:

$$\begin{aligned} \text{número de respiraciones} &= (10 \text{ respiraciones/min})(4 \times 10^7 \text{ min}) \\ &= 4 \times 10^8 \text{ respiraciones} \end{aligned}$$

Por tanto, una persona toma en el orden de 10^9 respiraciones en una vida. Advierta cuánto más simple fue, en el primer cálculo, multiplicar 400×25 que trabajar con el más preciso 365×24 .

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si la vida promedio se estimase como 80 años en lugar de 70? ¿Esto cambiaría la estimación final?

Respuesta Se podría afirmar que $(80 \text{ años})(6 \times 10^5 \text{ min/año}) = 5 \times 10^7 \text{ min}$, de modo que la estimación final debería ser 5×10^8 respiraciones. Esta respuesta todavía está en el orden de 10^9 respiraciones, de modo que una estimación del orden de magnitud no cambiaría.

1.6 Cifras significativas

Cuando se miden ciertas cantidades, los valores medidos se conocen sólo dentro de los límites de la incertidumbre experimental. El valor de esta incertidumbre depende de varios factores, como la calidad del aparato, la habilidad del experimentador y el número de mediciones realizadas. El número de **cifras significativas** en una medición sirve para expresar algo acerca de la incertidumbre. El número de cifras significativas se relaciona



con el número de dígitos numéricos utilizados para expresar la medición, como se analiza a continuación.

Como ejemplo de cifras significativas, suponga que se le pide medir el área de un disco Blu-ray usando una regleta como instrumento de medición. Suponga que la precisión a la que puede medir el radio del disco es ± 0.1 cm. Debido a la incertidumbre de ± 0.1 cm, si el radio mide 6.0 cm, sólo es posible afirmar que su radio se encuentra en algún lugar entre 5.9 y 6.1 cm. En este caso, el valor medido de 6.0 cm tiene dos cifras significativas. Note que *las cifras significativas incluyen el primer dígito estimado*. Por tanto, el radio se podría escribir como (6.0 ± 0.1) cm.

Los ceros pueden o no ser cifras significativas. Los que se usan para la posición del punto decimal en números como 0.03 y 0.007 5 no son significativos. Debido a eso, existen una y dos cifras significativas, respectivamente, en estos dos valores. Sin embargo, cuando los ceros vienen después de otros dígitos, existe la posibilidad de malas interpretaciones. Por ejemplo, suponga que la masa de un objeto está dada como 1 500 g. Este valor es ambiguo porque no se sabe si los últimos dos ceros se usan para ubicar el punto decimal o si representan cifras significativas en la medición. Para eliminar dicha ambigüedad, es común usar notación científica para indicar el número de cifras significativas. En este caso, la masa se expresaría como 1.5×10^3 g si hubiese dos cifras significativas en el valor observado, 1.50×10^3 g si hubiese tres cifras significativas y 1.500×10^3 g si hubiese cuatro. La misma regla se sostiene para números menores que 1, de modo que 2.3×10^{-4} tiene dos cifras significativas (y por tanto se podría escribir 0.000 23) y 2.30×10^{-4} tiene tres cifras significativas (también se escribe 0.000 230) y 2.30×10^{-4} tiene tres cifras significativas (que también se escribe como 0.000 230).

En la resolución de problemas, con frecuencia combinamos cantidades matemáticamente a través de la multiplicación, división, suma, resta, etc. Al hacer esto, usted debe asegurarse de que el resultado tiene el número adecuado de cifras significativas. Una buena regla general para su uso en la determinación del número de cifras significativas que se pueden afirmar en una multiplicación o una división es la siguiente:

Cuando se multiplican muchas cantidades, el número de cifras significativas en la respuesta final es el mismo que el número de cifras significativas en la cantidad que tiene el número más pequeño de cifras significativas. La misma regla aplica para la división.

Ahora apliquemos esta regla para encontrar el área del disco Blu-ray cuyo radio medimos antes. Usando la ecuación para el área de un círculo.

$$A = \pi r^2 = \pi(6.0 \text{ cm})^2 = 1.1 \times 10^2 \text{ cm}^2$$

Si realiza este cálculo en su calculadora, es probable que vea 113.097 335 5. Debe quedar claro que no quiere conservar todas estas cifras, pero puede tener la tentación de presentar el resultado como 113 cm^2 . Este resultado no se justifica, ya que cuenta con tres cifras significativas, mientras que la radio sólo tiene dos. Por tanto, tenemos que presentar el resultado con sólo dos cifras significativas, como se muestra arriba.

Para suma y resta debe considerar el número de lugares decimales cuando determine cuántas cifras significativas ha de reportar:

Cuando los números se sumen o resten, el número de lugares decimales en el resultado debe ser igual al número más pequeño de lugares decimales de cualquier término en la suma o resta.

Como un ejemplo de esta regla, considere la suma

$$23.2 + 5.174 = 28.4$$

Observe que no presentamos la respuesta como 28.374 ya que el número más pequeño de lugares decimales, es uno para 23.2. Por tanto, nuestra respuesta debe tener solo un lugar decimal.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 1.4

Lea con cuidado Observe que la regla para suma y resta es diferente de la regla de multiplicación y división. Para suma y resta, la consideración relevante es el número de *lugares decimales*, no el número de *cifras significativas*.



La regla de la suma y resta a menudo puede dar lugar a respuestas que tienen diferente número de cifras significativas que las cantidades con las que empezó. Por ejemplo, considere las siguientes operaciones que cumplen con la regla:

$$\begin{aligned}1.000\ 1 + 0.000\ 3 &= 1.000\ 4 \\1.002 - 0.998 &= 0.004\end{aligned}$$

En el primer ejemplo, el resultado tiene cinco cifras significativas a pesar de que uno de los términos, 0.000 3, sólo tiene una cifra significativa. Del mismo modo, en el segundo cálculo, el resultado sólo tiene una cifra significativa a pesar de que los números a restar tienen cuatro y tres, respectivamente

En este libro la mayoría de los ejemplos numéricos y problemas de fin de capítulo producirán respuestas que tienen tres cifras significativas. Cuando se realicen cálculos del orden de magnitud, por lo general se trabajará con una sola cifra significativa.

◀ Guía de cifras significativas utilizadas en este libro

Si se debe reducir el número de cifras significativas en el resultado de una suma o resta, hay una regla general para redondear números: el último dígito retenido se aumenta en 1 si el último dígito eliminado es mayor que 5. (Por ejemplo, 1.346 será 1.35.) Si el último dígito eliminado es menor que 5, el último dígito permanece como está. (Por ejemplo, 1.343 será 1.34.) Si el último dígito eliminado es igual a 5, el dígito restante debe redondearse al número par más cercano. (Esta regla ayuda a evitar acumulación de errores en procesos aritméticos largos.)

En un cálculo largo que implica muchos pasos, es muy importante evitar la acumulación de error al demorar el redondeo de números en un cálculo largo hasta que tenga el resultado final. Espere a estar listo para copiar la respuesta final de su calculadora antes de redondear al número correcto de cifras significativas. En este libro, se presentan los valores numéricos redondeados a dos o tres cifras significativas. Esto ocasionalmente hace que algunas manipulaciones matemáticas parezcan extrañas o incorrectas. Por ejemplo, revisemos el ejemplo 3.5 en la página 62, veremos la operación $-17.7\text{ km} + 34.6\text{ km} = 17.0\text{ km}$. Esto parece una resta incorrecta, pero eso es sólo porque hemos redondeado los números de 17.7 km y 34.6 km para presentarlos. Si todos los dígitos en estos dos números intermedios se conservan y el redondeo sólo se realiza en el número final, se obtiene el resultado correcto de 17.0 km de tres dígitos.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 1.5

Soluciones simbólicas Al resolver problemas, es muy útil realizar la solución completamente en forma algebraica y esperar hasta el final para introducir valores numéricos en la expresión simbólica final. Este método le ahorrará teclear mucho en su calculadora, especialmente si algunas cantidades se eliminan así ¡nunca tendrá que introducir esos valores en su calculadora! Además, sólo tendrá que redondear una vez, en el resultado final.

Ejemplo 1.6 Instalación de una alfombra

En una habitación de 12.71 m de largo y 3.46 m de ancho se instalará una alfombra. Encuentre el área de la habitación.

SOLUCIÓN

Si multiplica 12.71 m por 3.46 m en su calculadora, verá una respuesta de 43.976 6 m². ¿Cuántos de estos números debe presentar? La regla empírica para multiplicación dice que presente en su respuesta sólo el número de cifras significativas que estén presentes en la cantidad medida que tenga el número más bajo de cifras significativas. En este ejemplo, el número más bajo de cifras significativas es tres en 3.46 m, así que debe expresar la respuesta final como 44.0 m².

Resumen

➤ Definiciones

Las tres cantidades físicas fundamentales de la mecánica son **longitud**, **masa** y **tiempo**, que en el SI tienen las unidades **metro** (m), **kilogramo** (kg) y **segundo** (s). Estas cantidades fundamentales no es posible definir las en términos de cantidades más básicas.

La **densidad** de una sustancia se define como su *masa por cada unidad de volumen*:

$$\rho \equiv \frac{m}{V} \quad (1.1)$$

continúa



Conceptos y principios

El método de **análisis dimensional** es muy valioso para resolver problemas de física. Las dimensiones son tratadas como cantidades algebraicas. Al realizar estimaciones y cálculos de orden de magnitud, debe ser capaz de aproximar la respuesta a un problema cuando no haya suficiente información disponible para especificar completamente una solución exacta.


Se pueden mejorar las habilidades de resolución de problemas y comprensión de la física mediante el **modelado** del problema y construyendo **representaciones alternativas** del problema. Los modelos útiles para resolver problemas incluyen **análisis geométrico**, **simplificación**, y **modelos estructurales**. Las representaciones útiles incluyen las **mentales**, **pictóricas**, **pictóricas simplificadas**, **gráficas**, **tabulares**, y **representaciones matemáticas**.

Cuando calcule un resultado a partir de varios números medidos, donde cada uno tiene cierta precisión, debe dar el resultado con el número correcto de **cifras significativas**.

Cuando **multiplique** varias cantidades, el número de cifras significativas en la respuesta final es el mismo que el número de cifras significativas en la cantidad que tiene el número más pequeño de cifras significativas. La misma regla se aplica a la **división**.

Cuando se **suman** o **restan** números, el número de lugares decimales en el resultado debe ser igual al número más pequeño de lugares decimales de cualquier término en la suma o resta.

Piense, dialogue y comparta

Consulte el prefacio para una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para obtener más artículos de evaluación para esta sección, visite  **WEBASSIGN**
From Cengage

1. A un estudiante se le suministra un gran número de papel de copia, regla, compas, tijeras, y una balanza sensible. Corta varias formas en diferentes tamaños, calcula sus áreas, mide sus masas, y traza la gráfica de la figura TP1.1. *a)* Considere el cuarto punto experimental de la parte superior. ¿Qué tan lejos está verticalmente de la recta de mejor ajuste? Exprese su respuesta como diferencia en la coordenada del eje vertical. *b)* Exprese su respuesta como un porcentaje. *c)* Calcule la pendiente de la recta. *d)* Indique lo que la gráfica muestra, refiriéndose a la forma de la gráfica y los resultados de los incisos *b)* y *c)*. *e)* Describa si este resultado debe ser previsto teóricamente. *f)* Describa el significado físico de la pendiente.

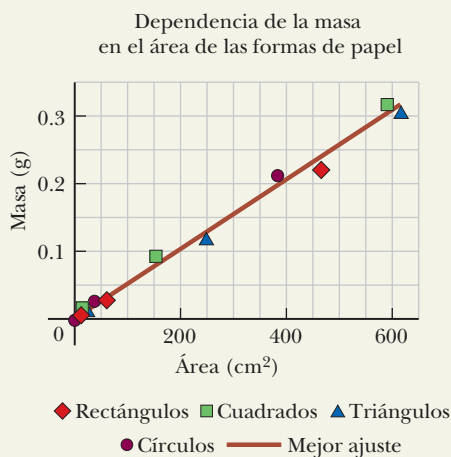


Figura TP1.1

2. **ACTIVIDAD** Cada persona en el grupo mide la altura de otra persona utilizando una regla graduada con distancias métricas en un lado y las distancias usuales de EE.UU., como pulgadas, en el otro lado. Registre la altura al centímetro más cercano y a la media pulgada más cercana. Para cada persona, divida su altura en centímetros entre la altura en pulgadas. Compare los resultados de esta división para todos en su grupo. ¿Qué puede decir acerca de los resultados?
3. **ACTIVIDAD** Reuna un número de centavos de Estados Unidos, ya sea de su profesor o de los miembros de su grupo. Divida los centavos en dos muestras: (1) los de fechas de 1981 o anteriores, y (2) los de fechas de 1983 y posteriores (excluya los centavos de 1982 de su muestra). Encuentre la masa total de todos los centavos en cada muestra. Luego divida cada una de estas masas totales entre el número de centavos en su muestra correspondiente, para encontrar la masa media de los centavos en cada muestra. Explique por qué los resultados son diferentes para las dos muestras.
4. **ACTIVIDAD** Discuta en su grupo el proceso por el cual usted puede obtener la mejor medida del espesor de una sola hoja de papel en los capítulos 1 a 5 de este libro. Realice la medición y exprésela con un adecuado número de cifras significativas e incertidumbre. De esa medida, prediga el espesor total de las páginas en el volumen I de este libro (capítulos 1 – 21). Después haga su predicción, mida el grosor del volumen I. ¿Está su medida dentro del rango de predicción y su incertidumbre asociada?



Problemas

Consulte el prefacio para una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para obtener más elementos de evaluación para esta sección, visite  **WEBASSIGN**
From Cengage

Nota: Consulte las páginas finales, apéndices y tablas en el libro siempre que sea necesario para resolver problemas. Para este capítulo, la tabla 14.1 y el apéndice B.3 pueden ser particularmente útiles. Las respuestas a los problemas con números impares se presentan en la parte final del libro.

SECCIÓN 1.1 Estándares de Longitud, Masa y Tiempo

- CIC** a) Use la información que aparece al final de este libro para calcular la densidad promedio de la Tierra. b) ¿Dónde encaja el valor entre los que se mencionan en la tabla 14.1 en el capítulo 14? Busque la densidad de una roca superficial típica, como el granito, en otra fuente y compare la densidad de la Tierra con ella.
- CIC** Un protón, que es el núcleo de un átomo de hidrógeno, se representa como una esfera con un diámetro de 2.4 fm y una masa de 1.67×10^{-27} kg. a) Determine la densidad del protón. b) Establezca cómo se compara su respuesta del inciso a) con la densidad del osmio, que está dada en la tabla 14.1 en el capítulo 14.
- V** De cierta roca uniforme son cortadas dos esferas. Una tiene 4.50 cm de radio. La masa de la segunda esfera es cinco veces mayor. Encuentre el radio de la segunda esfera.
- S** ¿Qué masa se requiere de un material con densidad ρ para hacer un cascarón esférico hueco que tiene radio interior r_1 y radio exterior r_2 ?
- CE** Usted ha sido contratado por el abogado defensor como un testigo experto en una demanda. El demandante es alguien que acaba de regresar de ser un pasajero en el primer vuelo de turista espacial orbital. Basado en un folleto de viajes ofrecido por la compañía de viajes espaciales, el demandante esperaba poder ver la gran muralla de China desde su altura orbital de 200 km por encima de la superficie de la tierra. No pudo hacerlo, y ahora está exigiendo que se reembolse la tarifa y reciba una compensación financiera adicional para cubrir su gran decepción. Construya la base para un argumento para la defensa que muestra que su expectativa de ver la gran muralla desde la órbita no era razonable. La pared es de 7 m de ancho en su punto más ancho y la agudeza visual normal del ojo humano es 3×10^{-4} rad. (la agudeza visual es el ángulo más pequeño subtendido que un objeto puede hacer en el ojo y aun reconocerse; el ángulo subtendido en radianes es el cociente del ancho de un objeto entre la distancia del objeto de sus ojos.)

SECCIÓN 1.2 Modelado y representaciones alternativas

- Una topógrafa mide la distancia a través de un río recto con el siguiente método (figura P1.6). Comenzando directamente a través de un árbol en la orilla opuesta, camina $d = 100$ m a lo largo de la ribera para establecer una línea de base. Luego mira al otro lado del árbol. El ángulo de su línea de base al árbol es $\theta = 35.0^\circ$. ¿Qué tan ancho es el río?

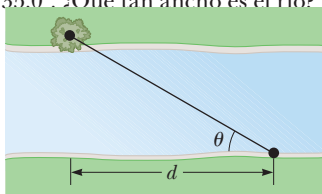


Figura P1.6

- Un sólido cristalino consta de átomos configurados en una estructura reticular repetitiva. Considere un cristal como el que se muestra en la figura P1.7a. Los átomos residen en las esquinas de cubos de lado $L = 0.200$ nm. Una pieza de evidencia para el ordenamiento regular de átomos proviene de las superficies planas a lo largo de las cuales se separa o fractura, un cristal, cuando se rompe. Suponga que este cristal se fractura a lo largo de una cara diagonal, como se muestra en la figura P1.7b. Calcule el espaciamiento d entre dos planos atómicos adyacentes que se separan cuando el cristal se fractura.

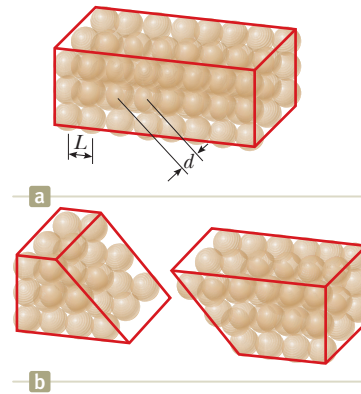


Figura P1.7

SECCIÓN 1.3 Análisis dimensional

- La posición de una partícula que se mueve con aceleración uniforme es una función del tiempo y de la aceleración. Supongamos que escribimos esta posición $x = ka^m t^n$, donde k es una constante adimensional. Demuestre usando análisis dimensional que esta expresión se satisface si $m = 1$ y $n = 2$. Puede este análisis dar el valor de k ?
- ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son dimensionalmente correctas? (a) $v_f = v_i + ax$ (b) $y = (2 \text{ m}) \cos(kx)$, donde $k = 2 \text{ m}^{-1}$
- Suponga que la ecuación $x = At^3 + Bt$ describe el movimiento de un objeto en particular, siendo x la dimensión de la longitud y T la dimensión de tiempo. Determine las dimensiones de las constantes A y B . (b) Determine las dimensiones de la derivada $dx/dt = 3At^2 + B$.

SECCIÓN 1.4 Conversión de unidades

- V** Una pieza sólida de plomo tiene una masa de 23.94 g y un volumen de 2.10 cm^3 . A partir de estos datos, calcule la densidad del plomo en unidades SI (kg/m^3).
- T** ¿Por qué no es posible la siguiente situación? El dormitorio de un estudiante mide 3.8 m por 3.6 m, y su techo tiene 2.5 m de altura. Después de que el estudiante complete su curso de física mostrará su dedicación empapelando por completo las paredes de la habitación con las páginas de su copia del volumen 1 (capítulos del 1 al 21) de este libro de texto. Él incluso cubrirá la puerta y la ventana.
- T** Un metro cúbico (1.00 m^3) de aluminio tiene una masa de 2.70×10^3 kg, y el mismo volumen de hierro tiene una masa de 7.86×10^3 kg. Encuentre el radio de una esfera de aluminio sólida que equilibraría una esfera de hierro sólida de 2.00 cm de radio sobre una balanza de brazos iguales.

- 14.** Sea ρ_{Al} la densidad del aluminio y ρ_{Fe} la del hierro. Encuentre el radio de una esfera de aluminio sólida que equilibra una esfera de hierro sólida de radio r_{Fe} sobre una balanza de brazos iguales.
- 15.** Un galón de pintura (volumen = $3.78 \times 10^{-3} \text{ m}^3$) cubre un área de 25.0 m^2 . ¿Cuál es el grosor de la pintura fresca sobre la pared?
- 16.** Un auditorio mide $40.0 \text{ m} \times 20.0 \text{ m} \times 12.0 \text{ m}$. La densidad del aire es 1.20 kg/m^3 . ¿Cuáles son a) el volumen de la habitación en pies cúbicos y b) el peso en libras del aire en la habitación?

SECCIÓN 1.5 Estimaciones y cálculos de orden de magnitud

Nota: En las soluciones a los problemas 17 a 18, indique las cantidades que midió o estimó y los valores para cada una de ellas.

- 17.** a) Calcule el orden de magnitud de la masa de una bañera medio llena de agua. b) Calcule el orden de magnitud de la masa de una bañera medio llena de monedas.
- 18.** En un orden de magnitud, ¿cuántos afinadores de piano residen en la ciudad de Nueva York? El físico Enrico Fermi fue famoso por plantear preguntas como ésta en los exámenes orales para calificar candidatos a doctorado.
- 19.** Su compañero de cuarto está jugando un videojuego de la última película de *Star Wars* mientras usted estudia física. Distráido por el ruido, usted observará lo que está en la pantalla. El juego implica tratar de volar una nave espacial a través de un campo lleno de asteroides en el cinturón de asteroides alrededor del Sol. Le dice, “¿sabes que el juego que estás jugando es muy poco realista? El cinturón de asteroides no está tan lleno de gente y no tienes que maniobrar de esa manera! Distráido por su declaración, él accidentalmente permite que su nave espacial le pegue a un asteroide, justo para no lograr una puntuación alta. Se vuelve hacia usted con disgusto y dice: “Sí, demuéstralo”. Usted dice, “bien, he aprendido recientemente que la mayor concentración de asteroides está en una región de forma de rosquilla entre los huecos de Kirkwood en los radios de 2.06 UA y 3.27 UA del Sol. Se estima que hay 10^9 asteroides de radio 100 m o más grande, como los de su videojuego, en esta región...” Termine su argumento con un cálculo para demostrar que el número de asteroides en el espacio cerca de una nave espacial es pequeña. (Una unidad astronómica, UA, es la distancia media de la Tierra del Sol: $1 \text{ UA} = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$.)

SECCIÓN 1.6 Cifras significativas

Nota: El apéndice B.8, que trata acerca de la propagación de incertidumbre, es útil para resolver los problemas de esta sección.

- 20.** ¿Cuántas cifras significativas hay en los siguientes números:
a) 78.9 ± 0.2 b) 3.788×10^9 c) 2.46×10^{-6} d) 0.0053 ?
- 21.** El *año tropical*, el intervalo desde un equinoccio de primavera hasta el siguiente equinoccio de primavera, es la base para el calendario. Contiene 365.242 199 días. Encuentre el número de segundos en un año tropical.

Nota: Los siguientes siete problemas requieren habilidades matemáticas que serán útiles a lo largo del curso.

- 22. Problema de repaso.** La densidad promedio del planeta Urano es $1.27 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. La proporción de la masa de Neptuno con la de Urano es 1.19. La proporción del radio de Neptuno con el de Urano es 0.969. Encuentre la densidad promedio de Neptuno.

- 23. Problema de repaso.** En un estacionamiento universitario, el número de automóviles ordinarios es mayor que el de vehículos deportivos por 94.7%. La diferencia entre el número de automóviles y el número de vehículos deportivos es 18. Encuentre el número de vehículos deportivos en el estacionamiento.
- 24. Problema de repaso.** Encuentre todo ángulo θ entre 0 y 360° para el cual proporción de $\sin \theta$ con $\cos \theta$ sea -3.00 .
- 25. Problema de repaso.** La proporción del número de pericos que visita un comedero de aves al número de aves más interesantes es de 2.25. Una mañana, cuando 91 aves visitan el comedero, ¿cuál es el número de pericos?
- 26. Problema de repaso.** Pruebe que una solución de la ecuación

$$2.00x^4 - 3.00x^3 + 5.00x = 70.0$$

es $x = -2.22$.

- 27. Problema de repaso.** A partir del conjunto de ecuaciones

$$p = 3q$$

$$pr = qs$$

$$\frac{1}{2}pr^2 + \frac{1}{2}qs^2 = \frac{1}{2}qt^2$$

que contienen las incógnitas p, q, r, s y t , encuentre el valor de la proporción de t con r .

- 28. Problema de repaso.** La figura P1.28 muestra a los estudiantes que analizan la conducción térmica de la energía en bloques cilíndricos de hielo. Como veremos en el capítulo 19, este proceso se describe por la ecuación

$$\frac{Q}{\Delta t} = \frac{k\pi d^2(T_h - T_c)}{4L}$$

Para control experimental, en estos ensayos todas las cantidades, excepto d y Δt , son constantes. a) Si d se hace tres veces más grande, ¿la ecuación predice que Δt se hará más grande o más pequeña? ¿En qué factor? b) ¿Qué patrón de proporcionalidad de Δt a d predice la ecuación? c) Para mostrar esta proporcionalidad como una línea recta en una gráfica, ¿qué cantidades debe graficar en los ejes horizontal y vertical? d) ¿Qué expresión representa la pendiente teórica de esta gráfica?



Alexandra Heiler

Figura P1.28

PROBLEMAS ADICIONALES

- 29.** En una situación en que los datos se conocen a tres cifras significativas, se escribe $6.379 \text{ m} = 6.38 \text{ m}$ y $6.374 \text{ m} = 6.37 \text{ m}$. Cuando un número termina en 5, arbitrariamente se elige escribir $6.375 \text{ m} = 6.38 \text{ m}$. Igual se podría escribir $6.375 \text{ m} = 6.37 \text{ m}$, “redondeando hacia abajo” en lugar de “redondear hacia arriba”, porque el número 6.375 se cambiaría por



- CIC** iguales incrementos en ambos casos. Ahora considere una estimación del orden de magnitud en la cual los factores de cambio, más que los incrementos, son importantes. Se escribe $500 \text{ m} \sim 10^3 \text{ m}$ porque 500 difiere de 100 por un factor de 5, mientras difiere de 1 000 sólo por un factor de 2. Escriba $437 \text{ m} \sim 10^3 \text{ m}$ y $305 \text{ m} \sim 10^2 \text{ m}$. ¿Qué distancia difiere de 100 m y de 1 000 m por iguales factores de modo que lo mismo se podría escoger representar su orden de magnitud como $\sim 10^2 \text{ m}$ o como $\sim 10^3 \text{ m}$?
- BIO** **CIC** 30. a) ¿Cuál es el orden de magnitud del número de microorganismos en el tracto intestinal humano? Una escala de longitud bacteriana típica es de 10^{-6} m . Estime el volumen intestinal y suponga que el 1% del mismo está ocupada por una bacteria. b) ¿El número de bacterias indican si las bacterias son beneficiosas, peligrosas, o neutras para el cuerpo humano? ¿Qué funciones podrían tener?
31. La distancia del Sol a la estrella más cercana es casi de $4 \times 10^{16} \text{ m}$. La galaxia Vía Láctea (figura P1.31) es en términos aproximados un disco de $\sim 10^{21} \text{ m}$ de diámetro y $\sim 10^{19} \text{ m}$ de grosor. Encuentre el orden de magnitud del número de estrellas en la Vía Láctea. Considere representativa la distancia entre el Sol y el vecino más cercano.



Figura P1.31 La Galaxia Vía Láctea.

32. ¿Por qué no es posible la siguiente situación? En un esfuerzo para aumentar el interés en un programa de televisión, a cada ganador semanal se le ofrece un premio de bonificación de \$1 millón adicional si él o ella pueden contar personalmente la cantidad exacta de un paquete de billetes de un dólar. El ganador deberá realizar esta tarea bajo la supervisión de los ejecutivos del programa de televisión y en una semana laboral de 40 horas. Para consternación de los productores del programa, la mayoría de los participantes tienen éxito en el desafío.
- BIO** 33. Las bacterias y otros procariontes se encuentran bajo tierra, en el agua, y en el aire. Una micra (10^{-6} m) es una escala de longitud característica asociada con estos microbios. a) Estime el número total de bacterias y otros procariontes sobre la Tierra. b) Estime la masa total de todos estos microbios.
- CIC** 34. Un cascarón esférico tiene un radio externo de 2.60 cm y uno interno de a . La pared del cascarón tiene grosor uniforme y está hecho de un material con densidad de 4.70 g/cm^3 . El espacio interior del cascarón está lleno con un líquido que tiene una densidad de 1.23 g/cm^3 . a) Encuentre la masa m de la esfera, incluidos sus contenidos, como función de a . b) ¿Para qué valor de a tiene m su máximo valor posible? c) ¿Cuál es esta masa máxima? d) Explique si el valor de la parte c) concuerda con el resultado de un cálculo directo de la masa de una esfera sólida de densidad uniforme hecha del mismo material que el cascarón? e) ¿Qué pasaría si? En el inciso a), ¿la respuesta cambiaría si la pared interior del cascarón no fuese concéntrica con la pared exterior?
- CIC** 35. Se sopla aire hacia dentro de un globo esférico de modo que, cuando su radio es de 6.50 cm, éste aumenta con una rapidez de 0.900 cm/s . a) Encuentre la rapidez a la que aumenta el volumen del globo. b) Si dicha rapidez de flujo volumétrico de aire que entra al globo es constante, ¿en qué proporción aumentará el radio cuando el radio es de 13.0 cm? c) Explique físicamente por qué la respuesta del inciso b) es mayor o menor que 0.9 cm/s , si es diferente.
36. En física es importante usar aproximaciones matemáticas. Demuestre que, para ángulos pequeños ($< 20^\circ$),
- $$\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha = \frac{\pi \alpha'}{180^\circ}$$
- Donde α está en radianes y α' en grados. b) Use una calculadora para encontrar el ángulo más grande para el que $\tan \alpha$ se pueda aproximar a α con un error menor de 10.0 por ciento.
- T** 37. El consumo de gas natural por una compañía satisface la ecuación empírica $V = 1.50t + 0.008 00t^2$, donde V es el volumen en millones de pies cúbicos y t es el tiempo en meses. Expresé esta ecuación en unidades de pies cúbicos y segundos. Suponga un mes de 30.0 días.
- PG** 38. Una mujer que desea saber la altura de una montaña mide el ángulo de elevación de la cima de la montaña de 12.0° . Después de caminar 1.00 km más cerca de la montaña a nivel del suelo, encuentra que el ángulo es 14.0° . a) Realice un dibujo del problema, ignorando la altura de los ojos de la mujer por encima del suelo. *Sugerencia:* Utilice dos triángulos. b) Usando el símbolo y para representar la altura de la montaña y el símbolo x para representar la distancia original de la mujer de la montaña, etiquete la imagen. c) Utilizando la imagen etiquetada, escriba dos ecuaciones trigonométricas que relacionen las dos variables seleccionadas. d) Determine la altura y .

PROBLEMAS DE DESAFÍO

- S** 39. Una mujer se encuentra a una distancia horizontal x de una montaña y mide el ángulo θ de elevación de la cima de la montaña por encima de la horizontal. Después de caminar acercándose a la montaña una distancia d a nivel del suelo, encuentra que el ángulo es ϕ . Encuentre una ecuación general para la altura y de la montaña en términos de d , ϕ y θ , ignore la altura de los ojos al suelo.



2

Movimiento en una dimensión

La sección "Imagine" al inicio del capítulo, lo envuelve en un viaje, donde los postes de energía están al lado de carretera a distancias iguales entre sí.

- 2.1 Posición, velocidad y rapidez
- 2.2 Velocidad y rapidez instantáneas
- 2.3 Modelo de análisis: La partícula bajo velocidad constante
- 2.4 El enfoque del modelo de análisis para resolver problemas
- 2.5 Aceleración
- 2.6 Diagramas de movimiento
- 2.7 Modelo de análisis: La partícula bajo aceleración constante
- 2.8 Objetos en caída libre
- 2.9 Ecuaciones cinemáticas deducidas del cálculo

IMAGINE Usted es un pasajero en un auto que es conducido por un amigo

por una carretera recta. Usted nota que los postes de teléfono, de alumbrado público o de energía eléctrica al lado de la carretera están ubicados a distancias iguales entre sí. Saca su teléfono inteligente y lo usa como un cronómetro para medir los intervalos de tiempo necesarios para que usted pase entre pares de postes adyacentes.¹ Cuando su amigo le dice que el auto se está moviendo a una rapidez fija, nota que todos estos intervalos de tiempo son iguales. Ahora, el conductor comienza a frenar por un semáforo. De nuevo se miden los intervalos de tiempo y encuentra que cada uno es más largo que el anterior. Después de que el auto se aleja del semáforo y acelera, los intervalos de tiempo entre los postes se acortan. ¿tiene sentido este comportamiento? Cuando el auto se mueve con una rapidez constante de nuevo, se utiliza el intervalo de tiempo entre los postes y la rapidez de conducción reportada por su amigo para calcular la distancia entre los postes. Con entusiasmo le dice a su amigo que se detenga para que pueda medir la distancia entre los postes. ¿Qué tan exacto fue su cálculo?

CONEXIONES Comenzamos nuestro estudio de la física con el tema de la *cinemática*. En este amplio tema, generalmente investigamos el *movimiento*: el movimiento de objetos sin tener en cuenta las interacciones con el entorno que influyen en el movimiento. El movimiento es lo que muchos de los primeros científicos estudiaron. Los primeros astrónomos en Grecia, China, Oriente Medio y Centroamérica observaron el movimiento de objetos en el cielo nocturno. Galileo Galilei estudió el movimiento de objetos rodando por planos inclinados. Isaac Newton reflexionó sobre la naturaleza de los objetos en caída libre. De la experiencia diaria, reconocemos que el movimiento de un objeto representa un cambio continuo en la posición del objeto. En este capítulo, vamos a analizar el movimiento de un objeto a lo largo de una línea recta, como el auto del argumento. Vamos a utilizar las mediciones de longitud y tiempo como se describieron en el capítulo

¹Una serie de aplicaciones especializadas de teléfonos inteligentes se pueden descargar y utilizar para hacer mediciones numéricas, como rapidez y aceleración. Sin embargo, en nuestros argumentos, vamos a restringir nuestro uso del teléfono inteligente a la mayoría de las aplicaciones estándares.

1 para cuantificar el movimiento. Un objeto que se mueve verticalmente y está sometido a la gravedad es una aplicación importante de un movimiento unidimensional, y también se estudiarán en este capítulo. Recuerde nuestra discusión de hacer modelos para situaciones físicas de la sección 1.2. En nuestro estudio, usamos el modelo de simplificación mencionado en esa sección que se llama el modelo de partícula, que describe al objeto en movimiento como una partícula independientemente de su tamaño. En general, una partícula es un objeto parecido a un punto, es decir, un objeto que tiene masa pero es de tamaño infinitesimal. En la sección 1.2, discutimos el hecho de que el movimiento de la Tierra alrededor del Sol se puede tratar como si la Tierra fuera una partícula. Regresaremos a este modelo para la Tierra cuando estudiemos órbitas planetarias en el capítulo 13. Como ejemplo en una escala mucho más pequeña, es posible explicar la presión ejercida por un gas en las paredes de un recipiente tratando las moléculas de gas como partículas, sin considerar la estructura interna de las moléculas; vamos a ver este análisis en el capítulo 20. Por ahora, vamos a aplicar el modelo de partículas a una amplia variedad de movimientos de objetos en este capítulo. Una comprensión del movimiento será esencial a lo largo del resto de este libro: el movimiento de los planetas en el capítulo 13 con la gravedad, el movimiento de los electrones en los circuitos eléctricos del capítulo 26, el movimiento de las ondas de luz en el capítulo 34 con la óptica, el movimiento de las partículas cuánticas con efecto túnel atravesando barreras en el capítulo 40.

2.1 Posición, velocidad y rapidez de una partícula

La **posición** x de una partícula es la ubicación de la partícula respecto a un punto de referencia elegido que se considera el origen de un sistema coordenado. El movimiento de una partícula se conoce por completo si la posición de la partícula en el espacio se conoce en todo momento.

Considere un automóvil que se mueve hacia adelante y en reversa a lo largo del eje x como en la figura 2.1a (página 22). Los números bajo la recta horizontal son marcadores de la posición del auto, similares a los postes igualmente espaciados del argumento introductorio. Cuando comenzamos a recopilar datos de posición, el automóvil está a 30 m a la derecha de un punto de referencia $x = 0$. Aplicaremos el modelo de partícula para identificar algún punto en el automóvil, tal vez la manija de la puerta delantera, como una partícula que representa a todo el automóvil.

Se activa el cronómetro y una vez cada 10 s se anota la posición del automóvil. Como aparece en la tabla 2.1, el automóvil se mueve hacia la derecha (que se definió como la dirección positiva) durante los primeros 10 s de movimiento, desde la posición A a la posición B. Después de B, los valores de posición comienzan a disminuir, lo que indica que el automóvil regresa desde la posición B hasta la posición E. De hecho, en D, 30 s después de comenzar a medir, el automóvil está en el origen de coordenadas (vea la figura 2.1a). Continúa moviéndose hacia la izquierda y está a más de 50 m a la izquierda de $x = 0$ cuando se deja de registrar información después del sexto punto de datos. En la figura 2.1b se presenta una representación gráfica de esta información. A dicha gráfica se le llama *gráfica posición-tiempo*.

Observe ahora las *representaciones alternativas* de información, como se analizaron en la sección 1.2, que se usaron para el movimiento del automóvil. La figura 2.1a es una *representación pictórica*, mientras que la figura 2.1b es una *representación gráfica*. La tabla 2.1 es una *representación tabular* de la misma información. Usar representaciones alternativas es una excelente estrategia para comprender la situación en un problema dado. En todo caso, la meta en muchos problemas es lograr una *representación matemática*, la cual se analiza para resolver algún fragmento de información solicitada.

En el argumento introductorio, observó el cambio de la posición de su auto respecto a los postes de energía. El **desplazamiento** Δx de una partícula se define como su cambio en posición en algún intervalo de tiempo. Conforme la partícula se mueve desde una posición inicial x_i a una posición final x_f , su desplazamiento está dado por

$$\Delta x \equiv x_f - x_i \quad (2.1)$$

◀ Posición

TABLA 2.1 Posición del automóvil en varios tiempos

Posición	t (s)	x (m)
A	0	30
B	10	52
C	20	38
D	30	0
E	40	-37
F	50	-53

◀ Desplazamiento



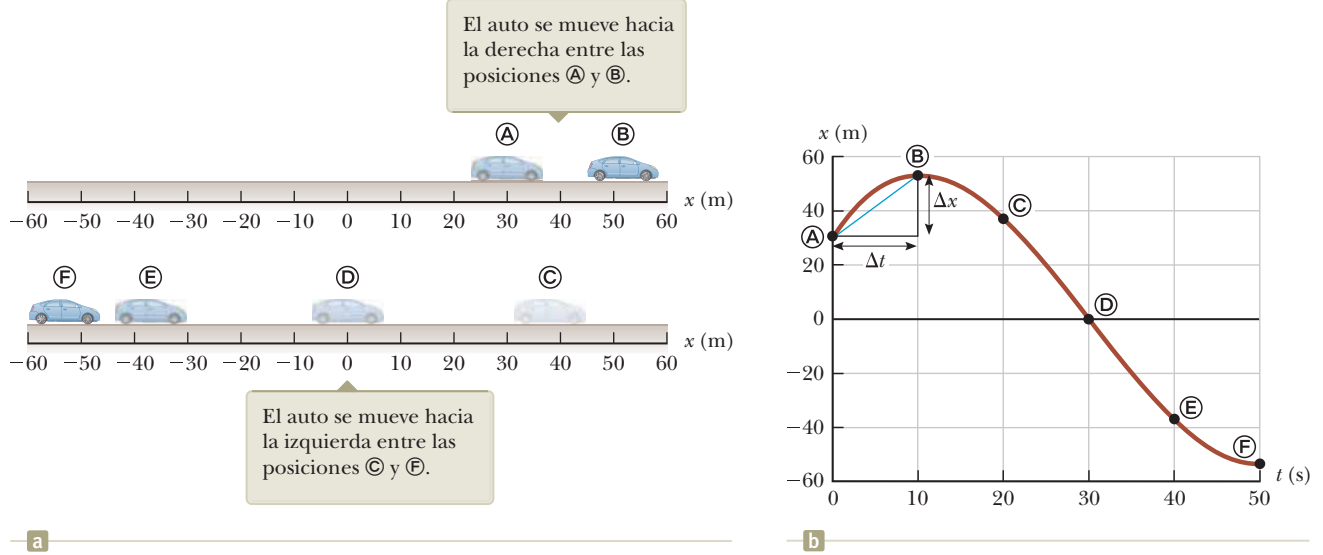


Figura 2.1 Un automóvil va hacia adelante y en reversa a lo largo de una línea recta. Ya que se tiene interés sólo en el movimiento traslacional del automóvil, se le modela como una partícula. Se pueden usar varias representaciones para la información del movimiento del automóvil. La tabla 2.1 es una representación tabular de la información. (a) Representación pictórica del movimiento del automóvil. (b) Representación gráfica (gráfica posición-tiempo) del movimiento del automóvil.



Eric Broder/Van Dyke/Shutterstock.com

Figura 2.2 En esta cancha de basquetbol, los jugadores corren de ida y vuelta durante todo el juego. La distancia que corren los jugadores durante el tiempo de juego es distinta de cero. El desplazamiento de los jugadores durante el tiempo de juego es aproximadamente cero porque deben regresar al mismo punto una y otra vez.

Se usa la letra griega mayúscula delta (Δ) para denotar el cambio en una cantidad. A partir de esta definición se ve que Δx es positiva si x_f es mayor que x_i y negativa si x_f es menor que x_i .

Es muy importante reconocer la diferencia entre desplazamiento y distancia recorrida. **Distancia** es la longitud de una trayectoria seguida por una partícula. Considere, por ejemplo, a los jugadores de basquetbol de la figura 2.2. Si un jugador corre desde la canasta de su propio equipo a lo largo de la cancha hasta la canasta del otro equipo y luego regresa a su propia canasta, el **desplazamiento** del jugador durante este intervalo de tiempo es cero porque terminó en el mismo punto del que partió: $x_f = x_i$, de modo que $\Delta x = 0$. Sin embargo, durante este intervalo de tiempo, se movió a lo largo de una distancia equivalente al doble de la longitud de la cancha de basquetbol. La distancia siempre se representa como un número positivo, mientras que el desplazamiento puede ser positivo o negativo.

El desplazamiento es un ejemplo de una cantidad vectorial. Muchas otras cantidades físicas, incluida posición, velocidad y aceleración, también son vectores. En general, una **cantidad vectorial** requiere la especificación tanto de dirección como de magnitud. Por ejemplo, en el caso del auto en la figura 2.1, cuánto cambia la posición del auto (*magnitud*) y en qué *dirección*, ¿hacia adelante o hacia atrás? En contraste, una **cantidad escalar** tiene un valor numérico y no dirección. La distancia es un escalar: ¿Cuanto se alejó el auto al moverse, según lo medido por su odómetro, en cierto intervalo del tiempo? En este capítulo, se usan los signos positivo (+) y negativo (-) para indicar la dirección del vector. Por ejemplo, para movimiento horizontal especifique a su arbitrio a la derecha como la dirección positiva. Después, cualquier objeto que siempre se mueva a la derecha experimenta un desplazamiento positivo $\Delta x > 0$, y cualquier objeto que se mueva hacia la izquierda experimenta un desplazamiento negativo de modo que $\Delta x < 0$. En el capítulo 3 se tratarán las cantidades vectoriales con más detalle.

Todavía no se menciona un punto muy importante. Note que los datos de la tabla 2.1 resultan sólo en los seis puntos de datos de la gráfica de la figura 2.1b. Por tanto, el movimiento de la partícula no se conoce por completo, ya que no conocemos su posición en *todo* momento. La curva uniforme que se dibuja a través de los seis puntos de la gráfica sólo es una *posibilidad* del movimiento real del automóvil. Únicamente se tiene información acerca de seis instantes de tiempo; no se tiene idea de lo que ocurrió entre los puntos de datos. La curva uniforme es una *suposición en cuanto a lo que sucedió, pero tenga en cuenta que es solo una suposición* del movimiento real del auto. Si la curva continua representa el

movimiento real del automóvil, la gráfica contiene información acerca de todo el intervalo de 50 s durante los que se observó el movimiento del automóvil.

- E XAMEN RÁPIDO 2.1** ¿Cuál de las siguientes opciones describe mejor lo que se puede determinar exactamente de la tabla 2.1 y de la figura 2.1 para todo el intervalo entero de 50s? (a) La distancia que el auto se movió. (b) El desplazamiento del auto. (c) Ambos (a) como (b). (d) Ni (a) ni (b).

Es mucho más fácil ver los cambios en la posición a partir de la gráfica que de una descripción verbal o incluso de una tabla de números. Por ejemplo, es claro que el automóvil cubre más terreno durante la mitad del intervalo de 50 s que al final. Entre las posiciones © y ⓓ, el automóvil viaja casi 40 m, pero durante los últimos 10 s, entre las posiciones Ⓔ y Ⓕ, se mueve a menos de la mitad de esa distancia. Una forma común de comparar estos diferentes movimientos es dividir el desplazamiento Δx que se presenta entre dos lecturas de cronómetro entre el valor de dicho intervalo de tiempo particular Δt . El resultado evidencia ser una relación muy útil, que se usará muchas veces. A esta relación se le ha dado un nombre especial: *velocidad promedio*. La **velocidad promedio** $v_{x,\text{prom}}$ de una partícula se define como el desplazamiento Δx de la partícula dividido entre el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre dicho desplazamiento:

$$v_{x,\text{prom}} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.2) \quad \leftarrow \text{Velocidad promedio}$$

donde el subíndice x indica movimiento a lo largo del eje x . A partir de esta definición es claro que la velocidad promedio tiene dimensiones de longitud divididas por el tiempo (L/T), o metros por segundo en unidades del SI.

La velocidad promedio de una partícula que se mueve en una dimensión es positiva o negativa, dependiendo del signo del desplazamiento. (El intervalo de tiempo Δt siempre es positivo.) Si la coordenada de la partícula aumenta en el tiempo (esto es, si $x_f > x_i$), Δx es positiva y $v_{x,\text{prom}} = \Delta x/\Delta t$ es positiva. Este caso corresponde a una partícula que se mueve en la dirección x positiva, esto es, hacia valores más grandes de x . Si la coordenada disminuye en el tiempo (esto es, si $x_f < x_i$), Δx es negativa y por tanto $v_{x,\text{prom}}$ es negativa. Este caso corresponde a una partícula que se mueve en la dirección x negativa.

La velocidad promedio se interpreta geoméricamente al dibujar una línea recta entre dos puntos en la gráfica posición-tiempo en la figura 2.1b. Esta recta forma la hipotenusa de un triángulo rectángulo de altura Δx y base Δt . La pendiente de esta recta es la relación $\Delta x/\Delta t$, que se definió como velocidad promedio en la ecuación 2.2. Por ejemplo, la recta entre las posiciones Ⓐ y Ⓑ en la figura 2.1b tiene una pendiente igual a la velocidad promedio del automóvil entre esos dos tiempos $(52 \text{ m} - 30 \text{ m})/(10 \text{ s} - 0) = 2.2 \text{ m/s}$.

En el uso cotidiano, los términos *rapidez* y *velocidad promedio* son intercambiables. Sin embargo, en física, hay una clara distinción entre estas dos cantidades. Considere una competidora de maratón que corre una distancia d de más de 40 km y aun así termina en su punto de partida. Su desplazamiento total es cero, ¡así que su velocidad promedio es cero! No obstante, es necesario cuantificar cuán rápido corre. Una relación ligeramente diferente logra esto. La **rapidez promedio** v_{prom} de una partícula, una cantidad escalar, se define como la distancia total recorrida dividida entre el intervalo de tiempo total requerido para recorrer dicha distancia:

$$v_{\text{prom}} \equiv \frac{d}{\Delta t} \quad (2.3) \quad \leftarrow \text{Rapidez promedio}$$

La unidad del SI de la rapidez promedio es la misma que la unidad de velocidad promedio: metros por segundo. Sin embargo, a diferencia de la velocidad promedio, la rapidez promedio no tiene dirección y siempre se expresa como un número positivo. Advierta la clara distinción entre las definiciones de velocidad promedio y rapidez promedio: la velocidad promedio (ec. 2.2) es el *desplazamiento* dividido por el intervalo de tiempo, mientras



PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 2.1**Rapidez promedio y velocidad promedio**

La magnitud de la velocidad promedio *no* es la rapidez promedio. Por ejemplo, considere a la corredora de maratón que se analizó en la ecuación 2.3. La magnitud de su velocidad promedio es cero, pero su rapidez promedio claramente es distinta de cero.

que la rapidez promedio (ec. 2.3) es la *distancia* recorrida dividida por el intervalo de tiempo.

El conocimiento de la velocidad promedio o la rapidez promedio de una partícula no proporciona información acerca de los detalles del viaje. Por ejemplo, suponga que le toma 45.0 s andar 100 m por un largo corredor recto hacia su puerta de salida en el aeropuerto. En la marca de 100 m, se da cuenta de que pasó los baños y regresa 25.0 m a lo largo del mismo corredor, y faltan 10.0 s para el viaje de regreso. La magnitud de su velocidad promedio es $+75.0 \text{ m}/55.0 \text{ s} = +1.36 \text{ m/s}$. La *rapidez* promedio para su viaje es $125 \text{ m}/55.0 \text{ s} = 2.27 \text{ m/s}$. Es posible que haya viajado a diferentes rapidezces durante la caminata. Ninguna velocidad promedio ni rapidez promedio proporciona información acerca de estos detalles.

E XAMEN RÁPIDO 2.2 ¿Bajo cuáles de las siguientes condiciones la magnitud de la velocidad promedio de una partícula que se mueve en una dimensión es más pequeña que la rapidez promedio durante algún intervalo de tiempo? (a) una partícula se mueve en la dirección $+x$ sin regresar, (b) una partícula se mueve en la dirección $-x$ sin regresar, (c) una partícula se mueve en la dirección $+x$ y luego invierte la dirección de su movimiento, (d) no existen condiciones para que esto sea cierto.

Ejemplo 2.1 Cálculo de velocidad y rapidez promedio

Encuentre el desplazamiento, velocidad promedio y rapidez promedio del automóvil de la figura 2.1a entre las posiciones A y B.

SOLUCIÓN

Consulte la figura 2.1 para formar una imagen mental del automóvil y su movimiento. Modele el automóvil como una partícula. A partir de la gráfica posición-tiempo dada en la figura 2.1b, note que $x_A = 30 \text{ m}$ en $t_A = 0 \text{ s}$ y que $x_B = -53 \text{ m}$ en $t_B = 50 \text{ s}$.

Use la ecuación 2.1 para encontrar el desplazamiento del automóvil:

$$\Delta x = x_B - x_A = -53 \text{ m} - 30 \text{ m} = -83 \text{ m}$$

Este resultado significa que el automóvil termina 83 m en la dirección negativa (a la izquierda, en este caso) desde donde partió. Este número tiene las unidades correctas y es del mismo orden de magnitud que los datos proporcionados. Un vistazo rápido a la figura 2.1a indica que es la respuesta correcta.

Aplique la ecuación 2.2 para encontrar la velocidad promedio del auto:

$$\begin{aligned} v_{x,\text{prom}} &= \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} \\ &= \frac{-53 \text{ m} - 30 \text{ m}}{50 \text{ s} - 0 \text{ s}} = \frac{-83 \text{ m}}{50 \text{ s}} = -1.7 \text{ m/s} \end{aligned}$$

No es posible encontrar sin ambigüedad la rapidez promedio del automóvil a partir de los datos de la tabla 2.1, porque no se tiene información acerca de las posiciones del automóvil entre los puntos de datos. Si se adopta la suposición de que los detalles de la posición del automóvil se describen mediante la curva de la figura 2.1b, la distancia recorrida es 22 m (desde A a B) más 105 m (de B a C), para un total de 127 m.

Aplique la ecuación 2.3 para encontrar la rapidez promedio del automóvil:

$$v_{\text{prom}} = \frac{127 \text{ m}}{50 \text{ s}} = 2.5 \text{ m/s}$$

Note que la rapidez promedio es positiva, como debe ser. Considere que la curva café de la figura 2.1b fuese diferente de modo que entre 0 s y 10 s viaje desde A a 100 m y luego regresa a B. La rapidez promedio del automóvil cambiaría porque la distancia es diferente, pero la velocidad promedio no cambiaría.

2.2 Velocidad y rapidez instantáneas

Con frecuencia es necesario conocer la velocidad de una partícula en un instante específico en el tiempo t en lugar de la velocidad promedio durante un intervalo de tiempo finito Δt . En otras palabras, nos gustaría poder especificar su velocidad de manera tan precisa como detalla su posición al notar lo que ocurre en una lectura particular de reloj; esto es, en algún instante específico. ¿Qué significa hablar acerca de qué tan rápido se mueve algo si se “congela el tiempo” y sólo hablar acerca de un instante individual? Si el



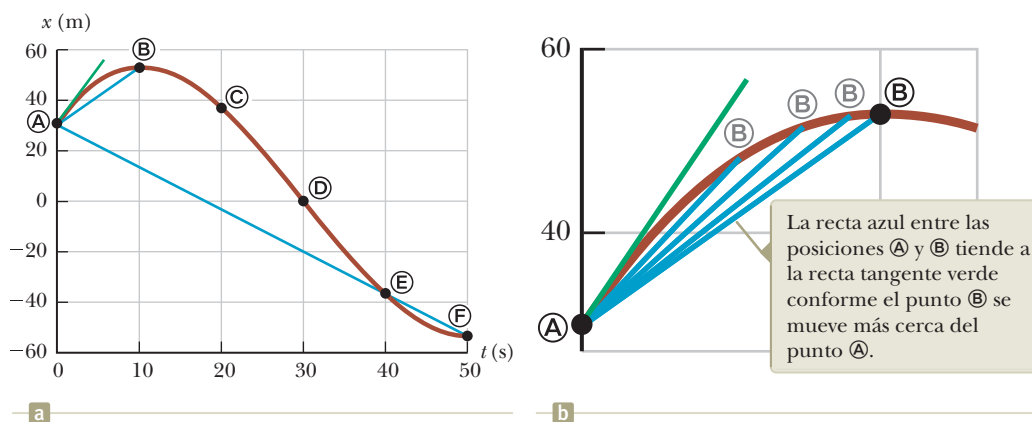


Figura 2.3 (a) Gráfica que representa el movimiento del automóvil de la figura 2.1. (b) Una ampliación de la esquina superior izquierda de la gráfica.

intervalo de tiempo tiene un valor de cero, el desplazamiento del objeto también es cero, por lo que la velocidad promedio de la ecuación 2.2 parece ser $0/0$. ¿Cómo se evalúa este cociente? A finales del siglo XII, con la invención del cálculo, los científicos empezaron a razonar las formas de describir el movimiento de un objeto en cualquier momento.

Para ver cómo se hace esto, considere la figura 2.3a, que es una reproducción de la gráfica de la figura 2.1b. ¿Cuál es la velocidad de la partícula en $t = 0$? Ya se discutió la velocidad promedio para el intervalo durante el cual el automóvil se mueve desde la posición A hasta la posición B (dada por la pendiente de la recta azul) y para el intervalo durante el cual se mueve de A a F (representado por la pendiente de la recta azul más larga y que se calculó en el ejemplo 2.1). El automóvil comienza a moverse hacia la derecha, que se define como la dirección positiva. Debido a esto, al ser positivo, el valor de la velocidad promedio durante el intervalo de A a B es más representativo de la velocidad inicial que el valor de la velocidad promedio durante el intervalo de A a F, que se determinó como negativo en el ejemplo 2.1. Ahora enfóquese en la recta azul corta y deslice el punto B hacia la izquierda a lo largo de la curva, hacia el punto A, como en la figura 2.3b. La recta entre los puntos se vuelve cada vez más inclinada, y conforme los dos puntos se vuelven en extremo próximos, la recta se convierte en una recta tangente a la curva, indicada por la recta verde en la figura 2.3b. La pendiente de esta recta tangente representa la velocidad del automóvil en el punto A. Lo que se hizo fue determinar la *velocidad instantánea* en dicho momento. En otras palabras, la **velocidad instantánea** v_x es igual al valor límite de la proporción $\Delta x/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero:²

$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.4)$$

En notación de cálculo, este límite se llama *derivada* de x respecto a t , y se escribe dx/dt :

$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (2.5)$$

La velocidad instantánea puede ser positiva, negativa o cero. Cuando la pendiente de la gráfica posición-tiempo es positiva, como en cualquier momento durante los primeros 10 s en la figura 2.3, v_x es positiva y el automóvil se mueve hacia valores más grandes de x . Después del punto B, v_x es negativa porque la pendiente es negativa y el automóvil se mueve hacia valores más pequeños de x . En el punto B, la pendiente y la velocidad instantánea son cero y el automóvil está momentáneamente en reposo.

De aquí en adelante, se usa la palabra *velocidad* para designar *velocidad instantánea*. Cuando se esté interesado en *velocidad promedio*, siempre se usará el adjetivo *promedio*.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 2.2

Pendientes de gráficas En cualquier gráfica de datos físicos, la *pendiente* representa la relación del cambio en la cantidad representada en el eje vertical al cambio en la cantidad representada en el eje horizontal. Recuerde que *una pendiente* tiene unidades (a menos que ambos ejes tengan las mismas unidades). Las unidades de la pendiente de la figura 2.1b y la figura 2.3 son metros por segundo, las unidades de velocidad.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 2.3

Rapidez instantánea y velocidad instantánea En la Prevención de riesgos ocultos 2.1 se argumentó que la magnitud de la velocidad promedio no es la rapidez promedio. Sin embargo, la magnitud de la velocidad instantánea es la rapidez instantánea. En un intervalo de tiempo infinitesimal, la magnitud del desplazamiento es igual a la distancia recorrida por la partícula.

◀ Velocidad instantánea

²Cómo ya se mencionó, el desplazamiento Δx también tiende a cero conforme Δt tiende a cero, de modo que la proporción $\Delta x/\Delta t$ parece $0/0$. Sin embargo, el cociente se puede evaluar en el límite en esta situación. Como Δx y Δt se vuelven cada vez más pequeños, la cantidad $\Delta x/\Delta t$ tiende a un valor igual a la pendiente de la recta tangente a la curva x en función de t .

La **rapidez instantánea** de una partícula se define como la magnitud de su velocidad instantánea. Como con la rapidez promedio, la rapidez instantánea no tiene dirección asociada con ella. Por ejemplo, si una partícula tiene una velocidad instantánea de $+25$ m/s a lo largo de una recta dada y otra partícula tiene una velocidad instantánea de -25 m/s a lo largo de la misma recta, ambas tienen una rapidez² de 25 m/s.

E XAMEN RÁPIDO 2.3 ¿Los integrantes de la patrulla de caminos están más interesados en (a) la rapidez promedio o (b) la rapidez instantánea mientras usted conduce?

Ejemplo conceptual 2.2 La velocidad de diferentes objetos

Considere los siguientes movimientos en una dimensión: (A) una bola lanzada directamente hacia arriba llega al punto más alto y cae de vuelta hacia la mano del lanzador; (B) un automóvil de carreras parte del reposo y aumenta su rapidez hasta 100 m/s; y (C) una nave espacial navega por el espacio con velocidad constante. ¿Existen algunos puntos en el movimiento de estos objetos donde la velocidad instantánea tenga el mismo valor que la velocidad promedio durante todo el movimiento? Si es así, identifique el(los) punto(s).

SOLUCIÓN

- A)** La velocidad promedio para la bola lanzada es cero porque la bola regresa al punto de partida; por tanto, su desplazamiento es cero. Hay un punto donde la velocidad instantánea es cero: en lo alto del movimiento.
- B)** La velocidad promedio del automóvil no se puede evaluar sin ambigüedad con la información dada, pero debe tener algún valor entre 0 y 100 m/s. Puesto que el automóvil tendrá una velocidad instantánea entre 0 y 100 m/s en algún momento durante el intervalo, debe haber algún instante cuando la velocidad instantánea sea igual a la velocidad promedio durante todo el movimiento.
- C)** Puesto que la velocidad instantánea de la nave espacial es constante, su velocidad instantánea en cualquier tiempo y su velocidad promedio durante *cualquier* intervalo de tiempo son iguales.

Ejemplo 2.3 Velocidad promedio e instantánea

Una partícula se mueve a lo largo del eje x . Su posición varía con el tiempo de acuerdo con la expresión $x = -4t + 2t^2$, donde x está en metros y t está en segundos.³ La gráfica posición-tiempo para este movimiento se muestra en la figura 2.4a. Como la posición de la partícula está dada por una función matemática, el movimiento de la partícula es completamente conocido, a diferencia del automóvil de la figura 2.1, donde solo se proporcionan seis instantes de tiempo. Note que la partícula se mueve en la dirección x negativa durante el primer segundo de movimiento, en el momento $t = 1$ s está momentáneamente en reposo y se mueve en la dirección x positiva en tiempos $t > 1$ s.

(A) Determine el desplazamiento de la partícula en los intervalos de tiempo $t = 0$ a $t = 1$ s y $t = 1$ s a $t = 3$ s.

SOLUCIÓN

A partir de la gráfica de la figura 2.4, elabore una representación mental del movimiento de la partícula. Considere que la partícula no se mueve en una trayectoria curva en el espacio, como la que muestra la curva café en la representación gráfica. La partícula se mueve sólo a lo largo del eje x en una dimensión como se muestra en la figura 2.4b. En $t = 0$, ¿se mueve a la derecha o a la izquierda?

Durante el primer intervalo de tiempo, la pendiente es negativa y por tanto la velocidad promedio es negativa. En consecuencia, se sabe que el desplazamiento entre (A) y (B) debe ser un número negativo que tiene unidades de metros. De igual modo, se espera que el desplazamiento entre (B) y (D) sea positivo.

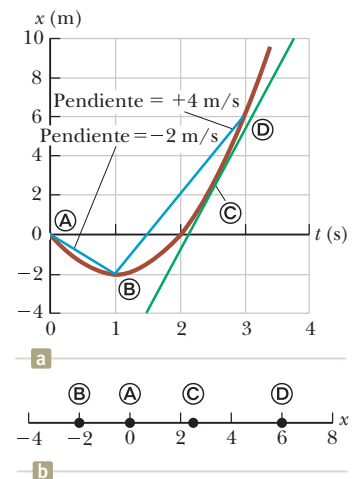


Figura 2.4 (Ejemplo 2.3) (a) Gráfica posición-tiempo para una partícula que tiene una coordenada x que varía en el tiempo de acuerdo con la expresión $x = -4t + 2t^2$. (b) La partícula se mueve en una dimensión a lo largo del eje x .

continúa

³Como con la velocidad, se quita el adjetivo para rapidez instantánea. “Rapidez” significa rapidez instantánea.

⁴Simplemente para facilitar la lectura, la expresión se escribe como $x = -4t + 2t^2$ en lugar de $x = (-4.00 \text{ m/s})t + (2.00 \text{ m/s}^2)t^{2.00}$. Cuando una ecuación resume observaciones, considere que sus coeficientes tienen tantos dígitos significativos como otros datos citados en el problema. Considere que sus coeficientes tienen las unidades requeridas para una consistencia dimensional. Cuando inicie el cronómetro en $t = 0$, por lo general no se tiene la intención de limitar la precisión a un solo dígito. Considere que cualquier valor cero en este libro tiene tantas cifras significativas como necesite.

2.3 continuación

En el primer intervalo de tiempo, haga $t_i = t_{\text{A}} = 0$ y $t_f = t_{\text{B}} = 1$ s. Sustituya estos valores en $x = -4t + 2t^2$ y utilice la ecuación 2.1 para encontrar el desplazamiento:

$$\begin{aligned}\Delta x_{\text{A} \rightarrow \text{B}} &= x_f - x_i = x_{\text{B}} - x_{\text{A}} \\ &= [-4(1) + 2(1)^2] - [-4(0) + 2(0)^2] = -2 \text{ m}\end{aligned}$$

Para el segundo intervalo de tiempo ($t = 1$ s a $t = 3$ s), sea $t_i = t_{\text{B}} = 1$ s y $t_f = t_{\text{C}} = 3$ s:

$$\begin{aligned}\Delta x_{\text{B} \rightarrow \text{C}} &= x_f - x_i = x_{\text{C}} - x_{\text{B}} \\ &= [-4(3) + 2(3)^2] - [-4(1) + 2(1)^2] = +8 \text{ m}\end{aligned}$$

También es posible leer estos desplazamientos directamente de la gráfica posición-tiempo.

(B) Calcule la velocidad promedio durante estos dos intervalos de tiempo.

SOLUCIÓN

En el primer intervalo de tiempo, aplique la ecuación 2.2 con $\Delta t = t_f - t_i = t_{\text{B}} - t_{\text{A}} = 1$ s:

$$v_{x,\text{prom}} (\text{A} \rightarrow \text{B}) = \frac{\Delta x_{\text{A} \rightarrow \text{B}}}{\Delta t} = \frac{-2 \text{ m}}{1 \text{ s}} = -2 \text{ m/s}$$

En el segundo intervalo de tiempo, $\Delta t = 2$ s:

$$v_{x,\text{prom}} (\text{B} \rightarrow \text{C}) = \frac{\Delta x_{\text{B} \rightarrow \text{C}}}{\Delta t} = \frac{8 \text{ m}}{2 \text{ s}} = +4 \text{ m/s}$$

Estos valores son los mismos que las pendientes de las rectas que unen estos puntos en la figura 2.4.

(C) Encuentre la velocidad instantánea de la partícula en $t = 2.5$ s.

SOLUCIÓN

Mida la pendiente de la recta verde en $t = 2.5$ s (punto ©) en la figura 2.4a:

$$v_x = \frac{10 \text{ m} - (-4 \text{ m})}{3.8 \text{ s} - 1.5 \text{ s}} = +6 \text{ m/s}$$

Observe que esta velocidad instantánea está en el mismo orden de magnitud que los resultados anteriores; esto es, unos cuantos metros por segundo. ¿Esto es lo que habría esperado?

2.3 Modelo de análisis: La partícula bajo velocidad constante

En la sección 1.2 se estudió la importancia de hacer modelos. Un modelo particularmente importante en la resolución de problemas físicos es usar *un modelo de análisis*. Un **modelo de análisis es una situación común que se presenta una y otra vez en la resolución de problemas de física**. Puesto que representa una situación común, también representa un tipo común de problemas que ya se ha resuelto. Cuando se identifica un modelo de análisis en un nuevo problema, la resolución al nuevo problema se puede modelar después de que el problema previo ya fue resuelto. Los modelos de análisis nos ayudan a reconocer situaciones comunes y nos guían hacia una solución al problema. La forma que toma un modelos de análisis es una de cualquiera de las dos descripciones siguientes 1) el comportamiento de alguna entidad física o 2) la interacción entre dicha entidad y el entorno. Cuando encuentre un nuevo problema, debe identificar los detalles fundamentales del mismo e intentar reconocer cuál de los tipos de problemas que ya resolvió sirve como modelo para el nuevo. Por ejemplo, suponga que un automóvil se mueve a lo largo de una autopista recta con una rapidez constante. ¿Es importante que sea un automóvil? ¿Es importante que sea una autopista? Si las respuestas a ambas preguntas son no, solo que el automóvil se mueve en línea recta con rapidez constante, represente el automóvil como una *partícula bajo velocidad constante*, que se estudiará en esta sección. Una vez que el problema se ha modelado, ya no se trata de un automóvil. Se trata de una partícula sometida a un cierto tipo de movimiento, un movimiento que ya hemos estudiado antes.

Este método es un poco similar a la práctica común de la profesión legal de encontrar “antecedentes legales”. Si encuentra un caso resuelto con anterioridad que sea muy similar, en cuanto a lo legal, al actual, se ofrece como modelo y se plantea un argumento en la corte que los vincule en términos lógicos. Por tanto el fallo en el caso previo se usa para

◀ Modelo de análisis



influir en el fallo del caso actual. En física sucederá algo similar. Para un problema determinado busque un “precedente físico”, un modelo con el que ya esté familiarizado y que sea aplicable al problema actual.

Todos los modelos de análisis se generarán respecto a cuatro modelos de simplificación fundamentales. El primero es el modelo de partícula discutido en la introducción de este capítulo; se observará una partícula bajo varios comportamientos e interacciones ambientales. En capítulos siguientes se introducen más modelos de análisis en función de modelos de simplificación de un *sistema*, un *cuerpo* rígido y una *onda*. Una vez introducidos dichos modelos de análisis, se verá que aparecen de nuevo una y otra vez en diferentes situaciones de problemas.

Cuando se resuelve un problema, se debe evitar navegar por el capítulo en busca de una ecuación que contenga la incógnita que se pide en el problema. En muchos casos, la ecuación que encuentre puede no tener nada que ver con el problema que está intentando resolver. Es *mucho* mejor tomar este primer paso: **Identificar el modelo de análisis que sea apropiado para el problema**. Para hacer esto, piense cuidadosamente acerca de que está pasando en el problema y hágalo coincidir con una situación que ya ha tenido. Una vez que se ha identificado el modelo de análisis, hay un pequeño número de ecuaciones para elegir que sean apropiadas para ese modelo, a veces una sola ecuación. Por tanto, **el modelo le indica que ecuación(es) utilizará para la representación matemática**.

Apliquemos la ecuación 2.2 para construir el primer modelo de análisis para resolver problemas. Considere una partícula que se mueve con una velocidad constante. El modelo de **partícula bajo velocidad constante** se aplica a *cualquier* situación en la que una entidad que se pueda representar como partícula se mueva con velocidad constante. Esta situación ocurre con frecuencia, de modo que este modelo es importante.

Si la velocidad de una partícula es constante, su velocidad instantánea en cualquier instante durante un intervalo de tiempo es la misma que la velocidad promedio durante el intervalo. Esto es, $v_x = v_{x,\text{prom}}$. Debido a esto, la ecuación 2.2 proporciona una ecuación útil para la representación matemática de esta situación:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.6)$$

Al recordar que $\Delta x = x_f - x_i$, se ve que $v_x = (x_f - x_i)/\Delta t$, o bien

$$x_f = x_i + v_x \Delta t$$

Esta ecuación dice que la posición de la partícula está dada por la suma de su posición original x_i en el tiempo $t = 0$ más el desplazamiento $v_x \Delta t$ que ocurre durante el intervalo de tiempo Δt . En la práctica, por lo general se elige el tiempo al principio del intervalo como $t_i = 0$ y el tiempo al final del intervalo como $t_f = t$, de modo que la ecuación se convierte en

$$x_f = x_i + v_x t \quad (\text{para } v_x \text{ constante}) \quad (2.7)$$

Las ecuaciones 2.6 y 2.7 son las ecuaciones básicas que se utilizan en el modelo de una partícula bajo velocidad constante. Cuando se ha identificado el modelo de análisis en un problema para una partícula bajo velocidad constante, se pueden usar estas ecuaciones.

La figura 2.5 es una representación gráfica de la partícula bajo velocidad constante. En esta gráfica posición-tiempo, la pendiente de la recta que representa el movimiento es constante e igual a la magnitud de la velocidad. La ecuación 2.7, que es la ecuación de una línea recta, es la representación matemática del modelo de partícula bajo velocidad constante. La pendiente de la línea recta es v_x y la ordenada al origen y es x_i en ambas representaciones.

En el argumento introductorio, el modelo de partícula con velocidad constante se presentó con la parte del movimiento que tiene “rapidez fija”. Usted encontró en el argumento que los intervalos de tiempo entre los postes fueron siempre iguales en este caso. ¿Este resultado es consistente con la ecuación 2.7? El ejemplo 2.4 siguiente muestra una aplicación de la partícula bajo el modelo de velocidad constante.

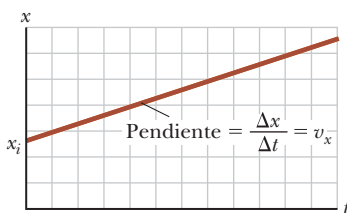


Figura 2.5 Gráfica posición-tiempo para una partícula bajo velocidad constante. El valor de la velocidad constante es la pendiente de la recta.

► Posición como una función del tiempo para el modelo de la partícula bajo velocidad constante



Ejemplo 2.4 Modelado de un corredor como una partícula

Una kinesióloga está estudiando la biomecánica del cuerpo humano. (*Kinesiología* es el estudio del movimiento del cuerpo humano. Note la conexión a la palabra *cinemática*.) Ella determina la velocidad de un sujeto experimental mientras corre a lo largo de una línea recta con una rapidez constante. La kinesióloga activa el cronómetro cuando el corredor pasa por un punto dado y lo detiene después de que el corredor pasa por otro punto a 20 m de distancia. El intervalo de tiempo que indica el cronómetro es 4.0 s.

(A) ¿Cuál es la velocidad del corredor

SOLUCIÓN

Modelamos al corredor en movimiento como partícula porque su tamaño y el movimiento de brazos y piernas son detalles innecesarios. Puesto que el problema establece que el sujeto corre con una rapidez constante, se modela como una *partícula bajo velocidad constante*.

Habiendo identificado el modelo, se aplica la ecuación 2.6 para encontrar la velocidad constante del corredor:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{\Delta t} = \frac{20 \text{ m} - 0}{4.0 \text{ s}} = 5.0 \text{ m/s}$$

(B) Si el corredor continúa su movimiento después de desactivar el cronómetro, ¿cuál es su posición después de transcurridos 10 s?

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 2.7 y la rapidez que encontró en el inciso A) para descubrir la posición de la partícula en el tiempo $t = 10 \text{ s}$:

$$x_f = x_i + v_x t = 0 + (5.0 \text{ m/s})(10 \text{ s}) = 50 \text{ m}$$

¿Es el resultado del inciso A) una rapidez razonable para un ser humano? ¿Cómo se compara con rapidez de récord mundial en carreras de 100 m y 200 m? Observe que el valor en el inciso B) es más del doble que el de la posición de 20 m donde se desactivó el cronómetro. ¿Este valor es consistente con el tiempo de 10 s que es más del doble que el tiempo de 4.0 s?

Las manipulaciones matemáticas para la partícula bajo velocidad constante están contenidas en la ecuación 2.6 y la siguiente, la ecuación 2.7. Estas ecuaciones sirven para resolver cualquier variable que resulte desconocida en las ecuaciones, si las otras variables son conocidas. Por ejemplo, en el inciso B) del ejemplo 2.4, se encuentra la posición cuando la velocidad y el tiempo se conocen. De igual modo, si se conocen la velocidad y la posición final, se aplica la ecuación 2.7 para encontrar el tiempo cuando el corredor está en dicha posición.

Una partícula bajo velocidad constante se mueve con una rapidez constante a lo largo de una línea recta. Ahora considere una partícula que se mueve con una rapidez constante a lo largo de una trayectoria *curva*. Como veremos en la sección 2.5 siguiente, un cambio en la dirección de movimiento de una partícula significa un cambio en la velocidad de una partícula a pesar de que su rapidez es constante; hay un cambio en la *rapidez del vector*. Por tanto, nuestra partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria curva no se representa con el modelo de partícula bajo velocidad constante. Sin embargo, esta situación se representa con el **modelo de partícula bajo rapidez constante**. La ecuación básica para este modelo es la ecuación 2.3, con la rapidez promedio v_{prom} sustituida por la rapidez constante v :

$$v = \frac{d}{\Delta t} \quad (2.8)$$

Como ejemplo, considere una partícula que se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular. Si la rapidez es 5.00 m/s y el radio de la trayectoria es de 10.0 m, se calcula el intervalo de tiempo requerido para completar un viaje alrededor del círculo:

$$v = \frac{d}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{d}{v} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(10.0 \text{ m})}{5.00 \text{ m/s}} = 12.6 \text{ s}$$



MODELO DE ANÁLISIS: Partícula bajo velocidad constante

Imagínese un objeto en movimiento que puede ser modelado como una partícula. Si se mueve con rapidez constante por un desplazamiento Δx , en línea recta en un intervalo de tiempo Δt , su velocidad es constante es

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.6)$$

La posición de la partícula como una función de tiempo está dada por

$$x_f = x_i + v_x t \quad (2.7)$$



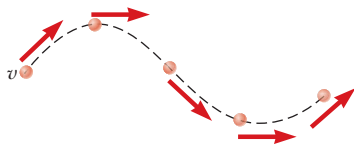
Ejemplos:

- un meteoritoide viaja a través del espacio libre de gravedad
- un automóvil que viaja con rapidez constante sobre una autopista recta
- un corredor que viaja con rapidez constante en un camino perfectamente recto
- un objeto que se mueve con rapidez terminal a través de un medio viscoso (Capítulo 6)

MODELO DE ANÁLISIS: Partículas bajo rapidez constante

Imagínese un objeto en movimiento que puede ser modelado como una partícula. Si se mueve con una rapidez constante a través de una distancia d a lo largo de una línea recta o una trayectoria curva en un intervalo de tiempo Δt , su rapidez constante es

$$v = \frac{d}{\Delta t} \quad (2.8)$$



Ejemplos:

- un planeta que viaja alrededor de una órbita perfectamente circular
- un automóvil que viaja con una rapidez constante en una pista curva
- un corredor que viaja con rapidez constante en una trayectoria curva
- una partícula con carga que se mueve a través de un campo magnético uniforme (Capítulo 28)

2.4 Propuesta del modelo de análisis para resolver problemas

Acabamos de ver nuestros primeros modelos de análisis: la partícula bajo velocidad constante y la partícula con rapidez constante. Ahora, ¿qué hacemos con estos modelos? Los modelos de análisis encajan en un método general para resolver problemas que describimos a continuación. En particular, preste atención en el paso “Categorizar” del análisis siguiente. Es ahí donde se identifica el modelo de análisis que se va a aplicar al problema. Después que se resuelve el problema utilizando la ecuación o ecuaciones que ya ha aprendido que están asociadas con ese modelo. Esta es la forma en que los físicos se aproximan a situaciones complejas y problemas complicados, y los dividen en piezas manejables. Es una habilidad muy útil para que aprenda. Puede parecer complicado al principio, pero ¡será más fácil y como su segunda naturaleza conforme lo practique!

Conceptualizar

- Las primeras cosas que hacer cuando trata un problema son *pensar en y entender* la situación. Estudie cuidadosamente cualquier representación de la información (por ejemplo, diagramas, gráficas, tablas o fotografías) que acompañan el problema. Imagine una película, proyectada en su mente, de lo que sucede en el problema: la representación mental.
- Si no se proporciona una representación pictórica, usted debe casi siempre hacer un dibujo rápido de la situación. Indicar los valores conocidos, tal vez en una tabla o directamente en su esquema.



- Ahora concéntrese en qué información algebraica o numérica se le da en el problema. Lea detenidamente el enunciado del problema, buscando frases clave como “comienza a partir del reposo” ($v_i = 0$) o “se detiene” ($v_f = 0$).
- Ahora concéntrese en el resultado esperado de resolver el problema. Exactamente ¿que se le está pidiendo en la pregunta? ¿el resultado final será numérico, algebraico o verbal? ¿Sabe qué unidades esperar?
- No olvide incorporar información de sus propias experiencias y sentido común. ¿Cuál debería ser una respuesta razonable? Por ejemplo, no esperaría calcular la rapidez de un automóvil igual a 5×10^6 m/s.

Categorizar

- Una vez que tenga una buena idea de cuál es el problema, debe *simplificar* el problema. Utilice un modelo de simplificación para eliminar los detalles que no son importantes para la solución. Por ejemplo, modele un objeto en movimiento como partícula. Si es apropiado, desprecie la resistencia del aire o la fricción entre un objeto que se desliza y una superficie.
- Una vez que se simplifica el problema, es importante *categorizar* el problema en una de dos maneras. ¿es un *problema de sustitución* simple tales que se pueden sustituir los números en una ecuación simple o una definición? Si es así, es probable que el problema se termine cuando se hace esta sustitución. Si no, se enfrenta a lo que llamamos un *problema de análisis*: la situación debe analizarse más profundamente para generar una ecuación adecuada y obtener una solución.
- Si se trata de un problema de análisis, es necesario categorizarlo más. ¿Ha visto este tipo de problema antes? ¿Aumenta la lista de tipos de problemas que ha resuelto anteriormente? Si es así, identifique cualquier *modelo (s) de análisis* apropiado para el problema para prepararse para los pasos del análisis siguiente. El poder clasificar un problema con un modelo de análisis puede hacer mucho más fácil diseñar un plan para resolverlo.

Analizar

- Ahora usted debe analizar el problema y esforzarse con una solución matemática. Porque ya ha categorizado el problema e identificado un análisis del modelo, no debe ser demasiado difícil seleccionar las ecuaciones importantes que se aplican al tipo de situación en el problema. Por ejemplo, si el problema implica una partícula bajo velocidad constante, la ecuación 2.7 es importante.
- Utilice álgebra (y el cálculo, si es necesario) para resolver simbólicamente a la incógnita en términos de lo que se da. Finalmente, sustituya los números apropiados, calcule el resultado, y redondéelo al número adecuado de cifras significativas.

Finalizar

- Examine su respuesta numérica. ¿tiene las unidades correctas?, ¿no satisface sus expectativas de su conceptualización del problema? ¿Cuál es la forma algebraica del resultado? ¿tiene sentido? Examine las variables en el problema para ver si la respuesta cambiaría en una manera físicamente significativa si las variables se aumentarían o disminuirían drásticamente o incluso se hicieran cero. Observe los casos límite para ver si producen los valores esperados, ésta es una manera muy útil de asegurarse de que se están obteniendo resultados razonables.
- Compare este problema con otros que usted ha resuelto. ¿Es similar? ¿De qué maneras críticas difiere? ¿Por qué este problema se deja de tarea? ¿Puede averiguar lo que ha aprendido al hacerlo? Si se trata de una nueva categoría de problema, asegúrese de que lo entienda para que pueda usarlo como un modelo para resolver problemas similares en el futuro.

Al resolver problemas complejos, es posible que tenga que identificar una serie de subproblemas y aplicar el método del modelo de análisis a cada uno. Para problemas sencillos, probablemente no necesite este método. Sin embargo, cuando usted está tratando de resolver un problema y no sabe qué hacer a continuación, recuerde los pasos del método y úselos como guía.



En el resto de este libro, vamos a etiquetar los pasos *Conceptualizar*, *Categorizar*, *Analizar*, y *Finalizar* en los ejemplos trabajados. Si un ejemplo trabajado se identifica como un problema de sustitución en el paso *Categorizar*, por lo general no se etiquetarán las secciones *Analizar* y *Finalizar* en la solución.

Para mostrar cómo aplicar este método, a continuación, reproducimos el ejemplo 2.4, con los pasos del método.

Ejemplo 2.4 Modelado de un corredor como una partícula

Una kinesióloga está estudiando la biomecánica del cuerpo humano. (*Kinesiología* es el estudio del movimiento del cuerpo humano. Note la conexión a la palabra *cinemática*.) Ella determina la velocidad de un sujeto experimental mientras corre a lo largo de una línea recta con una rapidez constante. La kinesióloga activa el cronómetro cuando el corredor pasa por un punto dado y lo detiene después de que el corredor pasa por otro punto a 20 m de distancia. El intervalo de tiempo que indica el cronómetro es 4.0 s.

(A) ¿Cuál es la velocidad del corredor

SOLUCIÓN

Conceptualizar Modelamos al corredor en movimiento como partícula porque su tamaño y el movimiento de brazos y piernas son detalles innecesarios.

Categorizar Puesto que el problema establece que el sujeto corre “con una rapidez constante”, se modela como una *partícula bajo velocidad constante*.

Analizar Habiendo identificado el modelo, se aplica la ecuación 2.6 para encontrar la velocidad constante del corredor:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{\Delta t} = \frac{20 \text{ m} - 0}{4.0 \text{ s}} = 5.0 \text{ m/s}$$

(B) Si el corredor continúa su movimiento después de desactivar el cronómetro, ¿cuál es su posición después de transcurridos 10 s?

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 2.7 y la rapidez que encontró en el inciso A) para descubrir la posición de la partícula en el tiempo $t = 10 \text{ s}$:

$$x_f = x_i + v_x t = 0 + (5.0 \text{ m/s})(10 \text{ s}) = 50 \text{ m}$$

Finalizar ¿Es el resultado del inciso A) una rapidez razonable para un ser humano? ¿Cómo se compara con rapidez de récord mundial en carreras de 100 m y 200 m? Observe que el valor en el inciso B) es más del doble que el de la posición de 20 m donde se desactivó el cronómetro. ¿Este valor es consistente con el tiempo de 10 s que es más del doble que el tiempo de 4.0 s?

2.5 Aceleración

En el ejemplo 2.3 se trabajó con una situación común en la cual la velocidad de una partícula cambia mientras se mueve. Cuando la velocidad de ésta cambia con el tiempo, se dice que la partícula *acelera*. Por ejemplo, la magnitud de la velocidad de un automóvil aumenta cuando se pisa el acelerador y disminuye cuando se aplican los frenos. Vea cómo cuantificar la aceleración.

Considere que un objeto representado como una partícula en movimiento a lo largo del eje x tiene una velocidad inicial v_{xi} en el tiempo t_i en la posición \textcircled{A} y una velocidad final v_{xf} en el tiempo t_f en la posición \textcircled{B} como en la figura 2.6a. La curva roja en la figura 2.6b muestra cómo cambia la velocidad con el tiempo. La **aceleración promedio** $a_{x,\text{prom}}$ de la partícula se define como el *cambio* en velocidad Δv_x dividido por el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre el cambio:

Aceleración promedio ►

$$a_{x,\text{prom}} \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} \quad (2.9)$$

Como con la velocidad, cuando el movimiento a analizar sea unidimensional, se usan los signos positivo y negativo para indicar la dirección de la aceleración. Puesto que las dimen-



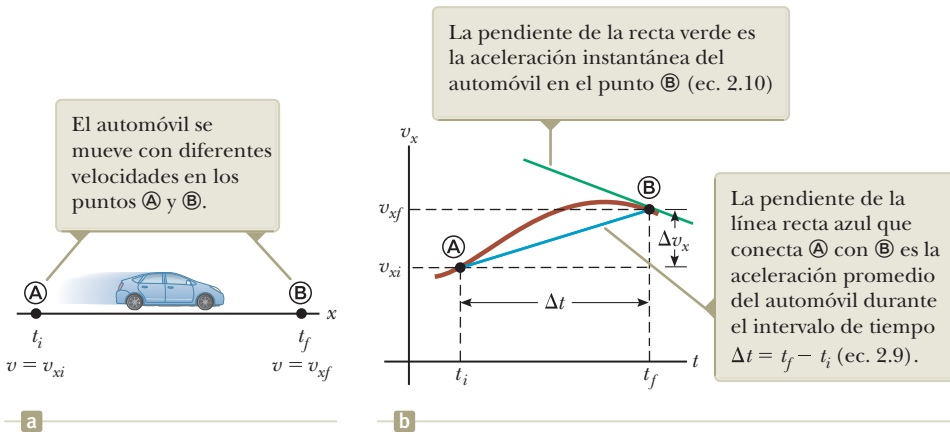


Figura 2.6 (a) Un automóvil, modelado como partícula, que se mueve a lo largo del eje x de A a B, tiene velocidad v_{xi} en $t = t_i$ y velocidad v_{xf} en $t = t_f$. (b) Gráfica velocidad-tiempo (roja-café) para la partícula que se mueve en una línea recta.

siones de velocidad son L/T y la dimensión de tiempo es T , la aceleración tiene dimensiones de longitud divididas por el tiempo al cuadrado, o L/T^2 . La unidad del SI de aceleración es metros por segundo al cuadrado (m/s^2). Es más sencillo interpretar estas unidades si piensa en ellas como metros por segundo por segundo. Por ejemplo, considere que un objeto tiene una aceleración de $+2 m/s^2$. Se puede formar una imagen mental del objeto que tiene una velocidad a lo largo de una línea recta y aumenta $2 m/s$ durante cada intervalo de $1 s$. Si el objeto parte del reposo, debe ser capaz de representarlo moviéndose con una velocidad de $+2 m/s$ después de $1 s$, a $+4 m/s$ después de $2 s$, etcétera.

En el argumento introductorio cuando su amigo aceleró desde el semáforo, encontró que los intervalos de tiempo entre los postes en el lado de la carretera disminuyeron. ¿Los resultados son consistentes con sus expectativas? Cada nuevo desplazamiento entre los postes se emprende a una velocidad más alta, por lo que los intervalos del tiempo entre los postes llegan a ser más pequeños.

En algunas situaciones el valor de la aceleración promedio puede ser diferente durante distintos intervalos de tiempo. Por tanto, es útil definir la **aceleración instantánea** como el límite de la aceleración promedio conforme Δt tiende a cero. Este concepto es análogo a la definición de velocidad instantánea discutida en la sección 2.2. Si imaginamos que el punto A se acerca más y más al punto B en la figura 2.6a y toma el límite de $\Delta v_x/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero, se obtiene la aceleración instantánea en el punto B:

$$a_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \quad (2.10)$$

Esto es: la aceleración instantánea es igual a la derivada de la velocidad respecto al tiempo, que por definición es la pendiente de la gráfica velocidad-tiempo. La pendiente de la línea verde en la figura 2.6b es igual a la aceleración instantánea en el punto B. Observe que la figura 2.6b es una gráfica de la *velocidad-tiempo* no es una gráfica de la *posición-tiempo* como en las figuras 2.1b, 2.3, 2.4, y 2.5. Por tanto, vemos que igual como la velocidad de una partícula en movimiento es la pendiente en un punto sobre la gráfica $x-t$ de la partícula, la aceleración de una partícula es la pendiente en un punto sobre la gráfica v_x-t de la partícula. Uno puede interpretar la derivada de la velocidad respecto al tiempo como la relación de cambio de velocidad en el tiempo. Si a_x es positiva, la aceleración está en la dirección x positiva; si a_x es negativa, la aceleración está en la dirección x negativa.

La figura 2.7 ilustra cómo una gráfica aceleración-tiempo se relaciona con una gráfica velocidad-tiempo. La aceleración en cualquier tiempo es la pendiente de la gráfica velocidad-tiempo en dicho tiempo. Los valores positivos de la aceleración corresponden a los puntos en la figura 2.7a donde la velocidad aumenta en la dirección x positiva. La aceleración alcanza un máximo en el tiempo t_{a} , cuando la pendiente de la gráfica velocidad-tiempo es un máximo. Después, la aceleración llega a cero en el tiempo t_{b} , cuando la velocidad es un máximo (esto es: cuando la pendiente de la gráfica v_x-t es cero). La aceleración es negativa cuando la velocidad disminuye en la dirección x positiva, y llega a su valor más negativo en el tiempo t_{c} .

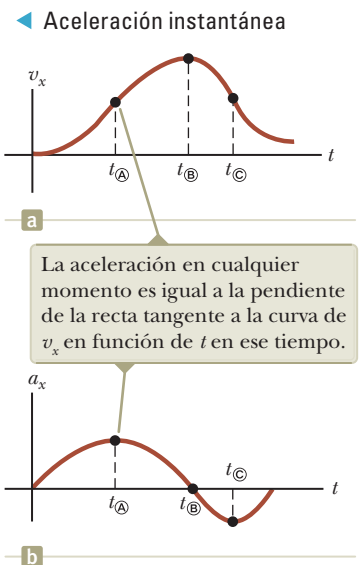


Figura 2.7 (a) La gráfica de velocidad-tiempo para una partícula que se mueve a lo largo del eje x . (b) La aceleración instantánea puede obtenerse a partir de la gráfica de velocidad-tiempo.

- E XAMEN RÁPIDO 2.4** Haga una gráfica velocidad-tiempo para el automóvil de la figura 2.1a. Suponga que la rapidez límite para el camino en el que se desplaza el auto es 30 km/h. ¿Cierto o falso? El automóvil supera el límite de rapidez en algún momento dentro del intervalo de tiempo 0-50 s.

Para el caso de movimiento en una línea recta, la dirección de la velocidad de un objeto y la dirección de su aceleración se relacionan del modo siguiente. Cuando la velocidad y la aceleración del objeto están en la misma dirección, el objeto aumenta su rapidez. Por otra parte, cuando la velocidad y la aceleración del objeto están en direcciones opuestas, el objeto frena.

Para ayudar con esta discusión de los signos de velocidad y aceleración, se relaciona la aceleración de un objeto con la *fuerza* total ejercida en el objeto. En el capítulo 5 se establece formalmente que la **fuerza de un objeto es proporcional a la aceleración del mismo**:

$$F_x \propto a_x \quad (2.11)$$

Esta proporcionalidad indica que la aceleración es causada por una fuerza. Más aún, fuerza y aceleración son vectores, y los vectores actúan en la misma dirección. Debido a esto, piense acerca de los signos de la velocidad y la aceleración al considerar una fuerza aplicada a un objeto y que causa su aceleración. Suponga que velocidad y aceleración están en la misma dirección. Esta situación corresponde a un objeto que experimenta una fuerza que actúa en la misma dirección que su velocidad. En este caso, ¡el objeto aumenta su rapidez! Ahora suponga que velocidad y aceleración están en direcciones opuestas. En esta situación, el objeto se mueve en alguna dirección y experimenta una fuerza que actúa en la dirección opuesta. Por tanto, ¡el objeto frena! Es muy útil igualar la dirección de la aceleración a la dirección de una fuerza, porque es más fácil, a partir de la experiencia cotidiana, pensar acerca de qué efecto tendrá una fuerza sobre un objeto que pensar sólo en términos de la dirección de la aceleración.

- E XAMEN RÁPIDO 2.5** Si un automóvil viaja hacia el este y frena, ¿cuál es la dirección de la fuerza sobre el automóvil que hace que frene? (a) hacia el este, (b) hacia el oeste, (c) ni al este ni al oeste.

Desde ahora se usará el término *aceleración* para dar a entender aceleración instantánea. Cuando se hable de aceleración promedio, siempre se usará el adjetivo *promedio*. Puesto que $v_x = dx/dt$, la aceleración también se escribe como

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.12)$$

Es decir: en un movimiento en una dimensión, la aceleración es igual a la *segunda derivada* de x respecto del tiempo.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 2.4

Aceleración negativa Tenga en mente que la *aceleración negativa no necesariamente significa que un objeto está frenando*. Si la aceleración es negativa y la velocidad es negativa, ¡el objeto está aumentando velocidad!

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 2.5

Desaceleración La palabra *desaceleración* tiene la connotación popular de *frenar*. En este libro no se usará esta palabra porque confunde la definición dada para aceleración negativa.

Ejemplo conceptual 2.5 Relaciones gráficas entre x , v_x y a_x

La posición de un objeto que se mueve a lo largo del eje x varía con el tiempo, como en la figura 2.8a. Grafique la velocidad en función del tiempo y la aceleración en función del tiempo para el objeto.

SOLUCIÓN

La velocidad en cualquier instante es la pendiente de la tangente a la gráfica $x-t$ en dicho instante. Entre $t = 0$ y $t = t_{\text{A}}$, la pendiente de la gráfica $x-t$ aumenta uniformemente, de modo que la velocidad aumenta linealmente como se muestra en la figura 2.8b. Entre t_{A} y t_{B} , la pendiente de la gráfica $x-t$ es constante, de esa manera la velocidad permanece constante. Entre t_{B} y t_{C} , la pendiente de la gráfica $x-t$ disminuye, de igual manera el valor de la velocidad en la gráfica v_x-t disminuye.

En t_{B} , la pendiente de la gráfica $x-t$ es cero, por eso la velocidad es cero en dicho instante. Entre t_{B} y t_{C} , la pendiente de la gráfica $x-t$ y debido a esto la velocidad son negativas y disminuyen uniformemente en este intervalo. En el intervalo t_{C} a t_{D} , la pendiente de la gráfica $x-t$ todavía es negativa, y en t_{D} va a cero. Por último, después de t_{D} , la pendiente de la gráfica $x-t$ es cero, lo que significa que el objeto está en reposo para $t > t_{\text{D}}$.

continúa

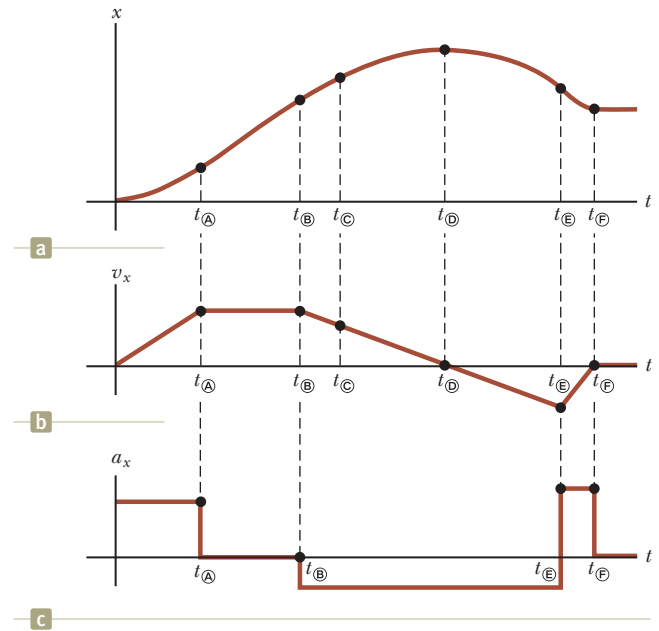


2.5 continúa

La aceleración en cualquier instante es la pendiente de la tangente a la gráfica v_x-t en dicho instante. En la figura 2.8c se muestra la gráfica de aceleración en función del tiempo para ese objeto. La aceleración es constante y positiva entre 0 y t_{A} , donde la pendiente de la gráfica v_x-t es positiva. Es cero entre t_{A} y t_{B} y para $t > t_{\text{B}}$ porque la pendiente de la gráfica v_x-t es cero en estos tiempos. Es negativa entre t_{B} y t_{E} porque la pendiente de la gráfica v_x-t es negativa durante ese intervalo. Entre t_{E} y t_{F} la aceleración es positiva como lo es entre 0 y t_{A} , pero mayor en valor porque la pendiente de la gráfica v_x-t es más inclinada.

Observe que los cambios súbitos en aceleración que se muestran en la figura 2.8c no son físicos. Tales cambios instantáneos no ocurren en la realidad.

Figura 2.8 (Ejemplo conceptual 2.5) (a) Gráfica posición-tiempo para un objeto que se mueve a lo largo del eje x . (b) La gráfica velocidad-tiempo para el objeto se obtiene al medir la pendiente de la gráfica posición-tiempo en cada instante. (c) La gráfica aceleración-tiempo para el objeto se obtiene al medir la pendiente de la gráfica velocidad-tiempo en cada instante.



Ejemplo 2.6 Aceleración promedio e instantánea

La velocidad de una partícula que se mueve a lo largo del eje x varía de acuerdo con la expresión $v_x = (40 - 5t^2)$, donde v_x está en m/s, y t está en segundos.

A) Encuentre la aceleración promedio en el intervalo de tiempo $t = 0$ a $t = 2.0$ s.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense qué hace la partícula a partir de la representación matemática. ¿Se mueve en $t = 0$? ¿En qué dirección? ¿Aumenta velocidad o frena? La figura 2.9 es una gráfica v_x-t que se creó a partir de la expresión de velocidad en función del tiempo dada en el enunciado del problema. Puesto que la pendiente de toda la curva v_x-t es negativa, se espera que la aceleración sea negativa.

Categorizar La solución a este problema no requiere alguno de los modelos de análisis que hemos desarrollado hasta ahora, y se puede resolver con matemáticas simples. Por tanto, categorizamos el problema como un problema de sustitución.

Encuentre las velocidades en $t_i = t_{\text{A}} = 0$ y $t_f = t_{\text{B}} = 2.0$ s al sustituir estos valores de t en la expresión para la velocidad:

Use la ecuación 2.9 y encuentre la aceleración promedio en el intervalo de tiempo especificado $\Delta t = t_{\text{B}} - t_{\text{A}} = 2.0$ s:

El signo negativo es consistente con las expectativas: la aceleración promedio, representada por la pendiente de la recta azul que une los puntos inicial y final en la gráfica velocidad-tiempo, es negativa.

La aceleración en B es igual a la pendiente de la recta tangente verde en $t = 2$ s que es -20 m/s².

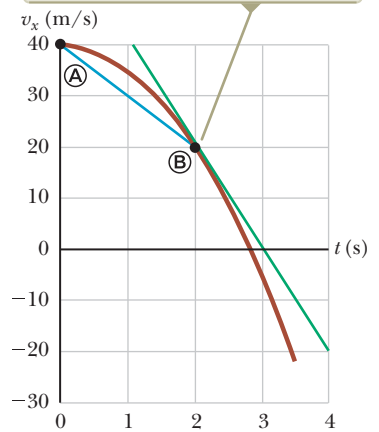


Figura 2.9 (Ejemplo 2.6) Gráfica velocidad-tiempo para una partícula que se mueve a lo largo del eje x de acuerdo con la expresión $v_x = 40 - 5t^2$.

$$v_{x\text{A}} = 40 - 5t_{\text{A}}^2 = 40 - 5(0)^2 = +40 \text{ m/s}$$

$$v_{x\text{B}} = 40 - 5t_{\text{B}}^2 = 40 - 5(2.0)^2 = +20 \text{ m/s}$$

$$a_{x,\text{prom}} = \frac{v_{x\text{f}} - v_{x\text{i}}}{t_{\text{f}} - t_{\text{i}}} = \frac{v_{x\text{B}} - v_{x\text{A}}}{t_{\text{B}} - t_{\text{A}}} = \frac{20 \text{ m/s} - 40 \text{ m/s}}{2.0 \text{ s} - 0 \text{ s}} = -10 \text{ m/s}^2$$

continúa



2.6 continuación

(B) Determine la aceleración en $t = 2.0$ s.

SOLUCIÓN

Al saber que la velocidad inicial en cualquier tiempo t es $v_{xi} = 40 - 5t^2$, encuentre la velocidad en cualquier tiempo ulterior $t + \Delta t$:

$$v_{xf} = 40 - 5(t + \Delta t)^2 = 40 - 5t^2 - 10t\Delta t - 5(\Delta t)^2$$

Encuentre el cambio en velocidad en el intervalo de tiempo Δt :

$$\Delta v_x = v_{xf} - v_{xi} = -10t\Delta t - 5(\Delta t)^2$$

Para encontrar la aceleración en cualquier tiempo t , divida esta expresión entre Δt y tome el límite del resultado conforme Δt tiende a cero:

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (-10t - 5\Delta t) = -10t$$

Sustituya $t = 2.0$ s:

$$a_x = (-10)(2.0) \text{ m/s}^2 = -20 \text{ m/s}^2$$

Puesto que la velocidad de la partícula es positiva y la aceleración es negativa en este instante, la partícula disminuye su velocidad.

Finalizar Note que las respuestas a los incisos (A) y (B) son diferentes. La aceleración promedio en (A) es la pendiente de la recta azul que en la figura 2.9 conecta los puntos Ⓐ y Ⓑ. La aceleración instantánea en (B) es la pendiente de la recta verde tangente a la curva en el punto Ⓑ. Repare también en que la aceleración *no* es constante en este ejemplo. Las situaciones que involucran aceleración constante se tratan en la sección 2.7.

Hasta el momento se han evaluado las derivadas de una función al comenzar con la definición de la función y luego tomar el límite de una relación específica. Si está familiarizado con el cálculo, reconocerá que hay reglas específicas para tomar derivadas. Estas reglas, que se mencionan en el apéndice B.6, le permiten evaluar derivadas rápidamente. Por ejemplo, una regla dice que la derivada de cualquier constante es cero. Como otro ejemplo, considere que x es proporcional a alguna potencia de t , como en la expresión

$$x = At^n$$

donde A y n son constantes. (Esta expresión es una forma funcional muy común.) La derivada de x respecto a t es

$$\frac{dx}{dt} = nAt^{n-1}$$

Al aplicar esta regla al ejemplo 2.6, en el que $v_x = 40 - 5t^2$, de inmediato se encuentra que la aceleración es $a_x = dv_x/dt = -10t$, como se encontró en el inciso B) del ejemplo.

2.6 Diagramas de movimiento

Con frecuencia los conceptos de velocidad y aceleración se confunden uno con otro, pero en realidad son cantidades muy diferentes. Al formar una representación mental de un objeto en movimiento, a veces es útil usar una representación pictórica llamada *diagrama de movimiento* para describir la velocidad y la aceleración mientras un objeto está en movimiento.

Un diagrama de movimiento se forma al imaginar una fotografía *estroboscópica* de un objeto en movimiento, que muestra varias imágenes del objeto tomadas conforme la luz estroboscópica destella en intervalos constantes. La figura 2.1a es un diagrama de movimiento para el automóvil estudiado en la sección 2.1. La figura 2.10 representa tres conjuntos de fotografías estroboscópicas de automóviles que se mueven a lo largo de una autopista recta en una sola dirección, de izquierda a derecha. Los intervalos de tiempo entre los destellos del estroboscopio son iguales en cada parte del diagrama. De modo que, para no confundir las dos cantidades vectoriales, en la figura 2.10 se usa rojo para los vectores velocidad y morado para los vectores aceleración. Los vectores se muestran en varios instantes durante el movimiento del objeto. Describa el movimiento del automóvil en cada diagrama.

En la figura 2.10a, las imágenes del automóvil están igualmente espaciadas, lo que muestra que el automóvil se mueve a través del mismo desplazamiento en cada intervalo



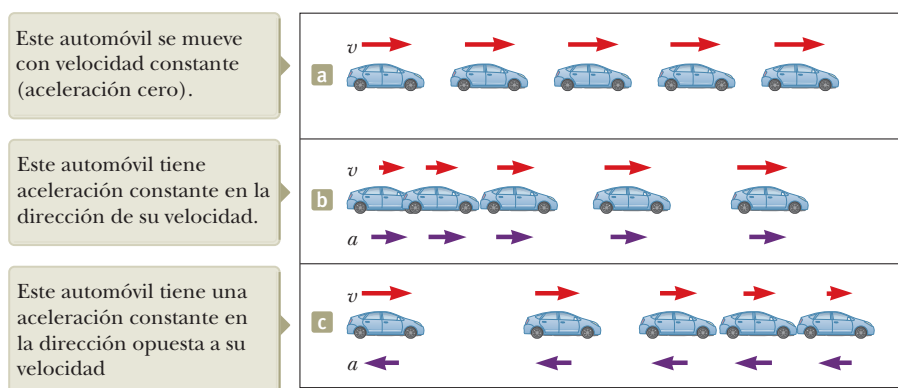


Figura 2.10 Diagramas de movimiento de un automóvil que se mueve a lo largo de una carretera recta en una sola dirección. La velocidad en cada instante está indicada por una flecha roja, y la aceleración constante se indica mediante una flecha de color morado.

de tiempo. Este espaciamiento igual es consistente con el automóvil que se mueve con *velocidad positiva constante y aceleración cero*. Se podría modelar el automóvil como una partícula y describirlo con el modelo de partícula bajo velocidad constante. Las flechas rojas de velocidad son de igual longitud, y no se muestra flecha morada de aceleración porque es de longitud cero.

En la figura 2.10b, las imágenes se separan más conforme avanza el tiempo. En este caso, las flechas rojas aumentan en longitud con el tiempo, porque el desplazamiento del automóvil entre posiciones adyacentes aumenta en el tiempo. Esta característica sugiere que el automóvil se mueve con una *velocidad positiva y una aceleración positiva*. La velocidad y la aceleración están en la misma dirección. En términos de la anterior discusión de fuerza, imagine una fuerza que jala al automóvil en la misma dirección en que se mueve: aumenta su rapidez.

En la figura 2.10c, el automóvil frena conforme se mueve a la derecha porque su desplazamiento entre imágenes adyacentes disminuye con el tiempo. Este caso sugiere que el automóvil se mueve hacia la derecha con una *aceleración negativa*. La longitud del vector velocidad disminuye en el tiempo y eventualmente llega a cero. A partir de este diagrama se ve que los vectores aceleración y velocidad *no* están en la misma dirección. El automóvil se mueve con una *velocidad positiva*, pero con una *aceleración negativa*. (Este tipo de movimiento se muestra para un automóvil que derrapa hasta detenerse después de aplicar los frenos.) La velocidad y la aceleración están en direcciones opuestas. En términos de la anterior discusión de fuerza, imagine una fuerza que jala el automóvil en dirección opuesta a la que se mueve: frena.

Los vectores aceleración morados en los incisos (b) y (c) de la figura 2.10 tienen todos la misma longitud. Por tanto, estos diagramas representan movimiento de una *partícula bajo aceleración constante*. Este destacado modelo de análisis se discutirá en la siguiente sección.

- E XAMEN RÁPIDO 2.6** ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero? (a) Si un automóvil viaja hacia el este, su aceleración debe estar hacia el este. (b) Si un automóvil frena, su aceleración debe ser negativa. (c) Una partícula con aceleración constante nunca puede detenerse ni permanecer detenida.

2.7 Análisis de modelo: La partícula bajo aceleración constante

Si la aceleración de una partícula varía con el tiempo, su movimiento es complejo y difícil de analizar. Sin embargo, un tipo muy común y simple de movimiento en una dimensión, es aquel en el que la aceleración es constante. En tal caso, la aceleración promedio $a_{x,\text{prom}}$ en cualquier intervalo de tiempo es numéricamente igual a la aceleración instantánea a_x en cualquier instante dentro del intervalo, y la velocidad cambia con la misma proporción a lo largo del movimiento. Esta situación ocurre con suficiente frecuencia como para que se le identifique como un modelo de análisis: la **partícula bajo aceleración constante**. En la discusión que sigue se generan varias ecuaciones que describen el movimiento de una partícula para este modelo.

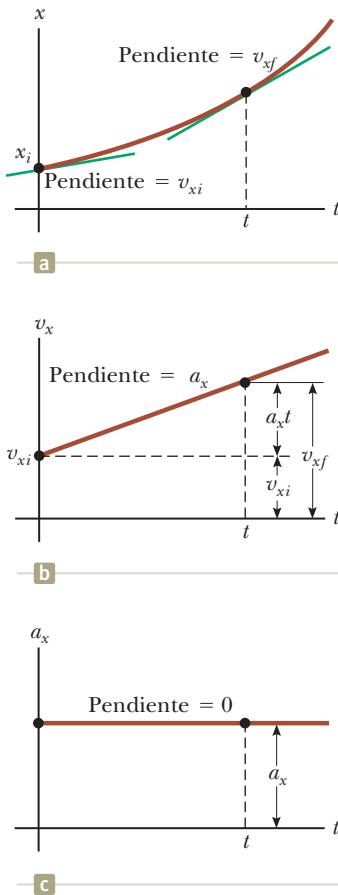


Figura 2.11 Una partícula bajo aceleración constante a_x que se mueve a lo largo del eje x : (a) gráfica posición-tiempo, (b) gráfica velocidad-tiempo y (c) gráfica aceleración-tiempo.

► **Posición como una función de la velocidad y el tiempo para la partícula bajo el modelo de aceleración constante**

► **Posición como una función del tiempo para la partícula bajo el modelo de aceleración constante**

Si en la ecuación 2.9 sustituye $a_{x,\text{prom}}$ con a_x y toma $t_i = 0$ y t_f como cualquier tiempo t , encontramos que

$$a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t - 0}$$

o

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t \quad (\text{para } a_x \text{ constante}) \quad (2.13)$$

Esta poderosa expresión permite determinar la velocidad de un objeto en *cualquier* tiempo t , si se conoce la velocidad inicial v_{xi} del objeto y su aceleración a_x (constante). En la figura 2.11b se muestra una gráfica velocidad-tiempo para este movimiento con aceleración constante. La gráfica es una línea recta, cuya pendiente es la aceleración a_x ; la pendiente (constante) es consistente con $a_x = dv_x/dt$ constante. Note que la pendiente es positiva, lo que indica una aceleración positiva. Si la aceleración fuese negativa, la pendiente de la recta en la figura 2.11b sería negativa. Cuando la aceleración es constante, la gráfica de aceleración en función del tiempo (figura 2.11c) es una línea recta que tiene una pendiente cero.

Puesto que la velocidad con aceleración constante varía linealmente en el tiempo, de acuerdo con la ecuación 2.13, se expresa la velocidad promedio en cualquier intervalo de tiempo como la media aritmética de la velocidad inicial v_{xi} y la velocidad final v_{xf} :

$$v_{x,\text{prom}} = \frac{v_{xi} + v_{xf}}{2} \quad (\text{para } a_x \text{ constante}) \quad (2.14)$$

Note que esta expresión para la velocidad promedio sólo se aplica en situaciones en que la aceleración es constante.

Ahora es necesario aplicar las ecuaciones 2.1, 2.2 y 2.14 para obtener la posición de un objeto como función del tiempo. Al recordar que Δx en la ecuación 2.2 representa $x_f - x_i$ y reconocer que $\Delta t = t_f - t_i = t - 0 = t$, se encuentra que

$$x_f - x_i = v_{x,\text{prom}} t = \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t$$

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t \quad (\text{para } a_x \text{ constante}) \quad (2.15)$$

Esta ecuación proporciona la posición final de la partícula en el tiempo t en términos de las velocidades inicial y final.

Otra expresión útil para la posición de una partícula bajo aceleración constante se obtiene al sustituir la ecuación 2.13 en la ecuación 2.15:

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}[v_{xi} + (v_{xi} + a_x t)]t$$

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (\text{para } a_x \text{ constante}) \quad (2.16)$$

Esta ecuación proporciona la posición final de la partícula en el tiempo t en términos de la posición inicial, la velocidad inicial y la aceleración constante.

La gráfica posición-tiempo para movimiento con aceleración constante (positiva) que se muestra en la figura 2.11a se obtiene de la ecuación 2.16. Note que la curva es una parábola. La pendiente de la recta tangente a esta curva en $t = 0$ es igual a la velocidad inicial v_{xi} , y la pendiente de la recta tangente en cualquier tiempo posterior t es igual a la velocidad v_{xf} en dicho tiempo.



Por último, es posible obtener una expresión para la velocidad final que no contenga tiempo como variable al sustituir el valor de t de la ecuación 2.13 en la ecuación 2.15:

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf}) \left(\frac{v_{xf} - v_{xi}}{a_x} \right) = x_i + \frac{v_{xf}^2 - v_{xi}^2}{2a_x}$$

$$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i) \quad (\text{para } a_x \text{ constante}) \quad (2.17)$$

◀ Velocidad como una función del tiempo para la partícula bajo el modelo de aceleración constante

Esta ecuación proporciona la velocidad final en términos de la velocidad inicial, la aceleración constante y la posición de la partícula.

Para movimiento con aceleración cero, se ve de las ecuaciones 2.13 y 2.16 que

$$\left. \begin{aligned} v_{xf} &= v_{xi} = v_x \\ x_f &= x_i + v_x t \end{aligned} \right\} \text{ cuando } a_x = 0$$

Esto es, cuando la aceleración de una partícula es cero, su velocidad es constante y su posición cambia linealmente con el tiempo. En términos de modelos, cuando la aceleración de una partícula es cero, el modelo de partícula bajo aceleración constante se reduce al modelo de partícula bajo velocidad constante (sección 2.3).

Las ecuaciones de la 2.13 a la 2.17 son las **ecuaciones cinemáticas** que pueden aplicar para resolver cualquier problema que involucre una partícula bajo aceleración constante en una dimensión. Estas ecuaciones se presentan juntas a continuación. La elección de cuál ecuación usar en una situación dada depende de qué sepa con anticipación. A veces es necesario usar dos de estas ecuaciones para resolver dos incógnitas. Debe reconocer que las cantidades que varían durante el movimiento son la posición x_f , la velocidad v_{xf} y el tiempo t .

Al resolver numerosos ejercicios y problemas obtendrá mucha experiencia en el uso de estas ecuaciones. Muchas veces descubrirá que se puede usar más de un método para obtener una solución. Recuerde que estas ecuaciones de cinemática *no se pueden* usar en una situación en que la aceleración varía con el tiempo. Son útiles sólo cuando la aceleración es constante.

E XAMEN RÁPIDO 2.7 En la figura 2.12, relacione cada gráfica v_x-t en la parte superior con la gráfica a_x-t en la parte inferior que mejor describa el movimiento.

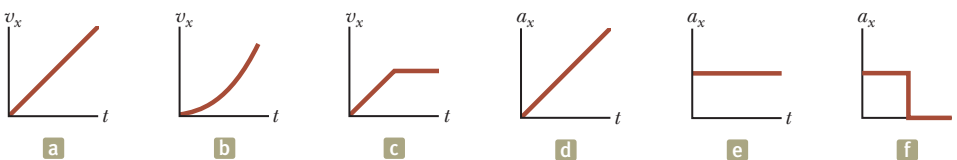


Figura 2.12 (Examen rápido 2.7) Los incisos (a), (b) y (c) son gráficas v_x-t de objetos en movimiento en una dimensión. Las posibles aceleraciones de cada objeto se muestran en forma desordenada en (d), (e) y (f).

MODELO DE ANÁLISIS: Partículas bajo aceleración constante

Imagínese un objeto en movimiento que se puede modelar como una partícula. Si se comienza desde la posición inicial x_i y velocidad v_{xi} y se mueve en una línea recta con una aceleración constante a_x , su posición posterior y la velocidad se describen por las siguientes ecuaciones cinemáticas:

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t \quad (2.13)$$

$$v_{x,\text{prom}} = \frac{v_{xi} + v_{xf}}{2} \quad (2.14)$$

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t \quad (2.15)$$

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (2.16)$$

$$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i) \quad (2.17)$$



Ejemplos

- un automóvil acelerando a un ritmo constante a lo largo de una autopista recta
- un objeto que cae en ausencia de resistencia del aire (sección 2.8)
- un objeto sobre el que actúa una fuerza neta constante (capítulo 5)
- una partícula con carga en un campo eléctrico uniforme (capítulo 22)



Ejemplo 2.7 Aterrizaje en portaaviones

Un jet aterriza en un portaaviones a 140 mi/h (≈ 63 m/s).

(A) ¿Cuál es su aceleración (constante) si se detiene en 2.0 s debido a un cable de arresto que traba al jet y lo deja en reposo?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Es posible que haya visto películas o programas de televisión en los que un jet aterriza sobre un portaaviones y se lleva al reposo sorprendentemente rápido mediante un cable de arresto. Una lectura cuidadosa del problema revela que, además de estar dada la rapidez inicial de 63 m/s, también se sabe que la rapidez final es cero. Definimos nuestro eje x como la dirección de movimiento del jet. Observe que no se tiene información acerca del cambio en la posición del jet mientras está disminuyendo su velocidad

Categorizar Puesto que la aceleración del jet se supone constante, lo modelamos como una *partícula bajo aceleración constante*.

Analizar La ecuación 2.13 es la única en el modelo de partícula bajo aceleración constante que no involucra la posición, de modo que se le usa para encontrar la aceleración del jet, representado como partícula:

$$a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t} \approx \frac{0 - 63 \text{ m/s}}{2.0 \text{ s}} = -32 \text{ m/s}^2$$

(B) Si el jet toca al portaaviones en la posición $x_i = 0$, ¿cuál es su posición final?

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 2.15 para resolver la posición final:

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t = 0 + \frac{1}{2}(63 \text{ m/s} + 0)(2.0 \text{ s}) = 63 \text{ m}$$

Finalizar Dado el tamaño del portaaviones, una longitud de 63 m parece razonable para detener al jet. La idea de usar cables de arresto para frenar a la aeronave que aterriza y permitirle aterrizar con seguridad en los barcos surgió en la primera Guerra Mundial. Los cables todavía son una parte vital de la operación de los modernos portaaviones.

¿QUÉ PASARÍA SI?

Suponga que el jet aterriza en la cubierta del portaaviones con una rapidez mayor que 63 m/s pero tiene la misma aceleración debida al cable calculada en el inciso (A). ¿Cómo cambiará esto la respuesta del inciso (B)?

Respuesta Si el jet viaja más rápido que al principio se detendrá más lejos de su punto de partida, de modo que la respuesta del inciso B) sería más grande. Matemáticamente, en la ecuación 2.15 se ve que, si v_{xi} es más grande, x_f será más grande.

Ejemplo 2.8 Observe el límite de rapidez!

Usted está conduciendo un automóvil que viaja con una rapidez constante de 45.0 m/s pasa por donde está un patrullero en motocicleta oculto detrás de un anuncio espectacular. Un segundo después de que el automóvil pasa el anuncio, el patrullero sale de su escondite para detener al automóvil, que acelera con una razón constante de 3.00 m/s². ¿Cuánto tiempo tarda en dar alcance al automóvil?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Este ejemplo representa una clase de problemas llamados problemas *ricos en contexto*. Estos problemas involucran situaciones del mundo real que uno podría encontrar en la vida diaria. Estos problemas también lo involucran a “usted” en lugar de una partícula u objeto no especificado. ¡Con usted como el personaje en el problema, que puede hacer la conexión entre la física y la vida cotidiana!

Categorizar Una representación pictórica (figura 2.13) ayuda a clarificar la secuencia de eventos. El automóvil se modela como una *partícula bajo velocidad constante* y el patrullero se modela como una *partícula bajo aceleración constante*.

Analizar Primero, escriba expresiones para la posición de cada vehículo como función del tiempo. Es conveniente elegir la posición del anuncio como el origen y hacer $t_{\text{B}} = 0$ como el tiempo en que el patrullero comienza a moverse. En dicho instante, el automóvil ya recorrió una distancia de 45.0 m desde el anuncio, porque viajó con una rapidez constante de $v_x = 45.0$ m/s durante 1 s. Por tanto, la posición inicial del automóvil es $x_{\text{B}} = 45.0$ m.

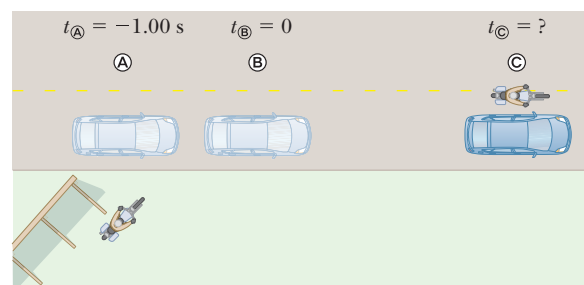


Figura 2.13 (Ejemplo 2.8) Estás en un automóvil que pasa a alta velocidad por donde está oculto un patrullero en motocicleta.

2.8 continuación

Usando el modelo de partícula bajo aceleración constante, se aplica la ecuación 2.7 para obtener la posición del automóvil en cualquier tiempo t :

Una revisión rápida muestra que, en $t = 0$, esta expresión da la posición inicial correcta del automóvil cuando el patrullero comienza a moverse: $x_{\text{automóvil}} = x_{\text{Ⓢ}} = 45.0 \text{ m}$.

El patrullero parte del reposo en $t_{\text{Ⓢ}} = 0$ y acelera a $a_x = 3.00 \text{ m/s}^2$ alejándose del origen. Use la ecuación 2.16 para dar la posición en cualquier tiempo t :

Igualé las dos posiciones para representar al patrullero dando alcance al automóvil en la posición Ⓢ:

Simplifique para obtener una ecuación cuadrática:

Resolviendo la ecuación cuadrática para el tiempo en que la policía da alcance al automóvil (para obtener ayuda en la solución de ecuaciones cuadráticas, consulte el Apéndice B.2.):

Se evalúa la solución, se elige la raíz positiva, ya que es la única opción coherente con un tiempo $t > 0$:

$$x_{\text{automóvil}} = x_{\text{Ⓢ}} + v_{x\text{automóvil}} t$$

$$x_f = x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$x_{\text{patrullero}} = 0 + (0)t + \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$x_{\text{patrullero}} = x_{\text{automóvil}}$$

$$\frac{1}{2} a_x t^2 = x_{\text{Ⓢ}} + v_{x\text{automóvil}} t$$

$$\frac{1}{2} a_x t^2 - v_{x\text{automóvil}} t - x_{\text{Ⓢ}} = 0$$

$$t = \frac{v_{x\text{automóvil}} \pm \sqrt{v_{x\text{automóvil}}^2 + 2a_x x_{\text{Ⓢ}}}}{a_x}$$

$$(1) \quad t = \frac{v_{x\text{automóvil}}}{a_x} \pm \sqrt{\frac{v_{x\text{automóvil}}^2}{a_x^2} + \frac{2x_{\text{Ⓢ}}}{a_x}}$$

$$t = \frac{45.0 \text{ m/s}}{3.00 \text{ m/s}^2} + \sqrt{\frac{(45.0 \text{ m/s})^2}{(3.00 \text{ m/s}^2)^2} + \frac{2(45.0 \text{ m})}{3.00 \text{ m/s}^2}} = 31.0 \text{ s}$$

Finalizar ¿Por qué no elegimos $t = 0$ como el tiempo en el que el automóvil pasa al patrullero? Si así lo hiciéramos, no seríamos capaces de usar la partícula bajo el modelo de la aceleración constante de la policía. Su aceleración sería cero para el primer, segundo y 3.00 m/s^2 durante el tiempo restante. Al definir el tiempo $t = 0$ como cuando la policía comienza a moverse, podemos usar la partícula bajo el modelo de aceleración constante de su movimiento para todos los tiempos positivos.

¿QUÉ PASARÍA SI?

¿Y si el patrullero tiene una motocicleta más potente con una aceleración mayor? ¿Cómo cambiaría el tiempo en que el patrullero da alcance al automóvil?

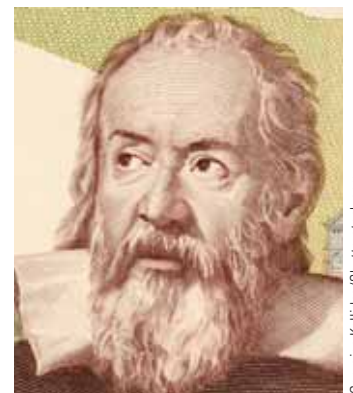
Respuesta Si la motocicleta tuviese una aceleración mayor, el patrullero alcanzaría al automóvil más rápido, de modo que la respuesta para el tiempo sería menor que 31 s. Debido a que todos los términos en el lado derecho de la ecuación (1) tienen la aceleración a_x en el denominador, se ve simbólicamente que el aumento de la aceleración disminuirá el tiempo en el que el patrullero da alcance al auto.

2.8 Objetos en caída libre

Es bien sabido que, en ausencia de resistencia del aire, todos los objetos que se dejan caer cerca de la superficie de la Tierra caen hacia ella con la misma aceleración constante bajo la influencia de la gravedad de la Tierra. No fue sino hasta alrededor de 1600 que se aceptó esta conclusión. Antes de esta época, las enseñanzas del filósofo griego Aristóteles (384-322 a.C.) sostenían que los objetos más pesados caían más rápido que los ligeros.

El italiano Galileo Galilei (1564-1642) originó las ideas actuales acerca de los objetos que caen. Hay una leyenda de que él demostró el comportamiento de los objetos que caen al observar que dos pesos diferentes soltados simultáneamente de la Torre Inclinada de Pisa golpeaban el suelo aproximadamente al mismo tiempo. Aunque hay ciertas dudas de que llevó a cabo este experimento particular, está bien establecido que Galileo realizó muchos experimentos sobre objetos en movimiento en planos inclinados. En sus experimentos hacía rodar bolas por un plano ligeramente inclinado y medía las distancias que recorrían en intervalos de tiempo sucesivos. El propósito del plano inclinado era reducir la aceleración, lo que hizo posible que tomara mediciones precisas de los intervalos de tiempo. Al aumentar gradualmente la pendiente del plano, al final fue capaz de extraer conclusiones acerca de los objetos en caída libre, porque una bola en caída libre es equivalente a una bola que se mueve por un plano inclinado.

Tal vez quiera intentar el siguiente experimento. Suelte simultáneamente, desde la misma altura, una moneda y un trozo de papel arrugado. Si los efectos de la resistencia



Georgios Kollidas/Shutterstock.com

Galileo Galilei

Físico y astrónomo italiano (1564-1642)

Galileo formuló las leyes que gobiernan el movimiento de los objetos en caída libre e hizo muchos otros descubrimientos reveladores en física y astronomía. Galileo defendió públicamente la afirmación de Nicolás Copérnico de que el Sol está en el centro del Universo (sistema heliocéntrico).

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 2.6

g y g Asegúrese de no confundir el símbolo cursivo g para la aceleración en caída libre con el símbolo no cursivo g que se usa como abreviatura de la unidad gramo.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 2.7

El signo de g Tenga en mente que g es un *número positivo*. Es tentador sustituir -9.80 m/s^2 por g , pero resista la tentación. La aceleración gravitacional descendente se indica explícitamente al establecer la aceleración como $a_y = -g$.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 2.8

Aceleración en lo alto del movimiento Un error común es considerar que la aceleración de un proyectil en lo alto de su trayectoria es cero. Aunque la velocidad en lo alto del movimiento de un objeto que se lanza hacia arriba momentáneamente es cero, *la aceleración todavía corresponde a la gravedad* en este punto. Si la velocidad y la aceleración fuesen cero, el proyectil permanecería en lo alto.

del aire son despreciables, ambos tendrán el mismo movimiento y golpearán el suelo al mismo tiempo. En el caso idealizado, en el que la resistencia del aire está ausente, a tal movimiento se le conoce como *caída libre*. Si este mismo experimento se pudiese realizar en un vacío, en el que la resistencia del aire realmente es despreciable, el papel y la moneda caerían con la misma aceleración aun cuando el papel no esté arrugado. El 2 de agosto de 1971, el astronauta David Scott realizó tal demostración en la Luna. Soltó simultáneamente un martillo y una pluma y los dos objetos cayeron al mismo tiempo en la superficie lunar. ¡Seguramente esta simple demostración habría complacido a Galileo!

Cuando se usa la expresión *objeto en caída libre* no necesariamente se hace referencia a un objeto que se suelta desde el reposo. Un objeto en caída libre es cualquier objeto que se mueve libremente sólo bajo la influencia de la gravedad, sin importar su movimiento inicial. Los objetos que se lanzan hacia arriba o abajo y los que se liberan desde el reposo están todos en caída libre una vez que se liberan. Cualquier objeto en caída libre experimenta una aceleración dirigida hacia abajo, sin importar su movimiento inicial.

La magnitud de la *aceleración en caída libre* también llamada *aceleración debida a la gravedad* se denotará mediante el símbolo g . El valor de g cerca de la superficie de la Tierra disminuye conforme aumenta la altitud. Además, ocurren ligeras variaciones en g con cambios en latitud. En la superficie de la Tierra, el valor de g es aproximadamente 9.80 m/s^2 . A menos que se establezca de otro modo, se usará este valor para g cuando se realicen cálculos. Para hacer estimaciones rápidas, use $g \sim 10 \text{ m/s}^2$.

Si se desprecia la resistencia del aire y se supone que la aceleración en caída libre no varía con la altitud en distancias verticales cortas, el movimiento de un objeto en caída libre que se mueve verticalmente es equivalente al movimiento de una partícula bajo aceleración constante en una dimensión. Debido a eso, se aplican las ecuaciones desarrolladas en la sección 2.7 para que se aplique el modelo de una partícula bajo aceleración constante. La única modificación que se necesita hacer en estas ecuaciones para los objetos en caída libre es notar que el movimiento es en la dirección vertical (la dirección y) en lugar de en la dirección horizontal (x) y que la aceleración es hacia abajo y tiene una magnitud de 9.80 m/s^2 . En consecuencia, siempre se elegirá $a_y = -g = -9.80 \text{ m/s}^2$, donde el signo negativo significa que la aceleración de un objeto en caída libre es hacia abajo. En el capítulo 13 se estudiará cómo tratar con las variaciones en g con la altitud.

EJERCICIO RÁPIDO 2.8 Examine las siguientes opciones: (a) aumenta, (b) disminuye, (c) aumenta y luego disminuye, (d) disminuye y luego aumenta, (e) permanece igual. A partir de estas opciones, seleccione lo que le ocurre a (i) la aceleración y (ii) la rapidez de una bola después de que se lanza hacia arriba en el aire.

Ejemplo conceptual 2.9 Los atrevidos paracaidistas

Un paracaidista salta de un helicóptero suspendido. Pocos segundos después, salta otro paracaidista y ambos caen a lo largo de la misma línea vertical. Ignore la resistencia del aire, de modo que ambos paracaidistas caen con la misma aceleración. ¿La diferencia en sus magnitudes de velocidad permanece igual a lo largo de la caída? ¿La distancia vertical entre ellos permanece igual durante la caída?

SOLUCIÓN

En cualquier instante dado, las magnitudes de velocidad de los paracaidistas son diferentes porque uno salta primero. Sin embargo, en cualquier intervalo de tiempo Δt después de este instante, los dos paracaidistas aumentan sus rapidezces en la misma cantidad porque tienen la misma aceleración. Por tanto, la diferencia en sus magnitudes de velocidad permanece igual a lo largo de la caída.

El primero que saltó siempre tiene una mayor rapidez que el segundo. Por tanto, en un intervalo de tiempo dado, el primer paracaidista cubre una mayor distancia que el segundo. En consecuencia, la distancia de separación entre ellos aumenta.



Ejemplo 2.10 ¡No es un mal lanzamiento para un novato!

A una piedra que se lanza desde lo alto de un edificio se le da una velocidad inicial de 20.0 m/s directo hacia arriba. El edificio tiene 50.0 m de alto y la piedra apenas libra el borde del techo en su camino hacia abajo, como se muestra en la figura 2.14.

(A) Use $t_{\text{A}} = 0$ como el tiempo cuando la piedra deja la mano del lanzador en la posición A y determine el tiempo en el que la piedra llega a su altura máxima.

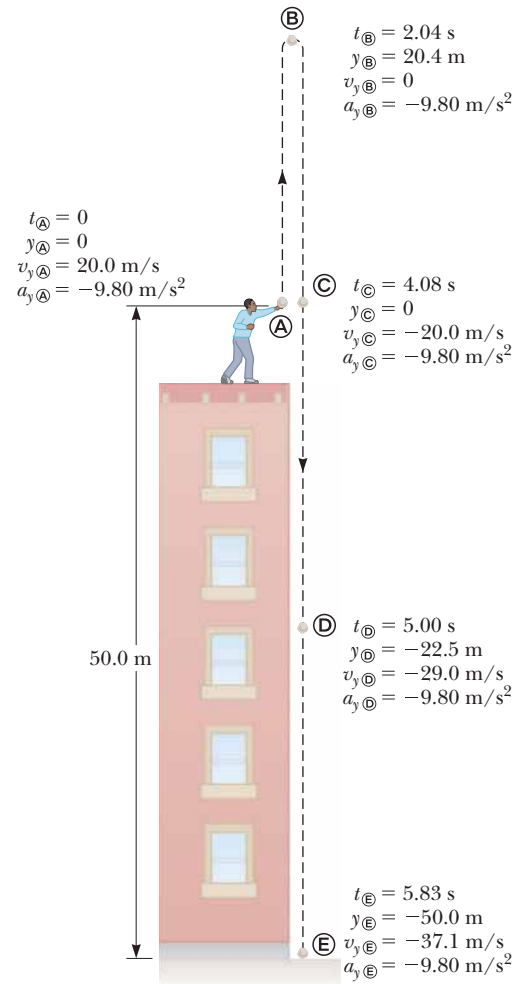
SOLUCIÓN

Conceptualizar Tal vez usted tenga experiencia en soltar objetos o lanzarlos hacia arriba y observarlos caer, de modo que este problema debe describir una experiencia familiar. Para simular esta situación, lance un pequeño objeto hacia arriba y observe el intervalo de tiempo necesario para que caiga al suelo. Ahora imagine que lanza ese objeto hacia arriba desde la azotea de un edificio.

Categorizar Debido a que la piedra está en caída libre, se modela como una *partícula bajo la aceleración constante* debida a la gravedad.

Analizar Considere que la velocidad inicial es positiva porque la piedra es lanzada hacia arriba. La velocidad cambia de signo después de que la piedra alcanza su punto más alto, pero la aceleración de la piedra será *siempre* hacia abajo de manera que siempre tendrá un valor negativo. Seleccione un punto inicial justo después que la piedra sale de la mano de la persona y un punto final en la altura máxima de su vuelo.

Figura 2.14 (Ejemplo 2.10) Valores de posición, velocidad y aceleración en diferentes tiempos para una piedra en caída libre que se lanza inicialmente hacia arriba con una velocidad $v_{yi} = 20.0$ m/s. Muchas de las cantidades en las etiquetas para los puntos en el movimiento de la piedra se calculan en el ejemplo. ¿Puede verificar los valores que no están calculados?



Aplique la ecuación 2.13 para calcular el tiempo en que la piedra llega a su altura máxima:

$$v_{yf} = v_{yi} + a_y t \rightarrow t = \frac{v_{yf} - v_{yi}}{a_y} = \frac{v_{y\text{B}} - v_{y\text{A}}}{-g}$$

Sustituya valores numéricos:

$$t = t_{\text{B}} = \frac{0 - 20.0 \text{ m/s}}{-9.80 \text{ m/s}^2} = 2.04 \text{ s}$$

(B) Encuentre la altura máxima de la piedra.

SOLUCIÓN

Al igual que en el inciso A), seleccione los puntos inicial y final al principio y al final del vuelo hacia arriba.

Sea $y_{\text{A}} = 0$ y sustituya el tiempo del inciso A) en la ecuación 2.16 para encontrar la altura máxima:

$$y_{\text{max}} = y_{\text{B}} = y_{\text{A}} + v_{x\text{A}} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$y_{\text{B}} = 0 + (20.0 \text{ m/s})(2.04 \text{ s}) + \frac{1}{2}(-9.80 \text{ m/s}^2)(2.04 \text{ s})^2 = 20.4 \text{ m}$$

(C) Determine la velocidad de la piedra cuando regresa a la altura desde la que se lanzó.

SOLUCIÓN

Seleccione el punto inicial en el que se lanzó la piedra y el punto final, cuando pasa por esta posición bajando.

Sustituya los valores conocidos en la ecuación 2.17:

$$v_{y\text{C}}^2 = v_{y\text{A}}^2 + 2a_y(y_{\text{C}} - y_{\text{A}})$$

$$v_{y\text{C}}^2 = (20.0 \text{ m/s})^2 + 2(-9.80 \text{ m/s}^2)(0 - 0) = 400 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_{y\text{C}} = -20.0 \text{ m/s}$$

continúa

2.10 continuación

Cuando se saca la raíz cuadrada, se elige una raíz positiva o una negativa. Se elige la raíz negativa porque se sabe que la piedra se mueve hacia abajo al punto ©. La velocidad de la piedra cuando llega de vuelta a su altura original es igual en magnitud a su velocidad inicial pero es opuesta en dirección.

(D) Encuentre la velocidad y posición de la piedra en $t = 5.00$ s.

SOLUCIÓN

Seleccione el punto inicial en la que se lanzó la piedra y el punto final, cuando pasa esta posición bajando.

Calcule la velocidad en © a partir de la ecuación 2.13:

$$v_{y\text{©}} = v_{y\text{Ⓐ}} + a_y t = 20.0 \text{ m/s} + (-9.80 \text{ m/s}^2)(5.00 \text{ s}) = -29.0 \text{ m/s}$$

Use la ecuación 2.16 para encontrar la posición de la piedra en $t_{\text{©}} = 5.00$ s:

$$\begin{aligned} y_{\text{©}} &= y_{\text{Ⓐ}} + v_{y\text{Ⓐ}} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \\ &= 0 + (20.0 \text{ m/s})(5.00 \text{ s}) + \frac{1}{2}(-9.80 \text{ m/s}^2)(5.00 \text{ s})^2 \\ &= -22.5 \text{ m} \end{aligned}$$

Finalizar La elección del tiempo definida como $t = 0$ es arbitraria y depende de usted seleccionarla. Como ejemplo de esta arbitrariedad, elija $t = 0$ como el tiempo en que la piedra está en el punto más alto de su movimiento. Luego resuelva los incisos (C) y (D) de nuevo usando este nuevo instante inicial y note que sus respuestas son iguales que las anteriores.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si el edificio tuviese 30.0 m de altura en lugar de 50.0 m? ¿Qué respuestas cambiarían en los incisos A) a D)?

Respuesta Ninguna de las respuestas cambiaría. Todo el movimiento tiene lugar en el aire durante los primeros 5.00 s. (Observe que incluso para un edificio de 30.0 m de alto, la piedra está arriba del suelo en $t = 5.00$ s.) Por tanto, la altura del edificio no es un problema. Matemáticamente, si se observan de nuevo los cálculos, se ve que nunca se ingresó la altura del edificio en ninguna ecuación.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 2.9

Experiencia previa con la integración Esta sección supone que el lector está familiarizado con las técnicas del cálculo integral. Si aún no estudia integración en su curso de cálculo, debe saltar esta sección o cubrirla después de que se familiarice con la integración.

2.9 Ecuaciones cinemáticas deducidas del cálculo

La velocidad de una partícula que se mueve en línea recta se obtiene si se conoce su posición como función del tiempo. En términos matemáticos, la velocidad es igual a la derivada de la posición respecto al tiempo. También es posible encontrar la posición de una partícula si se conoce su velocidad como función del tiempo. En cálculo, al procedimiento que se usa para realizar esta tarea se le conoce como *integración* o como encontrar la *antiderivada*.

Suponga que la gráfica v_x - t para una partícula que se mueve a lo largo del eje x es como se muestra en la figura 2.15. Divida el intervalo de tiempo t_f - t_i en muchos pequeños intervalos, cada uno de duración Δt_n . A partir de la definición de velocidad promedio es claro que el desplazamiento de la partícula durante cualquier intervalo pequeño, como el sombreado en la figura 2.15, está dado por $\Delta x_n = v_{x_n, \text{prom}} \Delta t_n$, donde $v_{x_n, \text{prom}}$ es la velocidad promedio en dicho intervalo. En consecuencia, el desplazamiento durante este pequeño intervalo simplemente es el área del rectángulo sombreado. El desplazamiento total para el intervalo t_f - t_i es la suma de las áreas de todos los rectángulos desde t_i hasta t_f :

$$\Delta x = \sum_n v_{x_n, \text{prom}} \Delta t_n$$

donde el símbolo Σ (letra griega mayúscula sigma) significa una suma que incluye todos los términos, esto es, todos los valores de n . Ahora, conforme los intervalos se hacen cada vez más pequeños, el número de términos en la suma aumenta y la suma tiende a un valor igual al área bajo la gráfica velocidad-tiempo. Debido a esto, en el límite $n \rightarrow \infty$, o $\Delta t_n \rightarrow 0$, el desplazamiento es

$$\Delta x = \lim_{\Delta t_n \rightarrow 0} \sum_n v_{x_n, \text{prom}} \Delta t_n \quad (2.18)$$

El límite de la suma que se muestra en la ecuación 2.18 se denomina **integral definida** y así el desplazamiento de la partícula se puede escribir como

$$\Delta x = \int_{t_i}^{t_f} v_x(t) dt \quad (2.19)$$

Integral definida ►



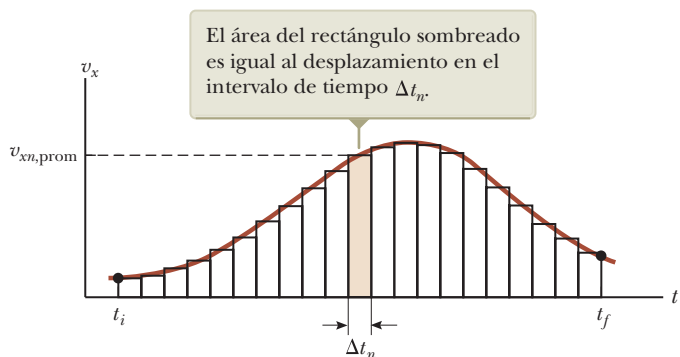


Figura 2.15 Velocidad en función del tiempo para una partícula que se mueve a lo largo del eje x . El área total bajo la curva es el desplazamiento total de la partícula.

donde $v_x(t)$ denota la velocidad en cualquier tiempo t . Si se conoce la forma funcional explícita de $v_x(t)$ y se proporcionan los límites, la integral puede evaluarse.

Ecuaciones cinemáticas

Ahora se aplican las ecuaciones que definen la aceleración y velocidad para deducir dos de las ecuaciones cinemáticas, las ecuaciones 2.13 y 2.16.

La ecuación que define la aceleración (ec. 2.10),

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

se puede escribir como $dv_x = a_x dt$, o, en términos de una integral (o antiderivada), como

$$v_{xf} - v_{xi} = \int_0^t a_x dt$$

Para el caso especial en el que la aceleración es constante, a_x se puede remover de la integral para dar

$$v_{xf} - v_{xi} = a_x \int_0^t dt = a_x(t - 0) = a_x t \quad (2.20)$$

que es la ecuación 2.13 del modelo de la partícula bajo aceleración constante.

Ahora considere la ecuación que define la velocidad (ec. 2.5):

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

Esta ecuación se puede escribir como $dx = v_x dt$, o en forma integral como

$$x_f - x_i = \int_0^t v_x dt$$

Puesto que $v_x = v_{xi} + a_x t$, esta expresión se convierte en

$$x_f - x_i = \int_0^t (v_{xi} + a_x t) dt = \int_0^t v_{xi} dt + a_x \int_0^t t dt = v_{xi}(t - 0) + a_x \left(\frac{t^2}{2} - 0 \right)$$

$$x_f - x_i = v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

que es la ecuación 2.16 en la partícula bajo el modelo de aceleración constante.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 2.10

La integración es un área Si esta discusión de integración le es confusa a usted, sólo recuerde que la integral de una función es simplemente el área entre la función y el eje x entre los límites de integración. Si la función tiene una forma simple, el área se puede calcular fácilmente sin integración. Por ejemplo, si la función es una constante, por lo que su gráfica es una recta horizontal, ¡el área es sólo del rectángulo entre la recta y el eje x !



Resumen

Definiciones

Cuando una partícula se mueve a lo largo del eje x desde alguna posición inicial x_i hasta alguna posición final x_f , su **desplazamiento** es

$$\Delta x \equiv x_f - x_i \quad (2.1)$$

La **velocidad promedio** de una partícula durante cierto intervalo de tiempo es el desplazamiento Δx dividido por el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre dicho desplazamiento:

$$v_{x,\text{prom}} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.2)$$

La **rapidez promedio** de una partícula es igual a la proporción de la distancia total que recorre al intervalo de tiempo total durante el que recorre dicha distancia:

$$v_{\text{prom}} \equiv \frac{d}{\Delta t} \quad (2.3)$$

La **velocidad instantánea** de una partícula se define como el límite de la función $\Delta x/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero. Por definición, este límite es igual a la derivada de x respecto a t , o la razón de correspondencia en el tiempo de la posición:

$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (2.5)$$

La **rapidez instantánea** de una partícula es igual a la magnitud de su velocidad instantánea.

La **aceleración promedio** de una partícula se define como la relación de cambio en su velocidad Δv_x dividida por el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre dicho cambio:

$$a_{x,\text{prom}} \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i} \quad (2.9)$$

La **aceleración instantánea** es igual al límite de la función $\Delta v_x/\Delta t$ conforme Δt tiende a 0. Por definición, este límite es igual a la derivada de v_x respecto a t , o la rapidez de cambio de la velocidad en el tiempo:

$$a_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \quad (2.10)$$

Conceptos y principios

Cuando la velocidad y la aceleración de un objeto están en la misma dirección, el objeto aumenta su velocidad. Por otra parte, cuando la velocidad y la aceleración del objeto están en direcciones opuestas, el objeto frena. Recuerde que $F_x \propto a_x$ es una forma útil de identificar la dirección de la aceleración al asociarla con una fuerza.

Un objeto en caída libre en presencia de la gravedad de la Tierra experimenta aceleración de caída libre dirigida hacia el centro de la Tierra. Si la resistencia del aire es despreciable, el movimiento ocurre cerca de la superficie de la Tierra y si el intervalo del movimiento es pequeño comparado con el radio de la Tierra, la aceleración de caída libre $a_y = -g$ es constante durante el rango de movimiento, donde g es igual a 9.80 m/s^2 .

Los problemas complicados se abordan mejor en una forma organizada. Recuerde y aplique los pasos *Conceptualizar*, *Categorizar*, *Análisis* y *Finalizar* de la **Estrategia General para Resolver Problemas** cuando los necesite.

Una ayuda importante para la resolución de problemas es el uso de **modelos de análisis**. Los modelos de análisis de situaciones que hemos visto en problemas anteriores. Cada modelo de análisis tiene una o más ecuaciones asociadas con ella. Cuando resuelva de un nuevo problema, identifique el modelo de análisis que corresponde al problema. El modelo le dirá qué ecuaciones a utilizar. Los tres primeros modelos de análisis presentados en este capítulo se resumen a continuación.

Modelo de análisis para la resolución de problemas

Partícula bajo velocidad constante. Si una partícula se mueve en línea recta con una rapidez constante v_x , su velocidad constante está dada por

$$v_{x,\text{prom}} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (2.6)$$

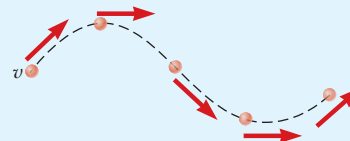
y su posición está dada por

$$x_f = x_i + v_x t \quad (2.7)$$



Partícula bajo rapidez constante. Si una partícula se mueve una distancia d a lo largo de una trayectoria curva o recta con rapidez constante, su rapidez constante está dada por

$$v = \frac{d}{\Delta t} \quad (2.8)$$



Partícula bajo aceleración constante. Si una partícula se mueve en línea recta con aceleración constante a_x , su movimiento se describe mediante las ecuaciones cinemáticas:

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t \quad (2.13)$$

$$v_{x,\text{prom}} = \frac{v_{xi} + v_{xf}}{2} \quad (2.14)$$

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t \quad (2.15)$$

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (2.16)$$

$$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i) \quad (2.17)$$



Piense, dialogue y comparta

Consulte el prefacio para una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para obtener más artículos de evaluación para esta sección, visite WEBASSIGN From Cengage

- Usted está en un carnaval jugando el juego “pégale a la campana”, como se muestra en la figura TP2.1. El objetivo es pegar en el extremo de la palanca con un martillo, enviando un objeto duro hacia arriba a lo largo de la pista vertical sin fricción con el fin de que le pegue a una campana en la parte superior. Mostrándose fuera de control para la multitud, usted pegó en la palanca varias veces en una fila de tal manera que el objeto se eleva una altura $h = 4.50$ m y apenas toca la campana, que hace un sonido de zumbido suave. Ahora, para realmente impresionar a la multitud, mueve el martillo con un movimiento poderoso, pega en la palanca, y proyecta el objeto hacia arriba con el doble de la velocidad inicial de sus demostraciones anteriores. Pero usted no sabía que, en las demostraciones anteriores, la campana se soltó y se deslizó a un lado, por lo que, en esta demostración, el objeto se desvía de la campana y se proyecta hacia arriba en el aire. ¿Cuál es el intervalo de tiempo total entre que el objeto comienza su movimiento ascendente y después regresa a la tierra a un lado del aparato?



Stephen Blorck/Getty Images

Figura TP2.1

- Su grupo está en la cima de un acantilado de altura $h = 75.0$ m. En el fondo del acantilado hay un ojo de agua. Usted divide al grupo en dos. Un miembro de la primera mitad de

los voluntarios del grupo deja caer una piedra a partir del reposo ésta cae hacia abajo en el agua. Un miembro de la segunda mitad de los voluntarios del grupo, después de que ha pasado algún intervalo de tiempo desde que se cayó la primera piedra, lanza una segunda piedra hacia abajo para que ambas piedras lleguen al agua al mismo tiempo. Prueba la ejecución escuchando una sola salpicada hecha por las piedras al mismo tiempo que pegan en el agua. (a) si la segunda piedra se lanza 1.00 s después de que se lanza la primera roca, ¿con qué rapidez se debe lanzar la segunda piedra? (b) si la más rápida que cualquiera en su grupo puede lanzar la piedra es de 40.0 m/s, ¿Cuál es el intervalo de tiempo más largo que puede pasar entre la liberación de las piedras para que se escuche una sola salpicada? (c) si no hay límite en cuanto a la velocidad con que se puede lanzar la roca, ¿cuál es el intervalo de tiempo más largo que puede pasar entre que se sueltan las piedras para que se escuche un sola salpicada?

- ACTIVIDAD** Haga que su compañero sostenga una regla verticalmente con el extremo cero en la parte inferior. Coloque el dedo y el pulgar abiertos en la posición cero. Sin previo aviso, su compañero debe soltar la regla y usted debe agarrarla tan pronto como usted la ve en movimiento. Desde la posición de su dedo en la regla, determine su tiempo de reacción. Repita el experimento varias veces para estimar la incertidumbre en su tiempo de reacción. Haga que cada miembro de su grupo atrape a la regla y compare sus tiempos de reacción.
- ACTIVIDAD** El Acela, es un tren eléctrico en la ruta Washington-Nueva York-Boston y transporta pasajeros a 170 mi/h. En la figura TP2.4 se muestra una gráfica velocidad-tiempo para el Acela. (a) Describa el movimiento del tren en cada intervalo de tiempo sucesivo. (b) Encuentre la aceleración máxima positiva del tren en la gráfica del movimiento. (c) Encuentre el desplazamiento del tren, en millas, entre $t = 0$ y $t = 200$ s.

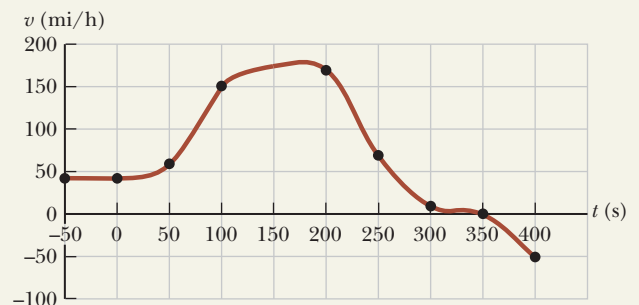



Figura TP2.4 Gráfica velocidad contra tiempo para el Acela.

Problemas

Consulte el prefacio para una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para obtener más artículos de evaluación para esta sección, visite  **WEBASSIGN** From Cengage

SECCIÓN 2.1 Posición, velocidad y rapidez

1. La rapidez de un impulso nervioso en el cuerpo humano es de aproximadamente 100 m/s. Si su dedo del pie tropieza accidentalmente en la oscuridad, estime el tiempo que tarda el impulso nervioso en viajar a su cerebro.
2. Una partícula se mueve de acuerdo con la ecuación $x = 10t^2$, donde x está en metros y t en segundos. (a) Encuentre la velocidad promedio para el intervalo de tiempo de 2.00 s a 3.00 s. (b) Encuentre la velocidad promedio para el intervalo de tiempo de 2.00 s a 2.10 s.
3. La posición de un automóvil se observó en varios momentos; los resultados se resumen en la tabla siguiente. Encuentre la velocidad promedio del auto para (a) el primer segundo, (b) los últimos 3 s y c) todo el periodo de observación.

t (s)	0	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
x (m)	0	2.3	9.2	20.7	36.8	57.5

SECCIÓN 2.2 Velocidad y rapidez instantáneas

4. Una atleta parte desde un extremo de una piscina de longitud L en $t = 0$ y llega en el otro extremo en el tiempo t_1 . Nada de regreso y llega a la posición de partida en el tiempo t_2 . Si ella está nadando inicialmente en la dirección x positiva, determine sus velocidades promedio simbólicamente en (a) la primera parte del nadó, (b) la segunda mitad del nadó, y (c) el recorrido redondo. (d) ¿Cuál es su rapidez promedio para el recorrido redondo?
5. En la figura P2.5 se muestra una gráfica posición-tiempo para una partícula que se mueve a lo largo del eje x . (a) Encuentre la velocidad promedio en el intervalo de tiempo $t = 1.50$ s a $t = 4.00$ s. (b) Determine la velocidad instantánea en $t = 2.00$ s al medir la pendiente de la recta tangente que se muestra en la gráfica. (c) ¿En qué valor de t la velocidad es cero?

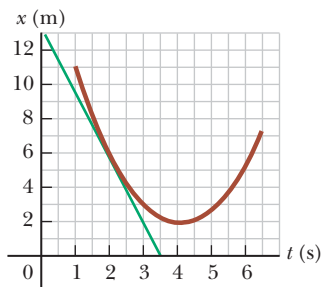


Figura P2.5

SECCIÓN 2.4 Modelo de análisis: Partícula bajo velocidad constante

6. Un auto viaja a lo largo de una línea recta a una rapidez constante de 60.0 mi/h una distancia d y luego otra distancia d en la misma dirección con otra rapidez constante. El promedio de velocidad para todo el viaje es de 30.0 mi/h. (a) ¿Cuál es la rapidez constante con la que el auto se trasladó durante la segunda distancia d ? (b) **¿Qué pasaría sí?** Supongamos que la segunda distancia d se viajó en dirección opuesta; Olvidó algo y tuvo que volver a casa con la misma rapidez constante que encontró en el inciso (a). ¿Cuál es la velocidad promedio para este viaje? (c) ¿Cuál es la rapidez promedio para este nuevo viaje?

7. Una persona que hace un viaje, conduce con una rapidez constante de 89.5 km/h, excepto por una parada de descanso de 22.0 min. Si la rapidez promedio de la persona es de 77.8 km/h, (a) ¿cuánto tiempo invierte la persona en el viaje y (b) qué tan lejos llegará?

SECCIÓN 2.5 Aceleración

8. Una niña rueda una canica sobre una pista con dobleces que mide 100 cm de largo, como se muestra en la figura P2.8. Use x para representar la posición de la canica a lo largo de la pista. En las secciones horizontales de $x = 0$ a $x = 20$ cm y de $x = 40$ cm a $x = 60$ cm, la canica rueda con rapidez constante. En las secciones de pendiente, la rapidez de la canica cambia de manera uniforme. En los lugares donde la pendiente cambia, la canica permanece en la pista y no experimenta cambios súbitos en rapidez. La niña da a la canica cierta rapidez inicial en $x = 0$ y $t = 0$ y luego la observa rodar a $x = 90$ cm, donde regresa, y eventualmente regresa a $x = 0$ con la misma rapidez con la que al inicio la niña la liberó. Trace gráficas de x en función de t , v_x en función de t y a_x en función de t , alineadas verticalmente con sus ejes de tiempo idénticos, para mostrar el movimiento de la canica. No podrá colocar números distintos a cero en el eje horizontal o en los ejes de velocidad o aceleración, solo muestre las formas correctas en las gráficas.

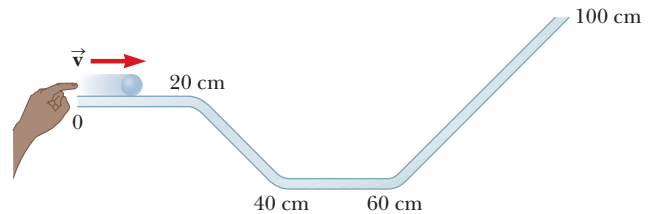


Figura P2.8

9. La figura P2.9 muestra una gráfica de v_x en función de t para el movimiento de un motociclista mientras parte del reposo y se mueve a lo largo del camino en línea recta. (a) Encuentre la aceleración promedio para el intervalo de tiempo $t = 0$ a $t = 6.00$ s. (b) Estime el tiempo en que la aceleración tiene su mayor valor positivo y el valor de la aceleración en dicho instante. (c) ¿Cuándo la aceleración es cero? (d) Estime el máximo valor negativo de la aceleración y el tiempo en el que ocurre.



Figura P2.9

10. (a) Use los datos del problema 5 para construir una gráfica continua de posición en función del tiempo. (b) Con la construcción de rectas tangentes a la curva $x(t)$, encuentre la velocidad instantánea del automóvil en varios instantes. (c) Grafique la velocidad instantánea en función del tiempo y, a partir de la gráfica, determine la aceleración promedio del automóvil. (d) ¿Cuál fue la velocidad inicial del automóvil?

- 11.** Una partícula parte del reposo y acelera como se muestra en la figura P2.11. Determine (a) la rapidez de la partícula en $t = 10.0$ s y en $t = 20.0$ s y (b) la distancia recorrida en los primeros 20.0 s.

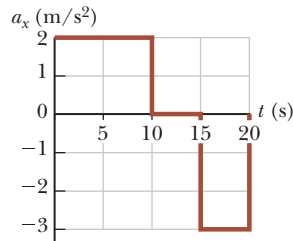


Figura P2.11

SECCIÓN 2.6 Diagramas de movimiento

- 12.** Dibuje diagramas de movimiento para (a) un objeto que se mueve a la derecha con rapidez constante, (b) un objeto que se mueve a la derecha y está aumentando su rapidez de modo constante, (c) un objeto que se mueve a la derecha y está disminuyendo su rapidez de modo constante, (d) un objeto que se mueve a la izquierda y aumenta su rapidez en proporción constante, y (e) un objeto que se mueve a la izquierda y frena a rapidez constante. (f) ¿Cómo modificaría su dibujo si los cambios en rapidez no fuesen uniformes; esto es, si la rapidez no cambiara de modo constante?
- 13.** Cada una de las fotografías estroboscópicas (a), (b) y (c) en la figura P2.13 se tomó de un solo disco que se mueve hacia la derecha, que se considera como la dirección positiva. Dentro de cada fotografía el intervalo de tiempo entre imágenes es constante. Para cada fotografía prepare gráficas de x en función de t , v_x en función de t y a_x en función de t , alineada verticalmente con sus ejes de tiempo idénticos, para mostrar el movimiento del disco. No podrá colocar números distintos de cero sobre los ejes, sino mostrar los tamaños relativos correctos sobre las gráficas.

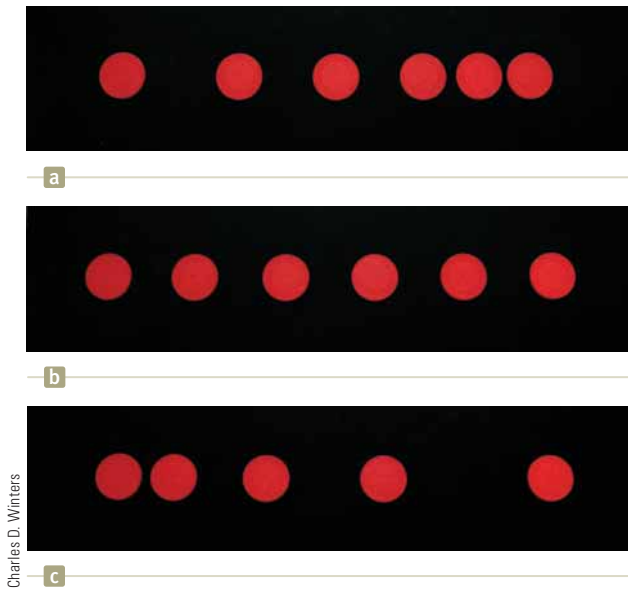


Figura P2.13

SECCIÓN 2.7 Modelo de análisis: Partícula bajo aceleración constante

- 14.** Un electrón en un tubo de rayos catódicos acelera uniformemente desde una rapidez de 2.00×10^4 m/s a 6.00×10^6 m/s en 1.50 cm. (a) ¿En qué intervalo de tiempo el electrón recorre estos 1.50 cm? (b) ¿Cuál es su aceleración?
- 15.** Considere una porción de aire en un tubo recto que se mueve con una aceleración constante de -4.00 m/s² y tiene una velocidad de 13.0 m/s a las 10:05:00 a.m. (a) ¿Cuál es su velocidad a las 10:05:01 a.m.? (b) ¿A las 10:05:04 a.m.? (c) ¿A las 10:04:59

a.m.? (d) Describa la forma de una gráfica de velocidad en función del tiempo para esta porción de aire. (e) Argumente a favor o en contra del enunciado “conocer un solo valor de la aceleración constante de un objeto es como conocer toda una lista de valores para su velocidad”.

- 16.** En el ejemplo 2.7, se investigó un aterrizaje del jet en un porta-aviones. En una maniobra posterior, el jet viene para un aterrizaje en tierra firme con una rapidez de 100 m/s, y su aceleración puede tener una magnitud máxima de 5.00 m/s², hasta alcanzar el reposo. (a) Desde el momento en que el avión toca la pista de aterrizaje, ¿cuál es el intervalo de tiempo mínimo necesario antes de que pueda alcanzar el reposo? (b) ¿Puede que el jet aterrice en un pequeño aeropuerto de la isla tropical, donde la pista es de 0.800 km de largo? (c) Explique su respuesta.
- 17.** Un objeto que se mueve con aceleración uniforme tiene una velocidad de 12.0 cm/s en la dirección x positiva cuando su coordenada x es 3.00 cm. Si su coordenada x , 2.00 s después es -5.00 cm, ¿cuál es su aceleración?
- 18.** Resuelva el ejemplo 2.8 mediante un método gráfico. En la misma gráfica trace posición en función del tiempo para el automóvil y el oficial de policía. De la intersección de las dos curvas lea el tiempo cuando el patrullero alcanza al automóvil.
- 19.** Un deslizador de longitud l en una pista de aire se mueve a través de una fotocelda fija. Una fotocelda (figura P2.19) es un dispositivo que mide el intervalo de tiempo durante el Δt_d que bloquea al deslizador de un haz de luz infrarroja que pasa a través de la fotopuerta. La proporción $v_d = l/\Delta t_d$ es la velocidad promedio del deslizador durante esta parte de su movimiento. Suponga que el deslizador se mueve con aceleración constante. (a) Argumente a favor o en contra de la idea de que v_d es igual a la velocidad instantánea del deslizador cuando está a la mitad de la fotocelda en el espacio. (b) Argumente a favor o en contra de la idea de que v_d es igual a la velocidad instantánea del deslizador cuando está a la mitad de la fotocelda en el tiempo.

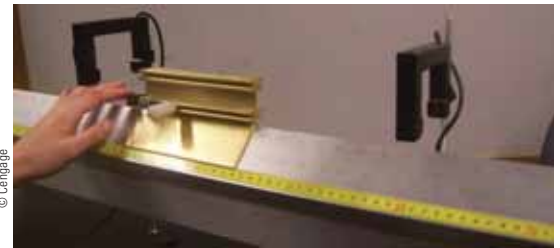


Figura P2.19 Problemas 19 y 21

- 20.** ¿Por qué es imposible la siguiente situación? A partir del reposo, un rinoceronte se mueve a 50.0 m en una línea recta en 10.0 s. Su aceleración es constante durante todo el movimiento, y su rapidez final es 8.00 m/s.
- 21.** Un deslizador de 12.4 cm de longitud se mueve sobre una pista de aire con aceleración constante. Transcurre un intervalo de tiempo de 0.628 s entre el momento cuando su extremo frontal pasa un punto fijo A a lo largo de la pista y el momento cuando su extremo trasero pasa este punto. A continuación, transcurre un intervalo de tiempo de 1.39 s entre el momento cuando el extremo trasero del deslizador pasa el punto A y el momento cuando el extremo frontal del deslizador pasa un segundo punto B más lejos en la pista. Después de ello, transcurren 0.431 s adicionales hasta que el extremo trasero del deslizador pasa el punto B. (a) Encuentre la rapidez promedio del deslizador conforme pasa el punto A. (b) Encuentre la aceleración del deslizador. (c) Explique cómo calcula la aceleración sin saber la distancia entre los puntos A y B.

22. En el modelo de partícula bajo aceleración constante se identifican las variables y parámetros v_{xi} , v_{xf} , a_x , t y $x_f - x_i$. De las ecuaciones en el modelo, ecuaciones 2.13 – 2.17, la primera no involucra $x_f - x_i$, la segunda y tercera no contienen a_x , la cuarta omite v_{xf} y la última deja fuera t . De modo que, para completar el conjunto, debe haber una ecuación que *no* involucre v_{xi} . Dedúzcala a partir de las otras.

23. En $t = 0$, un carro de juguete se pone a rodar en una pista recta con posición inicial de 15.00 cm, velocidad inicial de -3.50 cm/s y aceleración constante de 2.40 cm/s². En el mismo momento, otro carro de juguete se pone a rodar en una pista adyacente con posición inicial de 10.0 cm, una velocidad inicial de $+5.50$ cm/s y aceleración constante cero. (a) ¿En qué tiempo, si hay alguno, los dos carros tienen iguales rapidez? (b) ¿Cuáles son sus rapidez en dicho tiempo? (c) ¿En qué tiempo(s), si hay alguno, los carros se rebasan mutuamente? (d) ¿Cuáles son sus ubicaciones en dicho tiempo? (e) Explique la diferencia entre la pregunta a) y la pregunta c) tan claramente como le sea posible.

24. Usted está observando los postes a lo largo del lado de la carretera como se describe en el argumento introductorio del capítulo. Usted ya se detuvo y midió la distancia entre los postes adyacentes de 40.0 m. Ahora está conduciendo de nuevo y ha activado el cronómetro del teléfono inteligente. Se inicia el cronómetro en $t = 0$ en cuanto pasa el poste #1. En el poste #2, el cronómetro indica 10.0 s. En el poste #3, el cronómetro indica 25.0 s. Su amigo le dice que estaba presionando el freno y ralentizando el auto uniformemente durante todo el intervalo de tiempo desde el poste #1 hasta el poste #3. (a) ¿cuál fue la aceleración del automóvil entre los postes #1 y #3? (b) ¿cuál era la velocidad del auto en el poste #1? (c) Si el movimiento del auto continúa como se describe, ¿cuál es el número del *último* poste que pasa antes de que el auto alcance el reposo?

SECCIÓN 2.8 Objetos en caída libre

Nota: En todos los problemas de esta sección, desprecie los efectos de la resistencia del aire.

25. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Emily desafía a su amigo David a atrapar un billete de dólar del modo siguiente. Ella sostiene el billete verticalmente, como se muestra en la figura P2.47, con el centro del billete entre los dedos índice y pulgar de David, quien debe atrapar el billete después de que Emily lo libere sin mover su mano hacia abajo. Sin previo aviso, Emily libera el billete. David toma el billete sin mover la mano hacia abajo. El tiempo de reacción de David es igual al tiempo promedio de reacción humano.



Figura P2.25

26. Un atacante en la base de la pared de un castillo de 3.65 m de alto lanza una roca recta hacia arriba con una rapidez de 7.40 m/s a una altura de 1.55 m sobre el suelo. (a) ¿La roca llegará a lo alto de la pared? (b) Si es así, ¿cuál es su rapidez en lo alto? Si no, ¿qué rapidez inicial debe tener para llegar a lo alto? (c) Encuentre el cambio en rapidez de una roca lanzada recta hacia abajo desde lo alto de la pared con una rapidez inicial de 7.40 m/s y que se mueve entre los mismos dos puntos. (d) ¿El cambio en rapidez de la roca que se mueve hacia abajo concuerda con la magnitud del cambio de rapidez de la

roca que se mueve hacia arriba entre las mismas elevaciones? Explique físicamente por qué sí o por qué no concuerda.

27. La altura de un helicóptero sobre el suelo está dada por $h = 3.00t^3$, donde h está en metros y t en segundos. Después de 2.00 s, el helicóptero libera una pequeña valija de correo. ¿Cuánto tiempo después de su liberación, la valija llega al suelo?

28. Se lanza una pelota hacia arriba desde el suelo con una rapidez inicial de 25 m/s; en el mismo instante, se deja caer otra pelota desde un edificio de 15 m de altura. ¿Después de cuánto tiempo estarán las pelotas a la misma altura por encima del suelo?

29. Un estudiante lanza un conjunto de llaves verticalmente hacia arriba a su hermana de fraternidad, quien está en una ventana 4.00 m arriba. La segunda estudiante atrapa las llaves 1.50 s después. (a) ¿Con qué velocidad inicial se lanzaron las llaves? (b) ¿Cuál fue la velocidad de las llaves justo antes de ser atrapadas?

30. Al tiempo $t = 0$, un estudiante lanza un juego de llaves verticalmente hacia arriba a su hermana de fraternidad, que está en una ventana a una distancia h arriba. La segunda estudiante atrapa las llaves al tiempo t . (a) ¿Con qué velocidad inicial se lanzaron las llaves? (b) ¿Cuál era la velocidad de las llaves justo antes de que fueran capturadas?

31. Usted ha sido contratado por la Fiscalía como un testigo experto en un caso de robo. El indiciado es acusado de robar un anillo de diamantes caro y de gran tamaño en su caja de una joyería. Un testigo del presunto crimen testificó que vio al acusado huir de la tienda, parar junto a un edificio de apartamentos, y aventar la caja hacia arriba a un cómplice que se asomaba de una ventana del cuarto piso. Cuando se capturó, el acusado no tenía la caja robada con él y reclamó inocencia. Cuando el testigo ratificó en el Tribunal sobre el lanzamiento de la caja acusó al cómplice, el abogado defensor argumentó que sería imposible aventar la caja hacia arriba tan alto para que llegue a la ventana en cuestión. La parte inferior de la ventana está 19.0 m arriba de la acera. Usted ha montado una demostración en la que el juez le pide al acusado lanzar una pelota de béisbol horizontalmente tan rápido como pueda y se utiliza un dispositivo de radar para determinar que puede lanzar la pelota a 20 m/s. (a) ¿Qué testimonio puede proporcionar sobre la capacidad del acusado para lanzar la caja a la ventana en cuestión? (b) ¿qué argumento podría hacer el abogado defensor sobre el proceso utilizado para desarrollar su testimonio de experto? ¿Cuál podría ser su argumento contrario? Desprecie cualquier efecto de la resistencia del aire en la caja.

SECCIÓN 2.8 Ecuaciones cinemáticas deducidas del cálculo

32. Un estudiante conduce un ciclomotor a lo largo de un camino recto como se describe por la gráfica velocidad en función del tiempo de la figura P2.32. Trace esta gráfica en medio de una hoja de papel gráfico. (a) Directamente sobre su gráfica, trace una gráfica de la posición en función del tiempo y alinee las coordenadas de tiempo de las dos gráficas. (b) Trace una gráfica de la aceleración en función del tiempo directamente bajo de la gráfica velocidad-tiempo, y de nuevo alinee las coordenadas de tiempo. Sobre cada gráfica muestre los valo-

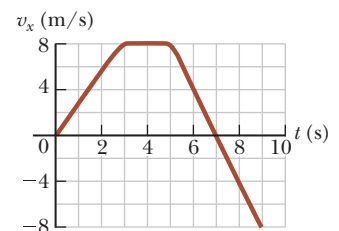


Figura P2.32

res numéricos de x y a_x para todos los puntos de inflexión. (c) ¿Cuál es la aceleración en $t = 6.00$ s? (d) Encuentre la posición (relativa al punto de partida) en $t = 6.00$ s. (e) ¿Cuál es la posición final del ciclomotor en $t = 9.00$ s?

- 33. S** Los ingenieros automotrices se refieren a la rapidez de cambio de la aceleración en el tiempo como el “jalón”. Suponga que un objeto se mueve en una dimensión tal que su jalón J es constante. (a) Determine expresiones para su aceleración $a_x(t)$, velocidad $v_x(t)$ y posición $x(t)$, dado que su aceleración, velocidad y posición iniciales son a_{xi} , v_{xi} y x_i , respectivamente. (b) Muestre que $a_x^2 = a_{xi}^2 + 2J(v_x - v_{xi})$.

PROBLEMAS ADICIONALES

- 34. C I C S** En la figura 2.11b, el área bajo la curva velocidad en función del tiempo y entre el eje vertical y el tiempo t (línea discontinua vertical) representa el desplazamiento. Como se muestra, esta área consiste de un rectángulo y un triángulo. (a) Calcule sus áreas y (b) explique cómo se compara la suma de las dos áreas con la expresión en el lado derecho de la ecuación 2.16.

- 35. B I O** La espumadora *Philaenus spumarius* es supuestamente el mejor saltador en el reino animal. Para iniciar un salto, este insecto es capaz de acelerar a 4.00 km/s^2 en una distancia de 2.00 mm , ya que endereza sus especialmente adaptadas “piernas saltadoras”. Suponga que la aceleración es constante. (a) Encuentre la velocidad ascendente con el que el insecto despegue. (b) ¿En qué intervalo de tiempo se alcanza esta velocidad? (c) ¿A qué altura saltaría el insecto si la resistencia del aire fuera insignificante? La altura real a la que llega es aproximadamente de 70 cm , por lo que la resistencia del aire debe ser una fuerza importante en el salto de la espumadora.

- 36.** Una mujer informó haber caído 144 metros del piso 17 de un edificio, cayendo sobre una caja de metal del ventilador que aplastó a una profundidad de 18.0 pulg. Ella sufrió sólo heridas leves. Ignorando la resistencia del aire, calcule (a) la rapidez de la mujer justo antes de que chocó con el ventilador y (b) su aceleración promedio mientras está en contacto con la caja. (c) Modele su aceleración como constante, calcule el intervalo de tiempo que se tardó en aplastar la caja.

- 37. C I C S** En $t = 0$, un atleta corriendo en una competencia de carrera en una pista recta larga, con una rapidez constante v_1 está atrás una distancia d_1 de un segundo atleta que corre con una rapidez constante v_2 . (a) ¿En qué circunstancias el primer atleta es capaz de superar al segundo atleta? (b) Encuentre el tiempo t en el que el primer atleta alcanza al segundo atleta, en términos de d_1 , v_1 y v_2 . (c) ¿A qué distancia mínima d_2 del líder atleta debe encontrarse la línea de meta para que el atleta que va detrás al menos pueda empatar en el primer lugar? Expresé d_2 en términos de d_1 , v_1 , y v_2 utilizando el resultado del inciso (b).

- 38.** ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Un tren de carga viaja lentamente con una rapidez constante de 16.0 m/s . Detrás del tren de carga en la misma vía está un tren de pasajeros que viaja en la misma dirección a 40.0 m/s . Cuando la parte delantera del tren de pasajeros está a 58.5 m de la parte trasera del tren de carga, el ingeniero del tren de pasajeros reconoce el peligro y frena su tren, haciendo que el tren se mueva con una aceleración -3.00 m/s^2 . Debido a la acción del ingeniero, los trenes no chocan.

- 39. A M T T** Hannah prueba su nuevo automóvil deportivo corriendo con Sam que es un experimentado corredor, pero Hannah deja la línea de partida 1.00 s después que Sam. Sam se mueve con una aceleración constante de 3.50 m/s^2 y Hannah mantiene una aceleración de 4.90 m/s^2 . Encuentre (a) el tiempo cuando Hannah alcanza a Sam, (b) la distancia que recorre antes de alcanzarlo y (c) las rapidezces de ambos automóviles en el instante en que lo rebasa.

- 40. C I C S** Dos objetos, A y B, se conectan mediante una barra rígida que tiene longitud L . Los objetos se deslizan a lo largo de rieles guía perpendiculares como se muestra en la figura P2.40. Suponga que A se desliza hacia la izquierda con una rapidez constante v . (a) Encuentre la velocidad de B como una función del ángulo θ . (b) Describa v_B en relación con v . ¿Es v_B siempre menor que v , mayor que v , o igual a v , o tiene alguna otra relación?

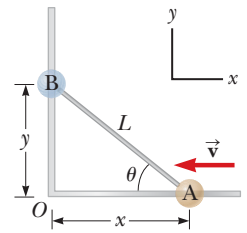


Figura P2.40

- 41.** Liza llega de prisa a un andén del metro para encontrar que su tren está a punto de partir. Se detiene y mira los carros que pasan. Cada carro tiene una longitud de 8.60 m . El primero se mueve pasándola en 1.50 s y el segundo en 1.10 s . Encuentre la aceleración constante del tren.

PROBLEMAS DE DESAFÍO

- 42.** Dos varillas delgadas se sujetan en el interior de un anillo circular como se muestra en la figura P2.42. Una varilla de longitud D es vertical, y la otra de longitud L forman un ángulo θ con la horizontal. Las dos varillas y el anillo están en un plano vertical. Dos pequeñas perlas están libres para deslizarse sin fricción a lo largo de las varillas. (a) Si las dos perlas se liberan simultáneamente a partir del reposo desde las posiciones que se muestran, use su intuición y conjeture qué perla llega al fondo primero. (b) Halle una expresión para el intervalo de tiempo necesario para que la perla roja caiga del punto A al punto C en términos de g y D . (c) Encuentre una expresión para el intervalo de tiempo requerido para la perla azul se deslice desde el punto B al punto C en términos de g , L , y θ . (d) Demuestre que los dos intervalos de tiempo encontrados en los incisos (b) y (c) son iguales. *Sugerencia:* ¿Cuál es el ángulo entre las cuerdas A-B y B-C del círculo? (e) ¿Estos resultados le sorprenden? Su conjetura intuitiva del inciso(a) ¿es correcta? Este problema se inspiró en un artículo de Thomas B. Greenslade, Jr., “La paradoja de Galileo”, *Phys. Teach.* **46**, 294 (mayo de 2008).

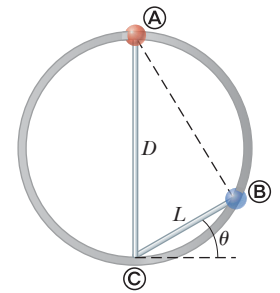


Figura P2.42

- 43.** En una carrera de 100 m de mujeres, a Laura acelerando de manera uniforme, le toma 2.00 s y Healan 3.00 s alcanzar sus rapidezces máximas, que mantienen cada una de ellas durante el resto de la carrera. Cruzan la línea de meta al mismo tiempo, estableciendo ambas un récord mundial de 10.4 s . (a) ¿Cuál es la aceleración de cada atleta? (b) ¿Cuáles son sus respectivas rapidezces máximas? (c) ¿Qué atleta está por delante en la marca de 6.00 s , y por cuánto? (d) ¿Cuál es la distancia máxima en que Healan está detrás de Laura, y en qué tiempo eso ocurre?

- 44. Problema de reposo.** Usted está sentado en su auto en reposo en un semáforo con un ciclista en reposo junto a usted en el carril contiguo de bicicletas. Tan pronto como el semáforo se pone verde, un automóvil acelera a partir del reposo a 50.0 mi/h con una aceleración constante de 9.00 mi/h/s y después se mueve con una rapidez constante de 50.0 mi/h . Al mismo tiempo el ciclista acelera desde el reposo hasta 20.0 mi/h con una aceleración constante de 13.0 mi/h/s y después se mueve con rapidez constante de 20.0 mi/h . (a) ¿Durante qué intervalo de tiempo está la bicicleta por delante del automóvil? (b) ¿Para qué distancia máxima la bicicleta está delante del automóvil?

3

Vectores

Se puede llegar a la Isla Catalina desde diferentes puntos de partida a lo largo de la costa del condado de Orange en Los Ángeles. El argumento introductorio se refiere a un viaje de Newport Beach a Avalon.



- 3.1 Sistemas coordenados
- 3.2 Cantidades vectoriales y escalares
- 3.3 Aritmética vectorial básica
- 3.4 Componentes de un vector y vectores unitarios

IMAGINE Su viaje por carretera en el capítulo 2 le lleva al océano. Termina en Newport Beach, California. Su amigo que conducía el auto en el capítulo 2 es dueño de un velero y le pide pilotar la lancha desde Newport Beach a la Isla Catalina, que está a 26 millas de la costa. Su amigo le reta a pilotar la lancha a lo largo de una línea perfectamente recta. Siempre como un reto, usted está de acuerdo, en instalarse en la silla del capitán, y luego entra en pánico. Usted sabe que tiene que viajar 26 millas en línea recta, ¿pero debe dar rumbo al barco? La distancia de 26 millas no es suficiente información para poder viajar a la Isla Catalina en línea recta. Se da cuenta de que su viaje requerirá tanto de la distancia a Isla Catalina como de la *dirección* en la que debe viajar. Le pregunta a su amigo la dirección adecuada a la Isla Catalina y le da un como rumbo un ángulo al sur del oeste. Abre la aplicación de brújula de su teléfono inteligente, encuentra la dirección adecuada, ¡y zarpa!

CONEXIONES Si se mueve sólo a lo largo de una línea recta, como en el capítulo anterior, entonces, se puede utilizar un solo número (con un signo positivo o negativo) para especificar su posición con respecto al origen. En este capítulo, vamos a estudiar las posiciones de objetos o puntos en el espacio en dos o tres dimensiones que requieren dos tipos de información: distancia de un punto de referencia y dirección respecto a un eje de referencia. Las cantidades que requieren estos dos tipos de información son llamados *vectores*. Aprenderemos varias propiedades de los vectores y veremos cómo sumar y restar vectores. En este libro se utilizan cantidades vectoriales. Además de los vectores de posición estudiados en este capítulo, en los capítulos siguientes veremos otras cantidades vectoriales, como la velocidad, la aceleración, la fuerza, y el campo eléctrico. Por tanto, es dispensable que usted domine las técnicas discutidas en este capítulo.

3.1 Sistemas coordenados

Muchos aspectos de la física involucran una descripción de una ubicación en el espacio. Por ejemplo, en el capítulo 2, se vio que la descripción matemática del movimiento de un objeto requiere un método para describir la posición del objeto en varios tiempos. En dos dimensiones esta descripción se logra con el uso del sistema de coordenadas cartesianas, en el que ejes perpendiculares cruzan en un punto definido como el origen O (figura 3.1). Las coordenadas cartesianas también se llaman *coordenadas rectangulares*.

A veces es más conveniente representar un punto en un plano por sus *coordenadas polares planas* (r, θ) , como se muestra en la figura 3.2a. En este *sistema de coordenadas polares*, r es la distancia desde el origen hasta el punto que tiene coordenadas cartesianas (x, y) y θ es el ángulo entre un eje fijo y una recta dibujada desde el origen hasta el punto. El eje fijo es el eje x positivo y comúnmente θ se mide en sentido contrario de las agujas del reloj.

$$x = r \cos \theta \quad (3.1)$$

$$y = r \sin \theta \quad (3.2)$$

Al contrario, si conocemos las coordenadas cartesianas, las definiciones de trigonometría nos indican que las coordenadas polares están dadas por

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad (3.3)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.4)$$

La ecuación 3.4 es el conocido teorema de Pitágoras.

Estas cuatro expresiones, que relacionan las coordenadas (x, y) con las coordenadas (r, θ) , se aplican sólo cuando θ se define como se muestra en la figura 3.2a; en otras palabras, cuando, es un ángulo que se mide contra en dirección contraria al movimiento de las agujas del reloj a partir del eje x positivo. (Algunas calculadoras científicas realizan conversiones entre coordenadas cartesianas y polares en función de estas convenciones estándar.) Si como eje de referencia para el ángulo polar θ se elige otro distinto del eje x positivo o si el sentido de θ creciente se elige de modo diferente, cambiarán las expresiones que relacionan los dos conjuntos de coordenadas.

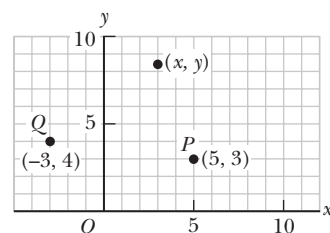


Figura 3.1 Designación de puntos en un sistema de coordenadas cartesianas. Cada punto está etiquetado con coordenadas (x, y) .

◀ Coordenadas cartesianas en términos de las coordenadas polares

◀ Coordenadas polares en términos de las coordenadas cartesianas

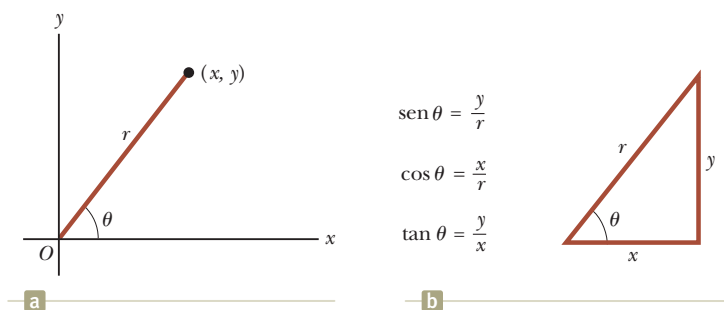


Figura 3.2 (a) Las coordenadas polares del plano de un punto están representadas por la distancia r y el ángulo θ , donde θ se mide en la dirección contraria al movimiento de las agujas del reloj desde el eje x positivo. (b) el triángulo derecho se utiliza para relacionar (x, y) con (r, θ) .

Ejemplo 3.1 Coordenadas polares

Las coordenadas cartesianas de un punto en el plano xy son $(x, y) = (-3.50, -2.50)$ m, como se muestra en la figura 3.3. Encuentre las coordenadas polares de este punto.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El dibujo de la figura 3.3 ayuda a formar conceptos del problema. Queremos encontrar r y θ . Con base en la figura y en los datos dados en el enunciado del problema, esperamos que r sea unos cuantos metros y que θ sea mayor de 180° .

Categorizar A partir del enunciado del problema y de la etapa Conceptualizar, se entiende que simplemente se convierte de coordenadas cartesianas a coordenadas polares.

Debido a esto, se considera este ejemplo como un problema de sustitución. Dichos problemas por lo general no tienen una etapa de análisis amplia distinta de la sustitución de números en una ecuación dada. De igual modo, la etapa “Finalizar” consiste principalmente en comprobar las unidades y asegurarse de que la respuesta es razonable y consistente con nuestras expectativas. Por tanto, para problemas de sustitución, no indicaremos las etapas Analizar y Finalizar.

Aplique la ecuación 3.4 para encontrar r :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3.50 \text{ m})^2 + (-2.50 \text{ m})^2} = 4.30 \text{ m}$$

Use la ecuación 3.3 para encontrar θ :

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-2.50 \text{ m}}{-3.50 \text{ m}} = 0.714$$

$$\theta = 216^\circ$$

Note que debe usar los signos de x y y para encontrar que el punto se encuentra en el tercer cuadrante del sistema coordenado. Esto es, $\theta = 216^\circ$, no 35.5° , cuya tangente también es 0.714. Ambas respuestas concuerdan con nuestras expectativas de la etapa Conceptualizar.

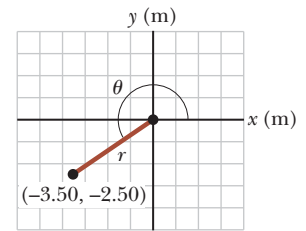


Figura 3.3 (Ejemplo 3.1) Encuentre las coordenadas polares cuando las coordenadas cartesianas están dadas.

3.2 Cantidades vectoriales y escalares

Ahora se describirá formalmente la diferencia entre cantidades escalares y cantidades vectoriales. Cuando quiere saber la temperatura exterior para saber cómo vestirse, la única información que necesita es un número y la unidad “grados C” o “grados F”. Así, la temperatura es un ejemplo de *cantidad escalar*:

Una **cantidad escalar** se especifica por completo mediante un valor único con una unidad adecuada y no tiene dirección.

Otros ejemplos de cantidades escalares son volumen, masa, rapidez e intervalos de tiempo. Algunos escalares como la masa y la rapidez siempre son positivos. Para manipular cantidades escalares se usan las reglas de aritmética ordinaria.

Si se prepara para pilotear un pequeño avión y necesita saber la velocidad del viento, debe conocer tanto la rapidez del viento como su dirección. Puesto que la dirección es importante para una especificación completa, la velocidad es una *cantidad vectorial*:

Una **cantidad vectorial** se especifica por completo mediante un número y unidades apropiadas (la *magnitud* del vector) más una dirección.

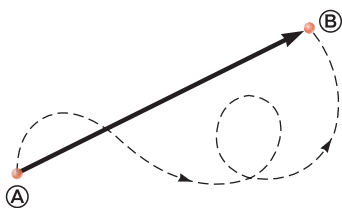


Figura 3.4 Conforme una partícula se mueve de A a B ya sea a lo largo de la línea recta o a lo largo de una trayectoria arbitraria representada por la línea discontinua, su desplazamiento es una cantidad vectorial que se muestra mediante la flecha dibujada de A a B.

Otro ejemplo de una cantidad vectorial es el desplazamiento, como ya sabe por el capítulo 2. Suponga que una partícula se mueve desde algún punto A hasta algún punto B a lo largo de una trayectoria recta, como se muestra en la figura 3.4. Tal desplazamiento se representa con el dibujo de una flecha de A a B, en el que la punta de la flecha apunta alejándose del punto de partida. La dirección de la punta de flecha representa la dirección del desplazamiento y la longitud de la flecha representa la magnitud del desplazamiento.

miento. Si la partícula viaja a lo largo de alguna otra trayectoria de \textcircled{A} a \textcircled{B} , como se muestra mediante la línea discontinua en la figura 3.4, su desplazamiento todavía es la flecha dibujada de \textcircled{A} a \textcircled{B} . El desplazamiento sólo depende de las posiciones inicial y final, de modo que el vector desplazamiento es independiente de la trayectoria que toma la partícula entre estos dos puntos.

En este libro se usa una letra en negrita con una flecha sobre ella, como \vec{A} , para representar un vector. Otra notación común para vectores, con la que se debe familiarizar, es un carácter en negrita: \mathbf{A} . La magnitud del vector \vec{A} se escribe A o $|\vec{A}|$. La magnitud de un vector tiene unidades físicas, como metros para desplazamiento o metros por segundo para velocidad. La magnitud de un vector *siempre* es un número positivo.

¿Qué pasa con el vector a seguir en nuestro argumento inicial? ¿Qué rumbo le dio su amigo a la isla Catalina?, puede usar un buscador de latitud y longitud en línea para encontrar las coordenadas para la apertura de Newport Harbor y para Avalon Harbor. Después, colocando estas coordenadas en una calculadora de distancia y acimut en línea, se encuentra que la distancia es de 30.7 mi, con un rumbo de 236.28 con respecto al este. (Tenga en cuenta que Catalina se describe como “26 millas al otro lado del mar” en una canción popular de la década de 1950, solo que tenemos que viajar un poco más para hacer este viaje. Un cálculo en línea muestra la distancia entre San Pedro y Avalon que es de 27 millas, lo que podría ser el origen de la canción.)

E XAMEN RÁPIDO 3.1 ¿Cuáles de las siguientes son cantidades vectoriales y cuáles son cantidades escalares? (a) su edad (b) aceleración (c) velocidad (d) rapidez (e) masa

3.3 Aritmética vectorial básica

Para muchos propósitos, dos vectores \vec{A} y \vec{B} se definen como *iguales* si tienen la misma magnitud y si apuntan en la misma dirección. Esto es, $\vec{A} = \vec{B}$ sólo si $A = B$ y si \vec{A} y \vec{B} apuntan en la misma dirección a lo largo de rectas paralelas. Por ejemplo, todos los vectores en la figura 3.5 son iguales aun cuando tengan diferentes puntos de inicio. Dicha propiedad permite mover, en un diagrama, un vector a una posición paralela a sí mismo sin afectar al vector.

Una forma conveniente de describir las reglas para **sumar vectores** es mediante un método gráfico. Para sumar el vector \vec{B} al vector \vec{A} , primero dibuje el vector \vec{A} en papel gráfico, con su magnitud representada mediante una escala de longitud conveniente, y luego dibuje el vector \vec{B} a la misma escala, con su origen iniciando desde la punta de \vec{A} , como se muestra en la figura 3.6. El **vector resultante** $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ es el vector que se dibuja desde el origen de \vec{A} a la punta de \vec{B} .

También se usa una construcción geométrica para sumar más de dos vectores, como se muestra en la figura 3.7 para el caso de cuatro vectores. El vector resultante $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ es el vector que completa el polígono. En otras palabras, \vec{R} es el vector dibujado desde el origen del primer vector a la punta del último vector. Esta técnica para sumar vectores con frecuencia se llama “método de la poligonal”.

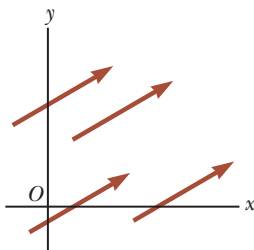


Figura 3.5 Estos cuatro vectores son iguales porque tienen longitudes iguales y apuntan en la misma dirección.

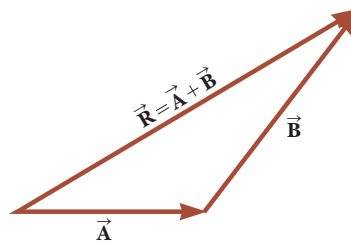


Figura 3.6 Cuando el vector \vec{B} se suma al vector \vec{A} , la resultante \vec{R} es el vector que va del origen de \vec{A} a la punta de \vec{B} .

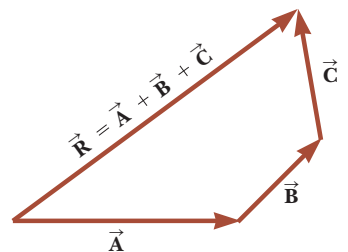


Figura 3.7 Construcción geométrica para sumar cuatro vectores. El vector resultante \vec{R} es por definición el que completa el polígono.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 3.1

Suma vectorial contra suma escalar Note que $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ es muy diferente de $A + B = C$. La primera ecuación es una suma vectorial, que se debe manejar con cuidado, con un método gráfico. La segunda ecuación es una simple suma algebraica de números que se manejan con las reglas normales de aritmética.

Cuando se suman dos vectores, la suma es independiente del orden de la adición. (Quizás esto parezca trivial, pero como verá en el capítulo 11, el orden es importante cuando se multiplican vectores. Los procedimientos para multiplicar vectores se analizan en los capítulos 7 y 11.) Esta propiedad, que se aprecia en la construcción geométrica de la figura 3.8, se conoce como **ley conmutativa de la suma**:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \quad (3.5)$$

Ley conmutativa de la suma ▶

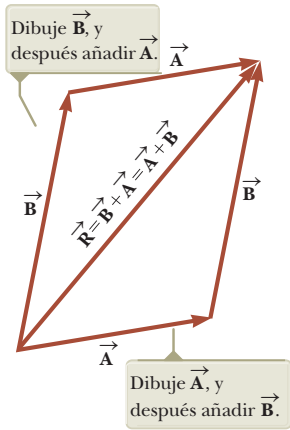


Figura 3.8 Esta construcción muestra que $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ o, en otras palabras, que la suma vectorial es conmutativa.

Cuando se suman tres o más vectores, su suma es independiente de la forma en la cual se agrupan los vectores individuales. En la figura 3.9 se muestra una prueba geométrica de esta regla para tres vectores. Esta propiedad se llama **ley asociativa de la suma**:

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} \quad (3.6)$$

Hemos descrito la suma de vectores de desplazamiento en esta sección porque estos tipos de vectores son fáciles de visualizar. También podemos sumar otros tipos de vectores, como los vectores de velocidad, fuerza y campo eléctrico, como lo haremos en capítulos posteriores. Cuando se suman dos o más vectores, todos deben tener las mismas unidades y todos deben ser del mismo tipo de cantidad. No tendría sentido sumar un vector velocidad (por ejemplo, 60 km/h al este) con un vector de desplazamiento (por ejemplo, 200 km al norte) porque estos vectores representan diferentes cantidades físicas. La misma regla también se aplica a los escalares. Por ejemplo, no tendría sentido sumar intervalos de tiempo con temperaturas.

La operación de **sustracción vectorial** hace uso de la definición del negativo de un vector. El negativo del vector \vec{A} se define como el vector que cuando se suma a \vec{A} da cero para la suma vectorial. Es decir $\vec{A} + (-\vec{A}) = 0$. Los vectores \vec{A} y $-\vec{A}$ tienen la misma magnitud, pero apuntan en direcciones opuestas. Definimos la operación $\vec{A} - \vec{B}$ como vector $-\vec{B}$ sumado al vector \vec{A} :

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) \quad (3.7)$$

En la figura 3.10a se ilustra la construcción geométrica para restar dos vectores de esta forma.

Otra forma de observar la resta vectorial es notar que la diferencia $\vec{A} - \vec{B}$ entre dos vectores \vec{A} y \vec{B} es lo que debe sumar al segundo vector para obtener el primero. En este caso, como muestra la figura 3.10b, el vector $\vec{A} - \vec{B}$ apunta desde la punta del segundo vector a la punta del primero.

La **multiplicación escalar** de vectores es directa. Si el vector \vec{A} se multiplica por una cantidad escalar positiva m , el producto $m\vec{A}$ es un vector que tiene la misma dirección que \vec{A} y magnitud mA . Si el vector \vec{A} se multiplica por una cantidad escalar negativa $-m$,

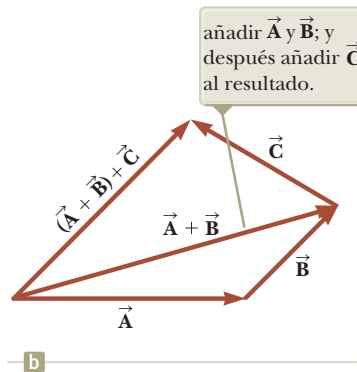
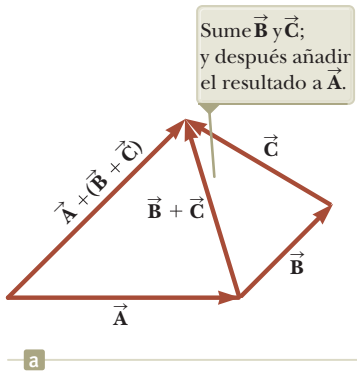


Figura 3.9 Construcciones geométricas para verificar la ley asociativa de la suma. (a) Los vectores \vec{B} y \vec{C} se añaden primero y se agregan a \vec{A} . (b) Los vectores \vec{A} y \vec{B} se añaden primero, y luego se agrega \vec{C} .

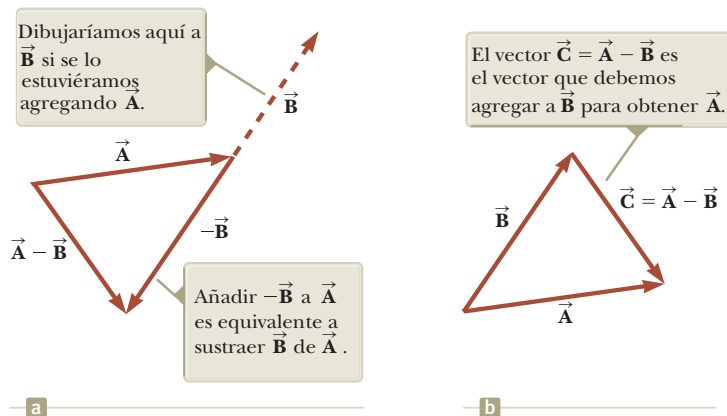


Figura 3.10 (a) Esta construcción muestra cómo restar el vector \vec{B} del vector \vec{A} . El vector $-\vec{B}$ es igual en magnitud al vector \vec{B} y apunta en la dirección opuesta. (b) Una segunda forma de ver a la sustracción de vectores.

el producto $-m\vec{A}$ tiene una dirección opuesta a \vec{A} . Por ejemplo, el vector $5\vec{A}$ es cinco veces más largo que \vec{A} y apunta en la misma dirección que \vec{A} ; el vector $-\frac{1}{3}\vec{A}$ es un tercio la longitud de \vec{A} y apunta en la dirección opuesta a \vec{A} .

E XAMEN RÁPIDO 3.2 Las magnitudes de dos vectores \vec{A} y \vec{B} son $A = 12$ unidades y $B = 8$ unidades. ¿Cuál de los siguientes pares de números representa los valores *más grandes y más pequeños* posibles para la magnitud del vector resultante $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$?
 (a) 14.4 unidades, 4 unidades, (b) 12 unidades, 8 unidades, (c) 20 unidades, 4 unidades, (d) ninguna de estas respuestas.

E XAMEN RÁPIDO 3.3 Si el vector \vec{B} se suma al vector \vec{A} , ¿cuáles *dos* de las siguientes opciones deben ser verdaderas para que el vector resultante sea igual a cero? (a) \vec{A} y \vec{B} son paralelos y en la misma dirección. (b) \vec{A} y \vec{B} son paralelos y en direcciones opuestas. (c) \vec{A} y \vec{B} tienen la misma magnitud. (d) \vec{A} y \vec{B} son perpendiculares.

Ejemplo 3.2 Un viaje de vacaciones

Un automóvil viaja 20.0 km al norte y luego a 35.0 km en una dirección 60.0° al noroeste, como se muestra en la figura 3.11a. Encuentre la magnitud y dirección del desplazamiento resultante del automóvil.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Los vectores \vec{A} y \vec{B} dibujados en la figura 3.11a ayudan a conceptualizar el problema. También se ha dibujado el vector resultante \vec{R} . Esperamos que su magnitud sea de unas pocas decenas de kilómetros. El ángulo β que hace que el vector resultante con el eje y se espera que sea menos de 60° , el ángulo que el vector \vec{B} hace con el eje y .

Categorizar Este ejemplo se puede clasificar como un simple problema de análisis acerca de suma vectorial. El desplazamiento \vec{R} es la resultante cuando se añaden los dos desplazamientos individuales \vec{A} y \vec{B} . Además, se puede clasificar como un problema acerca del análisis de triángulos, así que se acude a la experiencia en geometría y trigonometría.

Analizar En este ejemplo se muestran dos formas para analizar el problema de encontrar la resultante de dos vectores. La primera es resolver el problema mediante la geometría, con el uso de papel graficado y un transportador para medir la magnitud de \vec{R} y su dirección en la figura 3.11a. (De hecho, aun cuando sepa que va a realizar un cálculo, debe bosquejar los vectores para comprobar sus resultados.) Con una regla y transportador ordinarios, típicamente un buen diagrama da respuestas con dos dígitos pero no con una precisión de tres dígitos. ¡Intente usar estas herramientas en \vec{R} en la figura 3.11a y compare con el análisis trigonométrico que se muestra a continuación!

La segunda forma de resolver el problema es analizarlo con álgebra. La magnitud de \vec{R} se obtiene a partir de la ley de cosenos, tal como se aplica al triángulo en la figura 3.11a (véase el apéndice B.4).

Aplique $R^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta$ de la ley de cosenos para encontrar R :

Sustituya valores numéricos y Note que
 $\theta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$:

Aplique la ley de senos (apéndice B.4) para encontrar la dirección de \vec{R} medida desde la dirección norte:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos \theta}$$

$$R = \sqrt{(20.0 \text{ km})^2 + (35.0 \text{ km})^2 - 2(20.0 \text{ km})(35.0 \text{ km}) \cos 120^\circ} = 48.2 \text{ km}$$

$$\frac{\sin \beta}{B} = \frac{\sin \theta}{R}$$

$$\sin \beta = \frac{B}{R} \sin \theta = \frac{35.0 \text{ km}}{48.2 \text{ km}} \sin 120^\circ = 0.629$$

$$\beta = 38.9^\circ$$

El desplazamiento resultante del automóvil es 48.2 km con una dirección de 38.9° al noroeste.

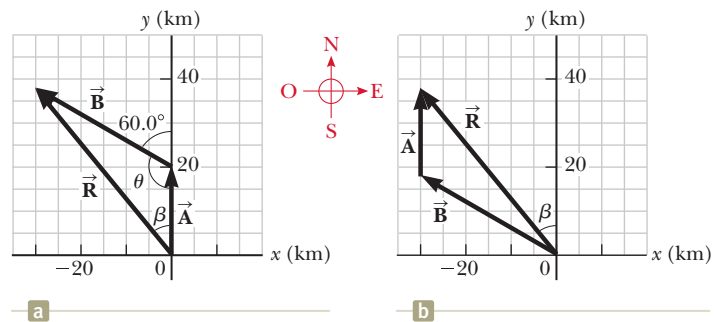


Figura 3.11 (Ejemplo 3.2) (a) Método gráfico para encontrar el vector de desplazamiento resultante $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$. (b) Sumando los vectores en orden inverso ($\vec{B} + \vec{A}$) da el mismo resultado para \vec{R} .



3.2 continuación

Finalizar ¿El ángulo β , que se calculó, concuerda con una estimación realizada al observar la figura 3.11a o con un ángulo medido del diagrama con el uso del método de la poligonal? ¿Es razonable que la magnitud de \vec{R} sea mayor que la de \vec{A} y \vec{B} ? ¿Las unidades de \vec{R} son correctas?

Aunque el método de la poligonal para sumar vectores funciona bien, tiene dos desventajas. Primera, algunas personas

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que el viaje se realiza considerando los dos vectores en orden inverso: 35.0 km con dirección 60.0° al noroeste primero y después 20.0 km al norte. ¿Cómo cambiarían la magnitud y dirección del vector resultante?

Respuesta No cambiarían. La ley conmutativa para la suma vectorial dice que el orden de los vectores en una suma es irrelevante. Gráficamente, la figura 3.11b muestra que los vectores Añadidos en orden inverso proporcionan el mismo vector resultante.

encuentran abrumador el uso de las leyes de cosenos y senos. Segunda, sólo resulta un triángulo si suma dos vectores. Si suma tres o más vectores, la forma geométrica resultante no es un triángulo. En la sección 3.4 se explora un nuevo método para sumar vectores que abordará estas dos desventajas.

3.4 Componentes de un vector y vectores unitarios

El método gráfico de suma de vectores no se recomienda cuando se requiere gran precisión o en problemas tridimensionales. En esta sección se describe un método de suma de vectores que utiliza las proyecciones de los vectores a lo largo de los ejes coordenados. Dichas proyecciones se llaman **componentes** del vector o sus **componentes rectangulares**. Cualquier vector se puede describir por completo mediante sus componentes.

Considere un vector \vec{A} que se encuentra en el plano xy y forma un ángulo arbitrario θ con el eje positivo x , como se muestra en la figura 3.12a. Este vector se puede expresar como la suma de otros dos *vectores componentes* \vec{A}_x , que es paralelo al eje x , y \vec{A}_y , que es paralelo al eje y . De la figura 3.12b se ve que los tres vectores forman un triángulo rectángulo y que $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$. Con frecuencia se hará alusión a las “componentes de un vector \vec{A} ”, escritas A_x y A_y (la notación es sin negritas). La figura 3.12b muestra el vector componente A_y desplazado a la izquierda de tal modo que se encuentra a lo largo del eje y . Vemos que el componente A_x representa la proyección de \vec{A} a lo largo del eje x , y la componente A_y representa la proyección de \vec{A} a lo largo del eje y . Estas componentes pueden ser positivas o negativas. La componente A_x es positiva si el vector componente A_x apunta en la dirección x positiva y es negativa si \vec{A}_x apunta en la dirección x negativa. Lo mismo es cierto para la componente A_y .

De la figura 3.12 y de la definición de seno y coseno, es claro que $\cos \theta = A_x/A$ y que $\sin \theta = A_y/A$. Por tanto, las componentes de \vec{A} son

$$A_x = A \cos \theta \quad (3.8)$$

$$A_y = A \sin \theta \quad (3.9)$$

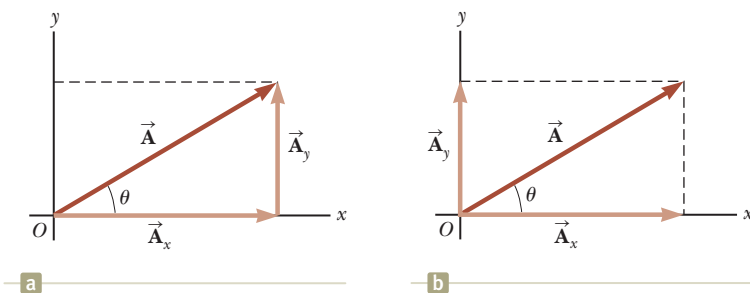


Figura 3.12 (a) Un vector \vec{A} que se encuentra en el plano xy se representa mediante sus vectores componentes \vec{A}_x y \vec{A}_y . Estos vectores forman un triángulo rectángulo. (b) El vector componente \vec{A}_y se puede mover hacia la izquierda de manera que se encuentre a lo largo del eje y .

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 3.2

Componentes x y y Las ecuaciones 3.8 y 3.9 asocian el coseno del ángulo con la componente x y el seno del ángulo con la componente y . Esta asociación es cierta *sólo* porque el ángulo θ se midió respecto del eje x . Así que no memorice estas ecuaciones. Si θ se mide en relación con el eje y (como en algunos problemas), estas serán ecuaciones incorrectas. Piense acerca de cuál lado del triángulo, que contenga las componentes, es adyacente al ángulo y cuál es el lado opuesto y luego asigne el coseno y el seno en concordancia.



Las magnitudes de estas componentes son las longitudes de los dos lados de un triángulo rectángulo con una hipotenusa de longitud A . Debido a esto, la magnitud y la dirección de \vec{A} se relacionan con sus componentes mediante las expresiones

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \tag{3.10}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right) \tag{3.11}$$

Observe que los signos de las componentes A_x y A_y dependen del ángulo θ . Por ejemplo, si $\theta = 120^\circ$, A_x es negativa y A_y positiva. Si $\theta = 225^\circ$, tanto A_x como A_y son negativas. La figura 3.13 resume los signos de las componentes cuando \vec{A} se encuentra en los diferentes cuadrantes.

Cuando resuelva problemas, especifique un vector \vec{A} con sus componentes A_x y A_y o con su magnitud y dirección A y θ .

En muchas aplicaciones, es conveniente expresar las componentes en un sistema coordenado que tenga ejes que no sean horizontales ni verticales, solo que sean mutuamente perpendiculares. Por ejemplo, se considerará el movimiento de los objetos que se deslizan por planos inclinados. Para ejemplos, conviene orientar el eje x paralelo al plano y el eje y perpendicular al plano.

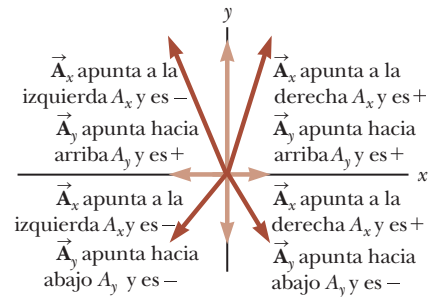


Figura 3.13 Los signos de las componentes de un vector \vec{A} dependen del cuadrante en el que se ubica el vector.

E XAMEN RÁPIDO 3.4 Elija la respuesta correcta para hacer verdadero el enunciado:

- Una componente de un vector es (a) siempre, (b) nunca o (c) a veces mayor que la magnitud del vector.

Las cantidades vectoriales con frecuencia se expresan en términos de vectores unitarios. Un **vector unitario** es un vector sin dimensiones que tiene una magnitud de exactamente 1. Los vectores unitarios se usan para especificar una dirección conocida y no tienen otro significado físico. Son útiles exclusivamente como una convención para describir una dirección en el espacio. Se usarán los símbolos \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} para representar los vectores unitarios que apuntan en las direcciones x , y y z positivas, respectivamente. (Los “sombros”, o circunflejos, sobre los símbolos son una notación estándar para vectores unitarios.) Los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} forman un conjunto de vectores mutuamente perpendiculares en un sistema coordenado de mano derecha, como se muestra en la figura 3.14a. La magnitud de cada vector unitario es igual a 1; esto es, $|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$.

Considere un vector \vec{A} que se encuentra en el plano xy , como se muestra en la figura 3.14b. El producto de la componente A_x y el vector unitario \hat{i} es el vector componente $\vec{A}_x = A_x \hat{i}$, que se encuentra en el eje x y tiene magnitud $|A_x|$. Del mismo modo, $\vec{A}_y = A_y \hat{j}$ es el vector componente de magnitud $|A_y|$ que se encuentra en el eje y . Por tanto, la notación en vectores unitarios para el vector \vec{A} es

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} \tag{3.12}$$

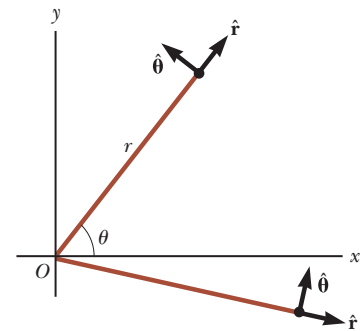
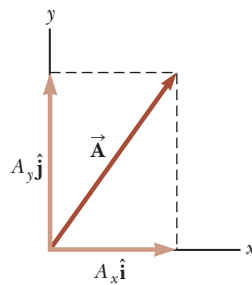
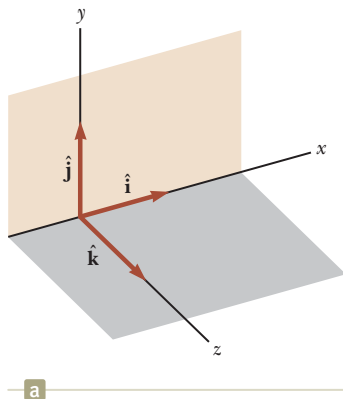


Figura 3.14 (a) Los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} se dirigen a lo largo de los ejes x , y y z , respectivamente. (b) El vector $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$ que se encuentra en el plano xy tiene componentes A_x y A_y .

Figura 3.15 Vectores unitarios para un punto descrito con coordenadas polares.

Ahora considere las coordenadas polares que se muestran para el punto en la figura 3.2. En la figura 3.15 se reproduce el punto que se encuentra en el primer cuadrante en tal figura. Note que podemos identificar los vectores unitarios radial y angular \hat{r} y $\hat{\theta}$. Al igual que para las coordenadas rectangulares, estos vectores son de longitud unitaria. A diferencia de las coordenadas rectangulares, sin embargo, las direcciones de los vectores unitarios radial y angular dependen del punto, como se muestra en el punto del cuarto cuadrante en la figura 3.15.

Ahora, ¿cómo usar las componentes para sumar vectores cuando el método gráfico no es suficientemente preciso? Suponga que quiere sumar el vector \vec{B} al vector \vec{A} en la ecuación 3.12, donde el vector \vec{B} tiene componentes B_x y B_y . Debido a la conveniencia contable de los vectores unitarios, todo lo que se hace es sumar las componentes x y y por separado. El vector resultante \vec{R} es

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) + (B_x \hat{i} + B_y \hat{j})$$

o, arreglando términos

$$\vec{R} = (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} \quad (3.13)$$

Puesto que $\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j}$, se ve que las componentes del vector resultante son

$$\begin{aligned} R_x &= A_x + B_x \\ R_y &= A_y + B_y \end{aligned} \quad (3.14)$$

Por tanto, vemos que en el método de componentes de suma de vectores, sumamos todas las componentes x para encontrar la componente x del vector resultante y usamos el mismo proceso para las componentes y . Podemos comprobar esta suma por componentes con una construcción geométrica como se muestra en la figura 3.16.

La magnitud de \vec{R} y el ángulo que forma con el eje x de sus componentes se obtienen con las relaciones

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2} \quad (3.15)$$

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x} \quad (3.16)$$

En ocasiones es necesario considerar situaciones que implican movimiento en tres componentes direccionales. La extensión de los métodos a vectores tridimensionales es directa. Si \vec{A} y \vec{B} tienen componentes x , y y z , se expresan en la forma

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (3.17)$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \quad (3.18)$$

La suma de \vec{A} y \vec{B} es

$$\vec{R} = (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} + (A_z + B_z) \hat{k} \quad (3.19)$$

Observe que la ecuación 3.19 difiere de la ecuación 3.13: en la ecuación 3.19, el vector resultante también tiene una componente z , $R_z = A_z + B_z$. Si un vector \vec{R} tiene componentes x , y y z , la magnitud del vector es $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$. El ángulo θ_x que \vec{R} forma con el eje x se encuentra de la expresión $\cos \theta_x = R_x/R$, con expresiones similares para los ángulos respecto de los ejes y y z .

La extensión de este método para la suma de más de dos vectores también es sencilla. Por ejemplo, $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = (A_x + B_x + C_x) \hat{i} + (A_y + B_y + C_y) \hat{j} + (A_z + B_z + C_z) \hat{k}$.

E XAMEN RÁPIDO 3.5 ¿Para cuáles de los siguientes vectores la magnitud del vector \hat{i} es igual a una de las componentes del vector? a) $\vec{A} = 2\hat{i} + 5\hat{j}$ b) $\vec{B} = -3\hat{j}$ c) $\vec{C} = +5\hat{k}$.

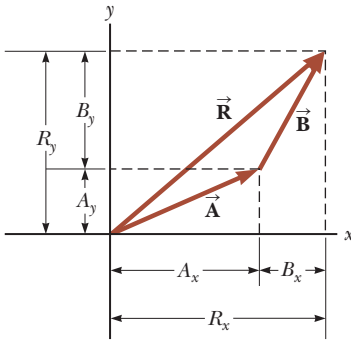


Figura 3.16 Esta construcción geométrica para la suma de dos vectores muestra la relación entre las componentes de la resultante \vec{R} y las componentes de los vectores individuales

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 3.3

Tangentes en calculadoras La ecuación 3.16 involucra el cálculo de un ángulo mediante una función tangente. Por lo general, la función tangente inversa en las calculadoras proporciona un ángulo entre -90° y $+90^\circ$. En consecuencia, si el vector que estudia se encuentra en el segundo o tercer cuadrantes, el ángulo medido desde el eje x positivo será el ángulo que dé su calculadora más 180° .



Ejemplo 3.3 La suma de dos vectores

Encuentre la suma de dos vectores de desplazamiento \vec{A} y \vec{B} que se encuentran en el plano xy y está dada por

$$\vec{A} = (2.0\hat{i} + 2.0\hat{j}) \text{ y } \vec{B} = (2.0\hat{i} - 4.0\hat{j})$$

SOLUCIÓN

Conceptualizar Puede conceptualizar la situación al dibujar los vectores en papel gráfico. Haga esto y luego dibuje una aproximación del vector resultante esperado.

Categorizar Clasifique este ejemplo como un simple problema de sustitución. Al comparar esta expresión para \vec{A} con la expresión general $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$, es claro que $A_x = 2.0$ m, $A_y = 2.0$ m y $A_z = 0$. Del mismo modo, $B_x = 2.0$ m, $B_y = -4.0$ m y $B_z = 0$. Podemos utilizar un método de dos dimensiones porque no hay componentes z .

Aplique la ecuación 3.13 para obtener el vector resultante \vec{R} :

$$\begin{aligned}\vec{R} &= (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} = (2.0 + 2.0)\hat{i} + (2.0 - 4.0)\hat{j} \\ &= 4.0\hat{i} - 2.0\hat{j}\end{aligned}$$

Aplique la ecuación 3.15 para encontrar la magnitud de \vec{R} :

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(4.0)^2 + (-2.0)^2} = \sqrt{20} = 4.5$$

Encuentre la dirección de \vec{R} a partir de la ecuación 3.17:

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{-2.0}{4.0} = -0.50$$

Es probable que su calculadora dé la respuesta -27° para $\theta = \tan^{-1}(-0.50)$. Esta respuesta es correcta si se le interpreta como 27° en el sentido de las agujas del reloj desde el eje x . La forma estándar es citar los ángulos medidos contra el sentido de las agujas del reloj desde el eje $+x$, y que el ángulo para este vector es $\theta = 333^\circ$.

Ejemplo 3.4 El desplazamiento resultante

Una partícula experimenta tres desplazamientos consecutivos: $\Delta\vec{r}_1 = (15\hat{i} + 30\hat{j} + 12\hat{k})$ cm, $\Delta\vec{r}_2 = (23\hat{i} - 14\hat{j} - 5.0\hat{k})$ cm y $\Delta\vec{r}_3 = (-13\hat{i} + 15\hat{j})$ cm. Encuentre las componentes del desplazamiento resultante y su magnitud.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Aunque x es suficiente para ubicar un punto en una dimensión, es necesario un vector \vec{r} para ubicar un punto en dos o tres dimensiones. La notación $\Delta\vec{r}$ es una generalización del desplazamiento unidimensional Δx en la ecuación 2.1. Los desplazamientos tridimensionales son más difíciles de conceptualizar que los de dos dimensiones, porque éstos se pueden dibujar en papel.

Para este problema, imagine que traza con su lápiz, en un papel gráfico en el que ya dibujó los ejes x y y , el origen. Mueva su lápiz 15 cm a la derecha a lo largo del eje x , luego 30 cm hacia arriba a lo largo del eje y y luego 12 cm en dirección

perpendicular hacia usted. Este procedimiento proporciona el desplazamiento descrito por $\Delta\vec{r}_1$. Desde este punto, mueva su lápiz 23 cm a la derecha, paralelo al eje x , luego 14 cm paralelo al papel en la dirección $-y$ y luego 5.0 cm en dirección perpendicular, alejándose de usted, hacia el papel. Ahora está en el desplazamiento desde el origen descrito por $\Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2$. Desde este punto, mueva su lápiz 13 cm a la izquierda en la dirección $-x$ y (¡finalmente!) 15 cm paralelo al papel gráfico, a lo largo del eje y . Su posición final está a un desplazamiento $\Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_3$ desde el origen.

Categorizar A pesar de la difícil conceptualización en tres dimensiones, se puede clasificar este problema como un problema de sustitución debido a los cuidadosos métodos contables desarrollados para vectores. La manipulación matemática sigue la pista de este movimiento a lo largo de tres ejes perpendiculares en una forma organizada y compacta, como se aprecia a continuación.

Para encontrar el desplazamiento resultante sume los tres vectores:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_3 \\ &= (15 + 23 - 13)\hat{i} \text{ cm} + (30 - 14 + 15)\hat{j} \text{ cm} + (12 - 5.0 + 0)\hat{k} \text{ cm} \\ &= (25\hat{i} + 31\hat{j} + 7.0\hat{k}) \text{ cm}\end{aligned}$$

Encuentre la magnitud del vector resultante:

$$\begin{aligned}R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \\ &= \sqrt{(25 \text{ cm})^2 + (31 \text{ cm})^2 + (7.0 \text{ cm})^2} = 40 \text{ cm}\end{aligned}$$



Ejemplo 3.5 De paseo

Una excursionista comienza un viaje al caminar primero 25.0 km hacia el sureste desde su vehículo. Se detiene y levanta su tienda para pasar la noche. En el segundo día, camina 40.0 km en una dirección 60.0° al noreste, punto en el que descubre una torre de guardabosque.

(A) Determine las componentes del desplazamiento de la excursionista para cada día.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Conceptúe el problema mediante el dibujo de un bosquejo como el de la figura 3.17. Si los vectores desplazamiento del primero y segundo días se denotan como \vec{A} y \vec{B} , respectivamente, y se usa el vehículo como el origen de las coordenadas, se obtienen los vectores que se muestran en la figura 3.17. El dibujo nos permite estimar el vector resultante como se muestra.

Categorizar Al dibujar el resultante \vec{R} , se clasifica este problema como uno que antes se resolvió: una suma de dos vectores. Ahora debe entender el poder de la categorización: muchos problemas nuevos son muy similares a problemas que ya se han resuelto, si se tiene cuidado al conceptualizarlos. Una vez dibujados los vectores desplazamiento y clasificado el problema, ya no se trata sólo de una excursionista, una caminata, un vehículo, una tienda o una torre. Es un problema acerca de suma vectorial, que ya ha resuelto.

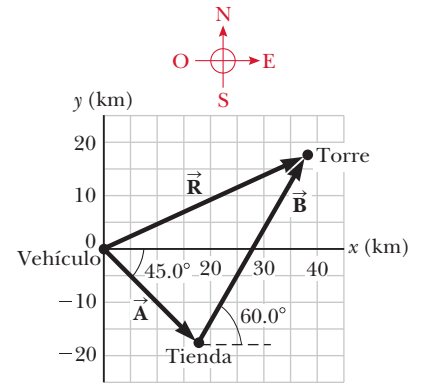


Figura 3.17 (Ejemplo 3.5) El desplazamiento total de la excursionista es el vector $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$.

Analizar El desplazamiento \vec{A} tiene una magnitud de 25.0 km y se dirige 45.0° abajo del eje x positivo.

Encuentre las componentes de \vec{A} con las ecuaciones 3.8 y 3.9:

$$A_x = A \cos(-45.0^\circ) = (25.0 \text{ km})(0.707) = 17.7 \text{ km}$$

$$A_y = A \sin(-45.0^\circ) = (25.0 \text{ km})(-0.707) = -17.7 \text{ km}$$

El valor negativo de A_y indica que la excursionista camina en la dirección y negativa durante el primer día. Los signos de A_x y A_y también son evidentes en la figura 3.17.

Encuentre las componentes de \vec{B} con las ecuaciones 3.8 y 3.9:

$$B_x = B \cos 60.0^\circ = (40.0 \text{ km})(0.500) = 20.0 \text{ km}$$

$$B_y = B \sin 60.0^\circ = (40.0 \text{ km})(0.866) = 34.6 \text{ km}$$

(B) Determine las componentes del desplazamiento resultante de la excursionista \vec{R} para el viaje. Encuentre una expresión para \vec{R} en términos de vectores unitarios.

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 3.15 para encontrar las componentes del desplazamiento resultante $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$:

$$R_x = A_x + B_x = 17.7 \text{ km} + 20.0 \text{ km} = 37.7 \text{ km}$$

$$R_y = A_y + B_y = -17.7 \text{ km} + 34.6 \text{ km} = 17.0 \text{ km}$$

Escriba el desplazamiento total en forma de vector unitario:

$$\vec{R} = (37.7\hat{i} + 17.0\hat{j}) \text{ km}$$

Finalizar Al observar la representación gráfica de la figura 3.17, se estima que la posición de la torre es aproximadamente (38 km, 17 km), que es consistente con las componentes de \vec{R} en el resultado de la posición final de la excursionista. Además, ambas componentes de \vec{R} son positivas, lo que coloca la posición final en el primer cuadrante del sistema coordenado, lo que también es consistente con la figura 3.17.

¿QUÉ PASARÍA SI? Después de llegar a la torre, la excursionista quiere regresar a su vehículo a lo largo de una sola línea recta. ¿Cuáles son las componentes del vector que representan esta caminata? ¿Cuál debe ser la dirección de la caminata?

Respuesta El vector deseado $\vec{R}_{\text{vehículo}}$ es el negativo del vector \vec{R} :

$$\vec{R}_{\text{vehículo}} = -\vec{R} = (-37.7\hat{i} - 17.0\hat{j}) \text{ km}$$

La dirección se encuentra al calcular el ángulo que el vector forma con el eje x :

$$\tan \theta = \frac{R_{\text{vehículo},y}}{R_{\text{vehículo},x}} = \frac{-17.0 \text{ km}}{-37.7 \text{ km}} = 0.450$$

que da un ángulo de $\theta = 204.2^\circ$, o 24.2° al suroeste.

Resumen

Definiciones

Las **cantidades escalares** son las que sólo tienen un valor numérico y no tienen dirección asociada.

Las **cantidades vectoriales** tienen tanto magnitud como dirección y obedecen las leyes de la suma vectorial. La magnitud de un vector *siempre* es un número positivo.

Conceptos y principios


Cuando se suman dos o más vectores, deben tener las mismas unidades y todos ellos deben ser del mismo tipo de cantidad. Se pueden añadir gráficamente dos vectores \vec{A} y \vec{B} . En este método (figura 3.6), el vector resultante $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ corre del origen de \vec{A} a la punta de \vec{B} .

Si un vector \vec{A} tiene una componente x , A_x y una componente y , A_y , el vector se expresa en forma de vectores unitarios como $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$. En esta notación, \hat{i} es un vector unitario que apunta en la dirección x positiva y \hat{j} es un vector unitario que apunta en la dirección y positiva. Puesto que \hat{i} y \hat{j} son vectores unitarios, $|\hat{i}| = |\hat{j}| = 1$.

Un segundo método de suma de vectores involucra las **componentes** de los vectores. La componente x , A_x del vector \vec{A} es igual a la proyección de \vec{A} a lo largo del eje x de un sistema coordenado, donde $A_x = A \cos \theta$. La componente y , A_y de \vec{A} es la proyección de \vec{A} a lo largo del eje y , donde $A_y = A \sin \theta$.

El resultante de dos o más vectores se encuentra al descomponer todos los vectores en sus componentes x y y , sumar sus componentes resultantes x y y , y luego usar el teorema de Pitágoras para encontrar la magnitud del vector resultante. Se puede encontrar el ángulo que forma el vector resultante respecto del eje x al usar una función trigonométrica adecuada.

Piense, dialogue y comparta

Consulte el prefacio para una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para obtener más artículos de evaluación para esta sección, visite  WEBASSIGN From Cengage

- Usted trabaja en una estación de radar para la Guardia costera. Mientras alguien más salió a almorzar, oye una llamada de socorro de un barco que se hunde. El barco está localizado a una distancia de 51.2 km de la estación y una orientación de 36° al oeste del norte. En su pantalla de radar, ve las siguientes localizaciones de otros cuatro barcos:

Barco #	Distancia desde la estación (km)	Orientación	Rapidez máxima (km/h)
1	36.1	42° W of N	30.0
2	37.3	61° W of N	38.0
3	10.2	36° W of N	32.0
4	51.2	79° W of N	45.0

¡Rápido!, ¿con cuál barco se contacta para ayudar al barco que se está hundiendo? ¿Qué barco llegará en el intervalo de tiempo más corto? Supongamos que cada barco aceleraría rápidamente a su velocidad máxima y luego mantiene esa velocidad constante en una línea recta durante todo el viaje hacia el barco que se está hundiendo.

- ACTIVIDAD** En un mapa de papel de Estados Unidos, localice Memphis, Albuquerque y Chicago. Dibuje un vector desde Albuquerque a Memphis y otro vector de Memphis a Chicago. Usando la escala del mapa, determine las distancias en línea recta entre Albuquerque y Memphis, y entre Memphis y Chicago. Utilice un transportador para medir los ángulos de sus dos vectores con respecto a la latitud y líneas de longitud. De esta información, determine la distancia en línea recta en millas entre Albuquerque y Chicago.

Problemas

Consulte el prefacio para una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para obtener más artículos de evaluación para esta sección, visite  WEBASSIGN From Cengage

SECCIÓN 3.1 Sistemas coordenados

- Dos puntos en el plano xy tienen coordenadas cartesianas $(2.00, -4.00)$ m $(-3.00, 3.00)$ m. Determine: (a) la distancia entre estos puntos y (b) sus coordenadas polares.
- Dos puntos en un plano tienen coordenadas polares $(2.50$ m, $30.0^\circ)$ y $(3.80$ m, $120.0^\circ)$. Determine (a) las coordenadas cartesianas de estos puntos y (b) la distancia entre ellos.

- Las coordenadas polares de un cierto punto son $(r = 4.30$ cm, $\theta = 214^\circ)$. (a) Encuentre sus coordenadas cartesianas x e y . Encuentre las coordenadas polares de los puntos con coordenadas cartesianas (b) $(-x, y)$, (c) $(-2x, -2y)$, y (d) $(3x, -3y)$.
- Sean las coordenadas polares del punto (x, y) , (r, θ) . Determine las coordenadas polares para los puntos (a) $(-x, y)$, (b) $(-2x, -2y)$, y (c) $(3x, -3y)$.

SECCIÓN 3.2 Cantidades vectoriales y escalares

- ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Una patinadora se desliza a lo largo de una trayectoria circular. Se define un

cierto punto en el círculo como su origen. Posteriormente, se pasa a través de un punto en el cual la distancia que ha viajado a lo largo de la trayectoria desde el origen es más pequeña que la magnitud de su vector de desplazamiento desde el origen.

SECCIÓN 3.3 Aritmética vectorial básica

6. El vector \vec{A} tiene una magnitud de 29 unidades y apunta en la dirección y positiva. Cuando el vector \vec{B} se suma al vector \vec{A} , el vector resultante $\vec{A} + \vec{B}$ apunta en dirección y negativa con una magnitud de 14 unidades. Encuentra la magnitud y la dirección de \vec{B} .

7. Una fuerza \vec{F}_1 de 6.00 unidades de magnitud actúa sobre un objeto en el origen en una dirección 30.0° sobre el eje x positivo (figura P3.7). Una segunda fuerza \vec{F}_2 de 5.00 unidades de magnitud actúa sobre el objeto en la dirección del eje y positivo. Encuentre gráficamente la magnitud y la dirección de la fuerza resultante $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

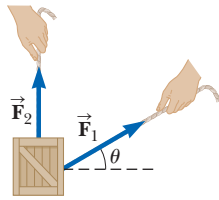


Figura P3.7

8. Tres desplazamientos son $\vec{A} = 200$ m al sur, $\vec{B} = 250$ m al oeste y $\vec{C} = 150$ m a 30.0° al noreste. (a) Construya un diagrama separado para cada una de las siguientes posibles formas de sumar estos vectores: $\vec{R}_1 = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$; $\vec{R}_2 = \vec{B} + \vec{C} + \vec{A}$; $\vec{R}_3 = \vec{C} + \vec{B} + \vec{A}$. (b) Explique qué puede concluir al comparar los diagramas.

9. En la figura se muestran los vectores de desplazamiento \vec{A} y \vec{B} , cuya magnitud es de 3.00 m. La dirección del vector \vec{A} es $\theta = 30.0^\circ$. Encuentra gráficamente (a) $\vec{A} + \vec{B}$, (b) $\vec{A} - \vec{B}$, (c) $\vec{B} - \vec{A}$, y (d) $\vec{A} - 2\vec{B}$. (Reporte todos los ángulos en sentido contrario del movimiento de las agujas del reloj desde el eje x positivo.)

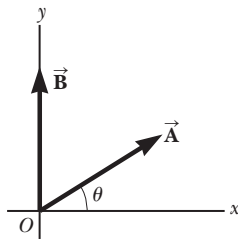


Figura P3.9

Problemas 9 y 25.

10. Un carro de montaña rusa se mueve 200 pies horizontalmente y luego se eleva 135 pies a un ángulo de 30.0° sobre la horizontal. A continuación, viaja 135 pies a un ángulo de 40.0° hacia abajo. ¿Cuál es su desplazamiento desde su punto de partida? Use técnicas gráficas.

SECCIÓN 3.4 Componentes de un vector y vectores unitarios

11. Una minivan viaja en línea recta al norte en el carril derecho de una autopista a 28.0 m/s. Un camper pasa a la minivan y luego cambia del carril izquierdo al derecho. Mientras lo hace, la trayectoria del camper sobre el camino es un desplazamiento recto a 8.50° al noreste. Para evitar chocar con la minivan, la distancia norte-sur entre la defensa trasera del camper y la defensa delantera de la minivan no deben disminuir. (a) ¿El camper puede conducirse para satisfacer este requisito? (b) Explique su respuesta.
12. Una persona camina 25.0° al noreste durante 3.10 km. ¿Qué distancia tendría que caminar hacia el norte y hacia el este para llegar a la misma posición?
13. Su perro está corriendo alrededor de la hierba en el patio trasero. Él experimenta desplazamientos sucesivos 3.50 m sur, 8.20 m al noreste, y 15.0 m al oeste. ¿Cuál es el desplazamiento resultante?
14. Dados los vectores $\vec{A} = 2.00\hat{i} + 6.00\hat{j}$ y $\vec{B} = 3.00\hat{i} - 2.00\hat{j}$, (a) dibuje la suma vectorial $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ y la diferencia vectorial $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$. (b) Calcule \vec{C} y \vec{D} , en términos de vectores unitarios.

rios. (c) Calcule \vec{C} y \vec{D} en términos de coordenadas polares, con ángulos medidos respecto del eje positivo x .

15. La vista desde el helicóptero en la figura P3.15 muestra a dos personas jalando una mula terca. La persona de la derecha tira con una fuerza \vec{F}_1 de magnitud 120 N y la dirección de $\theta_1 = 60.0^\circ$. La persona de la izquierda jala con una fuerza \vec{F}_2 de 80.0 N y dirección de $\theta_2 = 75.0^\circ$. Encuentre (a) la fuerza única que es equivalente a las dos fuerzas que se muestran y (b) la fuerza que una tercera persona tendría que ejercer sobre la mula para hacer que la fuerza resultante sea igual a cero. Las fuerzas se miden en unidades de newtons (representada por N).

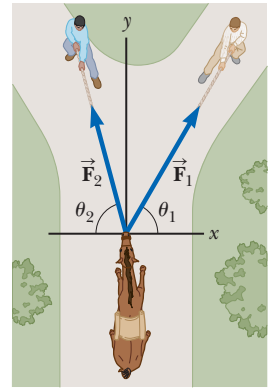


Figura P3.15

16. Una pendiente de esquiar cubierta de nieve forma un ángulo de 35.0° con la horizontal. Cuando un esquiador cae a plomo por la colina, una porción de nieve salpicada se proyecta a una posición máxima de 1.50 m a 16.0° de la vertical en dirección arriba de la colina, como se muestra en la figura P3.16. Encuentre las componentes de su posición máxima (a) paralela a la superficie y (b) perpendicular a la superficie.

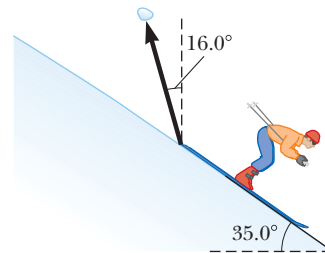


Figura P3.16

17. Considere los tres vectores desplazamiento $\vec{A} = (3\hat{i} - 3\hat{j})$ m, $\vec{B} = (\hat{i} - 4\hat{j})$ y $\vec{C} = (-2\hat{i} + 5\hat{j})$. Use el método de componentes para determinar (a) la magnitud y dirección del vector $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ y (b) la magnitud y dirección de $\vec{E} = -\vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$.
18. El vector \vec{A} tiene componentes x y y de -8.70 cm y 15.0 cm, respectivamente; el vector \vec{B} tiene componentes x y y de 13.2 cm y -6.60 cm, respectivamente. Si $\vec{A} - \vec{B} + 3\vec{C} = 0$ ¿cuáles son los componentes de \vec{C} ?
19. El vector \vec{A} tiene componentes x , y y z de 8.00, 12.0 y -4.00 unidades, respectivamente. (a) Escriba una expresión vectorial para \vec{A} en notación de vector unitario. (b) Obtenga una expresión en vectores unitarios para un vector \vec{B} de un cuarto de longitud de \vec{A} que apunte en la misma dirección que \vec{A} . (c) Obtenga una expresión en vectores unitarios para un vector \vec{C} de tres veces la longitud de \vec{A} que apunte en la dirección opuesta a la dirección de \vec{A} .
20. Dados los vectores desplazamiento $\vec{A} = (3\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k})$ y $\vec{B} = (2\hat{i} + 3\hat{j} - 7\hat{k})$, encuentre las magnitudes de los siguientes vectores y exprese cada uno en términos de sus componentes rectangulares. (a) $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ (b) $\vec{D} = 2\vec{A} - \vec{B}$.

21. El vector \vec{A} tiene un componente x negativo de 3.00 unidades de longitud y un componente y positivo de 2.00 unidades de longitud. (a) Determine una expresión para \vec{A} en notación de vectores unitarios. (b) Determine la magnitud y dirección de \vec{A} . (c) ¿Qué vector \vec{B} , cuando se suma a \vec{A} , da un vector resultante sin componente x y una componente y negativa de 4.00 unidades de longitud?

22. En la figura P3.22 se muestran tres vectores desplazamiento de una pelota de croquet, donde $|\vec{A}| = 20.0$ unidades, $|\vec{B}| = 40.0$ unidades y $|\vec{C}| = 30.0$ unidades. Encuentre (a) la resultante en notación de vectores unitarios y (b) la magnitud y dirección del desplazamiento resultante

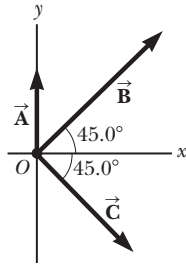


Figura P3.22

23. (a) Con $\vec{A} = (6.00 \hat{i} - 8.00 \hat{j})$ unidades, $\vec{B} = (-8.00 \hat{i} + 3.00 \hat{j})$ unidades y $\vec{C} = (26.0 \hat{i} + 19.0 \hat{j})$ unidades, determine a y b tal que $a\vec{A} + b\vec{B} + \vec{C} = 0$. (b) Un estudiante aprendió que una sola ecuación no se puede resolver para determinar valores para más de una incógnita en ella. ¿Cómo podría explicarle que tanto a como b se pueden determinar a partir de la ecuación que se usó en el inciso (a)?

24. El vector \vec{B} tiene componentes x , y y z de 4.00, 6.00 y 3.00 unidades, respectivamente. Calcule (a) la magnitud de \vec{B} y (b) los ángulos que \vec{B} forma con los ejes coordenados.

25. Use el método de componentes para sumar los vectores \vec{A} y \vec{B} que se muestran en la figura P3.9. Ambos vectores tienen magnitudes de 3.00 m y el vector \vec{A} hace un ángulo de $\theta = 30.0^\circ$ con el eje x . Expresé la resultante $\vec{A} + \vec{B}$ en notación de vector unitario.

26. Una chica que entrega periódicos cubre su ruta viajando 3.00 cuadras al oeste, 4.00 cuadras al norte, y luego 6.00 cuadras al este. (a) ¿Cuál es su desplazamiento resultante? (b) ¿Cuál es la distancia total que viaja?

27. Un hombre que empuja un trapeador por el suelo hace que experimente dos desplazamientos. El primero tiene una magnitud de 150 cm y forma un ángulo de 120° con el eje x positivo. El desplazamiento resultante tiene una magnitud de 140 cm y se dirige a un ángulo de 35.0° con el eje x positivo. Encuentre la magnitud y dirección del segundo desplazamiento.

28. La figura P3.28 muestra proporciones típicas de las anatomías del varón (m) y de la mujer (f). Los desplazamientos \vec{d}_{1m} y \vec{d}_{1f} de la planta de los pies hasta el ombligo tienen magnitudes de 104 cm y 84.0 cm, respectivamente. Los desplazamientos \vec{d}_{2m} y \vec{d}_{2f} desde el ombligo hasta yemas de los dedos extendidas tienen magnitudes de 100 cm y 86.0 cm, respecti-

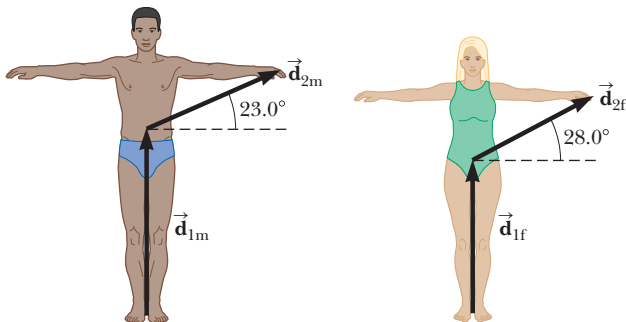


Figura P3.28

vamente. Encuentra la suma vectorial de estos desplazamientos $\vec{d}_3 = \vec{d}_1 + \vec{d}_2$ para las dos personas.

29. **Problema de repaso** Conforme pasa sobre la isla Gran Bahamas, el ojo de un huracán se mueve en una dirección 60.0° al noroeste con una rapidez de 41.0 km/h. (a) ¿Cuál es la expresión en vector unitario para la velocidad del huracán? Se mantiene esta velocidad para 3.00 h después el curso del huracán cambia súbitamente al norte y su rapidez baja a 25.0 km/h. Esta nueva velocidad se mantiene durante 1.50 h. (b) ¿Cuál es la expresión en vector unitario de la nueva velocidad del huracán? (c) ¿Cuál es la expresión en vector unitario para el desplazamiento del huracán durante las primeras 3.00 h? (d) ¿Cuál es la expresión en vector unitario para el desplazamiento del huracán durante la última 1.50 h? (e) ¿A qué distancia de Gran Bahamas está el ojo 4.50 h después de que pasa sobre la isla?

30. En la operación de ensamblado que se ilustra en la figura P3.30, un robot primero mueve un objeto en recta hacia arriba y después también al este, alrededor de un arco que forma un cuarto de círculo de 4.80 cm de radio que se encuentra en un plano vertical este-oeste. Luego el robot mueve el objeto hacia arriba y al norte, a través de un cuarto de círculo de 3.70 cm de radio que se encuentra en un plano vertical norte-sur. Encuentre (a) la magnitud del desplazamiento total del objeto y (b) el ángulo que el desplazamiento total forma con la vertical.

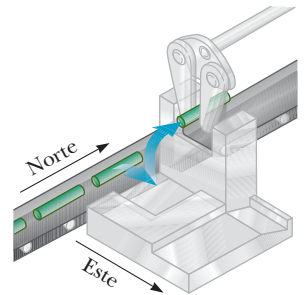


Figura P3.30

31. **Problema de repaso** Usted está de pie sobre el suelo en el origen de un sistema coordenado. Un avión vuela sobre usted con velocidad constante paralela al eje x y a una altura fija de 7.60×10^3 m. En el tiempo $t = 0$ el avión está directamente arriba de usted de modo que el vector que va de usted a él es $\vec{P}_0 = 7.60 \times 10^3 \hat{j}$ m. En $t = 30.0$ s, el vector de posición que va de usted al avión es $\vec{P}_{30} = (8.04 \times 10^3 \hat{i} + 7.60 \times 10^3 \hat{j})$ m como se ve en la figura 3.31. Determine la magnitud y orientación del vector de posición del avión en $t = 45.0$ s.

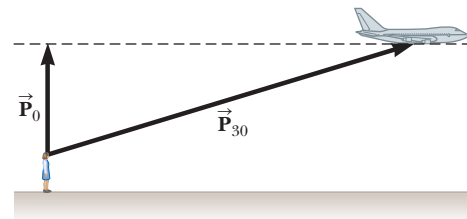


Figura P3.31

32. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Un comprador que empuja un carrito a través de un mercado sigue las instrucciones hacia los productos enlatados y se mueve a través de un desplazamiento $8.00\hat{i}$ m por un pasillo. Luego hace un giro 90.0° y se mueve 3.00 m a lo largo del eje y . A continuación, hace otro giro de 90.0° y se mueve a lo largo de 4.00 m del eje x . Cada comprador que siga estas instrucciones correctamente termina a 5.00 m del punto de partida.



- 33. AMT** En la figura P3.33, el segmento de recta representa una trayectoria desde el punto con vector de posición $(5\hat{i} + 3\hat{j})$ m al punto con posición $(16\hat{i} + 12\hat{j})$ m. El punto \textcircled{A} está en dicha trayectoria, a una fracción f del camino hacia el destino. (a) Encuentre el vector de posición del punto \textcircled{A} en términos de f . (b) Evalúe la expresión del inciso (a) en el caso $f = 0$. (c) Explique si el resultado en (b) es razonable. (d) Evalúe la expresión para $f = 1$. (e) Explique si el resultado en (d) es razonable.

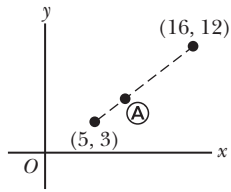


Figura P3.33 El punto \textcircled{A} está a una fracción f de la distancia desde el punto inicial $(5, 3)$ al punto final $(16, 12)$.

PROBLEMAS ADICIONALES

- 34. CE** Usted está pasando el verano como ayudante para aprender cómo navegar en un barco grande que transporta carga a través del lago Erie. Un día, usted y su barco deben viajar a través del lago a una distancia de 200 km viajando hacia el norte de su puerto de origen a su puerto de destino. Justo cuando sale de su puerto de origen, la electrónica de la nave se descompone. El capitán continúa navegando, afirmando que puede depender de sus años de experiencia en el agua para guiarse. Los ingenieros trabajan en el sistema de navegación mientras el barco continúa navegando, y los vientos y las olas lo empujan fuera de curso. Eventualmente, regresa suficiente sistema de navegación para indicarle su ubicación. El sistema le indica que su posición actual es a 50.0 km al norte del puerto de origen y a 25.0 km al este del puerto. El capitán está un poco avergonzado de que su barco esté tan lejos de curso y le grita una orden a usted para que le diga de inmediato qué rumbo debe establecer desde su posición actual al puerto de destino. Dele un ángulo de rumbo apropiado.
- 35. T** Una persona que sale a caminar sigue la trayectoria que se muestra en la figura P3.35. El viaje total consiste en cuatro trayectorias en línea recta. Al final de la caminata, ¿cuál es el desplazamiento resultante de la persona, medido desde el punto de partida?

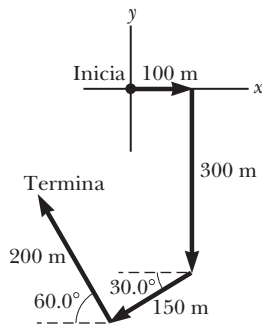


Figura P3.35

- 36.** Un barco transbordador lleva turistas entre tres islas. Navega de la primera isla a la segunda isla, a 4.76 km de distancia, en una dirección 37.0° al noreste. Luego navega de la segunda isla a la tercera en una dirección de 69.0° al noroeste. Por último, regresa a la primera isla y navega en una dirección 28.0° al sureste. Calcule la distancia entre (a) la segunda y tercera islas y (b) la primera y tercera islas.

- 37.** Dos vectores \vec{A} y \vec{B} tienen magnitudes exactamente iguales. Para que la magnitud de $\vec{A} + \vec{B}$ sea 100 veces más grande que la magnitud de $\vec{A} - \vec{B}$, ¿cuál debe ser el ángulo entre ellos?
- 38. S** Dos vectores \vec{A} y \vec{B} tienen magnitudes exactamente iguales. Para que la magnitud de $\vec{A} + \vec{B}$ sea n veces más grande que la magnitud de $\vec{A} - \vec{B}$, ¿cuál debe ser el ángulo entre ellos?

- 39. AMT** **Problema de repaso** El animal de peluche más grande del mundo es una víbora de 420 m de largo, construida por niños noruegos. Suponga que la víbora se encuentra en un parque, como se muestra en la figura P3.39, y forma dos lados rectos de un ángulo de 105° , con un lado de 240 m de largo. Olaf e Inge corren una competencia que inventan. Inge corre directamente desde la cola de la víbora a su cabeza, y Olaf parte del mismo lugar en el mismo momento, pero corre a lo largo de la víbora. (a) Si ambos niños corren uniformemente a 12.0 km/h, ¿cuánto tiempo antes que Olaf, Inge llega a la cabeza de la víbora? (b) Si Inge corre la carrera de nuevo con una rapidez constante de 12.0 km/h, con que rapidez constante debe correr Olaf para llegar al final de la serpiente al mismo tiempo que Inge?

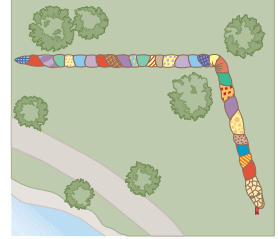


Figura P3.39

- 40. C/C** Ecoturistas utilizan su indicador de sistema de posicionamiento global para determinar su ubicación dentro de un jardín botánico como latitud $0.002\ 43$ grados al sur del ecuador, longitud $75.642\ 38$ grados oeste. Ellos desean visitar un árbol en la latitud $0.001\ 62$ grados norte longitud $75.644\ 26$ grados oeste. (a) Determine la distancia de la línea recta y la dirección en la que se puede caminar para alcanzar el árbol de la siguiente manera. Primero modele la Tierra como una esfera de radio 6.37×10^6 m para determinar las componentes hacia el oeste y hacia el norte de desplazamiento necesario, en metros. Luego modelar la Tierra como un plano superficial para completar el cálculo. (b) Explique por qué es posible utilizar estos dos modelos geométricos juntos para resolver el problema.
- 41.** Un vector está dado por $\vec{R} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$. Encuentre (a) las magnitudes de los componentes x , y y z , (b) la magnitud de \vec{R} y (c) los ángulos entre \vec{R} y los ejes x , y y z .

- 42. CE** Usted está trabajando como asistente de un controlador de tráfico aéreo en el aeropuerto local, del cual aterrizan y despegan los pequeños aviones. Su trabajo es asegurarse de que los aviones no estén más cerca uno del otro que una distancia de separación segura mínima de 2.00 km. Usted observa dos pequeñas aeronaves en su pantalla de radar, sobre la superficie del océano. La primera está a una altitud 800 m sobre la superficie, distancia horizontal 19.2 kilómetros, y 25.0° al sur del oeste. El segundo avión está a una altitud 1 100 m, distancia horizontal 17.6 km, y 20.0° sur del oeste. A su supervisor le preocupa que los dos aviones estén demasiado cerca y le pide la distancia de separación de los dos aviones. (Coloque el eje x al oeste, el eje y al sur, y el eje z vertical.)

- 43. C/C** **Problema de repaso.** La posición instantánea de un objeto se especifica por su vector de posición dirigido desde un origen fijo a la posición del objeto, representado como partícula. Suponga para cierto objeto que el vector de posición es una

función de tiempo dado por $\vec{r} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 2t\hat{k}$, donde \vec{r} está en metros y t en segundos. (a) evaluar $d\vec{r}/dt$. (b) ¿Qué cantidad física representa $d\vec{r}/dt$ para el objeto?

44. Los vectores \vec{A} y \vec{B} tienen magnitudes iguales de 5.00. La suma de \vec{A} y \vec{B} es el vector $6.00\hat{j}$. Determina el ángulo entre \vec{A} y \vec{B} .
45. Un paralelepípedo rectangular tiene dimensiones a , b , y c como se muestra en la figura P3.45. (a) Obtenga una expresión vectorial para el vector diagonal de la cara \vec{R}_1 . (b) ¿Cuál es la magnitud de este vector? c Observe que \vec{R}_1 , $c\hat{k}$ y \vec{R}_2 forman un triángulo rectángulo. Obtenga una expresión vectorial para el vector diagonal cuerpo \vec{R}_2 .

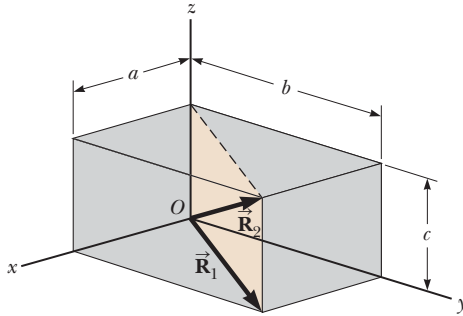


Figura P3.45

PROBLEMA DE DESAFÍO

46. Un pirata ha enterrado su tesoro en una isla con cinco árboles situados en los puntos $(30.0 \text{ m}, -20.0 \text{ m})$, $(60.0 \text{ m}, 80.0 \text{ m})$, $(-10.0 \text{ m}, -10.0 \text{ m})$, $(40.0 \text{ m}, -30.0 \text{ m})$, y $(-70.0 \text{ m}, 60.0 \text{ m})$,

todos medidos con respecto a algún origen, como se muestra en la figura P3.46. Su diario de a bordo le instruye comenzar en el árbol A y avanzar hacia el árbol B, pero cubrir sólo la mitad de la distancia entre A y B. Luego, moverse al árbol C, cubrir un tercio de la distancia entre su ubicación actual y C. Después avanzar hacia el árbol D, cubriendo un cuarto de la distancia entre donde está y D. Finalmente avanzar hacia el árbol E, cubriendo una quinta parte de la distancia entre usted y E, detenerse y cavar. (a) Suponga que tiene correctamente determinando el orden en que el pirata etiquetó los árboles como A, B, C, D y E como se muestra en la figura. ¿Cuáles son las coordenadas del punto donde dejó su tesoro enterrado? (b) ¿Qué pasaría si? ¿Y si no se sabe muy bien la forma en que el pirata etiqueta los árboles? ¿Cómo modificaría la respuesta si ha modificado el orden de los árboles, por ejemplo, a B(30 m, -20 m), A(60 m, 80 m), E(-10 m, -10 m), C(40 m, -30 m) y D (-70 m, 60 m)? Establezca un razonamiento para mostrar que la respuesta no depende del orden en que se etiquetan los árboles.

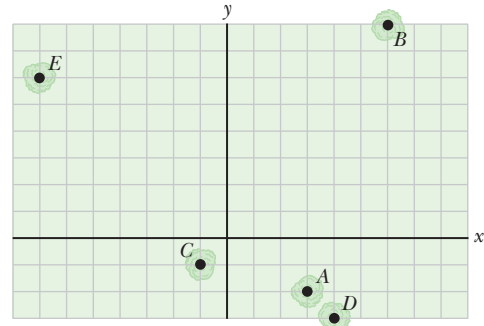


Figura P3.46





4



Movimiento en dos dimensiones



Compare las formas de las trayectorias de: un adolescente saltando de un acantilado; chispas generadas por un soldador trabajando; agua que sale de un bebedero del parque; las corrientes de una fuente de agua. (Superior izquierda: André Berg/EyeEm/Getty Images; Superior derecha: wi6995/Shutterstock.com; Inferior derecha: Kristina Postnikova/Shutterstock.com; Inferior izquierda: Flashon Studio/Shutterstock.com)

- 4.1 Vectores de posición, velocidad y aceleración
- 4.2 Movimiento en dos dimensiones con aceleración constante
- 4.3 Movimiento de un proyectil
- 4.4 Modelo de análisis: Partícula en movimiento circular uniforme
- 4.5 Aceleraciones tangencial y radial
- 4.6 Velocidad y aceleración relativas

IMAGINE

En el capítulo anterior, usted estaba navegando por la isla

Catalina en un velero. Al acercarse a la isla, ve a los adolescentes haciendo volteretas desde un acantilado. Saca su teléfono inteligente, pone la cámara, y toma fotografías de un adolescente que viaja a lo largo de su trayectoria. Usando una aplicación especial en su teléfono, combina varias imágenes en una para que pueda ver varias imágenes del adolescente que cae. Parece estar siguiendo un camino de una forma particular conforme cae. ¿Cuál cree que es esa forma? Al entrar en el puerto de la Isla Catalina, ve a un soldador que realiza reparaciones en un barco de metal. Se produce una lluvia de chispas. Observa los caminos de cada una de las chispas y observa su forma. En tierra, ve una fuente en un parque y cada una de las corrientes de agua se proyecta a un ángulo en el aire y sigue una cierta forma a medida que regresan. Toma agua de un bebedero de agua y observe la forma del agua proyectada desde el bebedero. ¿Cuál es esa forma que está viendo una y otra vez?

CONEXIONES

En el capítulo 2, estudiamos el movimiento en una dimensión. En el capítulo 3, aprendimos acerca de las cantidades vectoriales en general, la adición de vectores, y las componentes de un vector. Ahí nos concentramos en los vectores de posición. En este capítulo, vamos a ver cómo usar los vectores del capítulo 3 para modificar nuestras expresiones matemáticas para la posición, velocidad, y la aceleración del capítulo 2 para considerar el movimiento en dos dimensiones. Estudiaremos dos tipos importantes de movimiento bidimensional: el movimiento de proyectiles, como cuando se lanza una pelota de béisbol o el del adolescente clavadista en el párrafo anterior, y el movimiento circular, como el movimiento idealizado de un planeta alrededor de una estrella. También analizaremos el concepto de movimiento relativo, que muestra por qué los observadores en marcos de referencia diferentes pueden medir diferentes posiciones y velocidades para una partícula dada. En este capítulo terminaremos nuestra discusión de las maneras de describir el movimiento de una partícula, y nos va a servir de base para el capítulo 5, en el que estudiaremos la causa de los cambios en el movimiento de una partícula.

4.1 Vectores de posición, velocidad y aceleración

En una dimensión, con un solo valor numérico se describe la posición de una partícula, pero en dos dimensiones, indicamos su posición mediante su **vector de posición** \vec{r} , que se dibuja desde el origen de algún sistema coordenado a la posición de la partícula en el plano xy , como en la figura 4.1. En el tiempo t_i , la partícula está en el punto **A** descrito por el vector de posición \vec{r}_i . En un tiempo posterior t_f , está en el punto **B**, descrito por su vector de posición \vec{r}_f . La trayectoria de **A** a **B** no necesariamente es una línea recta. Conforme la partícula se mueve de **A** a **B** en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$, su vector de posición cambia de \vec{r}_i a \vec{r}_f . Como aprendió en el capítulo 2, el desplazamiento es un vector, y el desplazamiento de la partícula es la diferencia entre su posición final y su posición inicial. Ahora se define el **vector desplazamiento** $\Delta\vec{r}$ para una partícula, como la que se muestra en la figura 4.1, como la diferencia entre su vector de posición final y su vector de posición inicial:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i \quad 4.1$$

En la figura 4.1 se indica la dirección de $\Delta\vec{r}$. Como se ve en la figura, la magnitud de $\Delta\vec{r}$ es *menor* que la distancia recorrida a lo largo de la trayectoria curva que sigue la partícula.

Como vio en el capítulo 2, con frecuencia es útil cuantificar el movimiento al obtener la relación de un desplazamiento, dividido entre el intervalo de tiempo durante el que ocurre dicho desplazamiento, que proporciona la relación de cambio de la posición. La cinemática bidimensional (o tridimensional) es similar a la cinemática unidimensional, pero ahora se debe usar toda la notación vectorial completa en lugar de signos positivos y negativos para indicar la dirección del movimiento.

La **velocidad promedio** \vec{v}_{prom} de una partícula durante el intervalo de tiempo Δt se define como el desplazamiento de la partícula dividido entre el intervalo de tiempo:

$$\vec{v}_{\text{prom}} \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad (4.2)$$

Al multiplicar o dividir una cantidad vectorial por una cantidad escalar positiva como Δt sólo cambia la magnitud del vector, no su dirección. Puesto que el desplazamiento es una cantidad vectorial y el intervalo de tiempo es una cantidad escalar positiva, se concluye que la velocidad promedio es una cantidad vectorial dirigida a lo largo de $\Delta\vec{r}$.

La velocidad promedio entre los puntos es *independiente de la trayectoria*; porque la velocidad promedio es proporcional al desplazamiento, que sólo depende de los vectores de posición inicial y final y no de la trayectoria seguida. Al igual que el movimiento unidimensional, si una partícula comienza su movimiento en algún punto y regresa a dicho punto a través de cualquier trayectoria, su velocidad promedio es cero para este viaje, porque su desplazamiento es cero. Considere de nuevo a los jugadores de basquetbol en la cancha de la figura 2.2 (página 22). Previamente sólo se consideró su movimiento unidimensional de ida y vuelta entre las canastas. Sin embargo, en realidad, se mueven sobre una superficie bidimensional, y corren de ida y vuelta entre las canastas así como de izquierda a derecha a través del ancho de la cancha. Al iniciar desde una canasta, un jugador puede seguir una trayectoria en dos dimensiones muy complicada. No obstante, hasta regresar a la canasta original, la velocidad promedio de un jugador es cero porque el desplazamiento del jugador para todo el viaje es cero.

Considere de nuevo el movimiento de una partícula entre dos puntos en el plano xy como se muestra en la figura 4.2 (página 70). La curva discontinua muestra la trayectoria de la partícula desde el punto **A** hasta el punto **B**. Conforme el intervalo de tiempo sobre el que se observa el movimiento se vuelve más y más pequeño (esto es, a medida que **B** se mueve a **B'** y después a **B''**, y así sucesivamente), la dirección del desplazamiento tiende a la recta tangente a la trayectoria en **A**. La **velocidad instantánea** \vec{v} se define como el límite de la velocidad promedio $\Delta\vec{r}/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero:

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (4.3)$$

◀ **Vector desplazamiento**
(Compare con la ecuación 2.1)

◀ **Velocidad promedio**
(Compare con la ecuación 2.2)

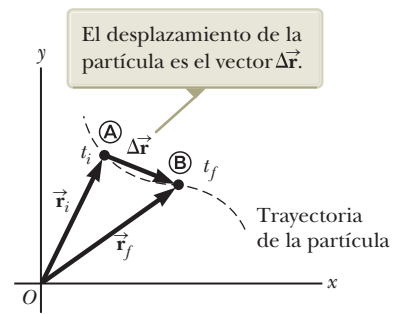
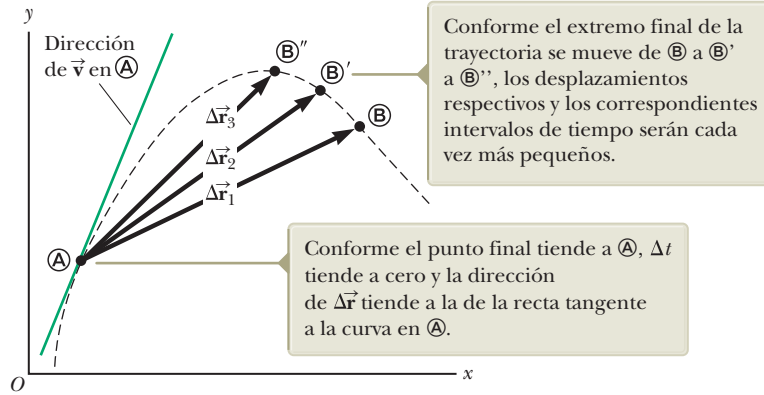


Figura 4.1 Una partícula que se mueve en el plano xy se ubica con el vector de posición \vec{r} , que se dibuja desde el origen hasta la partícula. El desplazamiento de la partícula conforme se mueve de **A** a **B** en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$ es igual al vector $\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_f - \vec{r}_i$.

◀ **Velocidad instantánea**
(Compare con la ecuación 2.5)



Figura 4.2 A medida que una partícula se mueve entre dos puntos, su velocidad promedio está en la dirección del vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$. Por definición, la velocidad instantánea en \textcircled{A} se dirige a lo largo de la recta tangente a la curva en \textcircled{A} .



Esto es, la velocidad instantánea en el punto \textcircled{A} es igual a la derivada del vector de posición respecto del tiempo, evaluada en el punto \textcircled{A} . La dirección del vector velocidad instantánea en cualquier punto en la trayectoria de una partícula es a lo largo de una recta tangente a la trayectoria en dicho punto y en la dirección del movimiento.

La magnitud del vector velocidad instantánea $v = |\vec{v}|$ de una partícula se llama *rapidez* de la partícula, que es una cantidad escalar.

Cuando una partícula se mueve de un punto a otro a lo largo de cierta trayectoria, su vector velocidad instantánea cambia de \vec{v}_i en el tiempo t_i a \vec{v}_f en el tiempo t_f . Conocer la velocidad en dichos puntos permite determinar la aceleración promedio de la partícula. La **aceleración promedio** \vec{a}_{prom} de una partícula se define como el cambio en su vector velocidad instantánea $\Delta\vec{v}$ dividido entre el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre dicho cambio:

► **Aceleración promedio**
(Compare con la ecuación 2.9)

$$\vec{a}_{\text{prom}} \equiv \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} \quad (4.4)$$

Puesto que \vec{a}_{prom} es la proporción de una cantidad vectorial $\Delta\vec{v}$ y una cantidad escalar positiva Δt , se concluye que la aceleración promedio es una cantidad vectorial dirigida a lo largo de $\Delta\vec{v}$. Como se indica en la figura 4.3, el vector $\Delta\vec{v}$ es la diferencia del vector \vec{v}_f y \vec{v}_i ; el vector, $\Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$.

Cuando la aceleración promedio de una partícula cambia en el transcurso de diferentes intervalos de tiempo, es útil definir su aceleración instantánea. La **aceleración instantánea** \vec{a} se define como el valor límite de la función $\Delta\vec{v}/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero:

► **Aceleración instantánea**
(Compare con la ecuación 2.10)

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (4.5)$$

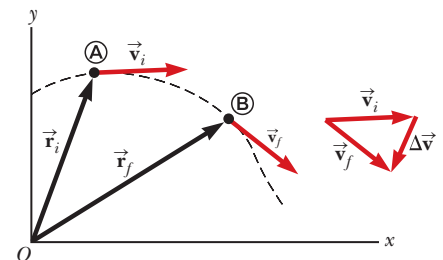
En otras palabras, la aceleración instantánea es igual a la derivada del vector velocidad respecto del tiempo.

Pueden ocurrir varios cambios cuando una partícula se acelera. En primer lugar, la magnitud del vector velocidad (rapidez) puede cambiar con el tiempo como en un movimiento rectilíneo unidimensional. En segundo lugar, la dirección del vector de velocidad puede cambiar con el tiempo, incluso si su magnitud rapidez se mantiene constante como en el movimiento de dos dimensiones a lo largo de una trayectoria curva. Por último, tanto la magnitud como la dirección del vector velocidad puede cambiar de forma simultánea.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 4.1

Suma vectorial Como se mencionó en el capítulo 3, la adición vectorial se puede aplicar a cualquier tipo de cantidad vectorial. Por ejemplo, la figura 4.3 muestra la adición de vectores velocidad con el uso del método gráfico.

Figura 4.3 Una partícula se mueve de la posición \textcircled{A} a la posición \textcircled{B} . Su vector velocidad cambia de \vec{v}_i a \vec{v}_f . Los diagramas vectoriales a la derecha muestran dos como determinar el vector $\Delta\vec{v}$ de las velocidades inicial y final.



- EXAMEN RÁPIDO 4.2** Considere los siguientes controles en un automóvil en movimiento: acelerador, freno, volante. ¿En esta lista cuáles son los controles que provocan una aceleración en el automóvil? (a) los tres controles, (b) el acelerador y el freno, (c) sólo el freno, (d) sólo el acelerador, (e) sólo el volante.

4.2 Movimiento en dos dimensiones con aceleración constante

En la sección 2.7 se investigó el movimiento unidimensional de una partícula bajo aceleración constante y se desarrolló el modelo de partícula bajo aceleración constante. Ahora considere el movimiento bidimensional durante el cual la aceleración de una partícula permanece constante tanto en magnitud como en dirección. Como se verá, este método es útil para analizar algunos tipos comunes de movimiento.

En la sección 4.1, consideramos vectores de posición para una partícula y los representamos como flechas. Ahora, recordemos nuestra discusión sobre las componentes vectoriales en la sección 3.4. Considere una partícula ubicada en el plano xy en una posición con coordenadas cartesianas (x, y) como en la figura 4.4. El punto se puede especificar por el vector de posición \vec{r} , que en forma de vector unitario está dado por

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \quad (4.6)$$

donde x , y , y \vec{r} cambia con el tiempo conforme la partícula se mueve mientras que los vectores unitarios \hat{i} y \hat{j} permanece constante.

Necesitamos enfatizar un punto importante en cuanto al movimiento en dos dimensiones. Imagine un disco de hockey de aire que se mueve en línea recta a lo largo de una superficie perfectamente a nivel y libre de fricción de una mesa de hockey de aire. La figura 4.5a muestra un diagrama de movimiento desde arriba de este disco. Recuerde que en la sección 2.4 se vinculó la aceleración de un objeto con una fuerza sobre el objeto. Puesto que no hay fuerzas sobre el disco en el plano horizontal, se mueve con velocidad constante en la dirección x . Ahora suponga que sopla sobre el disco cuando pasa por su posición, con la fuerza de su soplido *exactamente* hacia la dirección y . Puesto que la fuerza de este soplido no tiene componente en la dirección x , no causa aceleración en la dirección x . Sólo una aceleración momentánea en la dirección y , lo que imprime al disco una componente de velocidad y constante una vez que la fuerza del soplido cesa. Después de soplar sobre el disco, su componente de velocidad en la dirección x no cambia, como se muestra en la figura 4.5b. La componente y del disco en la ecuación 4.6 se mantuvo constante antes del soplido, solo que está aumentando después. La generalización de este experimento simple es que el **movimiento en dos dimensiones se puede representar como dos movimientos independientes en cada una de las dos direcciones perpendiculares asociadas con los ejes x y y . Esto es: cualquier influencia en la dirección y no afecta el movimiento en la dirección x y viceversa.**

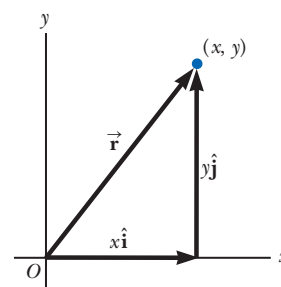
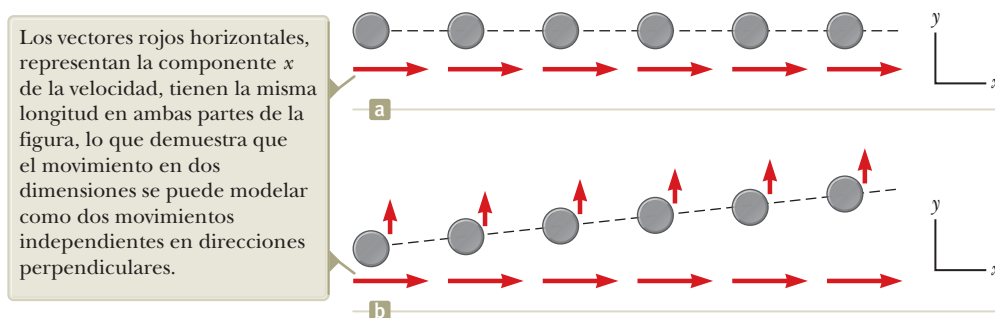


Figura 4.4 El punto cuyas coordenadas cartesianas son (x, y) se pueden representar por el vector de posición $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$.



Los vectores rojos horizontales, representan la componente x de la velocidad, tienen la misma longitud en ambas partes de la figura, lo que demuestra que el movimiento en dos dimensiones se puede modelar como dos movimientos independientes en direcciones perpendiculares.

Figura 4.5 (a) Un disco se mueve a través de una mesa de hockey de aire horizontal con velocidad constante en la dirección x . (b) Después de aplicar al disco un soplido en la dirección y , el disco gana una componente y de velocidad, pero la componente x no es afectada por la fuerza en la dirección perpendicular.

Si se conoce el vector de posición, la velocidad de la partícula se puede obtener a partir de las ecuaciones 4.3 y 4.6, que dan

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} \quad (4.7)$$

Puesto que la aceleración \vec{a} de la partícula se supone constante en esta explicación, sus componentes a_x y a_y también son constantes. Por tanto, se le puede representar como una partícula bajo aceleración constante independiente en cada una de las dos direcciones y aplicar las ecuaciones de cinemática por separado a las componentes x y y del vector velocidad. Al sustituir, de la ecuación 2.13, $v_{xf} = v_{xi} + a_x t$ y $v_{yf} = v_{yi} + a_y t$ en la ecuación 4.7 para determinar la velocidad final en cualquier tiempo t , se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{v}_f &= (v_{xi} + a_x t) \hat{i} + (v_{yi} + a_y t) \hat{j} = (v_{xi} \hat{i} + v_{yi} \hat{j}) + (a_x \hat{i} + a_y \hat{j}) t \\ \vec{v}_f &= \vec{v}_i + \vec{a} t \quad (\text{para } \vec{a} \text{ constante}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Vector velocidad como una función del tiempo para una partícula bajo aceleración constante en dos dimensiones (Compare a la ecuación 2.13)

Este resultado establece que la velocidad de una partícula en algún tiempo t es igual a la suma vectorial de su velocidad inicial \vec{v}_i en el tiempo $t = 0$ y la velocidad adicional $\vec{a} t$ adquirida en el tiempo t como resultado de aceleración constante.

De igual modo, de la ecuación 2.16 se sabe que las coordenadas x y y de una partícula que se mueve con aceleración constante son

$$x_f = x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad y_f = y_i + v_{yi} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación 4.6 (y etiquetar el vector de posición final \vec{r}_f se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{r}_f &= (x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2) \hat{i} + (y_i + v_{yi} t + \frac{1}{2} a_y t^2) \hat{j} \\ &= (x_i \hat{i} + y_i \hat{j}) + (v_{xi} \hat{i} + v_{yi} \hat{j}) t + \frac{1}{2} (a_x \hat{i} + a_y \hat{j}) t^2 \\ \vec{r}_f &= \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \quad (\text{para constante } \vec{a}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Vector de posición como una función del tiempo para una partícula bajo aceleración constante en dos dimensiones (Compare con la ecuación 2.16)

La ecuación 4.9 dice que el vector de posición \vec{r}_f de una partícula es la suma vectorial de la posición original \vec{r}_i , un desplazamiento $\vec{v}_i t$ que surge de la velocidad inicial de la partícula y un desplazamiento $\frac{1}{2} \vec{a} t^2$ que resulta de la aceleración constante de la partícula.

Podemos considerar a las ecuaciones 4.8 y 4.9 como la representación matemática de una versión en dos dimensiones del modelo de la partícula bajo aceleración constante. En la figura 4.6 se muestran representaciones gráficas de las ecuaciones 4.8 y 4.9. Las componentes de los vectores de posición y velocidad también se ilustran en la figura.

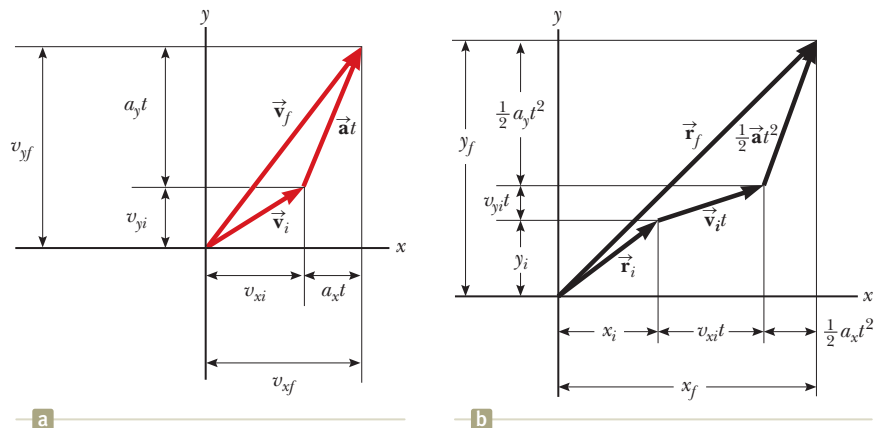


Figura 4.6 Representaciones y componentes vectoriales de (a) la velocidad y (b) la posición de una partícula bajo una aceleración constante en dos dimensiones.

Ejemplo 4.1 Movimiento en un plano

Una partícula que se mueve en el plano xy , parte del origen en $t = 0$ con una velocidad inicial que tiene una componente x de 20 m/s y otra componente y de -15 m/s. La partícula experimenta una aceleración en la dirección x , dada por $a_x = 4.0$ m/s².

(A) Determine el vector velocidad total en cualquier momento.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Las componentes de la velocidad inicial dicen que la partícula inicia su movimiento hacia la derecha y abajo. La componente x de velocidad comienza en 20 m/s y aumenta en 4.0 m/s cada segundo. La componente y de velocidad nunca cambia de su valor inicial de -15 m/s. En la figura 4.7 se bosqueja un diagrama de movimiento de la situación. Puesto que la partícula acelera en la dirección $+x$, su componente de velocidad en esta dirección aumenta y la trayectoria se curva como se muestra en el diagrama. Note que el espaciado entre imágenes sucesivas aumenta conforme pasa el tiempo, porque la rapidez aumenta. La colocación de los vectores aceleración (morado) y velocidad (rojo) en la figura 4.7 ayuda a conceptualizar aún más la situación.

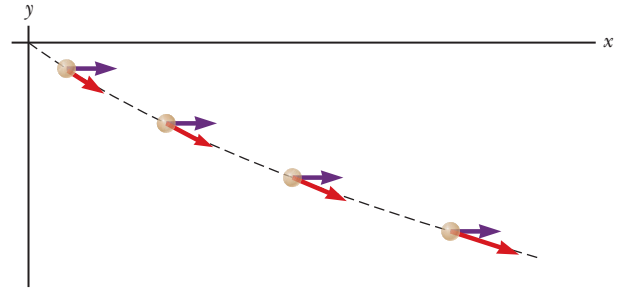


Figura 4.7 (Ejemplo 4.1) Diagrama de movimiento para la partícula. Los vectores velocidad se muestran en rojo y los vectores aceleración en morado.

Categorizar Puesto que la velocidad inicial tiene componentes en las direcciones x y y , este problema se clasifica como uno que supone una partícula que se mueve en dos dimensiones. Dado que la partícula sólo tiene una componente x de aceleración, la modelamos como una *partícula bajo aceleración constante* en la dirección x y una *partícula bajo velocidad constante* en la dirección y .

Analizar Para comenzar el análisis matemático, se hace

$$v_{xi} = 20 \text{ m/s}, v_{yi} = -15 \text{ m/s}, a_x = 4.0 \text{ m/s}^2, \text{ y } a_y = 0.$$

Aplique la ecuación 4.8 para el vector velocidad:

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t = (v_{xi} + a_x t)\hat{i} + (v_{yi} + a_y t)\hat{j}$$

$$\vec{v}_f = [20 + (4.0)t]\hat{i} + [-15 + (0)t]\hat{j}$$

Sustituir valores numéricos en unidades métricas.

$$(1) \vec{v}_f = [(20 + 4.0t)\hat{i} - 15\hat{j}]$$

Finalizar Note que la componente x de velocidad aumenta en el tiempo mientras la componente y permanece constante; este resultado es consistente con lo predicho.

(B) Calcule la velocidad y la rapidez de la partícula en $t = 5.0$ s y el ángulo que el vector velocidad forma con el eje x .

SOLUCIÓN**Analizar**

Evalúe el resultado de la ecuación (1) en $t = 5.0$ s:

$$\vec{v}_f = \{[20 + 4.0(5.0)]\hat{i} - 15\hat{j}\} = (40\hat{i} - 15\hat{j}) \text{ m/s}$$

Determine el ángulo θ que \vec{v}_f forma con el eje x en $t = 5.0$ s:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{yf}}{v_{xf}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-15 \text{ m/s}}{40 \text{ m/s}}\right) = -21^\circ$$

Evalúe la rapidez de la partícula como la magnitud de \vec{v}_f :

$$v_f = |\vec{v}_f| = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{(40)^2 + (-15)^2} \text{ m/s} = 43 \text{ m/s}$$

Finalizar El signo negativo para el ángulo θ indica que el vector velocidad se dirige a un ángulo de 21° abajo del eje x positivo. Note que, si se calcula v_i a partir de las componentes x y y de \vec{v}_i , se encuentra que $v_f > v_i$. ¿Esto es consistente con la predicción?

continúa



4.1 continuación

(C) Determine las coordenadas x y y de la partícula en cualquier tiempo t y su vector de posición en este tiempo.

SOLUCIÓN

Analizar

Aplique la ecuación 4.9 para el vector de posición:

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 = (x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2) \hat{i} + (y_i + v_{yi} t + \frac{1}{2} a_y t^2) \hat{j}$$

Sustituya los valores numéricos en unidades metricas:

$$\vec{r}_f = [0 + (20)t + \frac{1}{2}(4.0)t^2] \hat{i} + [0 + (-15)t + \frac{1}{2}(0)t^2] \hat{j}$$

$$\vec{r}_f = (20t + 2.0t^2) \hat{i} - 15t \hat{j}$$

Finalizar Considere ahora un caso límite para valores muy grandes de t .

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Qué ocurriría si se espera un tiempo considerable y después se observa el movimiento de la partícula? ¿Cómo describiría el movimiento de la partícula para valores considerables del tiempo?

Respuesta Al observar la figura 4.7 es claro que la trayectoria de la partícula se curva hacia el eje x . No hay razón para suponer que esta tendencia cambiará, lo que sugiere que la trayectoria se volverá más y más paralela al eje x conforme crezca el tiempo. En términos matemáticos, la ecuación 1) muestra que la componente y de velocidad permanece constante mientras la componente x crece linealmente con t . Por tanto, cuando t es muy grande, la componente x de velocidad será mucho mayor que la componente y , lo que sugiere que el vector velocidad se volverá cada vez más paralelo al eje x . Las magnitudes de x_f como y_f continúan creciendo con el tiempo, aunque x_f crece mucho más rápido.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 4.2

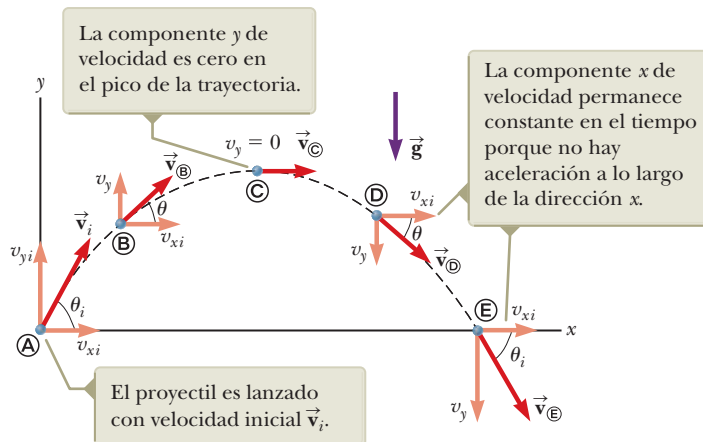
Aceleración en el punto más alto

Como se explico en la Prevencción de riesgos ocultos 2.8, muchas personas afirman que la aceleración de un proyectil en el punto más alto de su trayectoria es cero. Este error surge de la confusión entre velocidad vertical cero y aceleración cero. Si el proyectil experimentara aceleración cero en el punto más alto, su velocidad en dicho punto no cambiaría; sucedería que, ¡desde ese momento el proyectil se movería horizontalmente con rapidez constante! Sin embargo, esto no ocurre, porque la aceleración *no* es cero en ninguna parte de la trayectoria.

Figura 4.8 Trayectoria parabólica de un proyectil que sale del origen con velocidad \vec{v}_i . El vector velocidad \vec{v} cambia con el tiempo tanto en magnitud como en dirección. Este cambio es el resultado de la aceleración $\vec{a} = \vec{g}$ en la dirección y negativa.

4.3 Movimiento de proyectil

Quien haya observado una pelota de béisbol en movimiento ha observado el movimiento de un proyectil. La bola se mueve en una trayectoria curva y regresa al suelo. El **movimiento de proyectil** de un objeto es simple de analizar a partir de dos suposiciones: 1) la aceleración de caída libre es constante en el intervalo de movimiento y se dirige hacia abajo¹ y 2) el efecto de la resistencia del aire es despreciable.² Con estas suposiciones, se encuentra que la trayectoria de un proyectil, que llamaremos la *trayectoria*, *siempre* es una parábola, como se muestra en la figura 4.8. **A lo largo de este capítulo se aplican estas suposiciones.** La parábola es la forma para *todas* las trayectorias descritas en el “Imagine” de este capítulo: el adolescente clavadista, las chispas causadas por el soldador, el agua en la fuente del parque, y el agua en el bebedero.



¹Esta suposición es razonable en tanto el alcance del movimiento sea pequeño en comparación con el radio de la Tierra (6.4×10^6 m). En efecto, esto equivale a suponer que la Tierra es plana en el intervalo considerado del movimiento.

²Dicha suposición, por lo general, *no* está justificada, en especial a velocidades altas. Además, cualquier giro impartido a un proyectil, como el que se aplica cuando un pitcher lanza una bola curva, origina algunos efectos muy interesantes asociados con fuerzas aerodinámicas, que se discutirán en el capítulo 14.

La expresión para el vector de posición del proyectil como función del tiempo se sigue directamente de la ecuación 4.9, siendo su aceleración la de la gravedad, $\vec{a} = \vec{g}$:

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \quad (4.10)$$

donde las componentes x y y de la velocidad inicial del proyectil son:

$$v_{xi} = v_i \cos \theta_i \quad v_{yi} = v_i \sin \theta_i \quad (4.11)$$

En la figura 4.9, se muestra una representación pictórica de la trayectoria de una partícula descrita por la función de posición en la ecuación 4.10, para un proyectil lanzado desde el origen, por lo que $\vec{r}_i = 0$. La posición final de una partícula se considera como la superposición de su posición inicial \vec{r}_i , el término $\vec{v}_i t$, que es su desplazamiento si no hubiese aceleración presente; y el término $\frac{1}{2} \vec{g} t^2$ que surge de su aceleración debida a la gravedad. En otras palabras, si no hubiera aceleración gravitacional, la partícula continuaría moviéndose a lo largo de una ruta recta en la dirección de \vec{v}_i . En consecuencia, la distancia vertical $\frac{1}{2} \vec{g} t^2$ desde la que “cae” la partícula en línea recta, es la misma distancia desde la que caería un objeto que se deja caer desde el reposo durante el mismo intervalo de tiempo.

En la sección 4.2 se estableció que el movimiento en dos dimensiones con aceleración constante se puede analizar como una combinación de dos movimientos independientes en las direcciones x y y , con aceleraciones a_x y a_y . El movimiento de proyectiles también se maneja de esta forma, con aceleración $a_x = 0$ en la dirección x y una aceleración constante en la dirección y , $a_y = -g$. Por tanto, cuando se analice el movimiento de un proyectil, debe usar dos modelos de análisis 1) movimiento de una partícula bajo velocidad constante en la dirección horizontal (ec.2.7):

$$x_f = x_i + v_{xi} t \quad (4.12)$$

y 2) partícula bajo aceleración constante en la dirección vertical (ecs. 2.13-2.17 con x intercambiada por y y $a_y = -g$):

$$v_{yf} = v_{yi} - gt \quad (4.13)$$

$$v_{y,avg} = \frac{v_{yi} + v_{yf}}{2} \quad (4.14)$$

$$y_f = y_i + \frac{1}{2}(v_{yi} + v_{yf})t \quad (4.15)$$

$$y_f = y_i + v_{yi} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (4.16)$$

$$v_{yf}^2 = v_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i) \quad (4.17)$$

Las componentes horizontal y vertical del movimiento de un proyectil son completamente independientes una de otra y se manejan por separado, con el tiempo t como la variable común para ambas componentes.

- E XAMEN RÁPIDO 4.2** (i) A medida que un proyectil lanzado hacia arriba se mueve en su trayectoria parabólica (como en la figura 4.9), ¿en qué punto a lo largo de su trayectoria los vectores velocidad y aceleración del proyectil son mutuamente perpendiculares? (a) en ninguna parte, (b) en el punto más alto, (c) en el punto de lanzamiento. (ii) Con las mismas opciones, ¿en qué punto son paralelos los vectores
- velocidad y aceleración del proyectil?

Alcance horizontal y altura máxima de un proyectil

Antes de embarcarse en algunos ejemplos, consideremos un caso especial del movimiento de un proyectil que ocurre con frecuencia. Suponga que un proyectil es lanzado desde el origen en $t_i = 0$ con una componente v_{yi} positiva, como se muestra en la figura 4.10, y regresa al mismo nivel horizontal. Esta situación es común en los deportes, en pelotas de béisbol, balones de fútbol y bolas de golf a menudo aterrizan en el mismo nivel desde el que se lanzaron.

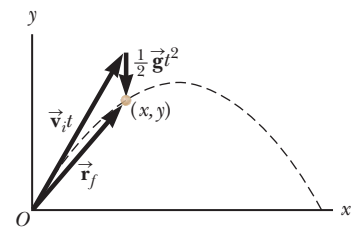


Figura 4.9 Vector de posición \vec{r}_f de un proyectil lanzado desde el origen, cuya velocidad inicial en el origen es \vec{v}_i . El vector $\vec{v}_i t$ sería el desplazamiento del proyectil si no hubiera gravedad, y el vector $\frac{1}{2} \vec{g} t^2$ es su desplazamiento vertical en una trayectoria recta debido a su aceleración gravitacional descendente.

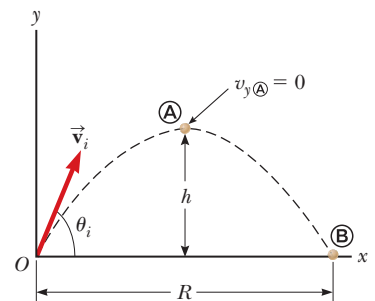


Figura 4.10 Proyectil lanzado sobre una superficie plana desde el origen en $t_i = 0$ con una velocidad inicial \vec{v}_i . La altura máxima del proyectil es h y el alcance horizontal es R . En \textcircled{A} , el máximo de la trayectoria, la partícula tiene coordenadas $(R/2, h)$.

Dos puntos en este movimiento son de especial interés para analizar: el punto máximo \textcircled{A} , que tiene coordenadas cartesianas $(R/2, h)$, y el punto \textcircled{B} , que tiene coordenadas $(R, 0)$. La distancia R se llama *alcance horizontal* del proyectil, y la distancia h es su altura máxima. Encuentre h y R matemáticamente a partir de v_i , θ_i y g .

Se puede determinar h al notar que, en el máximo, $v_{y\textcircled{A}} = 0$. Entonces, del modelo de partícula bajo aceleración constante, se puede usar la ecuación 4.13 para determinar el tiempo $t_{\textcircled{A}}$ en que el proyectil alcanza el pico:

$$v_y = v_{yi} - gt \rightarrow 0 = v_i \sin \theta_i - gt$$

$$t = \frac{v_i \sin \theta_i}{g} \quad (4.18)$$

Sustituyendo esta expresión para $t_{\textcircled{A}}$ en la ecuación 2.16 y reemplazando $y_f = y_{\textcircled{A}}$ con h , se obtiene una expresión para h en términos de la magnitud y dirección del vector de velocidad inicial

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow h = (v_i \sin \theta_i) \frac{v_i \sin \theta_i}{g} - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_i \sin \theta_i}{g} \right)^2$$

$$h = \frac{v_i^2 \sin^2 \theta_i}{2g} \quad (4.19)$$

Debido a la simetría de la trayectoria, el proyectil cubre la parte ascendente de la trayectoria a la parte superior en exactamente el mismo intervalo de tiempo que requiere para regresar al suelo desde el punto máximo. Por tanto, el alcance R es la posición horizontal del proyectil en un tiempo que es el doble del tiempo en el que llega a su punto más alto, es decir, en el instante $t_{\textcircled{B}} = 2t_{\textcircled{A}}$. Usando el modelo de partícula bajo velocidad constante, notando que $v_{xi} = v_{x\textcircled{B}} = v_i \cos \theta_i$, y haciendo $x_{\textcircled{B}} = R$ en $t = 2t_{\textcircled{A}}$, encontramos de la ecuación (4.12) que

$$x_f = x_i + v_{xi}t \rightarrow R = v_{xi}t_{\textcircled{B}} = (v_i \cos \theta_i)2t_{\textcircled{A}}$$

$$= (v_i \cos \theta_i) \frac{2v_i \sin \theta_i}{g} = \frac{2v_i^2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{g}$$

Al aplicar la identidad $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ (véase el apéndice B.4) se puede escribir R en la forma más compacta

$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g} \quad (4.20)$$

El valor máximo de R a partir de la ecuación 4.20 es $R_{\text{máx}} = v_i^2/g$. Este resultado tiene sentido porque el valor máximo de $\sin 2\theta_i$ es 1, lo que ocurre cuando $2\theta_i = 90^\circ$. Debido a esto, R es un máximo cuando $\theta_i = 45^\circ$.

La figura 4.11 ilustra varias trayectorias para un proyectil que tiene una rapidez inicial dada, pero se lanza a diferentes ángulos. Como puede ver, el alcance es máximo para $\theta_i = 45^\circ$. Además, para cualquier θ_i distinta de 45° , se alcanza un punto con coordenadas cartesianas $(R, 0)$ al usar cualquiera de los dos valores complementarios de θ_i para los cuales $\sin 2\theta_i$ da el mismo resultado como 75° y 15° . Desde luego, la altura máxima y el tiempo

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 4.3

La ecuación de alcance La ecuación 4.20 es útil para calcular R sólo para una trayectoria simétrica, como se muestra en la figura 4.11. Si la trayectoria no es simétrica, *no aplique esta ecuación*. Los modelos de partícula bajo velocidad constante y aceleración constante son importantes puntos de inicio ya que dan las componentes de la posición y velocidad de *cualquier* proyectil que se mueve con aceleración constante en dos dimensiones en *cualquier* tiempo t , sea o no simétrica la trayectoria.

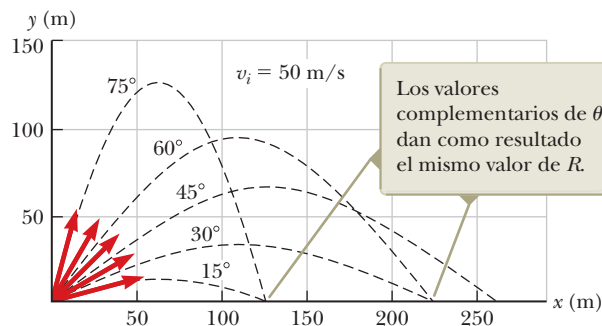


Figura 4.11 Un proyectil lanzado sobre una superficie plana desde el origen con una rapidez inicial de 50 m/s en diferentes ángulos de proyección.

de vuelo para cada uno de estos valores de θ_i son diferentes a causa de la altura máxima y el tiempo de vuelo para el valor complementario. El tiempo de vuelo depende sólo de v_{yi} y es independiente de v_{xi} .

E XAMEN RÁPIDO 4.3 Ordene los ángulos de lanzamiento para las cinco trayectorias de la figura 4.11 respecto al tiempo de vuelo, desde el tiempo de vuelo más corto al más largo.

ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Movimiento de proyectil

Cuando resuelva problemas de movimiento de proyectil, se sugiere el siguiente planteamiento:

- 1. Conceptualizar.** Piense en lo que ocurre físicamente en el problema. Establezca la representación mental al imaginar el movimiento del proyectil a lo largo de su trayectoria.
- 2. Categorizar.** Confirme que el problema supone una partícula en caída libre y que la resistencia del aire es despreciable. Seleccione un sistema coordenado con x en la dirección horizontal y y en la dirección vertical. Use la partícula bajo el modelo de velocidad constante para la componente x del movimiento. Use la partícula bajo el modelo de aceleración constante para la dirección y . En el caso especial del proyectil regresando al mismo nivel desde que fue lanzado, use las ecuaciones 4.19 y 4.20.
- 3. Analizar.** Si se conoce el vector velocidad inicial, descompóngalo en componentes x e y . Seleccione la(s) ecuación(es) apropiado(s) de la partícula bajo el modelo de aceleración constante (de la 4.13 a la 4.17) para el movimiento vertical y úselas junto con la ecuación 4.12 para el movimiento horizontal para resolver las incógnita(s).
- 4. Finalizar.** Una vez que determine su resultado, compruebe para ver si sus respuestas son consistentes con las representaciones mentales y gráficas y que sus resultados son realistas.

Ejemplo 4.2 Salto de longitud

Un atleta que participa en salto de longitud (figura 4.12) deja el suelo a un ángulo de 20.0° sobre la horizontal y con una rapidez de 11.0 m/s.

(A) ¿Qué distancia salta en la dirección horizontal?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Los brazos y piernas de un atleta de salto de longitud se mueven en una forma compleja, pero este movimiento se ignorará. El movimiento del atleta se conceptualiza como equivalente al de un proyectil simple.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de movimiento de proyectil. Puesto que se conocen la rapidez inicial y el ángulo de lanzamiento, y ya que la altura final es la misma que la altura inicial, se confirma que el problema satisface las condiciones para aplicar las ecuaciones 4.19 y 4.20. Este planteamiento es la forma más directa de analizar este problema, aunque los métodos generales descritos siempre darán la respuesta correcta.

Analizar

Aplique la ecuación 4.20 para encontrar el alcance del saltador:

$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g} = \frac{(11.0 \text{ m/s})^2 \sin 2(20.0^\circ)}{9.80 \text{ m/s}^2} = 7.94 \text{ m}$$

(B) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

SOLUCIÓN

Analizar

Encuentre la altura máxima alcanzada mediante la ecuación 4.12:

$$h = \frac{v_i^2 \sin^2 \theta_i}{2g} = \frac{(11.0 \text{ m/s})^2 (\sin 20.0^\circ)^2}{2(9.80 \text{ m/s}^2)} = 0.722 \text{ m}$$

Finalizar Encuentre las respuestas a los incisos (A) y (B) con el uso del método general. Los resultados deben concordar. Tratar al atleta como partícula es una simplificación. No obstante, los valores obtenidos son consistentes con la experiencia en los deportes. Podemos modelar un sistema complicado, como el del atleta en salto de longitud, como una partícula y aun así obtener resultados razonables.



Figura 4.12 (Ejemplo 4.2) Ashton Eaton de Estados Unidos compitió en el Decatlón de hombres de salto largo en los 2016 Juegos Olímpicos de Río de Janeiro.



Ejemplo 4.3 Tiro que da en el objetivo en cada ocasión

En una demostración popular, se dispara un proyectil a un objetivo en tal forma que el proyectil sale del cañón al mismo tiempo que el objetivo se suelta del reposo. Demuestre que, el proyectil golpea al objetivo que cae.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Se forman conceptos del problema al estudiar la figura 4.13a. Note que el problema no pide valores numéricos. El resultado esperado debe involucrar un argumento algebraico.

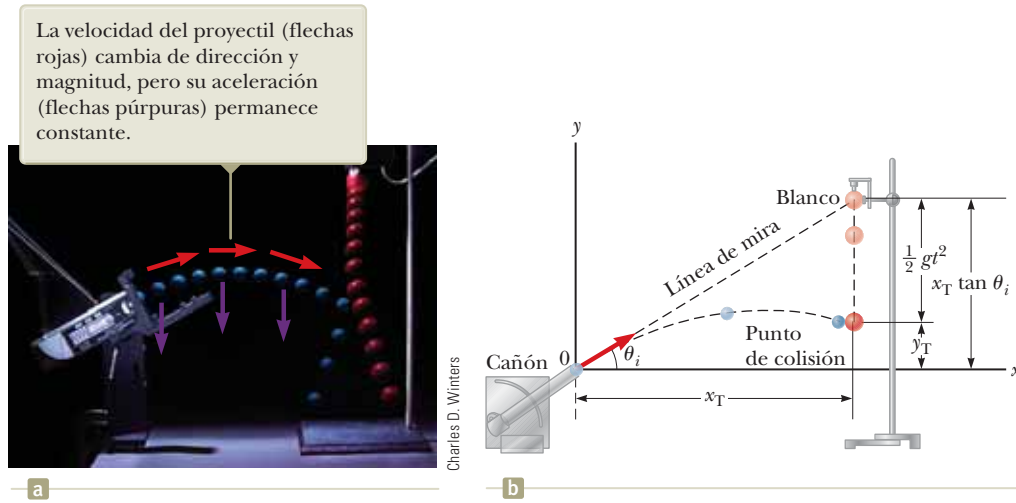


Figura 4.13 (Ejemplo 4.3) (a) Fotografía estroboscópica de la demostración proyectil-objetivo. Si el cañón se apunta directamente al objetivo y se dispara en el mismo instante cuando el objetivo comienza a caer, el proyectil golpeará el objetivo. (b) Diagrama esquemático de la demostración proyectil-objetivo.

Categorizar Debido a que ambos objetos sólo están subordinados a la gravedad, este problema se clasifica como uno que supone dos objetos en caída libre, el blanco en movimiento en una dimensión y el proyectil que se mueve en dos. El objetivo T se modela como una *partícula bajo aceleración constante* en una dimensión. El proyectil P se modela como *y* una *partícula bajo aceleración constante* en la dirección y una *partícula bajo velocidad constante* en la dirección *x*.

Analizar La figura 4.13b muestra que la coordenada *y* inicial y_{iT} del objetivo es $x_T \tan \theta_i$ y su velocidad inicial es cero. Caer con aceleración $a_y = -g$.

Escriba una expresión para la coordenada *y* del objetivo en cualquier momento después de liberarse y observe que su velocidad inicial es cero:

$$(1) \quad y_T = y_{iT} + (0)t - \frac{1}{2}gt^2 = x_T \tan \theta_i - \frac{1}{2}gt^2$$

Escriba una expresión para la coordenada *y* del proyectil en cualquier momento:

$$(2) \quad y_P = y_{iP} + v_{yiP}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 + (v_{iP} \sin \theta_i)t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_{iP} \sin \theta_i)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Escriba una expresión para la coordenada *x* del proyectil en cualquier momento:

$$x_P = x_{iP} + v_{xiP}t = 0 + (v_{iP} \cos \theta_i)t = (v_{iP} \cos \theta_i)t$$

Resuelva esta expresión para el tiempo como función de la posición horizontal del proyectil:

$$t = \frac{x_P}{v_{iP} \cos \theta_i}$$

Sustituya esta expresión en la ecuación (2):

$$(3) \quad y_P = (v_{iP} \sin \theta_i) \left(\frac{x_P}{v_{iP} \cos \theta_i} \right) - \frac{1}{2}gt^2 = x_P \tan \theta_i - \frac{1}{2}gt^2$$

Finalizar Compare las ecuaciones 1) y 3). Se ve que, cuando las coordenadas *x* del proyectil y el objetivo son las mismas (esto es, cuando $x_T = x_P$), sus coordenadas *y* y conocidas por las ecuaciones 1) y 3) son las mismas y resulta una colisión.



Ejemplo 4.4 ¡Vaya brazo!

Una piedra es lanzada hacia arriba desde lo alto de un edificio, a un ángulo de 30.0° con la horizontal, y con una rapidez inicial de 20.0 m/s , como se muestra en la figura 4.14. La altura del edificio es de 45.0 m .

(A) ¿Cuánto tarda la piedra en llegar al suelo?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura 4.14, en la que se indican la trayectoria y varios parámetros del movimiento de la piedra.

Categorizar Este problema se clasifica como un problema de movimiento de proyectil. La piedra se modela como una *partícula bajo aceleración constante* en la dirección y y una *partícula bajo velocidad constante* en la dirección x .

Analizar Se tiene la información $x_i = y_i = 0$, $y_f = -45.0 \text{ m}$, $a_y = -g$ y $v_i = 20.0 \text{ m/s}$ (el valor numérico de v_f es negativo porque se eligió lo alto del edificio como el origen).

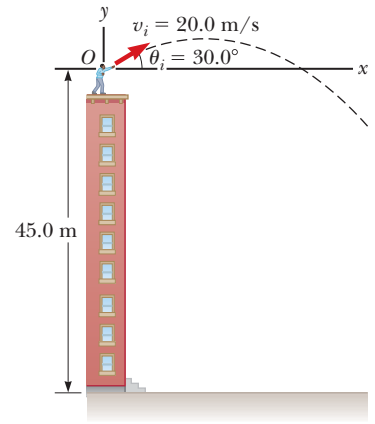


Figura 4.14 (Ejemplo 4.4) Se lanza una piedra desde la parte superior de un edificio.

Encuentre las componentes x y y iniciales de velocidad de la piedra:

$$v_{xi} = v_i \cos \theta_i = (20.0 \text{ m/s}) \cos 30.0^\circ = 17.3 \text{ m/s}$$

$$v_{yi} = v_i \sin \theta_i = (20.0 \text{ m/s}) \sin 30.0^\circ = 10.0 \text{ m/s}$$

Expresé la posición vertical de la piedra a partir del modelo de aceleración constante:

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Sustituya valores numéricos:

$$-45.0 \text{ m} = 0 + (10.0 \text{ m/s})t + \frac{1}{2}(-9.80 \text{ m/s}^2)t^2$$

Resuelva la ecuación cuadrática para t :

$$t = 4.22 \text{ s}$$

(B) ¿Cuál es la rapidez de la piedra justo antes de golpear el suelo?

SOLUCIÓN

Analizar Utilice la ecuación de la velocidad de la partícula bajo el modelo de aceleración constante para obtener la componente y de la velocidad de la piedra justo antes de que pegue en el suelo:

$$v_{yf} = v_{yi} - gt$$

Sustituya valores numéricos, usando $t = 4.22 \text{ s}$:

$$v_{yf} = 10.0 \text{ m/s} + (-9.80 \text{ m/s}^2)(4.22 \text{ s}) = -31.3 \text{ m/s}$$

Use esta componente con la componente horizontal $v_{xf} = v_{xi} = 17.3 \text{ m/s}$ para encontrar la rapidez de la piedra en $t = 4.22 \text{ s}$:

$$v_f = \sqrt{v_{xf}^2 + v_{yf}^2} = \sqrt{(17.3 \text{ m/s})^2 + (-31.3 \text{ m/s})^2} = 35.8 \text{ m/s}$$

Finalizar ¿Es razonable que la componente y de la velocidad final sea negativa? ¿Es razonable que la rapidez final sea mayor que la rapidez inicial de 20.0 m/s ?

¿QUÉ PASARÍA SI?

¿Qué sucedería si un viento horizontal sopla en la misma dirección en la que se lanza la piedra y hace que ésta tenga una componente de aceleración horizontal $a_x = 0.500 \text{ m/s}^2$? ¿Cuál inciso de este ejemplo, (A) o (B), tendrá una respuesta diferente?

Respuesta Recuerde que los movimientos en las direcciones x y y son independientes. Por tanto, el viento horizontal no puede afectar el movimiento vertical. El movimiento vertical determina el tiempo del proyectil en el aire, así que la respuesta al inciso (A) no cambia. El viento hace que la componente de velocidad horizontal aumente con el tiempo, de modo que la rapidez final será mayor en el inciso (B). Al tomar $a_x = 0.500 \text{ m/s}^2$, se encuentra $v_{xf} = 19.4 \text{ m/s}$ y $v_f = 36.9 \text{ m/s}$.



Ejemplo 4.5 El final del salto con esquíes

Una esquiadora deja la rampa y se desliza en la dirección horizontal con una rapidez de 25.0 m/s, como se muestra en la figura 4.14. El plano de aterrizaje bajo ella cae con una pendiente de 35.0° . ¿Dónde aterrizará sobre el plano?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Este problema permite formar ideas a partir de los recuerdos de las competencias de esquí en los juegos olímpicos de invierno. Se estima que la esquiadora está en el aire durante alrededor de 4 s y recorre una distancia horizontal de casi 100 m. Se espera que el valor de d , la distancia recorrida a lo largo del plano, sea del mismo orden de magnitud.

Categorizar El problema se clasifica como el de una partícula en movimiento de proyectil. Como con otros problemas de movimiento proyectil, usamos el modelo de *partícula bajo velocidad constante* para el movimiento horizontal y el modelo de *partícula bajo aceleración constante* para el movimiento vertical.

Analizar Es conveniente seleccionar el comienzo del salto como el origen. Las componentes de velocidad inicial son $v_{xi} = 25.0$ m/s y $v_{yi} = 0$. Del triángulo rectángulo de la figura 4.15, se ve que las coordenadas x y y de la esquiadora en el punto de aterrizaje están dadas por $x_f = d \cos \phi$ y $y_f = -d \sin \phi$. Expresé las coordenadas de la saltadora como función del tiempo, usando el modelo de partícula bajo velocidad constante para x y la ecuación de la posición del modelo de partícula bajo aceleración constante para y :

Resuelva la ecuación 2) para t y sustituya el resultado en la ecuación 4):

Resuelva para d y sustituya valores numéricos

Evalúe las coordenadas x y y del punto en el que aterriza la esquiadora:

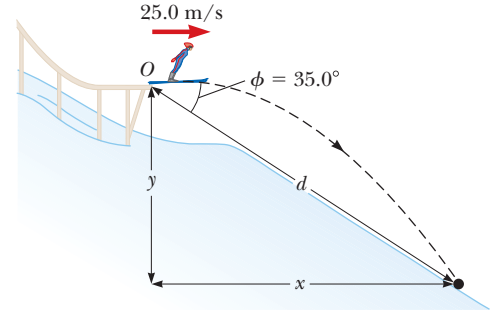


Figura 4.15 (Ejemplo 4.5) Una esquiadora deja la pista moviéndose en una dirección horizontal.

$$(1) \quad x_f = v_{xi} t \quad \rightarrow \quad (2) \quad d \cos \phi = v_{xi} t$$

$$(3) \quad y_f = v_{yi} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \rightarrow \quad (4) \quad -d \sin \phi = -\frac{1}{2} g t^2$$

$$-d \sin \phi = -\frac{1}{2} g \left(\frac{d \cos \phi}{v_{xi}} \right)^2$$

$$d = \frac{2v_{xi}^2 \sin \phi}{g \cos^2 \phi} = \frac{2(25.0 \text{ m/s})^2 \sin 35.0^\circ}{(9.80 \text{ m/s}^2) \cos^2 35.0^\circ} = 109 \text{ m}$$

$$x_f = d \cos \phi = (109 \text{ m}) \cos 35.0^\circ = 89.3 \text{ m}$$

$$y_f = -d \sin \phi = -(109 \text{ m}) \sin 35.0^\circ = -62.5 \text{ m}$$

Finalizar Compare estos resultados con las expectativas. Se esperaba que la distancia horizontal estuviera en el orden de 100 m, y el resultado de 89.3 m de hecho está en este orden de magnitud. Puede ser útil calcular el intervalo de tiempo que la esquiadora está en el aire y compararlo con la estimación de aproximadamente 4 s.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que todo en este ejemplo es igual, excepto que la rampa se curva de modo que la esquiadora se proyecta hacia arriba en un ángulo desde el extremo de la pista. ¿Este diseño es mejor en términos de maximizar la longitud del salto?

Respuesta Si la velocidad inicial tiene una componente hacia arriba, la esquiadora estará en el aire más tiempo y, debido a esto, deberá viajar más. Sin embargo, inclinar el vector velocidad inicial hacia arriba *reduciría* realmente la componente horizontal de la velocidad inicial. En consecuencia, angular hacia arriba el extremo de la pista con un *gran* ángulo en realidad puede reducir la distancia. Considere el caso extremo: ¡la esquiadora se proyecta a 90° con la horizontal y simplemente va arriba y abajo en el extremo de la pista! Este argumento sugiere que debe haber un ángulo óptimo entre 0° y 90° que represente un equilibrio entre hacer el tiempo de vuelo más largo y la componente de velocidad horizontal más pequeña.

Encuentre matemáticamente este ángulo óptimo. Las ecuaciones de la 1) a la 4) se modifican de la forma siguiente, si supone que la esquiadora se proyecta a un ángulo θ respecto a la horizontal sobre un plano de aterrizaje con pendiente con un ángulo arbitrario ϕ :

$$1) \text{ y } 3) \rightarrow x_f = (v_i \cos \theta) t = d \cos \phi$$

$$2) \text{ y } 4) \rightarrow y_f = (v_i \sin \theta) t - \frac{1}{2} g t^2 = -d \sin \phi$$

Al eliminar el tiempo t entre estas ecuaciones y aplicando derivación para maximizar d en términos de θ , se llega (después de varias etapas; véase el problema 52) a la siguiente ecuación para el ángulo θ que da el valor máximo de d :

$$\theta = 45^\circ - \frac{\phi}{2}$$

Para el ángulo de pendiente en la figura 4.15, $\phi = 35.0^\circ$; esta ecuación resulta en un ángulo de lanzamiento óptimo de $\theta = 27.5^\circ$. Para un ángulo de pendiente de $\phi = 0^\circ$, que representa un plano horizontal, esta ecuación da un ángulo de lanzamiento óptimo de $\theta = 45^\circ$, como se esperaría (véase la figura 4.11).

4.4 Modelo de análisis: Partícula en movimiento circular uniforme

La figura 4.16a muestra un automóvil que se mueve en una trayectoria circular; describimos este movimiento con el nombre de **movimiento circular**. Si el automóvil se mueve en esta trayectoria con *rapidez constante* v , lo llamamos **movimiento circular uniforme**. Puesto que ocurre con tanta frecuencia, este tipo de movimiento se reconoce como un modelo de análisis llamado **partícula en movimiento circular uniforme**. En esta sección se analiza dicho modelo.

Con frecuencia sorprende a los estudiantes encontrar que aun cuando un objeto se mueva con rapidez constante en una trayectoria circular, *todavía tiene una aceleración*. Para ver por qué, considere la ecuación que define la aceleración, $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ (ec. 4.5). Note que la aceleración depende del cambio en la *velocidad*. Puesto que la velocidad es una cantidad vectorial, una aceleración puede ocurrir en dos formas, como se mencionó en la sección 4.1: por un cambio en la magnitud de la velocidad y en la dirección de la velocidad. La última situación ocurre para un objeto que se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular. El vector de velocidad de magnitud constante siempre es tangente a la trayectoria del objeto y perpendicular al radio de la trayectoria circular. Por tanto, siempre está cambiando la dirección del vector velocidad.

Ahora se muestra que el vector aceleración en movimiento circular uniforme siempre es perpendicular a la trayectoria y siempre apunta hacia el centro del círculo. Si eso no fuera cierto, habría una componente de la aceleración paralela a la trayectoria y, debido a eso, paralela al vector velocidad. Tal componente de aceleración conduciría a un cambio en la rapidez de la partícula a lo largo de la trayectoria. Sin embargo, esta situación es inconsistente con la configuración de la situación: la partícula se mueve con rapidez constante a lo largo de la trayectoria. En consecuencia, para movimiento circular *uniforme*, el vector aceleración sólo puede tener una componente perpendicular a la trayectoria, que es hacia el centro del círculo.

Ahora encuentre la magnitud de la aceleración de la partícula. Considere el diagrama de los vectores de posición y velocidad de la figura 4.16b. La figura también muestra el vector que representa el cambio en posición $\Delta\vec{r}$ para un intervalo de tiempo arbitrario. La partícula sigue una trayectoria circular de radio r , de la que se muestra una parte mediante la curva discontinua. La partícula está en \textcircled{A} en el tiempo t_i y su velocidad en dicho tiempo es \vec{v}_i ; está en \textcircled{B} a algún tiempo ulterior t_f y su velocidad en dicho tiempo es \vec{v}_f . Suponga también que v_i y v_f difieren sólo en dirección; sus magnitudes son las mismas (esto es, $v_i = v_f = v$ porque es movimiento circular *uniforme*).

En la figura 4.16c, los vectores velocidad de la figura 4.15b se volvieron a dibujar en un solo origen. El vector $\Delta\vec{v}$ conecta las puntas de los vectores, que representa la suma vectorial $\Delta\vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$. En las figuras 4.16b y 4.16c se identifican los triángulos que ayudan a analizar el movimiento. El ángulo $\Delta\theta$ entre los dos vectores de posición de la figura 4.16b es el mismo que el ángulo entre los vectores velocidad en la figura 4.16c, ya que el vector velocidad \vec{v} siempre es perpendicular al vector de posición \vec{r} . Por tanto, los dos triángulos son semejantes. (Dos triángulos son semejantes si el ángulo entre cualquiera de los dos lados es el mismo para ambos triángulos y si la relación de las longitudes de dichos lados es la misma.) Ahora se puede escribir una correspondencia entre las longitudes de los lados para los dos triángulos de las figuras 4.16b y 4.16c:

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{r}$$

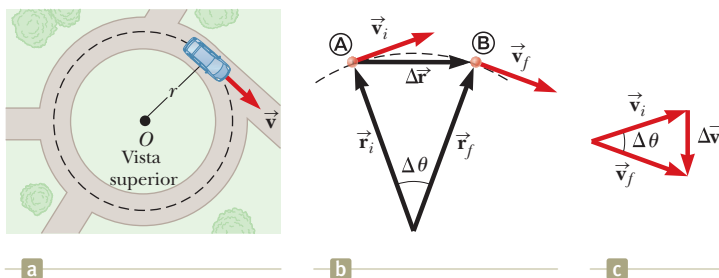


Figura 4.16 (a) Un automóvil que se mueve en una trayectoria circular con rapidez constante experimenta movimiento circular uniforme. (b) Conforme una partícula se mueve de \textcircled{A} a \textcircled{B} , su vector velocidad cambia de \vec{v}_i a \vec{v}_f . (c) Construcción para determinar la dirección del cambio en velocidad $\Delta\vec{v}$, que es hacia el centro del círculo para $\Delta\vec{r}$ pequeños.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 4.4

Aceleración de una partícula en movimiento circular uniforme Recuerde que en física la aceleración se define como un cambio en la *velocidad*, no como un cambio en la *rapidez* (contrario a la interpretación cotidiana). En el movimiento circular, el vector velocidad cambia en dirección, de modo que de hecho hay una aceleración.



donde $v = v_i = v_f$ y $r = r_i = r_f$. Esta ecuación se resuelve para $|\Delta\vec{v}|$ y la expresión obtenida se sustituye en la ecuación 4.4, $\vec{a}_{\text{prom}} = \Delta\vec{v}/\Delta t$, para dar la magnitud de la aceleración promedio sobre el intervalo de tiempo para que la partícula se mueva de Ⓐ a Ⓑ:

$$|\vec{a}_{\text{prom}}| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v|\Delta\vec{r}|}{r\Delta t}$$

Ahora imagine que los puntos Ⓐ y Ⓑ en la figura 4.16b se hacen extremadamente cercanos entre sí. Conforme Ⓐ y Ⓑ se aproximan uno a otro, Δt tiende a cero, $|\Delta\vec{r}|$ se aproxima a la distancia recorrida por la partícula a lo largo de la trayectoria circular y la proporción $|\Delta\vec{r}|/\Delta t$ se aproxima a la rapidez v . Además, la aceleración promedio se convierte en la aceleración instantánea en el punto Ⓐ. Por tanto, en el límite $\Delta t \rightarrow 0$, la magnitud de la aceleración es

$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad (4.21)$$

Aceleración centrípeta de una partícula en movimiento circular uniforme

Una aceleración de esta naturaleza se llama **aceleración centrípeta** (*centrípeta* significa *buscando el centro*). El subíndice en el símbolo de aceleración recuerda que la aceleración es centrípeta.

En muchas situaciones es conveniente describir el movimiento de una partícula que se mueve con rapidez constante en un círculo de radio r en términos del **periodo** T , que se define como el intervalo de tiempo requerido para una revolución completa de la partícula. En el intervalo de tiempo T , la partícula se mueve una distancia de $2\pi r$, que es igual a la circunferencia de la trayectoria circular de la partícula. En consecuencia, puesto que su rapidez es igual a la circunferencia de la trayectoria circular dividida por el periodo, o $v = 2\pi r/T$, se sigue que

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (4.22)$$

Periodo de movimiento circular para una partícula con movimiento circular uniforme

El periodo de una partícula en movimiento circular uniforme es una medida del número de segundos para una revolución de la partícula alrededor del círculo. El inverso del periodo es la *rapidez de rotación* y se mide en revoluciones por segundo. Ya que una revolución completa de la partícula alrededor del círculo corresponde a un ángulo de 2π radianes, el producto de 2π y la relación de rotación da la **rapidez angular** ω de la partícula, medido en radianes/s o s^{-1} :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (4.23)$$

Combinando esta ecuación con la ecuación 4.22, encontramos una relación entre la rapidez angular y la rapidez de traslación con la cual la partícula viaja en la trayectoria circular:

$$\omega = 2\pi \left(\frac{v}{2\pi r} \right) = \frac{v}{r} \rightarrow v = r\omega \quad (4.24)$$

La ecuación 4.24 demuestra que, para una rapidez angular fija, la rapidez de traslación se vuelve más grande cuanto más grande sea la posición radial. Por tanto, por ejemplo, si un tiovivo gira en una rapidez angular fija ω , un jinete en una posición externa grande r estará viajando a través del espacio más rápido que un jinete en una posición interior pequeña r . Vamos a investigar las ecuaciones 4.23 y 4.24 más profundamente en el capítulo 10.

Podemos expresar la aceleración centrípeta de una partícula en movimiento circular uniforme en términos de la velocidad angular combinando ecuaciones 4.21 y 4.24:

$$a_c = \frac{(r\omega)^2}{r} \\ a_c = r\omega^2 \quad (4.25)$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 4.5

La aceleración centrípeta no es constante Al deducir la magnitud del vector aceleración centrípeta se encontró que es constante para el movimiento circular uniforme, pero *el vector aceleración centrípeta no es constante*. Siempre apunta hacia el centro del círculo, pero continuamente cambia de dirección conforme el objeto se mueve alrededor de la trayectoria circular.

Se deben utilizar las ecuaciones 4.21-4.25 cuando la partícula en el modelo de movimiento circular uniforme se identifica como adecuada para una situación dada.

- E XAMEN RÁPIDO 4.4** Una partícula se mueve en una trayectoria circular de radio r con rapidez v . Luego aumenta su rapidez a $2v$ mientras viaja a lo largo de la misma trayectoria circular. (i) ¿En qué factor cambió la aceleración centrípeta de la partícula (elija una)? (a) 0.25, (b) 0.5, (c) 2, (d) 4, (e) imposible de determinar. (ii) De las mismas opciones, ¿en qué factor cambió el periodo de la partícula?

MODELO DE ANÁLISIS Partícula en movimiento circular uniforme

Imagine un objeto en movimiento que se puede modelar como una partícula. Si se mueve en una trayectoria circular de radio r con una rapidez constante v , la magnitud de su aceleración centrípeta es

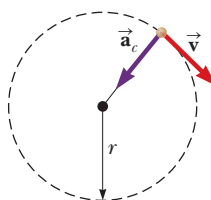
$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad (4.21)$$

y el **periodo** de movimiento de la partícula está dada por

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (4.22)$$

Es la **rapidez angular** de la partícula

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (4.23)$$



Ejemplos:

- una roca girando alrededor de un círculo atada a una cuerda de longitud constante
- un planeta recorriendo una órbita perfectamente circular (capítulo 13)
- una partícula con carga moviéndose en un campo magnético uniforme (capítulo 28)
- un electrón en una órbita alrededor de un núcleo en el modelo de Bohr del átomo del hidrógeno (capítulo 41)

Ejemplo 1.1 Aceleración centrípeta de la Tierra

(A) ¿Cuál es la aceleración centrípeta de la Tierra a medida que se mueve en su órbita alrededor del Sol?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Modelaremos a la Tierra como una partícula y aproximamos a la órbita de la Tierra como circular (en realidad es ligeramente elíptica, como se explicará en el capítulo 13).

Categorizar El paso conceptualizar permite clasificar este problema como el de una *partícula en movimiento circular uniforme*.

Analizar No se conoce la rapidez orbital de la Tierra para sustituirla en la ecuación 4.21. Sin embargo, con ayuda de la ecuación 4.22, se da nueva forma a la ecuación 4.21 en términos del periodo de la órbita de la Tierra, que se sabe es un año, y el radio de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, que es 1.496×10^{11} m.

Combine las ecuaciones 4.21 y 4.22:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Sustituya valores numéricos:

$$a_c = \frac{4\pi^2(1.496 \times 10^{11} \text{ m})}{(1 \text{ yr})^2} \left(\frac{1 \text{ yr}}{3.156 \times 10^7 \text{ s}}\right)^2 = 5.93 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

(B) ¿Cuál es la rapidez angular de la tierra en su órbita alrededor del Sol?

SOLUCIÓN

Analizar

Sustituir los valores numéricos en la ecuación 4.23 $\omega = \frac{2\pi}{1 \text{ yr}} \left(\frac{1 \text{ yr}}{3.156 \times 10^7 \text{ s}}\right) = 1.99 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$

Finalizar La aceleración en la parte (A) es mucho más pequeña que la aceleración en caída libre sobre la superficie de la Tierra. Una cosa importante aprendida aquí es la técnica para sustituir la rapidez v en la ecuación 4.21 en términos del periodo T del movimiento. En muchos problemas, es más probable que se conozca T en lugar de v . En el inciso (B), vemos que la rapidez angular de la Tierra es muy pequeña, lo que es de esperarse porque la Tierra tarda un año entero en recorrer la trayectoria circular una vez.

4.5 Aceleraciones tangencial y radial

Consideremos un movimiento más general que el que se presentó en la sección 4.4. Una partícula se mueve a la derecha a lo largo de una trayectoria curva, y su velocidad cambia *tanto* en magnitud como en dirección como se describe en la figura 4.17. En esta situación, el vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria; sin embargo, el vector de aceleración \vec{a} , hace un ángulo con la trayectoria. En cada uno de los tres puntos A, B y C en la figura 4.17, los círculos discontinuos azules representan la curvatura de la trayectoria real en cada punto. El radio de cada círculo es igual al radio de curvatura de la trayectoria en cada punto.

Conforme la partícula se mueve a lo largo de la trayectoria curva en la figura 4.17, la dirección del vector aceleración total \vec{a} cambia de punto a punto. En cualquier instante, este vector se puede descomponer en dos componentes respecto a un origen en el centro del círculo discontinuo correspondiente a dicho instante: una componente radial a_r a lo largo del radio del círculo y una componente tangencial a_t perpendicular a este radio. El vector de *aceleración total* \vec{a} se puede escribir como el vector suma de los vectores componentes.

Aceleración total ▶
$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t \quad (4.26)$$

La componente de aceleración tangencial causa un cambio en la rapidez v de la partícula. Esta componente es paralela a la velocidad instantánea y su magnitud está dada por

Aceleración tangencial ▶
$$a_t = \left| \frac{dv}{dt} \right| \quad (4.27)$$

La componente de aceleración radial surge de un cambio en dirección del vector velocidad y está dado por

Aceleración radial ▶
$$a_r = -a_c = -\frac{v^2}{r} \quad (4.28)$$

donde r es el radio de curvatura de la trayectoria en el punto en cuestión. La componente radial de la aceleración se reconoce como la aceleración centrípeta discutida en la sección 4.4 considerando a la partícula en un modelo circular uniforme. Sin embargo, aun en situaciones en que una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria curva con una rapidez variable, se puede utilizar la ecuación 4.21 para la aceleración centrípeta. En esta situación, la ecuación da la aceleración centrípeta *instantánea* en cualquier tiempo. El signo negativo en la ecuación 4.28 indica que la dirección de la aceleración centrípeta es hacia el centro del círculo que representa el radio de curvatura. La dirección es opuesta a la del vector unitario radial \hat{r} , que siempre apunta alejándose del origen en el centro del círculo. (Vea la figura 3.15)

Puesto que \vec{a}_r y \vec{a}_t son vectores componentes perpendiculares de \vec{a} , se sigue que la magnitud de \vec{a} es $a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$. En una rapidez conocida, a_r es grande cuando el radio de curvatura es pequeño (como en los puntos A y B de la figura 4.17) y pequeña cuando r es grande (en el punto C). La dirección de \vec{a}_r está en la misma dirección que \vec{v} (si v aumenta) u opuesta a \vec{v} (si v disminuye, como en el punto B).

En el movimiento circular uniforme, donde v es constante, $a_t = 0$ y la aceleración siempre es completamente radial, como se describe en la sección 4.4. En otras palabras, el movimiento circular uniforme es un caso especial de movimiento a lo largo de una trayectoria curva general. Además, si la dirección de \vec{v} no cambia, no existe aceleración radial y el movimiento es en una dimensión (en este caso, $a_r = 0$, pero a_t puede no ser cero.)

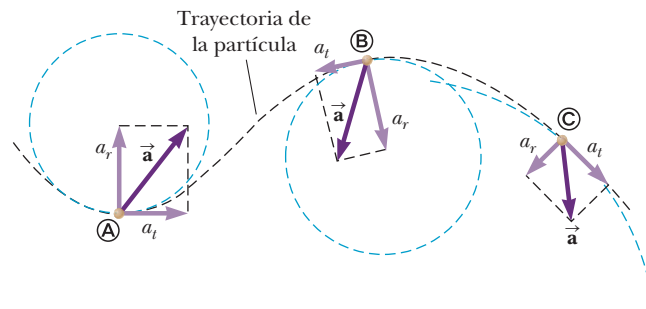


Figura 4.17 El movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria curva arbitraria que se encuentra en el plano xy . Si el vector velocidad \vec{v} (siempre tangente a la trayectoria) cambia en dirección y magnitud, las componentes de la aceleración \vec{a} son una componente tangencial \vec{a}_t y otra componente radial \vec{a}_r .

- EJEMPLO RÁPIDO 4.5** Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria y su rapidez aumenta con el tiempo. (i) ¿En cuál de los siguientes casos sus vectores aceleración y velocidad son paralelos? (a) cuando la trayectoria es circular, (b) cuando la trayectoria es recta, (c) cuando la trayectoria es una parábola, (d) nunca. (ii) De las mismas opciones, ¿en cuál caso sus vectores aceleración y velocidad son perpendiculares en cualquier parte de la trayectoria?

Ejemplo 4.7 En la cima

Un automóvil deja una señal de alto y muestra una aceleración constante de 0.300 m/s^2 paralela a la autopista. El automóvil pasa sobre una elevación en el camino tal que lo alto de la elevación tiene forma de arco de circunferencia con 500 m de radio. En el momento en que el automóvil está en lo alto de la elevación, su vector velocidad es horizontal y tiene una magnitud de 6.00 m/s . ¿Cuáles son la magnitud y dirección del vector aceleración total para el automóvil en este instante?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Forme ideas de la situación con la figura 4.18a y cualquier experiencia que haya tenido al conducir sobre elevaciones en el camino.

Categorizar Puesto que el automóvil que acelera se mueve a lo largo de una trayectoria curva, este problema se clasifica como uno que involucra una partícula que experimenta aceleraciones tangencial y radial. Se reconoce que es un problema de sustitución relativamente simple.

El vector aceleración tangencial tiene magnitud de 0.300 m/s^2 y es horizontal. La aceleración radial está dada por la ecuación 4.21, con $v = 6.00 \text{ m/s}$ y $r = 500 \text{ m}$. El vector aceleración radial se dirige en línea recta hacia abajo.

Evalúe la aceleración radial:

$$a_r = -\frac{v^2}{r} = -\frac{(6.00 \text{ m/s})^2}{500 \text{ m}} = -0.0720 \text{ m/s}^2$$

Encuentre la magnitud de \vec{a} :

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{(-0.0720 \text{ m/s}^2)^2 + (0.300 \text{ m/s}^2)^2} = 0.309 \text{ m/s}^2$$

Encuentre el ángulo ϕ (véase la figura 4.18b) entre \vec{a} y la horizontal:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{a_r}{a_t} = \tan^{-1} \left(\frac{-0.0720 \text{ m/s}^2}{0.300 \text{ m/s}^2} \right) = -13.5^\circ$$

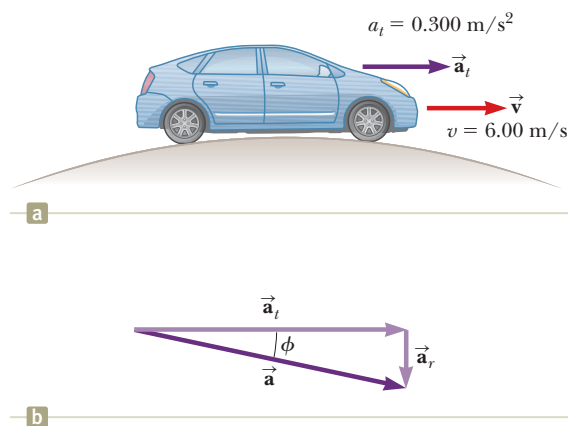


Figura 4.18 (Ejemplo 4.7) (a) Un automóvil pasa sobre una elevación que tiene forma de arco de circunferencia. (b) El vector aceleración total \vec{a} es la suma de los vectores aceleración tangencial y radial \vec{a}_t y \vec{a}_r .

4.4 Velocidad y aceleración relativas

En esta sección se describe cómo se relacionan las observaciones realizadas por diferentes observadores en distintos marcos de referencia. Un marco de referencia se describe mediante un sistema coordenado cartesiano para el cual un observador está en reposo en relación con el origen.

Conceptualizamos una situación modelo en la que habrá distintas observaciones para diferentes observadores. Considere a los dos observadores A y B a lo largo de la recta numérica de la figura 4.19a. El observador A se ubica a 5 unidades a la derecha del observador B. Ambos observadores miden la posición del punto P, que se ubica 5 unidades a la derecha del observador A. Suponga que cada observador decide que el origen en dónde cada uno está parado sobre el eje x , como en la figura 4.19b. Advierta que los dos observadores están en desacuerdo acerca del valor de la posición del punto P. El observador A afirma que el punto P está situado en una posición con un valor de $x_A = +5$, mientras que el observador B afirma que se encuentra en una posición con un valor de $x_B = +10$. Ambos observadores están en lo correcto, aunque hagan mediciones diferentes. Sus mediciones difieren porque realizan las mediciones desde diferentes marcos de referencia.

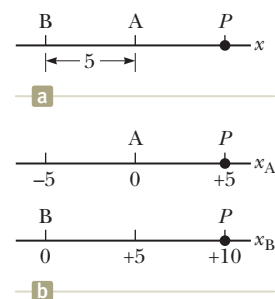
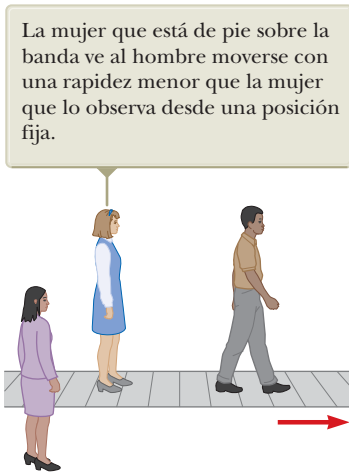


Figura 4.19 Diferentes observadores realizan mediciones diferentes. (a) El observador A está situado a 5 unidades a la derecha del observador B. Ambos observadores miden la posición de una partícula en P. (b) Si ambos observadores se ven ellos mismos en el origen de su propio sistema coordenado, no estarán de acuerdo con el valor de la posición de la partícula en P.



La mujer que está de pie sobre la banda ve al hombre moverse con una rapidez menor que la mujer que lo observa desde una posición fija.

Figura 4.20 Dos observadoras miden la rapidez de un hombre que camina sobre una banda transportadora.

Imagine ahora que el observador B en la figura 4.19b se mueve hacia la derecha a lo largo del eje x_B . Ahora las dos mediciones son incluso más diferentes. El observador A afirma que el punto P permanece en reposo en una posición con un valor de $+5$, mientras que el observador B afirma que la posición de P cambia continuamente con el tiempo, que incluso ¡lo pasa a él y se mueve más allá de donde él está! De nuevo, ambos observadores están en lo correcto, y la diferencia en sus observaciones surge de sus diferentes marcos de referencia.

Este fenómeno se explora aún más al considerar dos observadoras que miran a un hombre caminar sobre una banda transportadora en un aeropuerto en la figura 4.20. La mujer que está de pie en la banda transportadora ve que el hombre anda con una rapidez normal. La mujer que observa desde una posición fija ve al hombre moverse con una rapidez mayor, porque la rapidez de la banda transportadora se combina con su rapidez al andar. Ambas observadoras miran al mismo hombre y llegan a diferentes valores para su rapidez. Ambas están en lo correcto; la diferencia en sus observaciones resulta de la velocidad relativa de sus marcos de referencia.

En una situación más general, considere una partícula ubicada en el punto P de la figura 4.21. Imagine que el movimiento de esta partícula lo describen dos observadores, A en un marco de referencia S_A fijo en relación con la Tierra y un segundo observador B en un marco de referencia S_B que se mueve hacia la derecha en relación con S_A (y debido a eso en relación con la Tierra) con una velocidad constante \vec{v}_{BA} . En esta discusión de velocidad relativa, se usa una notación de doble subíndice: el primer subíndice representa lo que se observa y el segundo representa quién realiza la observación. En consecuencia, la notación \vec{v}_{BA} significa la velocidad del observador B (y el marco unido S_B) medido por el observador A. Con esta notación, el observador B mide a A como si estuviera en movimiento hacia la izquierda con una velocidad $\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{BA}$. Para propósitos de esta discusión, coloque a cada observador en su respectivo origen.

El tiempo $t = 0$ se define como el instante en que los orígenes de los dos marcos de referencia coinciden en el espacio. Por tanto, en el tiempo t , los orígenes de los marcos de referencia estarán separados una distancia $v_{BA}t$. La posición P de la partícula en relación con el observador A se marca con el vector de posición \vec{r}_{PA} y en relación con el observador B con el vector de posición \vec{r}_{PB} , ambos en el tiempo t . A partir de la figura 4.21 se ve que los vectores \vec{r}_{PA} y \vec{r}_{PB} se relacionan mutuamente a partir de la expresión

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{v}_{BA}t \tag{4.29}$$

Al derivar la ecuación 4.19 respecto del tiempo, y notar que \vec{v}_{BA} es constante, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_{PA}}{dt} &= \frac{d\vec{r}_{PB}}{dt} + \vec{v}_{BA} \\ \vec{u}_{PA} &= \vec{u}_{PB} + \vec{v}_{BA} \end{aligned} \tag{4.30}$$

donde \vec{u}_{PA} es la velocidad de la partícula en P medida por el observador A y \vec{u}_{PB} es su velocidad medida por B. (El símbolo \vec{u} se usa para velocidad de partícula en lugar de \vec{v} , que se usa para velocidad relativa de dos marcos de referencia.) Se muestra la ecuación 4.30 con los vectores rojos en la parte superior de la figura 4.21. El vector \vec{u}_{PB} es la velocidad de la partícula al tiempo t visto por el observador B. Al sumar la velocidad relativa \vec{u}_{PA} de los marcos, la suma es la velocidad de la partícula medida por el observador A.

Las ecuaciones 4.29 y 4.30 se conocen como **ecuaciones de transformación galileanas**. Relacionan la posición y velocidad de una partícula según las miden los observadores en movimiento relativo.

Aunque los observadores en dos marcos miden diferentes velocidades para la partícula, miden la *misma aceleración* cuando \vec{v}_{BA} es constante. Se puede verificar que, al tomar la derivada en el tiempo de la ecuación 4.30,

$$\frac{d\vec{u}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{u}_{PB}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt}$$

Puesto que \vec{v}_{BA} es constante, $d\vec{v}_{BA}/dt = 0$. Por tanto, se concluye que $\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$ porque $\vec{a}_{PA} = d\vec{u}_{PA}/dt$ y $\vec{a}_{PB} = d\vec{u}_{PB}/dt$. Esto es, la aceleración de la partícula medida por un observador en un marco de referencia es la misma que la medida por cualquier otro observador que se mueva con velocidad constante en relación con el primer marco.

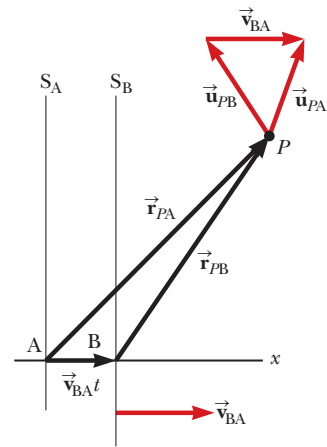


Figura 4.21 Una partícula ubicada en P es descrita por dos observadores, uno en el marco de referencia fijo S_A y el otro en el marco S_B , que se mueve hacia la derecha con una velocidad constante \vec{v}_{BA} . El vector \vec{r}_{PA} es el vector de posición de la partícula en relación con S_A y \vec{r}_{PB} es su vector de posición en relación con S_B . Los vectores rojos en la parte superior de la figura. Muestran la suma vectorial para las velocidades de la partícula al tiempo t , representada por la ecuación 4.30.

Ejemplo 4.8 Un bote que cruza un río

Un bote que cruza un río ancho se mueve con una rapidez de 10.0 km/h en relación con el agua. El agua en el río tiene una rapidez uniforme de 5.00 km/h hacia el este en relación con la Tierra.

(A) Si el bote se dirige hacia el norte, determine la velocidad del bote en relación con un observador que está de pie en cualquier orilla.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que se mueve a través de un río mientras lo empuja la corriente. No será capaz de moverse directamente a través del río, sino que terminará corriente abajo, como muestra la figura 4.22a. Imagine la observadora A en la orilla, de modo que ella está en la tierra, representada por la letra E. El observador B está representado por la letra r en la figura; Este observador está en un corcho flotando en el río, en reposo con respecto al agua y es llevado por la corriente. Cuando el barco comienza en el punto P y está dirigido directamente a través del río, las velocidades \vec{u}_{br} , del barco en relación con el río, y \vec{v}_{rE} , del río en relación con la tierra, se suman para obtener la velocidad \vec{u}_{bE} , la velocidad del barco en relación con el observador A en la tierra. Compare la adición de vectores de la figura 4.22a con la de la figura 4.21. A medida que el barco se mueve, seguirá a lo largo de vector \vec{u}_{bE} , según lo sugerido por su posición después de algún tiempo en la figura 4.22a.

Categorizar Debido a las velocidades combinadas de usted en relación con el río y el río en relación con la Tierra, es posible categorizar este problema como uno que involucra velocidades relativas.

Analizar Se conoce \vec{u}_{br} , la velocidad del bote en relación con el río, y \vec{v}_{rE} la velocidad del río en relación con la Tierra. Lo que se debe encontrar es \vec{u}_{bE} , la velocidad del bote respecto de la Tierra. La relación entre estas tres cantidades es $\vec{u}_{bE} = \vec{u}_{br} + \vec{v}_{rE}$. Los términos en la ecuación se deben manipular como cantidades vectoriales; los vectores se muestran en la figura 4.22a. La cantidad \vec{u}_{br} es hacia el norte; \vec{v}_{rE} es hacia el este; y la suma vectorial de los dos, \vec{u}_{bE} , está a un ángulo θ como se define en la figura 4.22a.

Encuentre la rapidez u_{bE} del bote en relación con la Tierra mediante el teorema de Pitágoras:

$$u_{bE} = \sqrt{u_{br}^2 + v_{rE}^2} = \sqrt{(10.0 \text{ km/h})^2 + (5.00 \text{ km/h})^2} \\ = 11.2 \text{ km/h}$$

Encuentre la dirección de \vec{u}_{bE} :

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{rE}}{u_{br}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{10.0}\right) = 26.6^\circ$$

Finalizar El bote se mueve con una rapidez de 11.2 km/h en la dirección 26.6° noreste en relación con la Tierra. Note que la rapidez de 11.2 km/h es más rápida que la rapidez del bote de 10.0 km/h. La velocidad de la corriente se suma a la suya para darle una mayor rapidez. Observe en la figura 4.22a que su velocidad resultante está a un ángulo con la dirección recta a través del río, así que terminará corriente abajo, como se predijo.

(B) Si el bote viaja con la misma rapidez de 10.0 km/h en relación con el río y debe viajar al norte, como se muestra en la figura 4.22b, ¿hacia dónde se debe dirigir?

SOLUCIÓN

Conceptualizar/categorizar Esta pregunta es una extensión del inciso (A), así que ya se ha conceptualizado y categorizado el problema. Sin embargo, ahora el bote se debe dirigir corriente arriba para ir recto a través del río.

Analizar Ahora el análisis involucra el nuevo triángulo que se muestra en la figura 4.22b. Como en el inciso (A), se conoce \vec{v}_{rE} y la magnitud del vector \vec{u}_{br} y se quiere que u_{bE} se dirija a través del río. Note la diferencia entre el triángulo de la figura 4.22a y el de la figura 4.22b: la hipotenusa de la figura 4.22b ya no es u_{bE} .

Aplique el teorema de Pitágoras para hallar u_{bE} :

$$u_{bE} = \sqrt{u_{br}^2 - v_{rE}^2} = \sqrt{(10.0 \text{ km/h})^2 - (5.00 \text{ km/h})^2} = 8.66 \text{ km/h}$$

Encuentre la dirección en la que se dirige el bote:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{rE}}{u_{bE}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{8.66}\right) = 30.0^\circ$$

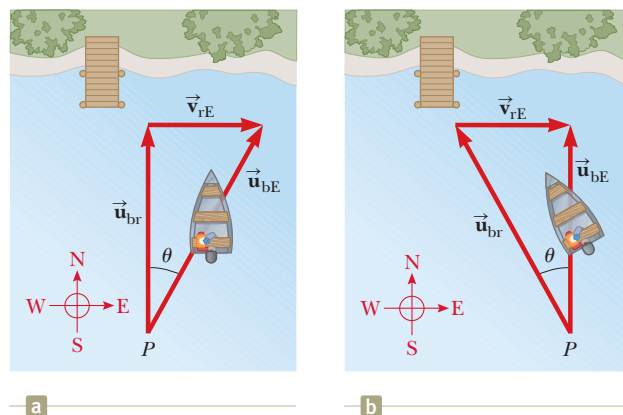


Figura 4.22 (Ejemplo 4.8) (a) Un bote se dirige directamente a través de un río y termina corriente abajo. (b) Para moverse directamente a través del río, el bote debe dirigirse corriente arriba.

continúa

4.8 continuación

Finalizar El bote se debe dirigir corriente arriba de modo que viaje directamente hacia el norte a través del río. Para la situación que se conoce, el bote debe dirigirse 30.0° al noroeste. Para corrientes más rápidas, el bote se debe dirigir corriente arriba en ángulos mayores.

¿QUÉ PASARÍA SI? Considere que los dos botes de los incisos (A) y (B) compiten al cruzar el río. ¿Cuál bote llega primero a la orilla opuesta?

Respuesta En el inciso (A), la velocidad de 10 km/h se dirige directamente a través del río. En el inciso (B), la velocidad que se dirige a través del río tiene una magnitud de sólo 8.66 km/h. Por tanto, el bote del inciso (A) tiene una componente de velocidad mayor directamente a través del río y llega primero.

Resumen

Definiciones

El **vector desplazamiento** $\Delta\vec{r}$ para una partícula es la diferencia entre su vector de posición final y su vector de posición inicial:

$$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_f - \vec{r}_i \quad (4.1)$$

La **velocidad promedio** de una partícula durante el intervalo de tiempo Δt se define como el desplazamiento de la partícula dividido por el intervalo de tiempo:

$$\vec{v}_{\text{prom}} \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad (4.2)$$

La **velocidad instantánea** de una partícula se define como el límite de la velocidad promedio conforme Δt tiende a cero:

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (4.3)$$

La **aceleración promedio** de una partícula se define como el cambio en su vector velocidad instantánea dividido entre el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre dicho cambio:

$$\vec{a}_{\text{prom}} \equiv \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} \quad (4.4)$$

La **aceleración instantánea** de una partícula se define como el valor límite de la aceleración promedio conforme Δt tiende a cero:

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (4.5)$$

El **movimiento de proyectil** es una clase de movimiento en dos dimensiones, exhibido por un objeto que se lanza al aire cerca de la superficie de la Tierra y experimenta caída libre. Si el proyectil se lanza en un ángulo hacia arriba desde la horizontal, seguirá un camino descrito matemáticamente como una parábola.

Una partícula que se mueve en una trayectoria circular con rapidez constante exhibe **movimiento circular uniforme**.

Conceptos y principios

Si una partícula se mueve con aceleración *constante* \vec{a} y tiene velocidad \vec{v}_i y posición \vec{r}_i en $t = 0$, sus vectores velocidad y de posición en algún tiempo posterior t son

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t \quad (4.8)$$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2} \vec{a}t^2 \quad (4.9)$$

Para movimiento en dos dimensiones en el plano xy bajo aceleración constante, cada una de estas expresiones vectoriales es equivalente a dos expresiones componentes: una para el movimiento en la dirección x y otra para el movimiento en la dirección y .

Es útil pensar en el movimiento de proyectil en términos de una combinación de dos modelos de análisis: 1) la partícula bajo modelo de velocidad constante en la dirección x y 2) el modelo de partícula bajo aceleración constante en la dirección vertical con una aceleración hacia abajo de magnitud $g = 9.80 \text{ m/s}^2$.

Si una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria curva de forma tal que tanto la magnitud como la dirección de \vec{v} cambian con el tiempo. La partícula tiene un vector aceleración que se puede describir por dos vectores componentes: (1) un vector componente radial \vec{a}_r que causa el cambio en el tiempo de la dirección de \vec{v} y 2) una componente del vector tangencial \vec{a}_t que causa el cambio en la magnitud de \vec{v} . La magnitud de \vec{a}_r es v^2/r y la magnitud de \vec{a}_t es $|dv/dt|$.

Un partícula en movimiento circular uniforme experimenta una aceleración radial \vec{a}_r , ya que la dirección de \vec{v} cambia en el tiempo. Esta aceleración se llama **aceleración centripeta** y su dirección siempre es hacia el centro del círculo.

La velocidad \vec{u}_{PA} de una partícula medida en un marco de referencia fijo S_A se puede relacionar con la velocidad \vec{u}_{PB} de la misma partícula medida en un marco de referencia móvil S_B mediante

$$\vec{u}_{PA} = \vec{u}_{PB} + \vec{v}_{BA} \quad (4.8)$$

donde \vec{v}_{BA} es la velocidad de S_B en relación con S_A .



► Modelo de análisis para resolver problemas

Partícula en movimiento circular uniforme. Si una partícula se mueve en una trayectoria circular de radio r con una rapidez constante v , la magnitud de su aceleración centrípeta está dada por

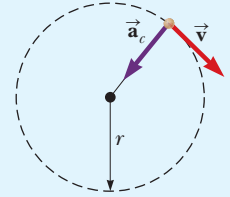
$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad (4.21)$$

y el **periodo** del movimiento de la partícula está dado por

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (4.22)$$

La **rapidez angular** de la partícula es

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (4.23)$$



Piense, dialogue y comparta

Consulte el prefacio para una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para obtener más artículos de evaluación para esta sección, visite WEBASSIGN. From Cengage

- Usted observa a su pequeño sobrino rodar canicas hacia la parte superior de una escalera. Tiene 12 escalones, cada uno de 30.0 cm de profundidad horizontal, separados por 20.0 cm verticalmente. Las canicas salen horizontalmente del escalón superior y se proyectan en el aire, rebotando en los escalones hasta que llegan a la planta baja. Esto le hace preguntarse lo siguiente: (a) ¿Qué tan rápido debe rodar la canica para que no rebote en el primer escalón?, ¿debajo del piso superior? (b) ¿Qué tan rápido debe rodar la canica para que no rebote en el *segundo* escalón debajo del piso superior? (c) ¿Es posible que su pequeño sobrino ruede la canica lo suficientemente rápido como para no pegar en *todos* los escalones? (d) Suponga que la canica se proyecta con una rapidez tal que llega al sexto escalón y rebota hacia arriba con el mismo ángulo con el que pego en el escalón, con la misma rapidez. Argumente por qué la canica no pegara en otro escalón antes de pegar en el piso de la planta baja.
- ACTIVIDAD** Coloque una moneda en la esquina de una mesa como se muestra en la vista superior de la figura TP4.2. Coloque una regla junto a la moneda y otra moneda en la

parte superior de la parte de la regla que cuelga del borde de la mesa. Sostenga el extremo de la regla sobre la mesa con una mano y utilice la otra mano para mover el extremo de la regla con la moneda paralela a la superficie de la mesa. Esto proyectará la moneda que está en la esquina de la mesa en una dirección horizontal. Al mismo tiempo, la regla se deslizará hacia fuera por debajo del segundo centavo, que caerá hacia abajo. Use su grabador de audio de su teléfono inteligente, haga una grabación de audio de las dos monedas cayendo. A partir de la grabación, determine el intervalo de tiempo entre la llegada de las dos monedas al suelo. ¿Cuál debe ser teóricamente el intervalo de tiempo?

Pegue en el extremo de la regla de esta manera

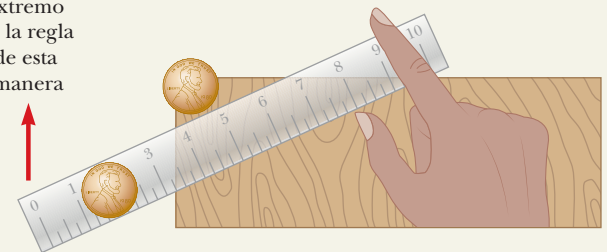


Figura TP4.2

Problemas

Consulte el prefacio para una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para obtener más artículos de evaluación para esta sección, visite WEBASSIGN. From Cengage

SECCIÓN 4.1 Vectores de posición, velocidad y aceleración

- Supongamos que el vector de posición de una partícula está dado como una función del tiempo por $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$, con $x(t) = at + b$ y $y(t) = ct^2 + d$, donde $a = 1.00$ m/s, $b = 1.00$ m, $c = 0.125$ m/s² y $d = 1.00$ m. (a) Calcule la velocidad promedio durante el intervalo de tiempo de $t = 2.00$ s a $t = 4.00$ s. (b) Determine la velocidad y la rapidez en $t = 2.00$ s.
- Las coordenadas de un objeto que se mueve en el plano xy varían con el tiempo de acuerdo con $x = -(5.00)\sin(\omega t)$ y $y = (4.00) - (5.00)\cos(\omega t)$, donde ω es una constante, x y y están en metros y t está en segundos. (a) Determine las com-

ponentes de velocidad del objeto en $t = 0$. (b) Determine las componentes de la aceleración del objeto en $t = 0$. (c) Escriba expresiones para el vector de posición, el vector velocidad y el vector aceleración del objeto en cualquier tiempo $t > 0$. (d) Describa la trayectoria del objeto en una gráfica xy .

SECCIÓN 4.2 Movimiento en dos dimensiones con aceleración constante

- El vector de posición de una partícula varía en el tiempo de acuerdo con la expresión $\vec{r} = 3.00\hat{i} - 6.00t^2\hat{j}$, donde \vec{r} está en metros y t en segundos. (a) Encuentre una expresión para la velocidad de la partícula como función del tiempo. (b) Determine la aceleración de la partícula como función del tiempo. (c) Calcule la posición y velocidad de la partícula en $t = 1.00$ s.

- BIO** 4. No es posible ver objetos muy pequeños, como virus, utilizando un microscopio de luz ordinario. Sin embargo, un microscopio electrónico, puede ver estos objetos utilizando un haz de electrones en lugar de un haz de luz. La microscopía electrónica ha demostrado ser invaluable para la investigación de virus, membranas celulares y estructuras subcelulares, superficies bacterianas, receptores visuales, cloroplastos y propiedades contráctiles de los músculos. Las “lentes” de un microscopio electrónico consisten de campos eléctricos y magnéticos que controlan el haz de electrones. Como ejemplo de la manipulación de un haz de electrones, considere un electrón viajando lejos del origen en el eje x en el plano xy con velocidad inicial $\vec{v}_i = v_i \hat{i}$. Al pasar por la región de $x = 0$ a $x = d$, el electrón experimenta aceleración $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$, donde a_x y a_y son constantes. Para el caso $v_i = 1.80 \times 10^7$ m/s, $a_x = 8.00 \times 10^{14}$ m/s² y $a_y = 1.60 \times 10^{15}$ m/s², determine en $x = d = 0.010$ m (a) la posición del electrón, (b) la velocidad del electrón, (c) la rapidez del electrón y (d) la dirección de desplazamiento del electrón (es decir, el ángulo entre su velocidad y el eje de x).
5. **Problema de repaso** Una moto de nieve está originalmente en el punto con el vector de posición 29.0 m a 95.0° medidos en sentido contrario a las agujas del reloj desde con el eje x , se mueve con velocidad 4.50 m/s a 40.0°. Se mueve con aceleración constante 1.90 m/s² a 200°. Después de que han transcurrido 5.00 s, encuentre (a) su velocidad y (b) su vector de posición.

SECCIÓN 4.3 Movimiento de un proyectil

Nota: En todos los problemas ignore la resistencia del aire y tome $g = 9.80$ m/s² en la superficie de la Tierra.

6. **S** En un bar local, un cliente desliza sobre la barra un tarro de cerveza vacío para que lo vuelvan a llenar. La altura de la barra es h . El cantinero está momentáneamente distraído y no ve el tarro, que se desliza de la barra y golpea el suelo a d de la base de la barra. (a) ¿Con qué velocidad el tarro dejó la barra? (b) ¿Cuál fue la dirección de la velocidad del tarro justo antes de golpear el suelo?
7. **BIO** Los reyes mayas y muchos equipos de deportes de la escuela se llaman puma, pantera o león de montaña —el *Felis concolor*—, es el mejor saltador entre los animales. Puede saltar a una altura de 12.0 pie cuando sale del suelo con un ángulo de 45.0°. ¿Con qué rapidez, en unidades SI, sale del suelo para dar este salto?
8. Un proyectil se dispara en tal forma que su alcance horizontal es igual a tres veces su altura máxima. ¿Cuál es el ángulo de proyección?
9. La rapidez de un proyectil cuando alcanza su máxima altura es la mitad de su velocidad cuando está en la mitad de su altura máxima. ¿Cuál es el ángulo de proyección inicial del proyectil?
10. **CIC** Una roca se lanza hacia arriba desde el suelo de forma que la altura máxima de su vuelo es igual a su alcance horizontal R . (a) ¿A qué ángulo θ se lanza la roca? (b) En términos del alcance original R , ¿cuál es el alcance $R_{\text{máx}}$ que puede lograr la roca si se lanza a la misma rapidez, pero en ángulo óptimo para alcance máximo? (c) **¿Qué pasaría si?** ¿Su respuesta al inciso (a) cambiaría si la roca se lanza con la misma rapidez en un planeta diferente? Explique.
11. **S** Un bombero, a una distancia d de un edificio en llamas, dirige un chorro de agua desde una manguera en un ángulo θ_i sobre la horizontal, como se muestra en la figura P4.11. Si la rapidez inicial del chorro es v_i , ¿en qué altura h el agua golpea al edificio?

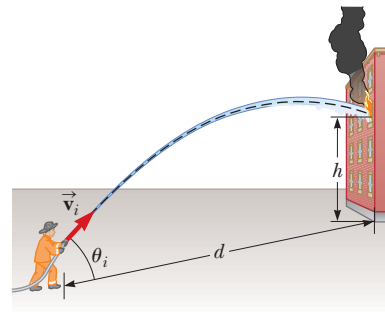


Figura P4.11

12. Una estrella de basketbol cubre horizontalmente 2.80 m en un salto para encestar la bola (figura P4.12a). Su movimiento a través del espacio se representa igual que el de una partícula en su *centro de masa*, que se definirá en el capítulo 9. Su centro de masa está a una altura de 1.02 m cuando deja el suelo. Llega altura máxima de 1.85 m sobre el suelo y está a una elevación de 0.900 m cuando toca el suelo de nuevo. Determine: (a) su tiempo de vuelo (su “tiempo colgado”), (b) sus componentes de velocidad horizontal y (c) vertical en el instante de despegar y (d) su ángulo de despegue. (e) Por comparación, determine el tiempo colgado de un ciervo cola blanca que da un salto (figura P4.12b) con elevaciones de centro de masa $y_i = 1.20$ m, $y_{\text{máx}} = 2.50$ m y $y_f = 0.700$ m.

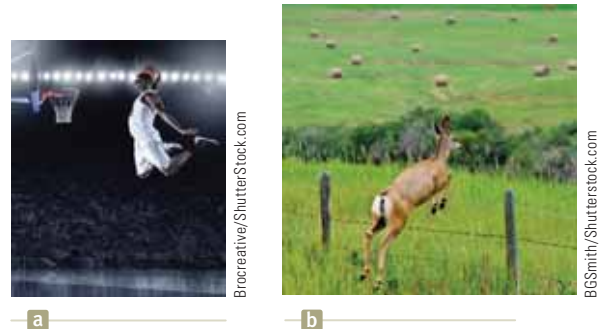


Figura P4.12

13. **PG** Un estudiante de pie se encuentra en el borde de un acantilado y lanza una piedra horizontalmente sobre el borde con una velocidad de $v_i = 18.0$ m/s. El acantilado tiene $h = 50.0$ m arriba del agua como se muestra en la figura P4.13. (a) ¿Cuáles son las coordenadas de la posición inicial de la piedra? (b) ¿Cuáles son los componentes de la velocidad inicial de la piedra? (c) ¿Cuál es el modelo de análisis adecuado para el movimiento vertical de la piedra? (d) ¿Cuál es el modelo de análisis adecuado para el movimiento horizontal de la piedra? (e) Escriba ecuaciones simbólicas para las componentes x y y de la velocidad de la piedra como una función del tiempo. (f) Escriba ecuaciones simbólicas para la posición de la piedra como una función del tiempo. (g) ¿Cuánto tiempo después de ser lanzada la piedra golpeó el agua debajo del acantilado? (h) ¿Con qué rapidez y ángulo de impacto pegó la piedra?

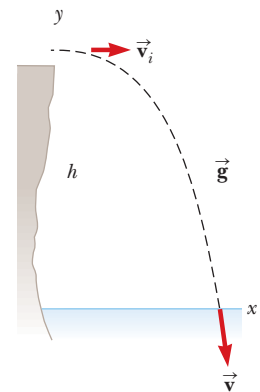


Figura P4.13

- 14.** La distancia récord en el deporte de lanzar discos es de 81.1 m. Este lanzamiento de discos fue establecido por Steve Urner de Estados Unidos en 1981. Suponiendo que el ángulo de lanzamiento inicial fue de 45° y despreciando la resistencia del aire, determine (a) la rapidez inicial del proyectil y (b) el intervalo de tiempo total que voló el proyectil. (c) ¿Cómo cambiaría las respuestas si el alcance fuera el mismo pero el ángulo de lanzamiento fuera mayor que 45° . Explique.
- 15.** Se hace un jonrón al pegarle a la pelota de béisbol de manera que libre una pared de 21.0 m de alto, situada a 130 m de la base de home. La bola es golpeada con un ángulo de 35.0° con la horizontal, y se desprecia la resistencia del aire. Encuentre (a) la rapidez inicial de la bola, (b) el tiempo que tarda la bola en llegar a la pared y (c) las componentes de la velocidad y la rapidez de la bola, cuando llega a la pared. (Suponga que la bola es golpeada a una altura de 1.00 m del suelo).
- 16.** Un proyectil es disparado desde lo alto de un acantilado de altura h sobre el océano. El proyectil se disparó a un ángulo θ por encima de la horizontal y con una velocidad inicial de v_i . (a) Encuentre una expresión simbólica en términos de las variables v_i , g y θ para el tiempo en que el proyectil alcanza la altura máxima. (b) Utilizando el resultado del inciso (a), encuentre una expresión para la altura máxima $h_{\text{máx}}$ sobre el océano alcanzada por el proyectil en términos de h , v_i , g y θ .
- 17.** Un niño está parado en un trampolín y lanza una piedra a una piscina. La piedra es lanzada desde una altura de 2.50 m sobre la superficie del agua con una velocidad de 4.00 m/s en un ángulo de 60.0° sobre la horizontal. Cuando la piedra pega en la superficie del agua, inmediatamente disminuye su rapidez a la mitad de la que tenía cuando pegó en el agua y mantiene esa rapidez en el agua. Después de que la piedra entra en el agua, se mueve en línea recta en la dirección de la velocidad que tenía cuando golpeó el agua. Si la piscina es de 3.00 m de profundidad, ¿cuánto tiempo transcurre entre cuando se lanza la piedra y cuando pega en el fondo de la piscina?

SECCIÓN 4.4 Modelo de análisis: Partícula en movimiento circular uniforme

Nota: Los problemas 3 y 9 del capítulo 6 se pueden asignar también en esta sección.

- 18.** En el ejemplo 4.6, encontramos la aceleración centrípeta de la Tierra cuando gira alrededor del Sol. A partir de la información de la parte final del libro, calcule la aceleración radial de un punto en la superficie de la Tierra, en el ecuador, debido a la rotación de la Tierra sobre su eje.
- 19.** El astronauta que orbita a la Tierra en la figura P4.19 se está preparando para acoplar con un satélite Westar VI. El satélite está en una órbita circular 600 kilómetros sobre la superficie de la Tierra, donde la aceleración de caída libre es 8.21 m/s^2 . Tome el radio de la Tierra como 6 400 km. determine la rapidez del satélite y el intervalo de tiempo necesario para completar una órbita alrededor de la Tierra, que es el periodo del satélite.



Figura P4.19

- 20.** Un atleta batea una pelota, conectada al extremo de una cadena, en un círculo horizontal. El atleta es capaz de girar la bola con una rapidez de 8.00 rev/s cuando la longitud de la cadena es 0.600 m. ¿Cuándo aumenta la longitud a 0.900 m, puede rotar la pelota sólo 6.00 rev/s. (a) ¿Cuál es la rapidez de rotación que da la mayor rapidez a la pelota? (b) ¿Cuál es la aceleración centrípeta de la bola a 8.00 rev/s? (c) ¿Cuál es la aceleración centrípeta en 6.00 rev/s?
- 21.** El atleta que se muestra en la figura P4.21 rota un disco de 1.00 kg a lo largo de una trayectoria circular de 1.06 m de radio. La rapidez máxima del disco es 20.0 m/s. Determine la magnitud de la aceleración radial máxima del disco.
- 22.** Un neumático de 0.500 m de radio gira a una rapidez constante de 200 rev/min. Encuentre la rapidez y la aceleración de una pequeña piedra atascada en la banda de rodadura de los neumáticos (en su borde exterior).



Figura P4.21

SECCIÓN 4.5 Aceleraciones tangencial y radial

- 23.** (a) Una partícula, que se mueve con rapidez instantánea de 3.00 m/s en una trayectoria con 2.00 m de radio de curvatura, ¿podría tener una aceleración de 6.00 m/s^2 de magnitud? (b) ¿Podría tener una aceleración 4.00 m/s^2 ? En cada caso, si la respuesta es sí, explique cómo puede ocurrir; si la respuesta es no, explique por qué.
- 24.** Una bola se balancea en un círculo vertical en el extremo de una cuerda de 1.50 m de largo. Cuando la bola está a 36.9° después del punto más bajo en su viaje hacia arriba, su aceleración total es $(-22.5 \hat{i} + 20.2 \hat{j}) \text{ m/s}^2$. En ese instante, (a) bosqueje un diagrama vectorial que muestre las componentes de su aceleración, (b) determine la magnitud de su aceleración radial y (c) determine la rapidez y velocidad de la bola.

SECCIÓN 4.6 Velocidad y aceleración relativas

- 25.** Un tornillo cae desde el techo de un vagón de ferrocarril en movimiento que acelera hacia el norte en proporción de 2.50 m/s^2 . (a) ¿Cuál es la aceleración del tornillo en relación con el vagón de ferrocarril? (b) ¿Cuál es la aceleración del tornillo en relación con la Tierra? (c) Describa la trayectoria del tornillo como la ve un observador dentro del vagón. (d) Describa la trayectoria del tornillo como la ve un observador fijo en la Tierra.
- 26.** El piloto de un avión registra que la brújula indica un rumbo hacia el oeste. La rapidez del avión respecto al aire es de 150 km/h. El aire se está moviendo con un viento de 30.0 km/h hacia el norte. Encuentre la velocidad del avión en relación con el suelo.
- 27.** Usted está tomando lecciones de vuelo de un piloto experimentado. Usted y el piloto están en el avión, usted en el asiento del piloto. La torre de control por radio, le indica que, mientras usted ha estado en el aire, ha surgido un viento de 25-mi/h con dirección del viento perpendicular a la pista en la que planea aterrizar. El piloto le dice que su velocidad del aire normal cuando aterrice será de 80 mi/h en relación con la Tierra. Esta rapidez es relativa al aire, en la dirección en la que apunta la nariz del avión. Le pide que determine el

ángulo en el que el avión debe volar de lado como “cangrejo”, es decir, el ángulo entre la línea central del avión y la línea central de la pista que permitirá que la velocidad del avión en relación con el suelo sea paralela a la pista.

28. Un automóvil viaja hacia el este con una rapidez de 50.0 km/h. Gotas de lluvia caen con una rapidez constante en vertical respecto de la Tierra. Las trazas de la lluvia en las ventanas laterales del automóvil forman un ángulo de 60.0° con la vertical. Encuentre la velocidad de la lluvia en relación con (a) el automóvil y (b) la Tierra.

29. Un estudiante de ciencias en un vagón plataforma de un tren que viaja a lo largo de una pista horizontal recta con una rapidez constante de 10.0 m/s. El estudiante lanza una bola en el aire a lo largo de una trayectoria que él juzga con un ángulo inicial de 60.0° sobre la horizontal y está en línea con la vía. La profesora del estudiante, que está de pie en el suelo cerca de ahí, observa que la bola se eleva verticalmente. ¿Qué tan alto ve elevarse la bola?

30. Un río tiene una rapidez estable de 5.00 m/s. Un estudiante nada corriente arriba una distancia de 1.00 km y de regreso al punto de partida. (a) Si el estudiante puede nadar a una rapidez de 1.20 m/s en aguas tranquilas, ¿en cuánto tiempo hace el viaje redondo? (b) ¿Cuánto tiempo requiere si las aguas están tranquilas? (c) Intuitivamente, ¿por qué nadar toma más tiempo cuando hay corriente?

31. Un río tiene una rapidez estable v . Un estudiante nada corriente arriba una distancia d y de regreso al punto de partida. El estudiante puede nadar a una rapidez c en aguas tranquilas. (a) En términos de d , v y c , ¿en cuánto tiempo hace el viaje redondo? (b) ¿Cuánto tiempo requiere si las aguas están tranquilas? (c) ¿Qué intervalo de tiempo es más largo? Explique si éste siempre es más grande.

32. Usted está participando en una pasantía de verano con la Guardia costera. Se le ha asignado el deber de determinar la dirección en la que una lancha de motor de la guardia costera debe viajar para interceptar naves no identificadas. Un día, el operador de radar detecta una nave no identificada a una distancia de 20.0 km de la instalación del radar en la dirección 15.0° al este del norte. La nave viaja a 26.0 km/h en una dirección a 40.0° al este del norte. La guardia costera desea enviar una lancha rápida, que viaje a 50.0 km/h, para viajar en línea recta desde la instalación del radar para interceptar e investigar la nave, y le piden la orientación que debe tomar la lancha rápida. Expresé la dirección como una orientación de brújula con respecto al norte.

33. Un camión de granja se dirige al este con una velocidad constante de 9.50 m/s en un tramo horizontal ilimitado del camino. Un niño se monta en la parte trasera del camión y lanza una lata de refresco hacia arriba (figura P4.33) y atrapa el proyectil en el mismo punto, pero 16.0 m más lejos en el camino. (a) En el marco de referencia el camión, ¿a qué ángulo con la vertical el niño lanza la lata? (b) ¿Cuál es la rapidez inicial de la lata en relación con el camión? (c) ¿Cuál es la forma de la trayectoria de la lata como la ve el niño? Un observador en el suelo

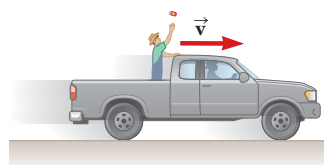


Figura P4.33

observa al niño lanzar la lata y atraparla. En este marco de referencia, (d) describa la forma de la trayectoria de la lata (e) determine la velocidad inicial de la lata.

PROBLEMAS ADICIONALES

34. Una bola en el extremo de una cuerda gira alrededor en un círculo horizontal de radio 0.300 m. El plano del círculo está a 1.20 m arriba del suelo. La cuerda se rompe y la bola aterriza a 2.00 m (horizontalmente) alejándose del punto sobre el suelo directamente debajo de la ubicación de la bola cuando se rompe la cuerda. Encuentre la aceleración radial de la pelota durante su movimiento circular.

35. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Un adulto de proporciones normales camina energicamente a lo largo de una línea recta en la dirección de $+x$, parado y sosteniendo su brazo derecho vertical y junto a su cuerpo para que el brazo no se balancee. Su mano derecha sostiene una pelota a su lado a una distancia h arriba del piso. Cuando la pelota pasa por encima de un punto marcado como $x = 0$ en el piso horizontal, abre los dedos para soltar la bola a partir del reposo en relación con su mano. La pelota pega en el suelo por primera vez en la posición $x = 7.00h$.

36. Una partícula parte del origen con velocidad $5\hat{i}$ en $t = 0$ y se mueve en el plano xy con una aceleración variable dada por $\vec{a} = (6\sqrt{t}\hat{j})$, donde \vec{a} está en metros por segundo cuadrado y t está en s. (a) Determine el vector velocidad de la partícula como función del tiempo. (b) Determine la posición de la partícula como función del tiempo

37. Lisa en su Lamborghini acelera a razón de $(3.00\hat{i} - 2.00\hat{j})$ m/s², mientras que Jill en su Jaguar acelera a $(1.00\hat{i} + 3.00\hat{j})$ m/s². Ambas empiezan a partir del reposo en el origen de un sistema de coordenadas xy . Después de 5.00 s, (a) ¿Cuál es la rapidez de Lisa con respecto a Jill, (b) ¿A qué distancia están, y (c) ¿Cuál es la aceleración de Lisa relativa a Jill?

38. Un chico le tira una piedra horizontalmente desde la cima de un acantilado de altura h hacia el océano. La piedra golpea el océano a una distancia d desde la base del acantilado. En términos de h , d y g , encuentre expresiones para el tiempo t en que la piedra cae en el océano, (b) la rapidez inicial de la piedra, (c) la rapidez de la piedra justo antes de que llegue al océano y (d) la dirección de la velocidad de la piedra justo antes de que llegue al océano.

39. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Albert Pujols hace un jonrón, de forma que la pelota libra la fila superior de las gradas, 24.0 m de altura, situada a 130 m de la base de home. La bola es golpeada a 41.7 m/s en un ángulo de 35.0° con la horizontal, y la resistencia del aire es despreciable.

40. Mientras algún metal fundido salpica, una gota vuela hacia el este con velocidad inicial v_i a un ángulo θ_i sobre la horizontal y otra gota vuela hacia el oeste con la misma rapidez al mismo ángulo sobre la horizontal, como se muestra en la figura P4.40. En términos de v_i y θ_i , encuentre la distancia entre las gotas como función del tiempo.

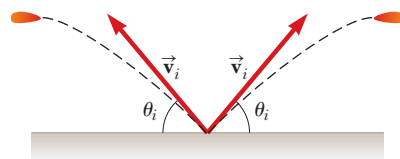


Figura P4.40



41. Un astronauta en la superficie de la Luna dispara un cañón para lanzar un paquete experimental, que deja el barril con movimiento horizontal. Suponga que la aceleración de caída libre en la Luna es un sexto de la propia de la Tierra. (a) ¿Cuál debe ser la rapidez de boquilla del paquete de modo que viaje completamente alrededor de la Luna y regrese a su ubicación original? (b) ¿Cuánto tarda este viaje alrededor de la Luna?

42. Un péndulo con un cordón de longitud $r = 1.00$ m se balancea en un plano vertical (figura P4.42). Cuando el péndulo está en las dos posiciones horizontales $\theta = 90.0^\circ$ y $\theta = 270^\circ$, su rapidez es 5.00 m/s. (a) Encuentre la magnitud de la aceleración radial y (b) la aceleración tangencial para estas posiciones. (c) Dibuje diagramas vectoriales para determinar la dirección de la aceleración total para estas dos posiciones. (d) Calcule la magnitud y dirección de la aceleración total en estas dos posiciones.

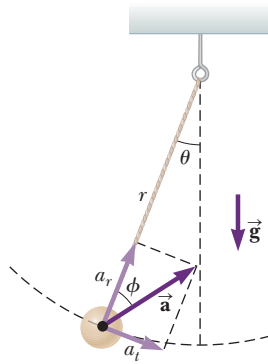


Figura P4.42

43. Un cañón de resorte se ubica en el borde de una mesa que está a 1.20 m sobre el suelo. Una bola de acero se lanza desde el cañón con rapidez v_i a 35.0° sobre la horizontal. (a) Encuentre la posición horizontal de la bola como función de v_i en el instante que aterriza. Esta función se escribe como $x(v_i)$. Evalúe x para (b) $v_i = 0.100$ m/s y para (c) $v_i = 100$ m/s. (d) Suponga que v_i está cerca de cero, pero no es igual a cero. Muestre que un término en la respuesta al inciso (a) domina de modo que la función $x(v_i)$ se reduce a una forma más simple. (e) Si v_i es muy grande, ¿cuál es la forma aproximada de $x(v_i)$? (f) Describa la forma global de la gráfica de la función $x(v_i)$.

44. Se lanza un proyectil desde el punto $(x = 0, y = 0)$ con velocidad $(12.0\hat{i} + 49.0\hat{j})$ en $t = 0$. (a) Tabule la distancia del proyectil $|\vec{r}|$ desde el origen al final de cada segundo de allí en adelante, para $0 \leq t \leq 10$ s. También puede ser útil tabular las coordenadas x y y , y las componentes de velocidad v_x y v_y . (b) Observe que la distancia del proyectil desde su punto de partida aumenta con el tiempo, llega a un máximo y comienza a disminuir. Pruebe que la distancia es un máximo cuando el vector de posición es perpendicular a la velocidad. *Sugerencia:* Argumente que si \vec{v} no es perpendicular a \vec{r} , entonces $|\vec{r}|$ debe aumentar o disminuir. (c) Determine la magnitud de la distancia máxima. (d) Explique su método para resolver el inciso (c).

45. Un pescador emprende el viaje a contracorriente. Su pequeño bote, impulsado por un motor fuera de borda, viaja con rapidez constante v en aguas tranquilas. El agua circula con rapidez constante v_w menor. Recorre 2.00 km a contracorriente cuando su hielera cae del bote. Se da cuenta de la falta de la hielera sólo después de otros 15 minutos de ir a contracorriente. En ese punto, regresa río abajo, todo el tiempo viajando con la misma rapidez respecto al agua. Alcanza a la hielera justo cuando está próxima a la cascada en el punto de partida. ¿Con qué rapidez se mueven en las aguas del río? Resuelva este problema en dos formas. (a) Primero, use la Tierra como marco de referencia. Respecto de la Tierra, el bote viaja a contracorriente con rapidez $v - v_w$ y río abajo a $v + v_w$. (b) Una segunda solución mucho más simple y más elegante se obtiene al usar el agua como marco de referencia. Este planteamiento tiene importantes aplicaciones en problemas mucho más complicados; por ejemplo, en el cálculo del movi-

miento de cohetes y satélites y en el análisis de la dispersión de partículas subatómicas de objetivos de gran masa.

46. Un jardinero lanza una pelota de béisbol a su receptor en un intento de sacar un corredor del cuadro. La pelota rebota una vez antes de llegar al receptor. Suponga que el ángulo al que una pelota rebotada deja el suelo es el mismo que el ángulo al que el jardinero la lanzó, como se muestra en la figura P4.46, pero la rapidez de la pelota después del rebote es un medio de la que tenía antes del rebote. (a) Suponga que la pelota siempre se lanza con la misma rapidez inicial. ¿A qué ángulo θ el jardinero debe lanzar la pelota para hacer que recorra la misma distancia D con un rebote (trayectoria azul) que una bola lanzada hacia arriba a 45.0° sin rebote (trayectoria verde)? (b) Determine la relación del intervalo de tiempo para el lanzamiento de un rebote al tiempo de vuelo para el lanzamiento sin rebote.

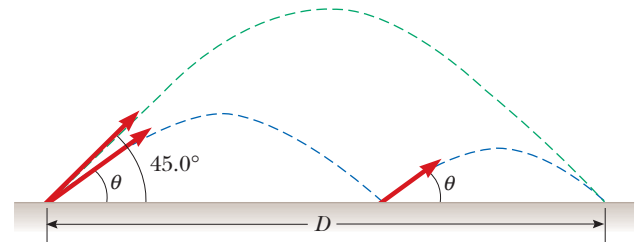


Figura P4.46

47. No se lastime; no golpee su mano contra nada. Dentro de estas limitaciones, describa cómo dar a la mano una gran aceleración. Calcule el orden de magnitud de esta aceleración, indicando las cantidades que mide o estima y sus valores.

48. Usted está en la atracción de piratas del Caribe en el Magic Kingdom en Disney World. Su bote se pasea por una batalla pirata, en la que los cañones de un barco y de un fuerte se disparan el uno al otro. Mientras que usted es consciente de que las salpicaduras en el agua no representan balas de cañón reales, usted comienza a preguntarse sobre tales batallas en los días de los piratas. Suponga que la fortaleza y la nave están separadas por 75.0 m. Ve que los cañones en el fuerte están dirigidos para que las balas de cañón sean disparadas horizontalmente desde una altura de 7.00 m sobre el agua. (a) Usted se pregunta a qué velocidad se deben disparar para que peguen en el barco antes de caer en el agua. (b) Luego, usted piensa en el lodo que se debe acumular dentro del barril de un cañón. Este lodo debe frenar las balas de cañón. Piensa otra pregunta: si las balas de cañón se pueden disparar a sólo 50.0% de la velocidad encontrada antes, ¿es posible disparar hacia arriba en algún ángulo con respecto horizontal para que alcancen la nave?

PROBLEMAS ADICIONALES

49. Un esquiador deja una rampa de salto con una velocidad de 10.0 m/s, 15.0° sobre la horizontal, como se muestra en la figura P4.49 (página 94). La pendiente está inclinada a $\phi = 50.0^\circ$ y la resistencia del aire es despreciable. Encuentre (a) la distancia desde la rampa hasta donde aterriza el esquiador y (b) las componentes de velocidad justo antes de aterrizar. (c) Explique ¿cómo cree que afectan los resultados si se incluye resistencia del aire?



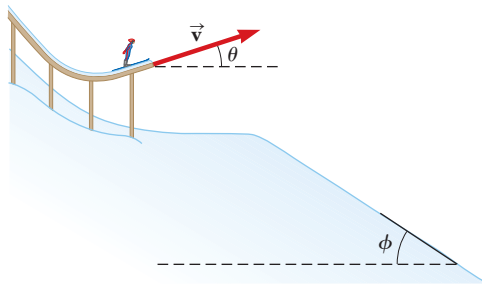


Figura P4.49

50. Un proyectil es disparado hacia arriba en una pendiente (ángulo de inclinación ϕ) con una velocidad inicial v_i a un ángulo θ_i con respecto a la horizontal ($\theta_i > \phi$) como se muestra en la figura P4.50. (a) Demuestre que el proyectil viaja una distancia d hacia arriba de la pendiente, donde

$$d = \frac{2v_i^2 \cos\theta_i \sin(\theta_i - \phi)}{g \cos^2 \phi}$$

- (b) ¿Para qué valor de θ_i es d un máximo, y cuál es ese valor máximo?

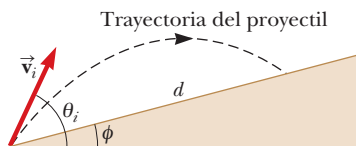


Figura P4.50

51. Dos nadadores, Chris y Sarah, parten desde el mismo punto en la orilla de una corriente ancha que circula con una rapidez v . Ambos se mueven con la misma rapidez c (donde $c > v$) en relación con el agua. Chris nada corriente abajo una distancia L y luego corriente arriba la misma distancia. Sarah nada de modo que su movimiento en relación con la Tierra es perpendicular a las orillas de la corriente. Ella nada la distancia L y luego de vuelta la misma distancia, de modo que ambos nadadores regresan al punto de partida. En términos de L , c y v , encuentre los intervalos de tiempo requeridos. (a) Para Chris de ida y vuelta y (b) para Sarah de ida y vuelta. (c) Explique cuál nadador regresa primero.

52. En la sección **¿Qué pasaría si?** del ejemplo 4.5, se afirmó que el intervalo máximo de un esquiador se presenta para un ángulo de lanzamiento θ dado por

$$\theta = 45^\circ - \frac{\phi}{2}$$

donde ϕ es el ángulo que la colina forma con la horizontal en la figura 4.15. Compruebe esta afirmación al derivar esta ecuación.

53. Un cohete de fuegos artificiales explota a una altura h , en el pico de su trayectoria vertical. Lanza fragmentos ardientes en todas direcciones, pero todos con la misma rapidez v . Pedazos de metal solidificado caen al suelo sin resistencia del aire. Encuentre el ángulo más pequeño que hace la velocidad final de un fragmento que impacte, con respecto a la horizontal.





Las leyes del movimiento

5



Su prima se prepara para atrapar un huevo crudo lanzado en una fiesta de cumpleaños. (Sue McDonald/Shutterstock.com)

IMAGINE

Ha regresado a casa desde su viaje a la Isla Catalina en los dos capítulos anteriores. Su familia está teniendo un picnic para celebrar un cumpleaños, así que hay mucha gente en su patio trasero en un día hermoso. Alguien sugiere un concurso de lanzamiento de huevos. Usted decide ofrecer algún consejo a su prima y le dice que mueva sus manos hacia atrás justo cuando atrape el huevo. Su prima le mira a los ojos y dice, “¿por qué?” Usted está tentado a decir, “porque sólo eso es cómo lo haces”, pero luego considera implicaciones más profundas de la pregunta de su prima. ¿Por qué mueve las manos hacia atrás? ¿Qué sucede si mantiene sus manos en una posición fija y atrapa el huevo? ¿Por qué tiene su prima que intentar esto? Lleva a su prima a la computadora y buscan videos de *YouTube* que tratan de la captura de un huevo, y luego encuentran algunos videos que muestran los resultados de arrojar un huevo en una sábana vertical. Mientras usted y su prima miran estos videos, ambos empiezan a entender la física de lanzar y atrapar huevos.

CONEXIONES En los capítulos anteriores, aprendimos cómo describir el movimiento de partículas y objetos que pueden modelarse como partículas. Vimos que el movimiento cambia de diferentes maneras. La aceleración de un auto es un cambio en su velocidad. La dirección de la velocidad de una pelota béisbol cambia a medida que vuela por el aire. Podemos *describir* estos cambios con el material en los capítulos anteriores, pero ¿qué *causa* estos cambios? Esta pregunta representa una transición de la cinemática, la descripción del movimiento, a la *dinámica*, el estudio de las causas de los cambios en el movimiento. Vamos a ver que *fuerza* es la causa de los cambios en el movimiento, y vamos a estudiar los efectos de la fuerza a través de las leyes del movimiento que nos entregó Isaac Newton. El concepto de fuerza se usará una y otra vez en capítulos futuros: fuerza gravitacional en el capítulo 13, fuerzas eléctricas en el capítulo 22, fuerzas magnéticas en el capítulo 28, fuerzas nucleares en el capítulo 43, y más.

- 5.1 Concepto de fuerza
- 5.2 Primera ley de Newton y marcos inerciales
- 5.3 Masa
- 5.4 Segunda ley de Newton
- 5.5 Fuerza gravitacional y peso
- 5.6 Tercera ley de Newton
- 5.7 Modelo de análisis utilizando la segunda ley de Newton
- 5.8 Fuerzas de fricción





Christie's Images Ltd./Superstock

Isaac Newton

Físico y matemático inglés
(1642-1727)

Isaac Newton fue uno de los más brillantes científicos de la historia. Antes de cumplir 30 años, formuló los conceptos básicos y las leyes de la mecánica, descubrió la ley de gravitación universal e inventó los métodos matemáticos del cálculo. Como consecuencia de sus teorías, Newton fue capaz de explicar los movimientos de los planetas, la marea baja y la marea alta y muchas características especiales de los movimientos de la Luna y la Tierra. También interpretó muchas observaciones fundamentales concernientes a la naturaleza de la luz. Sus aportaciones a las teorías físicas dominaron el pensamiento científico durante dos siglos y siguen siendo importantes en la actualidad.

5.1 Concepto de fuerza

Cada uno tiene una comprensión básica del concepto de fuerza a partir de la experiencia cotidiana. Cuando aleja un plato de comida vacío, ejerce una fuerza sobre él. De igual modo, cuando se lanza o patea una pelota se ejerce una fuerza sobre ella. En estos ejemplos, la palabra *fuerza* se refiere a una interacción con un objeto mediante actividad muscular y algún cambio en la velocidad del objeto. Sin embargo, las fuerzas no siempre causan movimiento. Por ejemplo, cuando está sentado, sobre su cuerpo actúa una fuerza gravitacional y aun así usted permanece fijo. Como segundo ejemplo, puede empujar (en otras palabras, ejercer una fuerza) sobre una gran roca y no ser capaz de moverla.

¿Qué fuerza (si la hay) hace que la Luna orbite la Tierra? Newton respondió ésta y otras preguntas relacionadas al afirmar que las fuerzas son lo que causa cualquier cambio en la velocidad de un objeto. La velocidad de la Luna cambia en dirección porque se mueve en una órbita casi circular en torno a la Tierra. Este cambio en velocidad lo causa la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre la Luna.

Cuando un resorte se jala, como en la figura 5.1a, el resorte se estira. Cuando se jala un carrito estacionario, como en la figura 5.1b, el carrito se mueve. Cuando se patea un balón, como en la figura 5.1c, se deforma y se pone en movimiento. Estas situaciones son ejemplos de una clase de fuerzas llamadas *fuerzas de contacto*. Esto es, implican contacto físico entre dos objetos. Otras fuerzas de contacto son la fuerza que ejercen las moléculas de un gas sobre las paredes de un contenedor y la fuerza que ejerce su pie sobre el suelo.

Otra clase de fuerzas, conocidas como *fuerzas de campo*, no involucran contacto físico entre dos objetos. Estas fuerzas actúan a través del espacio vacío. La fuerza gravitacional de atracción entre dos objetos con masa, que se ilustra en la figura 5.1d, es un ejemplo de esta clase de fuerza. La fuerza gravitacional mantiene a los objetos ligados a la Tierra y a los planetas en órbita alrededor del Sol. Otra fuerza de campo común es la fuerza eléctrica que una carga eléctrica ejerce sobre otra (figura 5.1e), como la fuerza eléctrica atractiva entre un electrón y un protón formando un átomo de hidrógeno. Un tercer ejemplo de fuerza de campo es la fuerza que un imán de barra ejerce sobre un trozo de hierro (figura 5.1f).

La distinción entre fuerzas de contacto y fuerzas de campo no es tan clara como se podría pensar a partir de la discusión anterior. Cuando se examinan a nivel atómico, todas las fuerzas que se clasifican como fuerzas de contacto resultan ser causadas por fuerzas (de campo) eléctricas del tipo que se ilustra en la figura 5.1e. No obstante, al desarrollar modelos para fenómenos macroscópicos, es conveniente usar ambas clasificaciones de fuerzas. Las únicas fuerzas *fundamentales* conocidas en la naturaleza son todas fuerzas de campo: 1) *fuerzas gravitacionales* entre objetos, 2) *fuerzas electromagnéticas* entre cargas eléctricas, 3) *fuerzas fuertes* entre partículas subatómicas y 4) *fuerzas débiles* que surgen en ciertos procesos de decaimiento radiactivo. En la física clásica sólo interesan las fuerzas gravitacional y electromagnética. Las fuerzas fuerte y débil se discutirán en el capítulo 44.

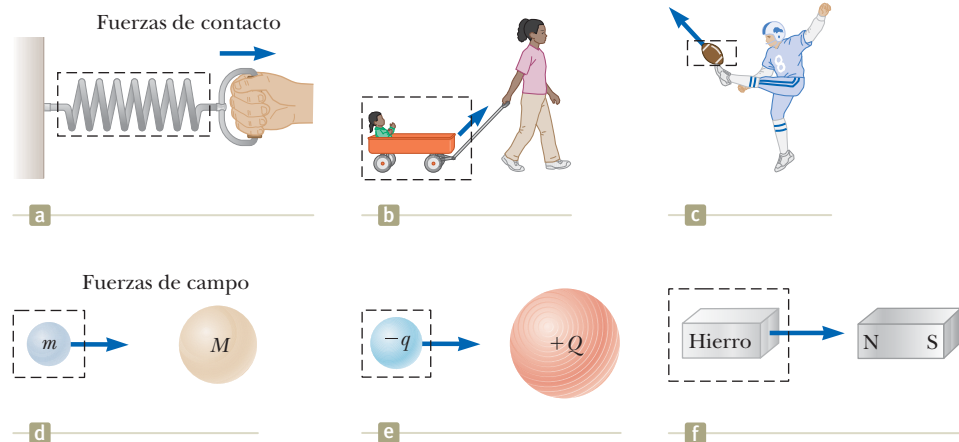


Figura 5.1 Algunos ejemplos de fuerzas aplicadas. En cada caso, sobre el objeto dentro del área limitada por líneas discontinuas se ejerce una fuerza. Algún agente en el ambiente exterior al área del recuadro ejerce una fuerza sobre el objeto.

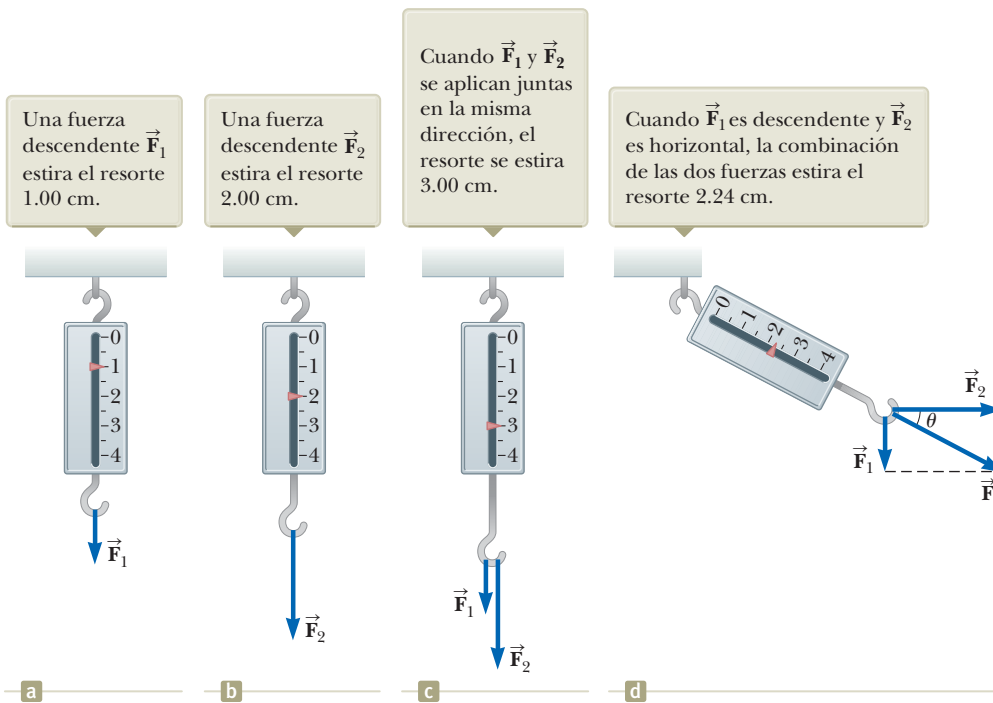


Figura 5.2 La naturaleza vectorial de una fuerza se prueba con una balanza de resorte.

La naturaleza vectorial de la fuerza

Es posible usar la deformación de un resorte para medir fuerzas. Suponga que una fuerza vertical se aplica a una balanza de resorte que tiene un extremo superior fijo, como se muestra en la figura 5.2a. El resorte se estira cuando la fuerza se aplica, y un puntero en la escala lee la elongación del resorte. El resorte se puede calibrar al definir una fuerza de referencia \vec{F}_1 como la fuerza que produce una lectura de 1.00 cm. Si ahora se aplica una fuerza hacia abajo diferente \vec{F}_2 cuya magnitud es el doble de la fuerza de referencia \vec{F}_1 como se ve en la figura 5.2b, el puntero se mueve 2.00 cm. La figura 5.2c muestra que el efecto combinado de las dos fuerzas colineales es la suma de los efectos de las fuerzas individuales.

Ahora suponga que la aplicación de las dos fuerzas es simultánea con \vec{F}_1 descendente y \vec{F}_2 horizontal, como se ilustra en la figura 5.2d. En este caso, el puntero indica 2.24 cm. La fuerza única \vec{F} que produciría esta misma lectura es la suma de los dos vectores \vec{F}_1 y \vec{F}_2 , como se describe en la figura 5.2d. Esto es, $|\vec{F}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 2.24$ unidades, y su dirección es $\theta = \tan^{-1}(-0.500) = -26.6^\circ$. Puesto que se ha comprobado experimentalmente que las fuerzas se comportan como vectores, se *deben* aplicar las reglas de adición vectorial para obtener la fuerza neta en un objeto.

5.2 Primera ley de Newton y marcos inerciales

El estudio de las fuerzas comienza al imaginar algunas situaciones físicas que involucran un disco sobre una mesa de hockey de aire perfectamente a nivel (figura 5.3). Se espera que el disco permanezca donde se coloca. Ahora piense que su mesa de hockey de aire se ubica en un tren que se mueve con velocidad constante a lo largo de una pista perfectamente uniforme. Si el disco se deposita en la mesa, de nuevo permanece donde se le coloca. Sin embargo, si el tren acelera, el disco comenzaría a moverse a lo largo de la mesa en dirección opuesta a la de la aceleración del tren, igual como un conjunto de papeles en el tablero de su automóvil cae en el asiento delantero cuando pisa el acelerador.

Como se vio en la sección 4.6, es posible observar un objeto en movimiento desde muchos marcos de referencia. La **primera ley del movimiento de Newton**, a veces llamada

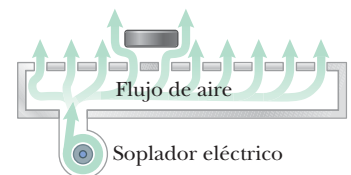


Figura 5.3 En una mesa de hockey de aire, el aire que sopla a través de los hoyos en la superficie permite que el disco se mueva casi sin fricción. Si la mesa no acelera, un disco colocado sobre la mesa permanecerá en reposo.



ley de la inercia, define un conjunto especial de marcos de referencia llamados *marcos inerciales*. Esta ley se puede establecer de modo teórico como sigue siguiente:

Un enunciado teórico de la primera ley de Newton. ▶

Si un objeto no interactúa con otros objetos, es posible identificar un marco de referencia inercial en el que el objeto tiene aceleración cero.

Marco de referencia inercial ▶

Tal marco de referencia se llama **marco de referencia inercial**. Cuando el disco está en la mesa de hockey de aire ubicada en el suelo, usted lo observa desde un marco de referencia inercial; no hay interacciones horizontales del disco con cualquier otro objeto y observa que tiene aceleración cero en dicha dirección. Cuando usted está en el tren en movimiento con velocidad constante, también observa el disco desde un marco de referencia inercial. Cualquier marco de referencia que se mueve con velocidad constante en relación con un marco inercial es, en sí mismo, un marco inercial. Sin embargo, cuando usted y el tren aceleran, usted observa el disco desde un **marco de referencia no inercial** porque el tren acelera en relación con el marco de referencia inercial de la superficie de la Tierra. Mientras el disco parece acelerar de acuerdo con sus observaciones, se puede identificar un marco de referencia en el cual el disco tiene aceleración cero. Por ejemplo, un observador que está fuera del tren en el suelo ve el disco desliziéndose respecto a la mesa pero siempre moviéndose con la misma velocidad que tiene el tren relativa al piso antes de comenzar a acelerar (porque casi no hay fricción para “amarrar” el disco y el tren). Debido a eso, todavía se satisface la primera ley de Newton, aun cuando sus observaciones como pasajero del tren muestren una aceleración aparente respecto a usted.

Un marco de referencia que se mueve con velocidad constante en relación con las estrellas distantes es la mejor aproximación de un marco inercial y, para propósitos de estudio, se considera a la Tierra como marco. En realidad la Tierra no es un marco inercial debido a su movimiento orbital en torno al Sol y su movimiento rotacional alrededor de su propio eje, y ambos involucran aceleraciones centrípetas. Sin embargo, estas aceleraciones son pequeñas comparadas con g , y con frecuencia se pueden despreciar. Por esta razón, la Tierra es modelada como un marco inercial, junto con cualquier otro marco unido a ésta.

Suponga que observa un objeto desde un marco de referencia inercial. (En la sección 6.3 se regresará a observaciones hechas en marcos de referencia no inerciales.) Antes de 1600, los científicos creían que el estado natural de la materia era el estado de reposo. Las observaciones mostraron que los objetos en movimiento finalmente dejaban de moverse. Galileo fue el primero en considerar un planteamiento diferente del movimiento y del estado natural de la materia. Diseñó experimentos mentales y concluyó que no es la naturaleza de un objeto detenerse una vez que se pone en movimiento: más bien, su naturaleza es *resistir el cambio en su movimiento*. En sus palabras: “cualquier velocidad una vez impartida a un cuerpo móvil se mantendrá firme siempre y cuando se retiren las causas externas del retardo”. Por ejemplo, una nave espacial que navega a través del espacio vacío con su motor apagado seguirá moviéndose para siempre. *No* buscaría un “estado natural” de reposo.

Dada la discusión de las observaciones realizadas acerca de los marcos de referencia inerciales, se puede plantear un enunciado más práctico de la primera ley del movimiento de Newton:

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 5.1

Primera ley de Newton La primera ley de Newton *no* explica lo que sucede con un objeto con *fuerza neta cero*, esto es, múltiples fuerzas que se cancelan; expresa lo que ocurre *en ausencia de fuerzas externas*. Esta diferencia sutil pero importante permite definir la fuerza como la causa de un cambio en el movimiento. La descripción de un objeto bajo el efecto de fuerzas que se equilibran la cubre la segunda ley de Newton.

Otro enunciado de la primera ley de Newton ▶

En ausencia de fuerzas externas, y cuando se ve desde un marco de referencia inercial, un objeto en reposo se mantiene en reposo y un objeto en movimiento continúa en movimiento con una velocidad constante (esto es, con una rapidez constante en una línea recta).

En otras palabras, **cuando ninguna fuerza actúa sobre un objeto, la aceleración del objeto es cero**. Una conclusión a partir de la primera ley, es que cualquier *objeto aislado* (uno que no interactúa con su entorno) está en reposo o en movimiento con velocidad constante. La tendencia de un objeto a resistir cualquier intento por cambiar su velocidad se llama **inercia**. Dado el enunciado anterior de la primera ley, se puede concluir que un objeto que acelera debe experimentar una fuerza. A su vez, de la primera ley, se puede definir **fuerza** como **aquello que causa un cambio en el movimiento de un objeto**.

Definición de fuerza ▶



- E XAMEN RÁPIDO 5.1**Cuál de los siguientes enunciados es correcto? **a)** Es posible que un objeto tenga movimiento en ausencia de fuerzas sobre el objeto. **b)** Es posible tener fuerzas sobre un objeto en ausencia de movimiento del objeto. **c)** Ni **a)** ni **b)** son correctos. **d)** Tanto **a)** como **b)** son correctos.

5.3 Masa

Piense que quiere atrapar ya sea un balón de basquetbol o una bola de boliche. ¿Cuál es más probable que siga moviéndose cuando intenta capturarla? ¿Cuál requiere más esfuerzo para lanzarla? La bola de boliche requiere más esfuerzo. En el lenguaje de la física, se dice que la bola de boliche es más resistente al cambio en su velocidad que la de basquetbol. ¿Cómo se puede cuantificar este concepto?

La **masa** es la propiedad de un objeto que especifica cuánta resistencia muestra un objeto para cambiar su velocidad y, como se aprendió en la sección 1.1, la unidad del SI de masa es el kilogramo. Los experimentos muestran que mientras más grande sea la masa de un objeto, menos acelera el objeto bajo la acción de una fuerza aplicada conocida.

Para describir la masa en unidades cuantitativas, se realizan experimentos en los que se comparan las aceleraciones que produce una fuerza conocida sobre diferentes objetos. Suponga que una fuerza actúa sobre un objeto de masa m_1 produce un cambio en el movimiento de éste que puede cuantificarse mediante la aceleración \vec{a}_1 del objeto, y la *misma fuerza* sobre un cuerpo de masa m_2 produce una aceleración \vec{a}_2 . La relación de las dos masas se define como la proporción inversa de las magnitudes de las aceleraciones producidas por la fuerza:

$$\frac{m_1}{m_2} \equiv \frac{a_2}{a_1} \quad (5.1)$$

Por ejemplo, si una fuerza conocida que actúa sobre un objeto de 3 kg produce una aceleración de 4 m/s², la misma fuerza aplicada a un objeto de 6 kg produce una aceleración de 2 m/s². De acuerdo con un cúmulo de observaciones similares, se concluye que la magnitud de la aceleración de un objeto es inversamente proporcional a su masa cuando sobre él actúa una fuerza conocida. Si un objeto tiene una masa conocida, la masa del otro objeto se obtiene a partir de mediciones de aceleración.

La masa es una propiedad inherente de un objeto y es independiente del entorno del objeto y del método que se aplica para medirla. Además, la masa es una cantidad escalar que obedece las reglas de la aritmética ordinaria. Por ejemplo, si combina una masa de 3 kg con una masa de 5 kg, la masa total es 8 kg. Este resultado se puede verificar experimentalmente al comparar la aceleración que una fuerza conocida proporciona a diferentes objetos por separado con la aceleración que la misma fuerza proporciona a los mismos objetos combinados como una unidad.

La masa no se debe confundir con el peso. La masa y el peso son dos cantidades diferentes. El peso de un objeto es igual a la magnitud de la fuerza gravitacional ejercida sobre el objeto y varía con la posición (véase la sección 5.5). Por ejemplo, una persona que pesa 180 lb sobre la Tierra pesa sólo aproximadamente 30 lb sobre la Luna. Por otra parte, la masa de un objeto por dondequiera es la misma: un objeto que tiene una masa de 2 kg sobre la Tierra también tiene una masa de 2 kg sobre la Luna.

5.4 Segunda ley de Newton

La primera ley de Newton explica lo que sucede a un objeto cuando sobre él no actúan fuerzas: mantiene su movimiento original; permanece en reposo o se mueve en línea recta con rapidez constante. La segunda ley de Newton responde la pregunta de qué le ocurre a un objeto que tiene una o más fuerzas que actúan en él.

Imagine realizar un experimento en el que empuja un bloque de masa m a través de una superficie horizontal sin fricción. Cuando ejerce alguna fuerza horizontal \vec{F} sobre el bloque, éste se mueve con cierta aceleración \vec{a} . Si aplica al doble una fuerza sobre el mismo bloque, los resultados experimentales muestran que la aceleración del bloque se duplica; si aumenta la fuerza aplicada a $3\vec{F}$, la aceleración se triplica, etcétera. A partir de tales observaciones, se concluye que la aceleración de un objeto es directamente propor-

◀ Definición de masa

◀ Masa y peso son cantidades diferentes

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 5.2

La fuerza es la causa de cambios en el movimiento

Un objeto puede tener movimiento en ausencia de fuerzas, como describe la primera ley de Newton. Por tanto, no interprete la fuerza como la causa del *movimiento*. La fuerza es la causa de los *cambios en el movimiento*.



PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 5.3

$m\vec{a}$ no es una fuerza La ecuación 5.2 *no* indica que el producto $m\vec{a}$ sea una fuerza. Todas las fuerzas sobre un objeto se añaden como vectores para generar la fuerza neta en el lado izquierdo de la ecuación. En tal caso esta fuerza neta se iguala con el producto de la masa del objeto y la aceleración que resulta de la fuerza neta. *No* incluya una “fuerza $m\vec{a}$ ” en su análisis de las fuerzas sobre un objeto.

cional a la fuerza que actúa sobre él: $\vec{F} \propto \vec{a}$. Esta idea se introdujo por primera ocasión en la sección 2.4, cuando se discutió la dirección de la aceleración de un objeto. La magnitud de la aceleración de un objeto es inversamente proporcional a su masa, como se afirmó en la sección anterior: $|\vec{a}| \propto 1/m$.

Estas observaciones experimentales se resumen en la **segunda ley de Newton**:

Cuando se ve desde un marco de referencia inercial, la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa:

$$\vec{a} \propto \frac{\sum \vec{F}}{m}$$

Si se elige una constante de proporcionalidad 1, se relaciona masa, aceleración y fuerza a través del siguiente enunciado matemático de la segunda ley de Newton:¹

Segunda ley de Newton ▶

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (5.2)$$

Tanto en el enunciado textual como en el matemático de la segunda ley de Newton se indicó que la aceleración se debe a la *fuerza neta* $\sum \vec{F}$ que actúa sobre un objeto. La **fuerza neta** sobre un objeto es la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el objeto. (A veces a la fuerza neta se le referirá como *fuerza total*, *fuerza resultante* o *fuerza desequilibrada*.) Al resolver un problema con la segunda ley de Newton, es imperativo determinar la fuerza neta correcta sobre un objeto. Muchas fuerzas pueden actuar sobre un objeto, pero sólo hay una aceleración.

La ecuación 5.2 es una expresión vectorial y por tanto es equivalente a tres ecuaciones componentes:

Segunda ley de Newton: forma de componentes ▶

$$\sum F_x = ma_x \quad \sum F_y = ma_y \quad \sum F_z = ma_z \quad (5.3)$$

E XAMEN RÁPIDO 5.2 Un objeto no experimenta aceleración. ¿Cuál de los siguientes enunciados *no puede* ser cierto para el objeto? (a) Una sola fuerza actúa sobre el objeto. (b) No actúan fuerzas sobre el objeto. (c) Sobre el objeto actúan fuerzas, pero éstas se cancelan.

E XAMEN RÁPIDO 5.3 Usted empuja un objeto, al inicio en reposo, a través de un piso sin fricción con una fuerza constante durante un intervalo de tiempo Δt , lo que resulta en una rapidez final de v para el objeto. Luego repite el experimento, pero con una fuerza que es el doble de grande. ¿Qué intervalo de tiempo se requiere ahora para alcanzar la misma rapidez final v ? a) $4\Delta t$, b) $2\Delta t$, c) Δt , d) $\Delta t/2$, e) $\Delta t/4$.

La unidad del SI de fuerza es el **newton** (N). Una fuerza de 1 N es la fuerza que, cuando actúa sobre un objeto de 1 kg de masa, produce una aceleración de 1 m/s^2 . A partir de esta definición y de la segunda ley de Newton, es claro que el newton se puede expresar en términos de las siguientes unidades fundamentales de masa, longitud y tiempo:

Definición de newton ▶

$$1 \text{ N} \equiv 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \quad (5.4)$$

En el sistema inglés, la unidad de fuerza es la **libra** (lb). Una fuerza de 1 lb es la fuerza que, cuando actúa sobre una masa de 1 slug,² produce una aceleración de 1 ft/s^2 :

$$1 \text{ lb} \equiv 1 \text{ slug} \cdot \text{ft/s}^2$$

Una aproximación conveniente es $1 \text{ N} \approx \frac{1}{4} \text{ lb}$.

¹La ecuación 5.2 es válida sólo cuando la rapidez del objeto es mucho menor que la rapidez de la luz. La situación relativista se trata en el capítulo 38.

²El *slug* es la unidad de masa en el sistema usual estadounidense y es la contraparte de la unidad del SI de *kilogramo* en dicho sistema. Puesto que la mayoría de los cálculos en el estudio de la mecánica clásica están en unidades del SI, el slug se usa rara vez en este texto.



¿Por qué mover las manos hacia atrás cuando se atrapa el huevo del argumento introductorio? Imagínesse sosteniendo sus manos rigidamente y no moverlos cuando atrapa el huevo. Luego, el huevo pegará en la mano y alcanza el reposo en un breve intervalo de tiempo. Como resultado, la magnitud de la aceleración del huevo será grande. De acuerdo con la ecuación 5.2, esto requerirá una gran fuerza de sus manos. Esta gran fuerza es suficiente para romper la cáscara del huevo. Sin embargo, si mueve las manos hacia atrás, y lentamente alcance el reposo el huevo, la aceleración es de una magnitud mucho menor. Esto, a su vez, requiere una fuerza mucho más pequeña, que pueda mantener la cáscara del huevo intacta.

El lanzar el huevo en la hoja es similar: cuando el huevo pega la hoja, la hoja se mueve en la misma dirección en respuesta, trayendo el huevo a una velocidad más baja sobre una distancia relativamente larga.

Ejemplo 5.1 Un disco de hockey que acelera

Un disco de hockey que tiene una masa de 0.30 kg se desliza sobre la superficie horizontal sin fricción de una pista de patinaje. Dos bastones de hockey golpean el disco simultáneamente, y ejercen las fuerzas sobre el disco que se muestran en la figura 5.4. La fuerza \vec{F}_1 tiene una magnitud de 5.0 N, y está dirigida a $\theta = 20^\circ$ bajo el eje x . La fuerza \vec{F}_2 tiene una magnitud de 8.0 N y su dirección es $\phi = 60^\circ$ sobre el eje x . Determine tanto la magnitud como la dirección de la aceleración del disco.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura 5.4. Use su experiencia en adición vectorial del capítulo 3 y prediga la dirección aproximada del vector de fuerza neta sobre el disco. La aceleración del disco estará en la misma dirección.

Categorizar Puesto que es posible determinar una fuerza neta y se quiere una aceleración, este problema se clasifica como uno que se puede resolver aplicando la segunda ley de Newton. En la sección 5.7, se introducirá formalmente el modelo para el análisis de una *partícula sujeta a una fuerza neta* para así estudiar una situación como esta.

Analizar Encuentre la componente de la fuerza neta que actúa sobre el disco en la dirección x :

Encuentre la componente de la fuerza neta que actúa sobre el disco en la dirección y :

Aplique la segunda ley de Newton en forma de componentes (ecuación 5.3) para encontrar las componentes x y y de la aceleración del disco:

Sustituya valores numéricos:

Encuentre la magnitud de la aceleración:

Calcule la dirección de la aceleración en relación con el eje positivo x :

Finalizar Los vectores de la figura 5.4 se pueden sumar gráficamente para verificar lo razonable de la respuesta. Puesto que el vector aceleración está a lo largo de la dirección de la fuerza resultante, un dibujo que muestre el vector fuerza resultante ayuda a comprobar la validez de la respuesta. (¡Inténtelo!)

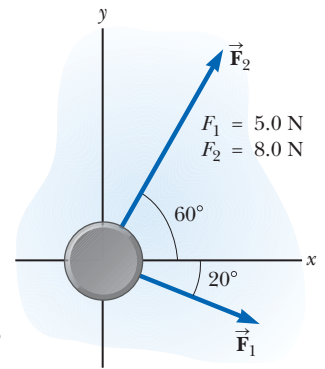


Figura 5.4 (Ejemplo 5.1) Un disco de hockey que se mueve sobre una superficie sin fricción está sujeto a dos fuerzas, \vec{F}_1 y \vec{F}_2 .

$$\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} = F_1 \cos \theta + F_2 \cos \phi$$

$$\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} = F_1 \sin \theta + F_2 \sin \phi$$

$$a_x = \frac{\sum F_x}{m} = \frac{F_1 \cos \theta + F_2 \cos \phi}{m}$$

$$a_y = \frac{\sum F_y}{m} = \frac{F_1 \sin \theta + F_2 \sin \phi}{m}$$

$$a_x = \frac{(5.0 \text{ N}) \cos(-20^\circ) + (8.0 \text{ N}) \cos(60^\circ)}{0.30 \text{ kg}} = 29 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = \frac{(5.0 \text{ N}) \sin(-20^\circ) + (8.0 \text{ N}) \sin(60^\circ)}{0.30 \text{ kg}} = 17 \text{ m/s}^2$$

$$a = \sqrt{(29 \text{ m/s}^2)^2 + (17 \text{ m/s}^2)^2} = 34 \text{ m/s}^2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{17}{29}\right) = 31^\circ$$

continúa

5.1 continuación

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que tres bastones de hockey golpean el disco simultáneamente, y dos de ellos ejercen las fuerzas que se muestran en la figura 5.4. El resultado de las tres fuerzas es que el disco de hockey *no* muestra aceleración. ¿Cuáles deben ser las componentes de la tercera fuerza?

Respuesta Si hay aceleración cero, la fuerza neta que actúa sobre el disco debe ser cero. En consecuencia, las tres fuerzas se deben cancelar. Las componentes de la tercera fuerza deben ser de igual magnitud y signo contrario comparadas con las componentes de la fuerza neta aplicada por las primeras dos fuerzas de modo que todas las componentes sumen cero. Por tanto, -8.7 N y $F_{3y} = -\sum F_y = -(0.30 \text{ kg})(17 \text{ m/s}^2) = -5.2 \text{ N}$.

5.5 Fuerza gravitacional y peso

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 5.4

“Peso de un objeto” Es familiar la frase cotidiana “el peso de un objeto”. Sin embargo, el peso no es una propiedad inherente de un objeto; más bien, es una medida de la fuerza gravitacional entre el objeto y la Tierra (u otro planeta). Por tanto, el peso es una propiedad de un *sistema*: el objeto y la Tierra.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 5.5

El kilogramo no es una unidad de peso Es posible que haya visto la “conversión” $1 \text{ kg} = 2.2 \text{ lb}$. A pesar de las afirmaciones populares de peso expresadas en kilogramos, el kilogramo no es una unidad de *peso*, es una unidad de *masa*. El enunciado de conversión no es una igualdad; es una *equivalencia* que es válida sólo en la superficie de la Tierra. Este problema se planteó primero en el imaginario del capítulo 1.



NASA/Eugene Cernan

Figura 5.5 Astronauta Harrison Schmitt lleva una mochila en la espalda en la luna.

Todos los objetos son atraídos hacia la Tierra. La fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre un objeto se llama **fuerza gravitacional** \vec{F}_g . Esta fuerza se dirige hacia el centro de la Tierra³ y su magnitud se llama **peso** del objeto.

En la sección 2.6 se vio que un objeto en caída libre experimenta una aceleración \vec{a} que actúa hacia el centro de la Tierra. Al aplicar la segunda ley de Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ a un objeto en caída libre de masa m , con $\vec{a} = \vec{g}$ y $\sum \vec{F} = \vec{F}_g$ se obtiene

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \quad (5.5)$$

Por tanto, el peso de un objeto, al definirse como la magnitud de \vec{F}_g , está dado por

$$F_g = mg \quad (5.6)$$

Puesto que depende de g , el peso varía con la ubicación geográfica. Ya que g disminuye a medida que crece la distancia al centro de la Tierra, los objetos pesan menos a mayores altitudes que a nivel del mar. Por ejemplo, un bloque de ladrillos de 1 000 kg utilizado en la construcción del Empire State en Nueva York pesaba 9 800 N a nivel de la calle, pero pesaba alrededor de 1 N menos cuando se levantó del nivel de la acera hasta lo alto del edificio. Como otro ejemplo, suponga que un estudiante tiene una masa de 70.0 kg. El peso del estudiante en una ubicación donde $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ es 686 N (aproximadamente 150 lb). Sin embargo, en lo alto de una montaña, donde $g = 9.77 \text{ m/s}^2$, el peso del estudiante sólo es 684 N. En tal caso, si quiere perder peso sin someterse a dieta, ¡ascienda una montaña o pésese a 30 000 ft durante el vuelo de un avión!

La ecuación 5.6 indica que hay una clara diferencia entre masa y peso. La unidad de sustentación de vida que lleva en la espalda el astronauta Harrison Schmitt pesaba 300 lb en la Tierra y tenía una masa de 136 kg. Durante su entrenamiento usó una mochila de 50 lb con una masa de 23 kg. Aunque esta estrategia simuló efectivamente el peso reducido que la unidad tendría en la Luna, no imitó correctamente la masa invariable. Fue más difícil acelerar la unidad de 136 kg (tal vez al saltar o dar vuelta súbitamente) en la Luna que acelerar la unidad de 23 kg sobre la Tierra.

La ecuación 5.6 cuantifica la fuerza gravitacional sobre el objeto, pero note que esta ecuación no requiere que el objeto se mueva. Incluso para un objeto fijo o para un objeto sobre el que actúan varias fuerzas, la ecuación 5.6 se puede aplicar para calcular la magnitud de la fuerza gravitacional. El resultado es un cambio sutil en la interpretación de m en la ecuación. La masa m en la ecuación 5.6 establece la intensidad de la atracción gravitacional entre el objeto y la Tierra. Este papel es por completo diferente del descrito antes para la masa: medir la resistencia al cambio en movimiento como respuesta a una fuerza externa. En ese papel, la masa también es llamada **masa inercial**. Por ende, la m en la ecuación 5.6 se llama **masa gravitacional**. Aun cuando esta cantidad sea diferente en com-

³Este enunciado ignora que la distribución de masa de la Tierra no es perfectamente esférica.

portamiento de la masa inercial, una de las conclusiones experimentales de la dinámica newtoniana es que la masa gravitacional y la masa inercial tienen el mismo valor.

Aunque esta discusión se enfocó en la fuerza gravitacional sobre un objeto debida a la Tierra, el concepto generalmente es válido en cualquier planeta. El valor de g variará de un planeta a otro, pero la magnitud de la fuerza gravitacional siempre será conocida por el valor de mg .

- EJEMPLO RÁPIDO 5.4** Suponga que habla por un teléfono interplanetario a un amigo que vive en la Luna. Él le dice que acaba de ganar un newton de oro en un concurso. Con excitación, ¡usted le dice que entró a la versión terrícola del mismo concurso y que también ganó un newton de oro! ¿Quién es más rico? **a)** Usted. **b)** Su amigo. **c)** Ambos son igualmente ricos.

Ejemplo conceptual 5.2 ¿Cuánto pesa en un elevador?

Es muy probable que usted haya estado en un elevador que acelera hacia arriba mientras se mueve a pisos superiores. En este caso, se siente más pesado. De hecho, si se para en una báscula en ese momento, la báscula mide una fuerza que tiene una magnitud mayor que su peso. Por tanto, tiene evidencia sensorial y medida que lo lleva a creer que es más pesado en esta situación. ¿Es usted más pesado?

SOLUCIÓN

No; su peso no cambia. Sus experiencias se deben al hecho de que está en un marco de referencia no inercial. Para proporcionar la aceleración ascendente, el suelo o la báscula deben ejercer sobre sus pies una fuerza hacia arriba que sea mayor en magnitud que su peso. Esta fuerza más grande que siente es la que interpreta como sentirse más pesado. La báscula lee esta fuerza ascendente, no su peso, y por eso su lectura aumenta. Vamos a examinar el efecto de la aceleración de un elevador en peso aparente en el ejemplo 5.8.

5.6 Tercera ley de Newton

Si usted presiona contra una esquina de este libro con la yema de los dedos, el libro lo empuja de vuelta y forma una pequeña marca en su piel. Si empuja más fuerte, el libro hace lo mismo y la marca en su piel es un poco más profunda. Esta simple actividad ilustra que las fuerzas son *interacciones* entre dos objetos: cuando su dedo empuja sobre el libro, el libro empuja de vuelta sobre su dedo. Este importante principio se conoce como **tercera ley de Newton**:

Si dos objetos interactúan, la fuerza \vec{F}_{12} que ejerce el objeto 1 sobre el objeto 2 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza \vec{F}_{21} que ejerce el objeto 2 sobre el objeto 1:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (5.7)$$

Cuando sea importante designar fuerzas como interacciones entre dos objetos, se usará esta notación de subíndices, donde \vec{F}_{ab} significa “la fuerza ejercida *por a sobre b*”. La tercera ley se ilustra en la figura 5.6. La fuerza que el objeto 1 ejerce sobre el objeto 2 se llama popularmente *fuerza de acción*, y la fuerza del objeto 2 sobre el objeto 1 se llama *fuerza de reacción*. Estos términos en cursivas no son términos científicos; además, cualquier fuerza se puede etiquetar como fuerza de acción o reacción. Estos términos se usarán por conveniencia. En todos los casos, las fuerzas de acción y reacción actúan sobre objetos *diferentes* y deben ser del mismo tipo (gravitacional, eléctrico, etcétera). Por ejemplo, la fuerza que actúa sobre un proyectil en caída libre es la fuerza gravitacional que ejerce la Tierra sobre el proyectil $\vec{F}_g = \vec{F}_{Ep}$ ($T = \text{Tierra}$, $p = \text{proyectil}$), y la magnitud de esta fuerza es mg . La reacción a esta fuerza es la fuerza gravitacional que ejerce el proyectil sobre la Tierra $\vec{F}_{pE} = -\vec{F}_{Ep}$. La fuerza de reacción \vec{F}_{pE} debe acelerar a la Tierra hacia el proyectil como la fuerza de acción \vec{F}_{Ep} acelera al proyectil hacia la Tierra. No obstante, puesto que la Tierra

◀ Tercera ley de Newton

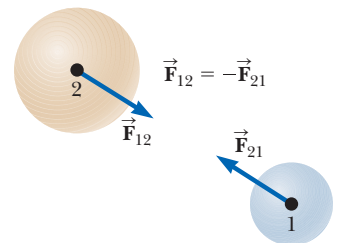
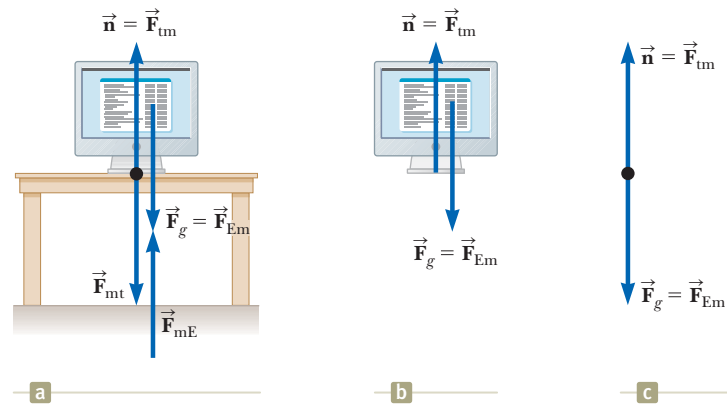


Figura 5.6 Tercera ley de Newton. La fuerza \vec{F}_{12} que ejerce el objeto 1 sobre el objeto 2 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza \vec{F}_{21} que ejerce el objeto 2 sobre el objeto 1.



Figura 5.7 a) Cuando un monitor de computadora está en reposo sobre una mesa, las fuerzas que actúan sobre el monitor son la fuerza normal \vec{n} y la fuerza gravitacional \vec{F}_g . La reacción a \vec{n} es la fuerza \vec{F}_{mt} que ejerce el monitor sobre la mesa. La reacción a \vec{F}_g es la fuerza \vec{F}_{Em} que ejerce el monitor sobre la Tierra. b) Un *diagrama de fuerzas* muestra las fuerzas sobre el monitor. c) Un *diagrama de cuerpo libre* mostrando al monitor como un punto negro con las fuerzas actuando sobre él.



PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 5.6

n no siempre es igual a mg En la situación que se muestra en la figura 5.7 y en muchas otras, se encuentra que $n = mg$ (la fuerza normal tiene la misma magnitud que la fuerza gravitacional). Sin embargo, este resultado generalmente *no* es cierto. Si un objeto está en un plano inclinado, si hay fuerzas aplicadas con componentes verticales o si hay una aceleración vertical del sistema, entonces $n \neq mg$. Siempre aplique la segunda ley de Newton para encontrar la relación entre n y mg .

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 5.7

Tercera ley de Newton Recuerde que las fuerzas de acción y reacción de la tercera ley de Newton actúan sobre objetos *diferentes*. Por ejemplo, en la figura 5.7, $\vec{n} = \vec{F}_{tm} = -m\vec{g} = -\vec{F}_{Em}$. Las fuerzas \vec{n} y $m\vec{g}$ son iguales en magnitud y opuestas en dirección, pero no representan un par acción-reacción porque ambas fuerzas actúan sobre el *mismo* objeto, el monitor.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 5.8

Diagramas de cuerpo libre La etapa más importante en la solución de un problema que utiliza las leyes de Newton es dibujar un bosquejo adecuado, el diagrama de cuerpo libre. Asegúrese de dibujar *sólo* aquellas fuerzas que actúan sobre el objeto que aísla. Dibuje *todas* las fuerzas que actúan sobre el objeto, incluida cualquier fuerza de campo, como la fuerza gravitacional.

tiene una masa tan grande, su aceleración debida a esta fuerza de reacción es despreciablemente pequeña.

Considere un monitor de computadora en reposo sobre una mesa, como en la figura 5.7a. La fuerza gravitacional sobre el monitor es $\vec{F}_g = \vec{F}_{Em}$. La reacción a esta fuerza es la fuerza $\vec{F}_{mE} = -\vec{F}_{Em}$ ejercida por el monitor sobre la Tierra. El monitor no acelera porque lo sostiene la mesa. La mesa ejerce sobre el monitor una fuerza hacia arriba $\vec{n} = \vec{F}_{tm}$, llamada **fuerza normal**. (*Normal* en este contexto significa *perpendicular*.) En general, siempre que un objeto esté en contacto con una superficie, ésta ejerce una fuerza normal sobre el objeto. La fuerza normal sobre el monitor puede tener cualquier valor que haga falta, hasta el punto de romper la mesa. Puesto que el monitor tiene aceleración cero, la segunda ley de Newton aplicada al monitor produce $\sum \vec{F} = \vec{n} + m\vec{g} = 0$, de modo que $n\hat{j} - mg\hat{j} = 0$, o $n = mg$. La fuerza normal equilibra la fuerza gravitacional sobre el monitor, de modo que la fuerza neta sobre el monitor es cero. La fuerza de reacción a \vec{n} es la fuerza que ejerce el monitor hacia abajo sobre la mesa, $\vec{F}_{mt} = -\vec{F}_{tm} = -\vec{n}$.

Observe que las fuerzas que actúan sobre el monitor son \vec{F}_g y \vec{n} , como se muestra en la figura 5.6b. Las dos fuerzas \vec{F}_{mE} y \vec{F}_{Em} se ejercen sobre objetos distintos del monitor.

La figura 5.7 ilustra un paso de suma importancia en la resolución de problemas que involucran fuerzas. La figura 5.7a muestra muchas de las fuerzas actuantes en la situación: las que actúan sobre el monitor, una que actúa sobre la mesa y otra que actúa sobre la Tierra. El esquema de la figura 5.7b, en contraste, muestra sólo las fuerzas que actúan sobre *un objeto*, el monitor, y es llamado **diagrama de fuerzas** o un *diagrama que exhibe las fuerzas sobre el objeto*. Esta importante representación pictórica de la figura 5.6c se llama **diagrama de cuerpo libre**. En un diagrama de cuerpo libre, se utiliza el modelo de partícula para representar el objeto como un punto y mostrar las fuerzas que actúan sobre el objeto como aplicadas en el punto. Cuando se analiza un objeto sujeto a fuerzas, se tiene interés en la fuerza neta que actúa sobre un objeto, el cual se modelará como una partícula. En consecuencia, un diagrama de cuerpo libre ayuda a aislar sólo aquellas fuerzas sobre el objeto y elimina las otras fuerzas del análisis.

- EJEMPLO RÁPIDO 5.5** i) Si una mosca choca contra el parabrisas de un autobús moviéndose rápidamente, ¿cuál de los dos experimenta una fuerza de impacto con mayor magnitud? (a) La mosca. (b) El autobús. (c) Ambos experimentan la misma fuerza. (ii) ¿Cuál de los dos experimenta mayor aceleración? (a) La mosca. (b) El autobús. (c) Ambos experimentan la misma aceleración.

Ejemplo conceptual 5.3 Tú me empujas y yo te empujo

Un hombre grande y un niño pequeño están de pie, uno frente al otro sobre hielo sin fricción. Juntan sus manos y se empujan mutuamente de modo que se separan.

A) ¿Quién se aleja con mayor rapidez?

5.3 continuación

SOLUCIÓN

Esta situación es similar a la que se vio en el examen rápido 5.5. De acuerdo con la tercera ley de Newton, la fuerza que ejerce el hombre sobre el niño y la fuerza que ejerce el niño sobre el hombre son un par de fuerzas de la tercera ley, de modo que deben ser iguales en magnitud. (Una báscula colocada entre sus manos leería lo mismo, sin importar de cuál lado esté.) En consecuencia, el niño, que tiene la masa más pequeña, experimenta mayor aceleración. Ambos individuos aceleran durante la misma cantidad de tiempo, pero la mayor aceleración del niño en este intervalo de tiempo resulta en que su movimiento de alejamiento de la interacción es con mayor rapidez.

B) ¿Quién se aleja más mientras sus manos están en contacto?

SOLUCIÓN

Puesto que el niño tiene mayor aceleración y en consecuencia mayor velocidad promedio, se aleja más que el hombre durante el intervalo de tiempo mientras que sus manos están en contacto.

5.7 Modelos de análisis utilizando la segunda ley de Newton

En esta sección se discuten dos modelos de análisis para resolver problemas en que los objetos están en equilibrio ($\vec{a} = 0$) o aceleran a lo largo de una línea recta bajo la acción de fuerzas externas constantes. Recuerde que cuando las leyes de Newton se aplican a un objeto, se tiene interés sólo en las fuerzas externas que actúan sobre el objeto. Si se representan los objetos como partículas, no necesita preocuparse por el movimiento rotacional. Por ahora, también se desprecian los efectos de la fricción en aquellos problemas que involucran movimiento, que es equivalente a afirmar que la superficie *no tiene fricción*. (La fuerza de fricción se estudia en la sección 5.8.)

Por lo general se ignora la masa de cualquier soga, cuerda o cable involucrado. En esta aproximación, la magnitud de la fuerza que ejerce cualquier elemento de la soga sobre el elemento adyacente es la misma para todos los elementos a lo largo de la soga. En los enunciados del problema, los términos sinónimos *ligero* y *de masa despreciable* se usan para indicar que una masa se ignorará cuando trabaje los problemas. Cuando una cuerda unida a un objeto está jalando al objeto, la cuerda ejerce una fuerza sobre el objeto en una dirección que se aleja del objeto, paralela a la cuerda. La magnitud T de dicha fuerza se llama **tensión** en la cuerda. Puesto que es la magnitud de una cantidad vectorial, la tensión es una cantidad escalar.

Modelo de análisis: Partícula en equilibrio

Si la aceleración de un objeto representado como partícula es cero, el objeto se considera con el modelo de **partícula en equilibrio**. En este modelo, la fuerza neta sobre el objeto es cero:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (5.8)$$

Considere una lámpara suspendida de una cadena ligera unida al techo, como en la figura 5.8a. El diagrama de fuerzas para la lámpara (figura 5.8b) muestra que las fuerzas que actúan sobre la lámpara son la fuerza gravitacional hacia abajo \vec{F}_g y la fuerza hacia arriba \vec{T} ejercida por la cadena. Puesto que no hay fuerzas en la dirección x , $\sum F_x = 0$ no proporciona información útil. La condición $\sum F_y = 0$ produce

$$\sum F_y = T - F_g = 0 \text{ o } T = F_g$$

De nuevo, advierta que \vec{T} y \vec{F}_g *no* son un par de acción-reacción porque actúan sobre el mismo objeto, la lámpara. La fuerza de reacción a \vec{T} es una fuerza hacia abajo que ejerce la lámpara sobre la cadena.

El ejemplo 5.4 (página 107) muestra una aplicación del modelo de partícula en equilibrio.

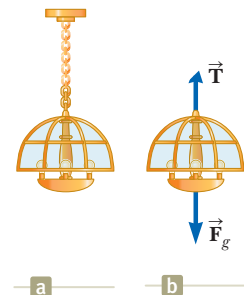


Figura 5.8 a) Una lámpara suspendida del techo mediante una cadena de masa despreciable. b) Las fuerzas que actúan sobre la lámpara son la fuerza gravitacional \vec{F}_g y la fuerza \vec{T} que ejerce la cadena.

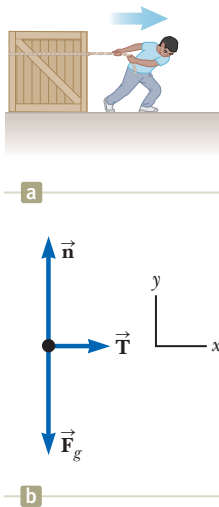


Figura 5.9 a) Una caja que se jala hacia la derecha sobre una superficie sin fricción. b) Diagrama de cuerpo libre que representa las fuerzas externas que actúan sobre la caja.

Modelo de análisis: Partícula bajo una fuerza neta

Si un objeto experimenta una aceleración, su movimiento se puede analizar con el modelo de **partícula bajo una fuerza neta**. La ecuación apropiada para este modelo es la segunda ley de Newton, ecuación 5.2:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (5.2)$$

Considere una caja que se jala hacia la derecha sobre una superficie horizontal sin fricción, como en la figura 5.9a. De hecho, el piso bajo los pies del niño debe tener fricción; de lo contrario, ¡sus pies resbalarían al intentar jalar la caja! Suponga que quiere encontrar la aceleración de la caja y la fuerza que el suelo ejerce sobre ella. Las fuerzas que actúan sobre la caja se ilustran en el diagrama de cuerpo libre de la figura 5.9b. Note que la fuerza horizontal \vec{T} que se aplica a la caja actúa a través de la cuerda. La magnitud de \vec{T} es igual a la tensión en la cuerda. Además de la fuerza \vec{T} , el diagrama de cuerpo libre para la caja incluye la fuerza gravitacional \vec{F}_g y la fuerza normal \vec{n} que ejerce el suelo sobre la caja.

Ahora se puede aplicar la segunda ley de Newton en forma de componentes para la caja. La única fuerza que actúa en la dirección x es \vec{T} . Al aplicar $\sum F_x = ma_x$ al movimiento horizontal se obtiene

$$\sum F_x = T = ma_x \quad \text{o} \quad a_x = \frac{T}{m}$$

En la dirección y no se presenta aceleración porque la caja sólo se mueve horizontalmente. En consecuencia, se usa el modelo de partícula en equilibrio en la dirección y . Al aplicar la componente y de la ecuación 5.8 se obtiene

$$\sum F_y = n - F_g = 0 \quad \text{o} \quad n = F_g$$

Esto es, la fuerza normal tiene la misma magnitud que la fuerza gravitacional pero actúa en la dirección opuesta.

Si \vec{T} es una fuerza constante, la aceleración $a_x = T/m$ también es constante. Por tanto, la caja también se representa como una partícula bajo aceleración constante en la dirección x , y se pueden aplicar las ecuaciones de la cinemática del capítulo 2 para obtener la posición x y velocidad v_x de la caja como funciones del tiempo.

De esta explicación tenga en mente dos conceptos que serán importantes al resolver problemas: 1) *En un problema dado, es posible tener diferentes modelos de análisis aplicados en distintas direcciones.* La caja en la figura 5.9 es una partícula en equilibrio en la dirección vertical y una partícula bajo una fuerza neta en la dirección horizontal. 2) *Es posible describir un objeto mediante modelos de análisis múltiples.* La caja es una partícula bajo una fuerza neta en la dirección horizontal y también es una partícula bajo una aceleración constante en la misma dirección.

En la situación recién descrita, la magnitud de la fuerza normal \vec{n} es igual a la magnitud de \vec{F}_g , pero esto no siempre es el caso, como se indica en la prevención de riesgos ocultos 5.6. Por ejemplo, suponga que se encuentra un libro sobre una mesa y usted empuja hacia abajo sobre el libro con una fuerza \vec{F} , como en la figura 5.10. Ya que el libro está en reposo y debido a eso no acelera, $\sum F_y = 0$, lo que da $n - F_g - F = 0$ o $n = F_g + F$. En esta situación la fuerza normal es *mayor* que la fuerza gravitacional. Más adelante se presentan otros ejemplos en los que $n \neq F_g$.

A continuación, se presentan varios ejemplos que demuestran el uso del modelo de la partícula en equilibrio y la partícula bajo un modelo de fuerza neta.

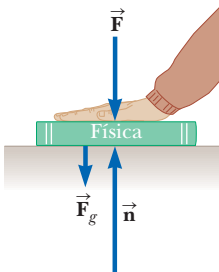


Figura 5.10 Cuando una fuerza \vec{F} empuja verticalmente hacia abajo sobre otro objeto, la fuerza normal \vec{n} sobre el objeto es mayor que la fuerza gravitacional: $n = F_g + F$.

MODELO DE ANÁLISIS Partícula en equilibrio

Imagine un objeto que se puede modelar como una partícula. Si hay varias fuerzas actuando sobre él tales que entre sí se cancelan, dando una fuerza neta nula, entonces el objeto tendrá aceleración cero. Esta condición matemáticamente se describe como

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (5.8)$$

$$\vec{a} = 0$$

$$\sum \vec{F} = 0$$

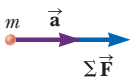
MODELO DE ANÁLISIS Partícula en equilibrio *continúa*

Ejemplos

- un candil colgando sobre la mesa del comedor
- un objeto moviéndose con rapidez terminal a través de un medio viscoso (capítulo 6)
- una viga de acero en la estructura de un edificio (capítulo 12)
- un bote flotando en un lago (capítulo 14)

MODELO DE ANÁLISIS Partícula bajo una fuerza neta

Imagine un objeto que se puede modelar como una partícula. Si sobre él actúan una o varias fuerzas dando origen a una fuerza neta sobre el objeto, entonces éste se acelerará en la dirección de la fuerza neta. La conexión entre la fuerza neta y la aceleración es

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} \quad (5.2)$$


Ejemplos

- una caja empujada sobre el piso de una fábrica
- un objeto descendiendo bajo la acción de la fuerza gravitacional
- un pistón del motor de un automóvil impulsado por gases calientes (capítulo 21)
- una partícula con carga en un campo eléctrico (capítulo 22)

Ejemplo 5.4 Un semáforo en reposo

Un semáforo que pesa 122 N cuelga de un cable unido a otros dos cables sostenidos a un soporte como en la figura 5.10a. Los cables superiores forman ángulos de $\theta_1 = 37.0^\circ$ y $\theta_2 = 53.0^\circ$ con la horizontal. Estos cables superiores no son tan fuertes como el cable vertical y se romperán si la tensión en ellos supera los 100 N. ¿El semáforo permanecerá colgado en esta situación, o alguno de los cables se romperá?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Examine el dibujo de la figura 5.11a. Suponga que los cables no se rompen y que nada se mueve.

Categorizar Si nada se mueve, ninguna parte del sistema acelera. Ahora puede representar el semáforo como una *partícula en equilibrio* sobre la que se ejerce una fuerza neta de cero. De igual modo, la fuerza neta sobre el nudo (figura 5.11c) es cero, así que el semáforo también puede ser modelado como una *partícula en equilibrio*.

Analizar Construya un diagrama de las fuerzas que actúan sobre el semáforo, como se indica en la figura 5.11b, y un diagrama de cuerpo libre para el nudo que mantiene juntos los tres cables unidos, como se muestra en la figura 5.11c. Este nudo es un objeto conveniente a elegir porque todas las fuerzas de interés actúan a lo largo de líneas que pasan a través del nudo.

Del modelo de partícula en equilibrio, aplique la ecuación 5.8 para el semáforo en la dirección y:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow T_3 - F_g = 0$$

$$T_3 = F_g$$

Elija los ejes coordenados como se muestra en la figura 5.11c y descomponga en sus componentes las fuerzas que actúan en el nudo:

Fuerza	Componente x	Componente y
\vec{T}_1	$-T_1 \cos \theta_1$	$T_1 \sin \theta_1$
\vec{T}_2	$T_2 \cos \theta_2$	$T_2 \sin \theta_2$
\vec{T}_3	0	$-F_g$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio al nudo:

$$(1) \sum F_x = -T_1 \cos \theta_1 + T_2 \cos \theta_2 = 0$$

$$(2) \sum F_y = T_1 \sin \theta_1 + T_2 \sin \theta_2 + (-F_g) = 0$$

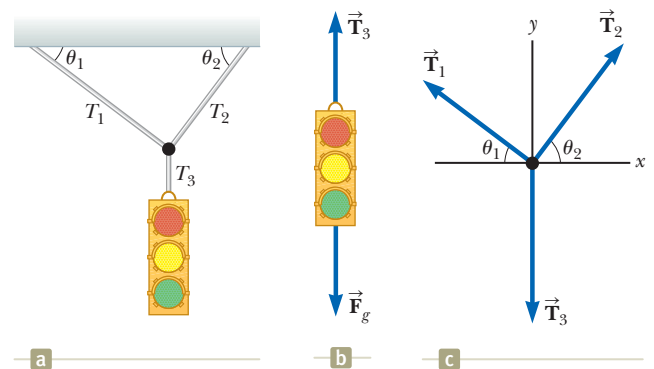


Figura 5.11 (Ejemplo 5.4) a) Un semáforo suspendido por cables. b) Las fuerzas actuando sobre el semáforo. c) Diagrama de cuerpo libre del nudo donde se juntan los tres cables.

continúa

5.4 continuación

La ecuación (1) muestra que las componentes horizontales de \vec{T}_1 y \vec{T}_2 deben ser iguales en magnitud, y la ecuación (2) indica que la suma de las componentes verticales de \vec{T}_1 y \vec{T}_2 deben equilibrar la fuerza hacia abajo \vec{T}_3 , que es igual en magnitud al peso del semáforo.

Resuelva la ecuación (1) para T_2 en términos de T_1 :
$$(3) \quad T_2 = T_1 \left(\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \right)$$

Sustituya este valor para T_2 en la ecuación (2):
$$T_1 \sin \theta_1 + T_1 \left(\frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \right) (\sin \theta_2) - F_g = 0$$

Obtenga T_1 :
$$T_1 = \frac{F_g}{\sin \theta_1 + \cos \theta_1 \tan \theta_2}$$

Sustituya valores numéricos:
$$T_1 = \frac{122 \text{ N}}{\sin 37.0^\circ + \cos 37.0^\circ \tan 53.0^\circ} = 73.4 \text{ N}$$

Utilice la ecuación (3) para obtener T_2 :
$$T_2 = (73.4 \text{ N}) \left(\frac{\cos 37.0^\circ}{\cos 53.0^\circ} \right) = 97.4 \text{ N}$$

Ambos valores son menores que 100 N (apenas para T_2), de modo que los cables no se romperán.

Finalizar Finalice este problema al imaginar un cambio en el sistema, como el siguiente: **¿Qué pasaría si?**

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que los dos ángulos de la figura 5.11a son iguales. ¿Cuál sería la correspondencia entre T_1 y T_2 ?

Respuesta Se puede argumentar a partir de la simetría del problema que las dos tensiones T_1 y T_2 serían iguales entre sí. Matemáticamente, si los ángulos iguales se llaman θ , la ecuación (3) se convierte en:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{\cos \theta}{\cos \theta} \right) = T_1$$

que también dice que las tensiones son iguales. Sin saber el valor específico de θ , no se pueden encontrar los valores de T_1 y T_2 . Sin embargo, las tensiones serán iguales entre sí, sin importar el valor de θ .

Ejemplo conceptual 5.5 Fuerzas entre vagones en un tren

Los vagones de tren se conectan mediante *enganches*, que están bajo tensión conforme la locomotora jala el tren. Imagine que usted está en un tren que aumenta su rapidez con aceleración constante. A medida que se mueve a lo largo del tren desde la locomotora hacia el último vagón, midiendo la tensión en cada conjunto de enganches, ¿la tensión aumenta, disminuye o permanece igual? Cuando el ingeniero aplica los frenos, los enganches están bajo compresión. ¿Cómo varía esta fuerza de compresión desde la locomotora hasta el último vagón? (Suponga que sólo se aplican los frenos en las ruedas de la máquina.)

SOLUCIÓN

Conforme el tren aumenta su rapidez, la tensión disminuye desde el frente del tren hasta la parte trasera. El enganche entre la locomotora y el primer vagón debe aplicar suficiente fuerza para acelerar el resto de los vagones. A medida que se mueve a lo largo del tren, cada enganche acelera menos masa detrás de él. El último enganche tiene que acelerar sólo al último vagón y por lo tanto está bajo menos tensión.

Cuando se aplican los frenos, la fuerza nuevamente disminuye desde el frente a la parte trasera. El enganche que conecta la locomotora con el primer vagón debe aplicar una gran fuerza para frenar el resto de los vagones, pero el enganche final debe aplicar una fuerza suficientemente grande para frenar sólo al último vagón.

Ejemplo 5.6 El auto que escapa

Un automóvil de masa m está sobre un camino cubierto con hielo inclinado en un ángulo θ , como en la figura 5.12a.

(A) Encuentre la aceleración del automóvil, si supone que la pista no tiene fricción.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Use la figura 5.12a para conceptualizar la situación. A partir de la experiencia cotidiana, se sabe que un automóvil sobre un plano inclinado cubierto con hielo acelerará hacia abajo por el plano. (Lo mismo le sucede a un automóvil sin frenos en una colina.)



5.6 continuación

Categorizar El automóvil, puesto que acelera, se clasifica como una *partícula bajo una fuerza neta*. Además, este problema pertenece a una categoría de problemas muy común en la que un objeto se mueve bajo la influencia de la gravedad sobre un plano inclinado.

Analizar La figura 5.12b muestra el diagrama de cuerpo libre del automóvil. Las únicas fuerzas que actúan sobre el automóvil son la fuerza normal \vec{n} que ejerce el plano inclinado, que actúa perpendicular al plano, y la fuerza gravitacional $\vec{F}_g = m\vec{g}$, que actúa verticalmente hacia abajo. Para problemas que involucran planos inclinados, es conveniente elegir los ejes coordenados con x a lo largo del plano y y perpendicular a él, como en la figura 5.11b. Con estos ejes, represente la fuerza gravitacional mediante una componente de magnitud $mg \sin\theta$ a lo largo del eje x positivo y otra de magnitud $mg \cos\theta$ a lo largo del eje y negativo. La elección de ejes que resulta en el automóvil se representa como una partícula bajo una fuerza neta en la dirección x y una partícula en equilibrio en la dirección y .

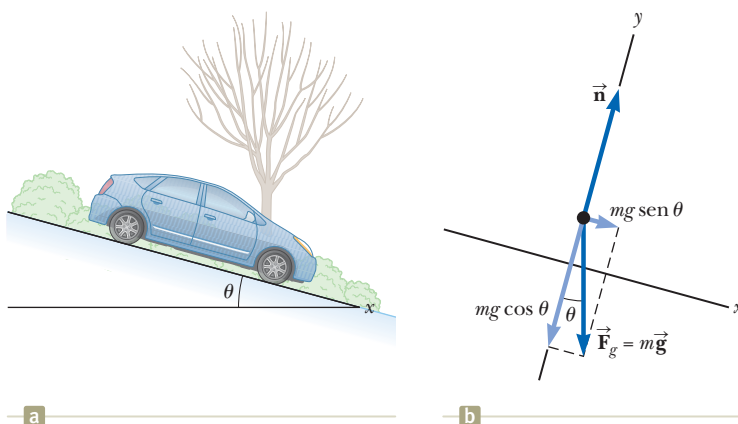


Figura 5.12 (Ejemplo 5.6) a) Un automóvil sobre un plano inclinado sin fricción. b) Diagrama de cuerpo libre para el automóvil. El punto negro representa la posición del centro de masa del automóvil. En el capítulo 9 se aprenderá sobre el centro de masa.

Aplique esos modelos al automóvil:

$$(1) \quad \sum F_x = mg \sin\theta = ma_x$$

$$(2) \quad \sum F_y = n - mg \cos\theta = 0$$

Resuelva la ecuación (1) para a_x : (3)

$$(3) \quad a_x = g \sin\theta$$

Finalizar Observe que, ¡la componente aceleración a_x es independiente de la masa del automóvil! Sólo depende del ángulo de inclinación y de g .

De la ecuación (2) se concluye que la componente de \vec{F}_g perpendicular al plano se equilibra mediante la fuerza normal; esto es, $n = mg \cos\theta$. Esta situación es otro caso en el que la fuerza normal *no* es igual en magnitud al peso del objeto (como se analizó en la prevención de riesgos ocultos 5.6 de la página 104).

Es posible, aunque inconveniente, resolver el problema con ejes horizontal y vertical “normal”. Tal vez quiera intentarlo, sólo para practicar.

(B) Suponga que el automóvil se libera desde el reposo en lo alto del plano y que la distancia desde la defensa frontal del automóvil hasta el fondo del plano inclinado es d . ¿Cuánto tarda la defensa frontal en llegar al fondo de la colina, y cuál es la rapidez del automóvil cuando llega ahí?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que el automóvil se desliza por la colina y que usa un cronómetro para medir todo el intervalo de tiempo hasta que llega al fondo.

Categorizar Esta parte del problema pertenece a cinemática más que a dinámica, y la ecuación (3) muestra que la aceleración a_x es constante. Por tanto, debe clasificar al automóvil en este inciso del problema como una partícula bajo aceleración constante.

Analizar Al definir la posición inicial de la defensa frontal como $x_i = 0$ y su posición final como $x_f = d$, y reconocer que $v_{xi} = 0$, aplique la ecuación 2.16 del modelo de partícula bajo aceleración constante:

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \rightarrow d = \frac{1}{2}a_x t^2$$

Resuelva para t : (4)

$$(4) \quad t = \sqrt{\frac{2d}{a_x}} = \sqrt{\frac{2d}{g \sin\theta}}$$

Aplique la ecuación 2.17, con $v_{xi} = 0$ para encontrar la velocidad final del automóvil:

$$v_{xf}^2 = 2a_x d$$

$$(5) \quad v_{xf} = \sqrt{2a_x d} = \sqrt{2gd \sin\theta}$$

continúa

5.6 continuación

Finalizar De las ecuaciones (4) y (5) se ve que el tiempo t al que el automóvil alcanza el fondo y su rapidez final v_x son independientes de la masa del automóvil, como lo fue su aceleración. Note que, en este ejemplo, se combinaron técnicas del capítulo 2 con nuevas técnicas de este capítulo. A medida que aprenda más técnicas en capítulos posteriores, este proceso de combinar información proveniente de varias partes del libro ocurrirá con más frecuencia. En estos casos, use la estrategia general para resolver problemas para así auxiliarse a identificar qué modelos de análisis necesitará.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿En qué problema resuelto anteriormente se convierte esta situación si $\theta = 90^\circ$?

Respuesta Imagine que θ va a 90° en la figura 5.11. El plano inclinado se vuelve vertical, ¡y el automóvil es un objeto en caída libre! La ecuación (3) se convierte en

$$a_x = g \sin \theta = g \sin 90^\circ = g$$

que de hecho es la aceleración de caída libre. (Se encuentra $a_x = g$ en lugar de $a_x = -g$ porque la x positiva se eligió hacia abajo en la figura 5.11.) Note también que la condición $n = mg \cos \theta$ produce $n = mg \cos 90^\circ = 0$. Esto es consistente con el automóvil que cae *junto al* plano vertical, en cuyo caso no hay fuerza de contacto entre el automóvil y el plano.

Ejemplo 5.7 Un bloque empuja a otro

Dos bloques de masas m_1 y m_2 , con $m_1 > m_2$, se colocan en contacto mutuo sobre una superficie horizontal sin fricción, como en la figura 5.12a. Una fuerza horizontal constante \vec{F} se aplica a m_1 como se muestra.

(A) Encuentre la magnitud de la aceleración del sistema.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Elabore ideas de la situación mediante la figura 5.13a y observe que ambos bloques deben experimentar *la misma* aceleración porque están en contacto mutuo y permanecen en contacto para todo el movimiento.

Categorizar Este problema se clasifica como una *partícula bajo una fuerza neta* porque se aplica una fuerza a un sistema de bloques y se busca la aceleración del sistema.

Analizar Primero represente la combinación de los dos bloques como una sola partícula bajo una fuerza neta. Aplique la segunda ley de Newton a la combinación en la dirección x para encontrar la aceleración:

$$\sum F_x = F = (m_1 + m_2)a_x$$

$$(1) \quad a_x = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

Finalizar La aceleración dada por la ecuación (1) es la misma que la de un solo objeto de masa $m_1 + m_2$ y sometida a la misma fuerza.

(B) Determine la magnitud de la fuerza de contacto entre los dos bloques.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La fuerza de contacto es interna al sistema de los dos bloques. Por tanto, no es posible encontrar la fuerza al representar el sistema como un todo (los dos bloques) como una sola partícula.

Categorizar Considere ahora cada uno de los dos bloques de manera individual al clasificar cada uno como una *partícula bajo una fuerza neta*.

Analizar Construya primero un diagrama de fuerzas actuando sobre el objeto para cada bloque, como se muestra en las figuras 5.12b y 5.12c, donde la fuerza de contacto se denota por \vec{P} . A partir de la figura 5.13c se ve que la única fuerza horizontal que actúa sobre m_2 es la fuerza de contacto \vec{P}_{12} (la fuerza que ejerce m_1 sobre m_2), que se dirige hacia la derecha.

Aplique la segunda ley de Newton a m_2 :

$$(2) \quad \sum F_x = P_{12} = m_2 a_x$$

Sustituya el valor de la aceleración a_x que proporciona la ecuación (1) en la ecuación (2):

$$(3) \quad P_{12} = m_2 a_x = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) F$$

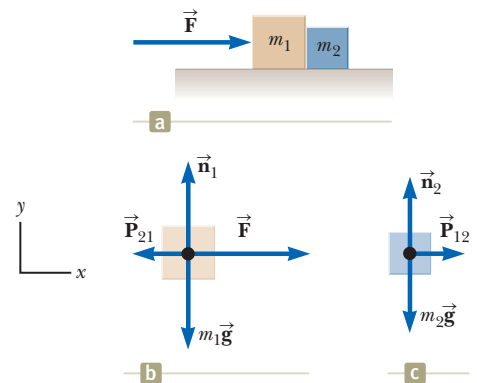


Figura 5.13 (Ejemplo 5.7) a) Se aplica una fuerza a un bloque de masa m_1 , que empuja a un segundo bloque de masa m_2 . b) Fuerzas actuando sobre m_1 . c) Fuerzas actuando sobre m_2 .



5.7 continuación

Finalizar Este resultado muestra que la fuerza de contacto P_{12} es menor que la fuerza aplicada F . La fuerza que se requiere para acelerar el bloque 2 debe ser menor que la fuerza requerida para producir la misma aceleración para el sistema de dos bloques.

Para finalizar, compruebe esta expresión para P_{12} al considerar las fuerzas que actúan sobre m_1 , que se muestran en la figura 5.12b. Las fuerzas que actúan horizontales sobre m_1 son la fuerza aplicada \vec{F} hacia la derecha y la fuerza de contacto \vec{P}_{21} hacia la izquierda (la fuerza que ejerce m_2 sobre m_1). A partir de la tercera ley de Newton, \vec{P}_{21} es la fuerza de reacción a \vec{P}_{12} , de modo que $P_{21} = P_{12}$.

Aplique la segunda ley de Newton a m_1 :

$$(4) \sum F_x = F - P_{21} = F - P_{12} = m_1 a_x$$

Resuelva para P_{12} y sustituya el valor de a_x de la ecuación (1):

$$P_{12} = F - m_1 a_x = F - m_1 \left(\frac{F}{m_1 + m_2} \right) = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) F$$

Este resultado concuerda con la ecuación (3), como debe ser.

¿QUÉ PASARÍA SI? Imagine que la fuerza \vec{F} en la figura 5.12 se aplica hacia la izquierda sobre el bloque derecho de masa m_2 . ¿La magnitud de la fuerza \vec{P}_{12} es la misma que cuando la fuerza se aplicó hacia la derecha sobre m_1 ?

Respuesta Cuando la fuerza se aplica hacia la izquierda sobre m_2 , la fuerza de contacto debe acelerar m_1 . En la situación original, la fuerza de contacto acelera m_2 . Puesto que $m_1 > m_2$, se requiere más fuerza, de modo que la magnitud de \vec{P}_{12} es mayor que en la situación original. Para ver esto matemáticamente, modifique la ecuación (4) apropiadamente y resuelva para \vec{P}_{12} .

Ejemplo 5.8 Peso de un pez en un elevador

Una persona pesa un pescado de masa m en una balanza de resorte unida al techo de un elevador, como se ilustra en la figura 5.13.

(A) Demuestre que, si el elevador acelera ya sea hacia arriba o hacia abajo, la balanza de resorte da una lectura que es diferente del peso del pez.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La lectura en la balanza se relaciona con la extensión del resorte en la balanza, que depende de la fuerza en el extremo del resorte, como en la figura 5.2. Imagine que el pez cuelga de una cuerda unida al extremo del resorte. En este caso, la magnitud de la fuerza que se ejerce sobre el resorte es igual a la tensión T en la cuerda. Por tanto, se busca T . La fuerza \vec{T} jala hacia arriba en la cuerda y hacia arriba sobre el pez.

Categorizar Este problema se clasifica al considerar al pez como una *partícula en equilibrio* si el elevador no acelera o como una *partícula bajo una fuerza neta* si el elevador acelera.

Analizar Inspeccione los diagramas de las fuerzas actuando sobre el pez en la figura 5.14 y note que las fuerzas externas que actúan sobre el pez son la fuerza gravitacional hacia abajo $\vec{F}_g = m\vec{g}$ y la fuerza \vec{T} que ejerce la cuerda. Si el elevador está en reposo o moviéndose con velocidad constante, el pez es una partícula en equilibrio, de modo que $\sum F_y = T - F_g = 0$ o $T = F_g = mg$. (Recuerde que el escalar mg es el peso del pez.)

Ahora suponga que el elevador se mueve con una aceleración \vec{a} en relación con un observador que está de pie afuera del elevador en un marco inercial. Ahora el pez es una partícula bajo una fuerza neta.

Aplique la segunda ley de Newton al pez:
$$\sum F_y = T - mg = ma_y$$

Resuelva para T :
$$(1) \quad T = ma_y + mg = mg \left(\frac{a_y}{g} + 1 \right) = F_g \left(\frac{a_y}{g} + 1 \right)$$

donde se eligió hacia arriba como la dirección y positiva. Se concluye de la ecuación (1) que la lectura en la balanza de T es mayor que el peso del pez mg si \vec{a} es hacia arriba, de modo que a_y es positiva (figura 5.13a), y que la lectura es menor que mg si \vec{a} es hacia abajo, de modo que a_y es negativa (figura 5.14b).

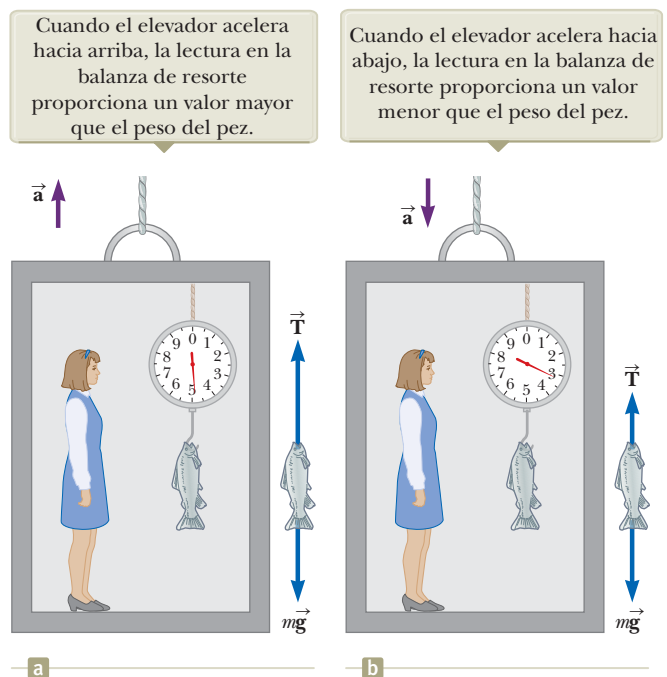


Figura 5.14 (Ejemplo 5.8) Un pez es pesado mediante una balanza de resorte en un elevador que acelera.

continúa

5.8 continuación

(B) Evalúe las lecturas en la balanza para un pez de 40.0 N si el elevador se traslada con una aceleración $a_y = \pm 2.00 \text{ m/s}^2$.

SOLUCIÓN

Evalúe la lectura en la balanza a partir de la ecuación (1) si \vec{a} es hacia arriba: $T = (40.0 \text{ N}) \left(\frac{2.00 \text{ m/s}^2}{9.80 \text{ m/s}^2} + 1 \right) = 48.2 \text{ N}$

Evalúe la lectura en la balanza a partir de la ecuación (1) si \vec{a} es hacia abajo: $T = (40.0 \text{ N}) \left(\frac{-2.00 \text{ m/s}^2}{9.80 \text{ m/s}^2} + 1 \right) = 31.8 \text{ N}$

Finalizar Considere este consejo: si compra un pez en un elevador, ¡asegúrese de que el pez se pesa mientras el elevador está en reposo o en aceleración hacia abajo! Además, note que, a partir de la información que se proporciona en este caso, uno no puede determinar la dirección de la velocidad del elevador.

¿QUÉ PASARÍA SI?

Supongamos que la mujer de la figura 5.14 se cansa de mirar la báscula y sale del elevador. Suponga que el cable del elevador se rompe y el elevador y su contenido están en caída libre. ¿Qué sucede con la lectura de la balanza?

Respuesta Si el elevador está en caída libre, la aceleración del pez es $a_y = -g$. De la ecuación (1) se ve que la lectura de la balanza de T en este caso es cero; esto es, el pez *parece* no tener peso.

Ejemplo 5.9 La máquina de Atwood

Cuando dos objetos de masas distintas cuelgan verticalmente sobre una polea sin fricción de masa despreciable, como en la figura 5.14, el dispositivo se llama *máquina de Atwood*. Se usa a veces en el laboratorio para calcular el valor de g . Determine la magnitud de la aceleración de los dos objetos y la tensión en la cuerda sin peso.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine en acción la situación que se muestra en la figura 5.14a: conforme un objeto se mueve hacia arriba, el otro objeto se mueve hacia abajo. Puesto que los objetos están conectados mediante una cuerda inextensible, sus aceleraciones son de igual magnitud.

Categorizar Los objetos en la máquina de Atwood están sometidos a la fuerza gravitacional, así como a las fuerzas que se ejercen mediante las cuerdas conectadas a ellos. Por tanto, este problema se clasifica como uno que involucra dos *partículas bajo una fuerza neta*.

Analizar En la figura 5.15b se muestran los diagramas de cuerpo libre para los dos objetos. En cada objeto actúan dos fuerzas: la fuerza hacia arriba \vec{T} que ejerce la cuerda y la fuerza gravitacional hacia abajo. En problemas como éste, con una polea que se representa sin masa y sin fricción, la tensión en la cuerda sobre ambos lados de la polea es la misma. Si la polea tiene masa o es dependiente de la fricción, las tensiones en cualquier lado no son las mismas y la situación requiere técnicas que se aprenderán en el capítulo 10.

Debe tener mucho cuidado con los signos en problemas como éste. En la figura 5.15a, note que, si el objeto 1 acelera hacia arriba, el objeto 2 acelera hacia abajo. Por tanto, por consistencia con los signos, si se define la dirección hacia arriba como positiva para el objeto 1, se debe definir la dirección hacia abajo como positiva para el objeto 2. Con esta convención de signos, ambos objetos aceleran en la misma dirección, que se define por la elección de signo. Además, de acuerdo con esta convención de signos, la componente y de la fuerza neta que se ejerce sobre el objeto 1 es $T - m_1g$, y la componente y de la fuerza neta que se ejerce sobre el objeto 2 es $m_2g - T$.

Del modelo de partícula bajo una fuerza neta, aplique la segunda ley de Newton al objeto 1:

$$(1) \sum F_y = T - m_1g = m_1a_y$$

Aplique la segunda ley de Newton al objeto 2:

$$(2) \sum F_y = m_2g - T = m_2a_y$$

Suma la ecuación (2) con la ecuación (1) y advierta que T se cancela:

$$-m_1g + m_2g = m_1a_y + m_2a_y$$

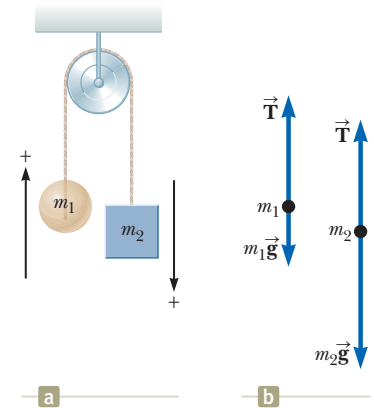


Figura 5.15 (Ejemplo 5.9) La máquina de Atwood. a) Dos objetos conectados mediante una cuerda inextensible sin masa sobre una polea sin fricción. b) Diagramas de cuerpo libre para los dos objetos.



5.9 continuación

Resuelva para la aceleración:

$$(3) \quad a_y = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) g$$

Sustituya la ecuación (3) en la ecuación (1) para encontrar T :

$$(4) \quad T = m_1(g + a_y) = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) g$$

Finalizar La aceleración dada por la ecuación (3) se interpreta como la proporción de la magnitud de la fuerza desequilibrada en el sistema $(m_2 - m_1)g$ a la masa total del sistema $(m_1 + m_2)$, como se espera de la segunda ley de Newton. Note que el signo de la aceleración depende de las masas relativas de los dos objetos.

¿QUÉ PASARÍA SI? Describa el movimiento del sistema si los objetos tienen masas iguales, es decir, $m_1 = m_2$.

Respuesta Si se tiene la misma masa en ambos lados, el sistema está en equilibrio y no debe acelerar. Matemáticamente, se ve que, si $m_1 = m_2$, la ecuación (3) produce $a_y = 0$.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Si una de las masas es mucho más grande que la otra: $m_1 \gg m_2$?

Respuesta En el caso en el que una masa es infinitamente mayor que la otra, se puede ignorar el efecto de la masa más pequeña. En tal caso, la masa mayor simplemente debe caer como si la masa más pequeña no estuviese ahí. Es claro que, si $m_1 \gg m_2$, la ecuación (3) produce $a_y = -g$.

Ejemplo 5.10 Aceleración de dos objetos conectados mediante una cuerda

Una bola de masa m_1 y un bloque de masa m_2 se unen mediante una cuerda ligera que pasa sobre una polea sin fricción de masa despreciable, como en la figura 5.16a. El bloque se encuentra sobre un plano inclinado sin fricción de ángulo θ . Encuentre la magnitud de la aceleración de los dos objetos y la tensión en la cuerda.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que los objetos de la figura 5.16 están en movimiento. Si m_2 se mueve hacia abajo del plano, m_1 se mueve hacia arriba. Puesto que los objetos están conectados mediante una cuerda (la cual se supone que no se estira), sus aceleraciones tienen la misma magnitud. En la figura 5.16b observe los ejes coordenados normales para la bola, y en la figura 5.16c están los ejes “primados” para el bloque.

Categorizar Es posible identificar las fuerzas en cada uno de los dos objetos y se busca una aceleración, de modo que los objetos se clasifican como *partículas bajo una fuerza neta*. Para el bloque, este modelo sólo es válido para la dirección x' . En la dirección y' , se aplica el modelo de *partícula en equilibrio* porque el bloque no acelera en esa dirección.

Analizar Considere los diagramas de cuerpo libre que se muestran en las figuras 5.16b y 5.16c.

En la dirección y , aplique la segunda ley de Newton a la bola, y elija la dirección hacia arriba como positiva:

$$(1) \quad \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_y = m_1 a$$

Para que la bola acelere hacia arriba, es necesario que $T > m_1 g$. En la ecuación (1), sustituya a_y con a porque la aceleración sólo tiene un componente y .

Para el bloque es conveniente elegir el eje x' a lo largo del plano inclinado, como en la figura 5.15c. Por consistencia con la elección para la bola, se elige la dirección x' positiva hacia abajo en el plano.

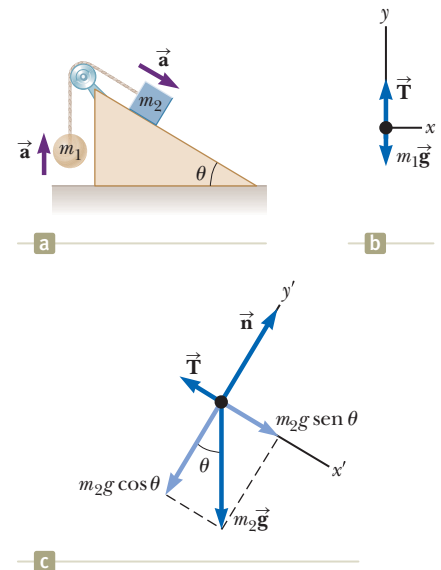


Figura 5.16 (Ejemplo 5.10) a) Dos objetos conectados mediante una cuerda ligera sobre una polea sin fricción. b) Diagrama de cuerpo libre para la bola. c) Diagrama de cuerpo libre para el bloque. (El plano inclinado no tiene fricción.)

continúa

5.10 continuación

En la dirección x' aplique el modelo de partícula bajo una fuerza neta al bloque, y en la dirección y' el modelo de partícula en equilibrio:

$$(2) \quad \sum F_{x'} = m_2 g \sin \theta - T = m_2 a_{x'} = m_2 a$$

$$(3) \quad \sum F_{y'} = n - m_2 g \cos \theta = 0$$

En la ecuación (2), sustituya $a_{x'}$ con a porque los dos objetos tienen aceleraciones de igual magnitud a .

Resuelva la ecuación (1) para T :

$$(4) \quad T = m_1(g + a)$$

Sustituya esta expresión para T en la ecuación (2):

$$m_2 g \sin \theta - m_1(g + a) = m_2 a$$

Resuelva para a :

$$(5) \quad a = \left(\frac{m_2 \sin \theta - m_1}{m_1 + m_2} \right) g$$

Sustituya esta expresión para a en la ecuación (4) para encontrar T :

$$(6) \quad T = \left[\frac{m_1 m_2 (\sin \theta + 1)}{m_1 + m_2} \right] g$$

Finalizar El bloque acelera hacia abajo en el plano sólo si $m_2 \sin \theta > m_1$. Si $m_1 > m_2 \sin \theta$, la aceleración es hacia arriba del plano para el bloque y hacia abajo para la bola. Note también que el resultado para la aceleración, ecuación (5), se puede interpretar como la magnitud de la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema bola-bloque dividido por la masa total del sistema; este resultado es consistente con la segunda ley de Newton.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Qué ocurre en esta situación si $\theta = 90^\circ$?

Respuesta Si $\theta = 90^\circ$, el plano inclinado se vuelve vertical y no hay interacción entre su superficie y m_2 . En consecuencia, este problema se convierte en la máquina de Atwood del ejemplo 5.9. Si en las ecuaciones (5) y (6) se deja que $\theta \rightarrow 90^\circ$, ¡ello hace que se reduzcan a las ecuaciones (3) y (4) del ejemplo 5.9!

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si $m_1 = 0$?

Respuesta Si $m_1 = 0$, entonces m_2 simplemente se desliza hacia abajo por el plano sin interactuar con m_1 a través de la cuerda. En consecuencia, este problema se convierte en el problema del automóvil que se desliza en el ejemplo 5.6. Si en la ecuación (5) se hace que $m_1 \rightarrow 0$, ¡ello causa que se reduzca a la ecuación (3) del ejemplo 5.6!

10.8 Fuerzas de fricción

Cuando un objeto está en movimiento ya sea sobre una superficie o en un medio viscoso como aire o agua, existe resistencia al movimiento porque el objeto interactúa con su entorno. A tal resistencia se le llama **fuerza de fricción**. Las fuerzas de fricción son muy importantes en la vida cotidiana. Permiten que uno camine o corra y son necesarias para el movimiento de los vehículos con ruedas.

Imagine que trabaja en su jardín y llena un bote de basura con desechos de hojas. Luego intenta arrastrar el bote a través de la superficie de concreto de su patio, como en la figura 5.17a. Esta superficie es *real*, no una superficie idealizada sin fricción. Si se aplica una fuerza horizontal externa \vec{F} al bote de basura, que actúa hacia la derecha, el bote de basura permanece fijo cuando \vec{F} es pequeña. La fuerza sobre el bote de basura que contrarresta a \vec{F} y evita que se mueva actúa hacia la izquierda y se llama **fuerza de fricción estática** \vec{f}_s . En tanto el bote de basura no se mueva, $f_s = F$. Por tanto, si \vec{F} aumenta, \vec{f}_s también aumenta. Del mismo modo, si \vec{F} disminuye, \vec{f}_s también disminuye.

Los experimentos muestran que la fuerza de fricción surge de la naturaleza de las dos superficies: debido a su rugosidad, el contacto se realiza sólo en unas cuantas posiciones donde se tocan los picos del material. En dichas posiciones, la fuerza de fricción surge en parte porque un pico físicamente bloquea el movimiento de un pico de la superficie opuesta y en parte por el enlace químico (“punto de soldadura”) de picos opuestos conforme entran en contacto. Aunque los detalles de la fricción son muy complejos a nivel atómico, esta fuerza involucra, a final de cuentas, una interacción eléctrica entre átomos o moléculas.

Fuerza de fricción estática ►



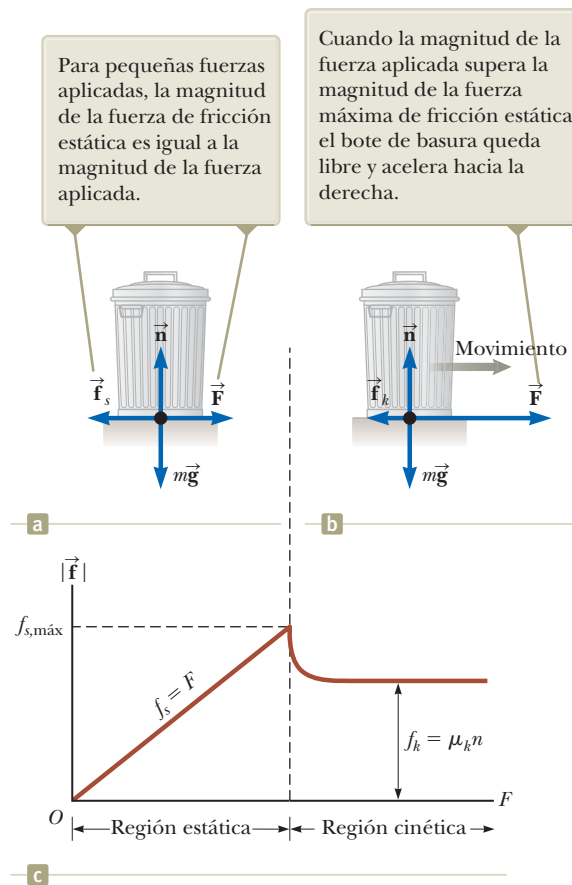


Figura 5.17 a) y b) Cuando jala un bote de basura, la dirección de la fuerza de fricción \vec{f} entre el bote y una superficie rugosa es opuesta a la dirección de la fuerza aplicada \vec{F} . c) Gráfica de fuerza de fricción en función de la fuerza aplicada. Note que $f_{s,máx} > f_k$.

Si se aumenta la magnitud de \vec{F} como en la figura 5.17b, el bote de basura al final se desliza. Cuando el bote de basura está a punto de deslizarse, f_s tiene su valor máximo $f_{s,máx}$, como se muestra en la figura 5.17c. Cuando F supera $f_{s,máx}$, el bote de basura se mueve y acelera hacia la derecha. A la fuerza de fricción para un objeto en movimiento se le llama **fuerza de fricción cinética** \vec{f}_k . Cuando el bote de basura está en movimiento, la fuerza de fricción cinética en el bote es menor que $f_{s,máx}$ (figura 5.17c). La fuerza neta $F - f_k$ en la dirección x produce una aceleración hacia la derecha, de acuerdo con la segunda ley de Newton. Si $F = f_k$, la aceleración es cero y el bote de basura se mueve hacia la derecha con rapidez constante. Si la fuerza aplicada \vec{F} se elimina del bote en movimiento, la fuerza de fricción \vec{f}_k que actúa hacia la izquierda proporciona una aceleración del bote de basura en la dirección $-x$ y al final lo lleva al reposo, lo que, de nuevo, es consistente con la segunda ley de Newton.

En términos experimentales, se encuentra que, a una buena aproximación, tanto $f_{s,máx}$ como f_k son proporcionales a la magnitud de la fuerza normal que se ejerce sobre un objeto por la superficie. Las siguientes descripciones de la fuerza de fricción están en función de las observaciones experimentales y sirven como el modelo que se usará para fuerzas de fricción en resolución de problemas:

- La magnitud de la fuerza de fricción estática entre cualesquiera dos superficies en contacto puede tener los valores

$$f_s \leq \mu_s n \quad (5.9)$$

donde la constante adimensional μ_s se llama **coeficiente de fricción estática** y n es la magnitud de la fuerza normal que ejerce una superficie sobre la otra. La igualdad en la ecuación 5.9 se cumple cuando las superficies están a punto de deslizarse, esto es, cuando $f_s = f_{s,máx} = \mu_s n$. Esta situación se llama *movimiento inminente*. La desigualdad se cumple cuando las superficies no están a punto de deslizarse.

◀ Fuerza de fricción cinética

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 5.9

El signo igual se usa en situaciones limitadas En la ecuación 5.9 el signo igual se usa *sólo* en caso de que las superficies estén a punto de liberarse y comiencen a deslizarse. No caiga en la trampa común de usar $f_s = \mu_s n$ en *cualquier* situación estática.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 5.10

Ecuaciones de fricción Las ecuaciones 5.9 y 5.10 *no* son ecuaciones vectoriales. Son relaciones entre las *magnitudes* de los vectores que representan las fuerzas de fricción y normal. Puesto que las fuerzas de fricción y normal son mutuamente perpendiculares, los vectores no se pueden relacionar mediante una constante multiplicativa.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 5.11

La dirección de la fuerza de fricción En ocasiones se hace un enunciado incorrecto acerca de la fuerza de fricción entre un objeto y una superficie, “la fuerza de fricción en un objeto es opuesta a su movimiento o al movimiento inminente”, en lugar de la frase correcta, “la fuerza de fricción en un objeto es opuesta a su movimiento o al movimiento inminente *en relación con la superficie*”.

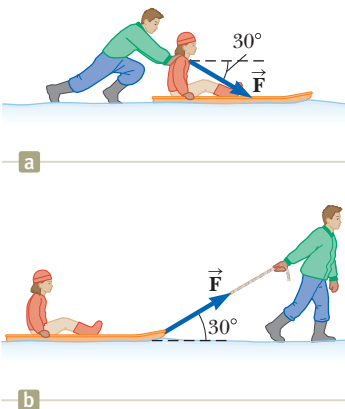


Figura 5.18 (Examen rápido 5.7) Un padre desliza a su hija sobre un trineo mediante a) empujar sobre sus hombros o b) jalarla con una cuerda.

TABLA 5.1 Coeficientes de fricción

	μ_s	μ_k
Hule sobre concreto	1.0	0.8
Acero sobre acero	0.74	0.57
Aluminio sobre acero	0.61	0.47
Vidrio sobre vidrio	0.94	0.4
Cobre sobre acero	0.53	0.36
Madera sobre madera	0.25–0.5	0.2
Madera encerada sobre nieve húmeda	0.14	0.1
Madera encerada sobre nieve seca	—	0.04
Metal sobre metal (lubricado)	0.15	0.06
Teflón sobre teflón	0.04	0.04
Hielo sobre hielo	0.1	0.03
Articulación sinovial en humanos	0.01	0.003

Note: Todos los valores son aproximados. En algunos casos el coeficiente de fricción puede ser mayor que 1.0.

- La magnitud de la fuerza de fricción cinética que actúa entre dos superficies es

$$f_k = \mu_k n \quad (5.10)$$

donde μ_k se llama **coeficiente de fricción cinética**. Aunque el coeficiente de fricción cinética varía con la rapidez, por lo general en este texto se despreciará cualquiera de tales variaciones.

- Los valores de μ_k y μ_s dependen de la naturaleza de las superficies, pero μ_k por lo general es menor que μ_s . El intervalo de los valores típicos fluctúan de 0.03 a 1.0. La tabla 5.1 presenta algunos valores reportados.
- La dirección de la fuerza de fricción sobre un objeto es paralela a la superficie con la que el objeto está en contacto y opuesta al movimiento real (fricción cinética) o al movimiento inminente (fricción estática) del objeto en relación con la superficie.
- Los coeficientes de fricción son casi independientes del área de contacto entre las superficies. Es de esperar que al colocar un objeto en el lado que tiene más área aumente la fuerza de fricción. Aunque este método proporciona más puntos de contacto, el peso del objeto se dispersa sobre un área más grande y los puntos individuales no se oprimen tan estrechamente entre sí. Ya que estos efectos se compensan, aproximadamente, uno con otro, la fuerza de fricción es independiente del área.

E XAMEN RÁPIDO 5.6 Usted presiona con su mano su libro de física plano contra una pared vertical. ¿Cuál es la dirección de la fuerza de fricción que ejerce la pared sobre el libro? (a) hacia abajo, (b) hacia arriba, (c) afuera desde la pared, (d) hacia dentro de la pared.

E XAMEN RÁPIDO 5.7 Usted juega con su hija en la nieve. Ella se sienta sobre un trineo y le pide que la deslice sobre un campo horizontal plano. Usted tiene la opción de (a) empujarla desde atrás al aplicar una fuerza hacia abajo sobre sus hombros a 30° bajo la horizontal (figura 5.18a) o (b) unir una cuerda al frente del trineo y jalar con una fuerza a 30° sobre la horizontal (figura 5.18b). ¿Cuál sería más fácil para usted y por qué?

Ejemplo 5.11 Determinación experimental de μ_s y μ_k

El siguiente es un método simple de medir coeficientes de fricción. Suponga que se coloca un bloque sobre una superficie rugosa inclinada en relación con la horizontal, como se muestra en la figura 5.19. El ángulo de inclinación aumenta hasta que el bloque comienza a moverse. Demuestre que puede obtener μ_s al medir el ángulo crítico θ_c al que comienza a ocurrir este deslizamiento.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Considere la figura 5.19 e imagine que el bloque tiende a deslizarse hacia abajo por el plano debido a la fuerza gravitacional. Para simular la situación, coloque una moneda sobre la cubierta de este libro e incline el libro hasta que la moneda

5.11 continuación

comience a deslizarse. Note cómo este ejemplo difiere del ejemplo 5.6. Cuando no hay fricción sobre el plano, *cualquier* ángulo del plano hará que un objeto en reposo comience a moverse. Sin embargo, cuando existe fricción no hay movimiento del objeto para ángulos menores al ángulo crítico.

Categorizar El bloque está sometido a diferentes fuerzas. Puesto que el plano se eleva al ángulo en que el bloque está listo para comenzar a moverse pero no se mueve, el bloque se clasifica como una *partícula en equilibrio*.

Analizar El diagrama en la figura 5.19 muestra las fuerzas que actúan sobre el bloque: la fuerza gravitacional $m\vec{g}$, la fuerza normal \vec{n} y la fuerza de fricción estática \vec{f}_s . Se elige x paralelo al plano y y perpendicular a éste.

Del modelo de partícula en equilibrio, aplique la ecuación 5.8 al bloque en ambas direcciones x y y :

$$(1) \sum F_x = mg \sin \theta - f_s = 0$$

$$(2) \sum F_y = n - mg \cos \theta = 0$$

Sustituya $mg = n/\cos \theta$ de la ecuación (2) en la ecuación (1):

$$(3) f_s = mg \sin \theta = \left(\frac{n}{\cos \theta} \right) \sin \theta = n \tan \theta$$

Cuando el ángulo de inclinación aumenta hasta que el bloque está a punto de deslizarse, la fuerza de fricción estática alcanza su valor máximo $\mu_s n$. El ángulo θ en esta situación es el ángulo crítico θ_c . Haga estas sustituciones en la ecuación (3):

$$\mu_s n = n \tan \theta_c$$

$$\mu_s = \tan \theta_c$$

Así queda demostrado como se pidió que el coeficiente de fricción estática sólo se relaciona con el ángulo crítico. Por ejemplo, si el bloque apenas se desliza en $\theta_c = 20.0^\circ$, se encuentra que $\mu_s = \tan 20.0^\circ = 0.364$.

Finalizar Una vez que el bloque comienza a moverse en $\theta \geq \theta_c$, acelera hacia abajo por el plano y la fuerza de fricción es $f_k = \mu_k n$.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Cómo podrías determinar μ_k para el bloque e inclinación?

Respuesta Sin embargo, si θ se reduce a un valor menor que θ_c , puede encontrarse un ángulo θ' tal que el bloque se mueve hacia abajo por el plano con rapidez constante de nuevo como una partícula en equilibrio ($a_x = 0$). En este caso, use las ecuaciones (1) y (2) con f_s en lugar de f_k para encontrar μ_k ; $\mu_k = \tan \theta'$, donde $\theta' < \theta_c$.

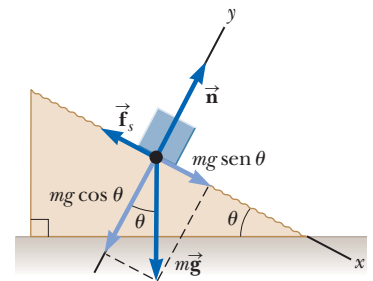


Figura 5.19 (Ejemplo 5.11) Las fuerzas externas que se ejercen sobre un bloque que se encuentra sobre un plano inclinado rugoso son la fuerza gravitacional $m\vec{g}$, la fuerza normal \vec{n} y la fuerza de fricción \vec{f}_s . Por conveniencia, la fuerza gravitacional se descompone en una componente $mg \sin \theta$ a lo largo del plano y una componente $mg \cos \theta$ perpendicular al plano.

Ejemplo 5.12 Disco de hockey deslizante

A un disco de hockey sobre un estanque congelado se le da una rapidez inicial de 20.0 m/s. Si el disco siempre permanece sobre el hielo y se desliza 115 m antes de llegar al reposo, determine el coeficiente de fricción cinética entre el disco y el hielo.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que el disco de la figura 5.19 se desliza hacia la derecha. La fuerza de fricción cinética actúa hacia la izquierda y alenta el disco que al final llega al reposo debido a esa fuerza.

Categorizar Las fuerzas que actúan sobre el disco se identifican en la figura 5.20, pero el texto del problema proporciona variables cinemáticas. Por tanto, el problema se clasifica en varias formas. Primero, es necesario modelar al disco como una *partícula bajo una fuerza neta* en la dirección horizontal: la fricción cinética ocasiona que el disco acelere. No existe aceleración del disco en la dirección vertical, así que se utiliza el modelo de *partícula en equilibrio* para esa dirección. Aún más, ya que la fuerza de fricción cinética se representa como independiente de la rapidez, la aceleración del disco es constante. Así que este problema también se clasifica como una *partícula bajo aceleración constante*.

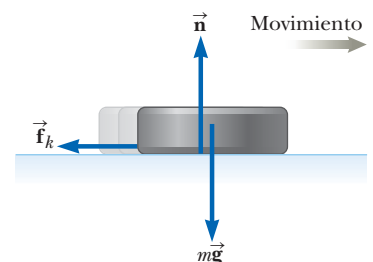


Figura 5.20 (Ejemplo 5.12) Después de que al disco se le da una velocidad inicial hacia la derecha, las únicas fuerzas externas que actúan sobre él son la fuerza gravitacional $m\vec{g}$, la fuerza normal \vec{n} y la fuerza de fricción cinética \vec{f}_k .

continúa

5.12 continuación

Analizar Primero, encuentre la aceleración algebraicamente en términos del coeficiente de fricción cinética, con la segunda ley de Newton. Una vez que conozca la aceleración del disco y la distancia que recorre, encuentre las ecuaciones de cinemática para encontrar el valor numérico del coeficiente de fricción cinética.

Aplique el modelo de partícula bajo una fuerza neta en la dirección x del disco:

$$(1) \sum F_x = -f_k = ma_x$$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio en la dirección y del disco:

$$(2) \sum F_y = n - mg = 0$$

Sustituya $n = mg$ de la ecuación (2) y de $f_k = \mu_k n$ en la ecuación (1):

$$-\mu_k n = -\mu_k mg = ma_x$$

$$a_x = -\mu_k g$$

El signo negativo significa que la aceleración es hacia la izquierda en la figura 5.20. Ya que la velocidad del disco está dirigida a la derecha, el disco se frena. La aceleración es independiente de la masa del disco y es constante porque se supone que μ_k permanece constante.

Aplique al disco el modelo de partícula bajo aceleración constante, con la ecuación 2.17 del modelo, $v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$, con $x_i = 0$ y $v_{xf} = 0$:

$$0 = v_{xi}^2 + 2a_x x_f = v_{xi}^2 - 2\mu_k g x_f$$

Resuelva para el coeficiente de fricción cinética:

$$\mu_k = \frac{v_{xi}^2}{2g x_f}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\mu_k = \frac{(20.0 \text{ m/s})^2}{2(9.80 \text{ m/s}^2)(115 \text{ m})} = 0.177$$

Finalizar Observe que μ_k es adimensional, como debe ser, y que tiene un valor menor, consistente con un objeto que se desliza en hielo.

Ejemplo 5.11 Aceleración de dos objetos conectados cuando la fricción está presente

Un bloque de masa m_2 sobre una superficie horizontal rugosa se conecta a una bola de masa m_1 mediante una cuerda ligera sobre una polea ligera sin fricción, como se muestra en la figura 5.20a. Al bloque se aplica una fuerza de magnitud F en un ángulo θ con la horizontal como se muestra, y el bloque se desliza hacia la derecha. El coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie es μ_k . Determine la magnitud de la aceleración de los dos objetos.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine lo que ocurre conforme se aplica \vec{F} al bloque. Suponga que \vec{F} es suficientemente grande para romper la fricción estática del bloque pero no lo suficiente para levantar el bloque, entonces éste se desliza hacia la derecha y la bola sube.

Categorizar Se pueden identificar las fuerzas y se quiere una aceleración, así que este problema se clasifica como dos *partículas bajo una fuerza neta*, la bola y el bloque. Se supone que el bloque no se eleva en el aire debido a la fuerza aplicada, el bloque se modela como una *partícula en equilibrio* en la dirección vertical.

Analizar Primero dibuje diagramas de fuerzas para los dos objetos, como se muestra en las figuras 5.21b y 5.21c. Note que la cuerda ejerce una fuerza de magnitud T sobre ambos objetos. La fuerza aplicada \vec{F} tiene componentes x y y , $F \cos \theta$ y $F \sin \theta$, respectivamente. Ya que los dos objetos están conectados, se pueden igualar las magnitudes de la componente x de la aceleración del bloque y la componente y de la aceleración de la bola y llamar a ambas a . Suponga que el movimiento del bloque es hacia la derecha.

Aplique el modelo de partícula bajo una fuerza neta al bloque en la dirección horizontal:

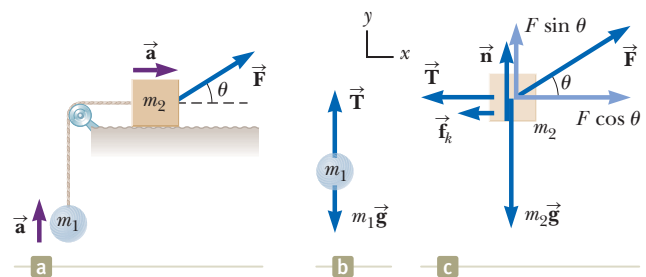


Figura 5.21 (Ejemplo 5.13) a) La fuerza externa \vec{F} aplicada como se muestra puede hacer que el bloque acelere hacia la derecha. b) y c) Diagramas mostrando las fuerzas sobre los dos objetos, se supone que el bloque acelera hacia la derecha y la bola acelera hacia arriba.

$$(1) \sum F_x = F \cos \theta - f_k - T = m_2 a_x = m_2 a$$

5.13 continuación

Como el bloque sólo se mueve horizontalmente, aplique al bloque el modelo de partícula en equilibrio en la dirección vertical:

Aplique el modelo de partícula bajo una fuerza neta a la bola en la dirección vertical:

Resuelva la ecuación (2) para n :

Sustituya n en $f_k = \mu_k n$ de la ecuación 5.10:

Sustituya la ecuación (4) y el valor de T de la ecuación (3) en la ecuación (1):

Resuelva para a :

$$(2) \quad \sum F_y = n + F \sin \theta - m_2 g = 0$$

$$(3) \quad \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_y = m_1 a$$

$$n = m_2 g - F \sin \theta$$

$$(4) \quad f_k = \mu_k (m_2 g - F \sin \theta)$$

$$F \cos \theta - \mu_k (m_2 g - F \sin \theta) - m_1 (a + g) = m_2 a$$

$$(5) \quad a = \frac{F(\cos \theta + \mu_k \sin \theta) - (m_1 + \mu_k m_2)g}{m_1 + m_2}$$

Finalizar La aceleración del bloque puede ser hacia la derecha o hacia la izquierda, depende del signo del numerador en la ecuación (5). Si el movimiento es hacia la izquierda, se debe invertir el signo de f_k en la ecuación (1) porque la fuerza de fricción cinética se debe oponer al movimiento del bloque en relación con la superficie. En este caso, el valor de a es el mismo que en la ecuación (5), con los dos signos más en el numerador cambiados a signos menos.

¿A qué se reduce la ecuación (5) si \vec{F} es eliminada y la superficie queda sin fricción? Llame a esta expresión la ecuación (6). ¿Esta expresión algebraica encaja con su intuición de la situación física? Ahora regrese al ejemplo 5.10 y haga que θ tienda a cero en la ecuación (5) de ese ejemplo. Compare esa ecuación resultante con su ecuación (6) de este ejemplo 5.13. ¿Deberían las expresiones algebraicas compararse con base en las situaciones físicas?

Resumen

Definiciones

Un **marco de referencia inercial** es en el que un objeto que no interactúa con otros objetos experimenta aceleración cero. Cualquier marco que se mueva con velocidad constante en relación con un marco inercial también es un marco inercial.

La **fuerza** se define como **aquello que causa un cambio en el movimiento de un objeto**.

Conceptos y principios

La **primera ley de Newton** establece que es posible encontrar un marco inercial en el que un objeto que no interactúa con otros objetos experimenta aceleración cero o, de manera equivalente, en ausencia de una fuerza externa, cuando se observa desde un marco inercial, un objeto en reposo permanece en reposo y un objeto en movimiento rectilíneo uniforme conserva dicho movimiento.

La **segunda ley de Newton** afirma que la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa.

La **tercera ley de Newton** postula que, si dos objetos interactúan, la fuerza que ejerce el objeto 1 sobre el objeto 2 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza que ejerce el objeto 2 sobre el objeto 1.

La **fuerza gravitacional** que se ejerce sobre un objeto es igual al producto de su masa (una cantidad escalar) y la aceleración de caída libre:

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \quad (5.5)$$

El **peso** de un objeto es la magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre el objeto:

$$F_g = mg \quad (5.6)$$

La **fuerza de fricción estática máxima** $\vec{f}_{s,\text{máx}}$ entre un objeto y una superficie es proporcional a la fuerza normal que actúa sobre el objeto. En general, $f_s \leq \mu_s n$, donde μ_s es el **coeficiente de fricción estática** y n es la magnitud de la fuerza normal.

Cuando un objeto se desliza sobre una superficie, la magnitud de la **fuerza de fricción cinética** \vec{f}_k está dada por $f_k = \mu_k n$, donde μ_k es el **coeficiente de fricción cinética**.

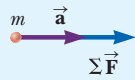
continúa



► Modelo de análisis para resolver problemas

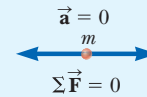
Partícula bajo una fuerza neta Si una partícula de masa m experimenta una fuerza neta distinta de cero, su aceleración se relaciona con la fuerza neta mediante la segunda ley de Newton:

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} \quad (5.2)$$



Partícula en equilibrio Si una partícula mantiene una velocidad constante (de modo que $\vec{a} = 0$), que podría incluir una velocidad de cero, las fuerzas sobre la partícula se equilibran y la segunda ley de Newton se reduce a:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (5.8)$$



Piense, Dialogue y comparta

Consulte el prefacio para una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para obtener más artículos de evaluación para esta sección, visite **WEBASSIGN** From Cengage

- Usted es miembro de un grupo de expertos que presta sus servicios a la comunidad legal. A su grupo se le ha pedido un abogado defensor para argumentar en el juicio de un conductor que no excedió el límite de velocidad. Se le proporcionan los siguientes datos: la masa del auto es de 1.50×10^3 kg. La masa del conductor de 95.0 kg. El coeficiente de fricción cinética entre los neumáticos del auto y la carretera es 0.580. El coeficiente de fricción estática entre los neumáticos del auto y la carretera es 0.820. El límite de velocidad registrado en la carretera es de 25 mi/h. En el momento del incidente, la carretera estaba seca y el clima era soleado. También se le proporciona la siguiente descripción del incidente: el conductor estaba conduciendo por una colina que hace un ángulo de 17.5° con la horizontal. El conductor vio a un perro que corrió hacia la calle, freno y dejó una marca de 17.0 m de la longitud que patinó. El auto se detuvo al final de la marca de la patinada. El conductor no le pegó al perro, pero el sonido de las llantas chirriantes atrajo la atención de un policía cercano, que multó al conductor por exceso de velocidad.
 - ¿Debería su grupo estar de acuerdo en ofrecer testimonio en la defensa en este caso? (b) ¿por qué?
- Considere la actividad de atrapar huevos discutida en el argumento introductorio del capítulo. Discuta en su grupo y haga cálculos de lo siguiente. Identifique una distancia de

separación entre el lanzador y el receptor del huevo, y determine una rapidez típica con la que se debe tirar el huevo para que cubra la distancia sin pegar en el suelo o pasar arriba de la cabeza del receptor. Estime la masa y el diámetro del huevo (el diámetro más corto, perpendicular a la dimensión más larga). A partir de estos datos, calcule la fuerza sobre el huevo ejercida por su mano si mantiene la mano rígida y no se mueve cuando el huevo la golpea. Ahora, simule mover las manos hacia atrás mientras atrapa el huevo. Que un miembro del grupo estime la distancia que se mueven sus manos en este proceso. A partir de estos datos, estime la fuerza que ejerció la mano sobre el huevo en este proceso de captura. Compare las fuerzas de su mano sobre el huevo entre estos dos métodos de atrapar el huevo.

- ACTIVIDAD** Un procedimiento simple que se puede seguir para medir el coeficiente de fricción usando la técnica discutida en el ejemplo 5.11. Ponga su libro sobre una mesa y coloque una moneda en la cubierta lejos del lomo. Abra lentamente la cubierta del libro para que forme un plano inclinado hacia abajo por el que la moneda se deslizará. Observe con cuidado y pare de abrir la cubierta en el instante que la moneda comienza a deslizarse. Con un transportador mida este ángulo crítico que la cubierta del libro hace con la horizontal. A partir de este ángulo, determine el coeficiente de fricción estática entre la moneda y la cubierta. (b) Coloque cinta adhesiva entre dos monedas y repita el procedimiento anterior para las dos monedas. ¿Cómo se compara el coeficiente de fricción estática para las dos monedas con el de la única moneda?

Problemas

Consulte el prefacio para una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para obtener más artículos de evaluación para esta sección, visite **WEBASSIGN** From Cengage

SECCIÓN 5.1 Concepto de fuerza

- Cierto ortodoncista utiliza una abrazadera de alambre para alinear la dentadura de un paciente, como se muestra en la figura P5.1. La tensión en el alambre se ajusta para tener 18.0 N. Encuentre la magnitud de la fuerza neta ejercida por el alambre sobre la dentadura.

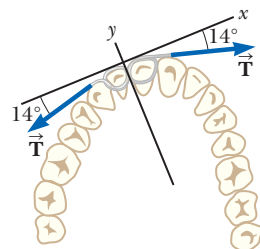


Figura P5.1

- Una o más fuerzas externas, suficientemente grandes para ser fácilmente medibles, se ejercen sobre cada objeto encerrado en un recuadro con líneas discontinuas, como se muestra en la figura 5.1. Identifique la reacción a cada una de dichas fuerzas.

SECCIÓN 5.4 Segunda ley de Newton

- Un objeto de 3.00 kg experimenta una aceleración dada por $\vec{a} = (2.00\hat{i} + 5.00\hat{j})$. Encuentre (a) la fuerza resultante que actúa sobre el objeto y (b) la magnitud de la fuerza resultante.
- La rapidez promedio de una molécula de nitrógeno en el aire es aproximadamente 6.70×10^2 m/s y su masa es 4.68×10^{-26} kg. (a) Si una molécula de nitrógeno tarda 3.00×10^{-13} s en golpear una pared y rebotar con la misma rapidez pero

moviéndose en la dirección opuesta, ¿cuál es la aceleración promedio de la molécula durante este intervalo de tiempo? (b) ¿Qué fuerza promedio ejerce la molécula sobre la pared?

5. Dos fuerzas, $\vec{F}_1 = (-6.00\hat{i} - 4.00\hat{j})\text{N}$ y $\vec{F}_2 = (-3.00\hat{i} + 7.00\hat{j})\text{N}$, actúan sobre una partícula de masa 2.00 kg que inicialmente está en reposo en las coordenadas (-2.00 m, 4.00 m). (a) ¿Cuáles son las componentes de la velocidad de la partícula en $t = 10.0$ s? (b) ¿En qué dirección se mueve la partícula en el instante $t = 10.0$ s? (c) ¿Qué desplazamiento experimenta la partícula durante los primeros 10.0 s? (d) ¿Cuáles son las coordenadas de la partícula en $t = 10.0$ s?
6. La fuerza ejercida por el viento sobre las velas de un bote es de 390 N hacia el norte. El agua ejerce una fuerza de 180 N hacia el este. Si el bote (incluyendo su tripulación) tiene una masa de 270 kg, ¿cuáles son la magnitud y dirección de su aceleración?
7. **Problema de repaso** Tres fuerzas que actúan sobre un objeto están dadas por $\vec{F}_1 = (-2.00\hat{i} + 2.00\hat{j})\text{N}$, $\vec{F}_2 = (5.00\hat{i} - 3.00\hat{j})\text{N}$ y $\vec{F}_3 = (-45.0\hat{i})\text{N}$. El objeto experimenta una aceleración de 3.75 m/s^2 de magnitud. (a) ¿Cuál es la dirección de la aceleración? (b) ¿Cuál es la masa del objeto? (c) Si el objeto inicialmente está en reposo, ¿cuál es su rapidez después de 10.0 s? (d) ¿Cuáles son las componentes de velocidad del objeto después de 10.0 s?
8. Si una sola fuerza constante actúa sobre un objeto que se mueve en una línea recta, la velocidad del objeto es una función lineal del tiempo. La ecuación $v = v_i + at$ da su velocidad v en función del tiempo, donde a es su aceleración constante. ¿Qué pasa si ahora la velocidad es una función lineal de la posición? Suponga que un objeto particular se mueve a través de un medio resistivo, su rapidez disminuye como se describe en la ecuación $v = v_i - kx$, donde k es un coeficiente constante y x es la posición del objeto. Encuentre la ley que describe la fuerza total que actúa sobre este objeto.

SECCIÓN 5.5 Fuerza gravitacional y peso

9. **Problema de repaso** La fuerza gravitacional ejercida sobre una pelota de béisbol es de 2.21 N hacia abajo. Un pitcher lanza la bola horizontalmente con una velocidad de 18.0 m/s al acelerarla uniformemente en línea recta horizontal durante un intervalo de tiempo de 170 ms. La pelota parte del reposo. (a) ¿Qué distancia recorre la bola antes de ser liberada? (b) ¿Qué magnitud y dirección tiene la fuerza que el pitcher ejerce sobre la pelota?
10. **Problema de repaso** La fuerza gravitacional ejercida sobre una bola de beisbol es $-F_g\hat{j}$. Un pitcher lanza la pelota con velocidad $v\hat{i}$ al acelerarla uniformemente en línea horizontal durante un intervalo de tiempo de $\Delta t = t - 0 = t$. (a) Partiendo del reposo, ¿qué distancia recorre la bola antes de ser liberada? (b) ¿Qué fuerza ejerce el pitcher sobre la pelota?
11. **Problema de repaso** Un electrón de 9.11×10^{-31} kg de masa tiene una rapidez inicial de 3.00×10^5 m/s. Viaja en línea recta y su rapidez aumenta a 7.00×10^5 m/s en una distancia de 5.00 cm. Si supone que su aceleración es constante, (a) determine la fuerza que se ejerce sobre el electrón y (b) compare esta fuerza con el peso del electrón, que se ignoró.
12. Si un hombre pesa 900 N en la Tierra, ¿cuál sería su peso en Júpiter, en donde la aceleración en caída libre es de 25.9 m/s^2 ?
13. Usted está de pie en el asiento de una silla y luego salta. a) Durante el intervalo de tiempo en el que está en vuelo hacia el suelo, la Tierra se tambalea hacia usted con una aceleración, ¿de qué orden de magnitud? En su solución, explique su lógica. Represente a la Tierra como un objeto perfectamente sólido. b) La Tierra se mueve hacia arriba a través de una distancia, ¿de qué orden de magnitud?

SECCIÓN 5.6 Tercera ley de Newton

14. Un ladrillo de masa M está sobre una almohadilla de hule de masa m . Juntos se deslizan hacia la derecha con velocidad constante sobre un estacionamiento cubierto de hielo. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre del ladrillo e identifique cada fuerza que actúa sobre él. (b) Dibuje un diagrama de cuerpo libre de la almohadilla e identifique cada fuerza que actúa sobre ella. (c) Identifique todos los pares de fuerzas acción-reacción en el sistema ladrillo-almohadilla-planeta

SECCIÓN 5.7 Modelos de análisis utilizando la segunda ley de Newton

15. **Problema de repaso** La figura P5.15 muestra un trabajador que empuja un bote, un modo de transporte muy eficiente, a través de un lago tranquilo. Él empuja paralelo a la longitud de la vara ligera y ejerce sobre el fondo del lago una fuerza de 240 N. Suponga que la vara se encuentra en el plano vertical que contiene la quilla del bote. En algún momento, la vara forma un ángulo de 35.0° con la vertical y el agua ejerce una fuerza de arrastre horizontal de 47.5 N sobre el bote, opuesta a su velocidad hacia delante de 0.857 m/s de magnitud. La masa del bote, que incluye su carga y al trabajador es de 370 kg. (a) El agua ejerce una fuerza de flotación vertical hacia arriba sobre el bote. Encuentre la magnitud de esta fuerza. (b) Modele las fuerzas como constantes en un intervalo corto de tiempo para encontrar la velocidad del bote 0.450 s después del momento descrito.

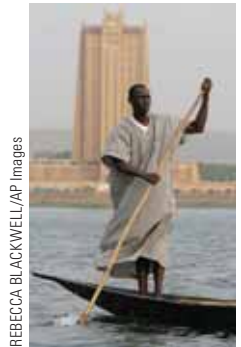


Figura P5.15

16. Un tornillo de hierro de 65.0 g de masa cuelga de una cuerda de 35.7 cm de largo. El extremo superior de la cuerda está fijo. Sin tocarlo, un imán atrae el tornillo de modo que permanece fijo, desplazado horizontalmente 28.0 cm a la derecha desde la línea vertical previa de la cuerda. El imán está ubicado a la derecha del tornillo y al mismo nivel vertical que el tornillo en la configuración final. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre del tornillo. (b) Encuentre la tensión en la cuerda. (c) Encuentre la fuerza magnética sobre el tornillo.
17. Un bloque se desliza hacia abajo por un plano sin fricción con una inclinación de $\theta = 15.0^\circ$. El bloque parte del reposo en lo alto, y la longitud del plano es 2.00 m. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre del bloque. Encuentre (b) la aceleración del bloque y (c) su rapidez cuando llega al fondo del plano inclinado.

18. **S** Un saco de cemento de peso F_g cuelga en equilibrio de tres alambres, como se muestra en la figura P5.18. Dos de los alambres forman ángulos θ_1 y θ_2 con la horizontal. Si supone que el sistema está en equilibrio, demuestre que la tensión en el alambre izquierdo es

$$T_1 = \frac{F_g \cos \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

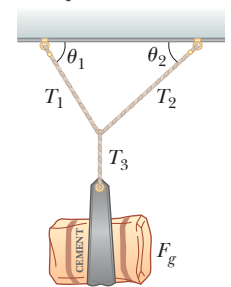


Figura P5.18

19. La distancia entre dos postes de teléfono es de 50.0 m. Cuando un ave de 1.00 kg se posa sobre el alambre telefónico a la mitad entre los postes, el alambre se comba 0.200 m. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre del ave. (b) ¿Cuánta tensión produce el ave en el alambre? Ignore el peso del alambre.
20. Se observa que un objeto de masa $m = 1.00$ kg tiene una aceleración \vec{a} de 10.0 m/s^2 en una dirección a 60.0° al noreste,

véase la figura P5.20. La fuerza \vec{F}_2 que se ejerce sobre el objeto tiene una magnitud de 5.00 N y se dirige al norte. Determine la magnitud y dirección de la fuerza horizontal \vec{F}_1 que actúa sobre el objeto.

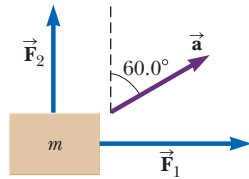


Figura P5.20

21. Un acelerómetro simple se construye dentro de un auto al colgar un objeto de masa m de una cuerda de longitud L fija al techo del automóvil. Conforme el auto acelera el sistema cuerda-objeto hace un ángulo constante θ con la vertical. (a) Si supone que la masa de la cuerda es despreciable comparada con m , obtenga una expresión para la aceleración del auto en términos de θ y demuestre que es independiente de la masa m y la longitud L . (b) Determine la aceleración del automóvil cuando $\theta = 23.0^\circ$.

22. Un objeto de masa $m_1 = 5.00$ kg colocado sobre una mesa horizontal sin fricción se conecta a una cuerda que pasa sobre una polea y después se une a un objeto colgante de masa $m_2 = 9.00$ kg, como se muestra en la figura P5.22. (a) Dibuje diagramas de cuerpo libre de ambos objetos. Encuentre (b) la magnitud de la aceleración de los objetos y (c) la tensión en la cuerda.

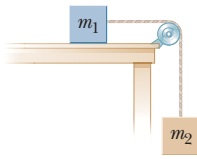


Figura 5.22
Problemas 22 y 29

23. En el sistema que se muestra en la figura P5.23, una fuerza horizontal \vec{F}_x actúa sobre un objeto de masa $m_2 = 8.00$ kg. La superficie horizontal no tiene fricción. Considere la aceleración del objeto deslizante como una función de F_x . (a) ¿Para qué valores de F_x el objeto de masa $m_1 = 2.00$ kg acelera hacia arriba? (b) ¿Para qué valores de F_x la tensión en la cuerda es cero? (c) Grafique la aceleración del objeto m_2 vs F_x . Incluya valores de F_x desde -100 N hasta $+100$ N.

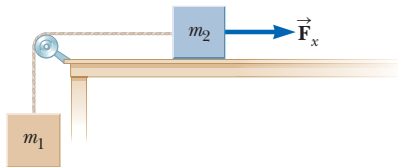


Figura P5.23

24. Un auto queda atorado en el lodo. Una grúa jala al automóvil, como se muestra en la figura P5.24. El cable de la grúa tiene una tensión de 2 500 N y jala hacia abajo y hacia la izquierda sobre el perno en su parte superior. El perno ligero se mantiene en equilibrio debido a las fuerzas ejercidas por las barras A y B. Cada barra es un *puntal*; es decir, las barras tienen un peso pequeño comparado con las fuerzas que ellas ejercen en los pasadores de bisagras de sus extremos. Cada puntal ejerce una fuerza paralela a su longitud. Determine la fuerza de tensión o de compresión en cada puntal. Proceda como sigue. Haga una conjetura de cómo actúan (empujando o jalando) las fuerzas en el perno superior. Dibuje un diagrama de cuerpo libre del perno. Utilice la condición de equilibrio del perno para trasladar el diagrama de cuerpo libre a ecuaciones. A partir de las ecuaciones calcule las fuerzas ejercidas por los puntales A y B. Si usted obtiene una respuesta positiva, entonces son correctas las direcciones inicialmente propuestas para las fuerzas. Una respuesta negativa significa que la dirección debe invertirse, pero es correcto el valor absoluto de la magnitud de la fuerza. Si un puntal jala sobre el perno,

entonces es tensión. Si empuja, entonces el puntal está bajo compresión. Identifique si cada puntal está en tensión o en compresión.

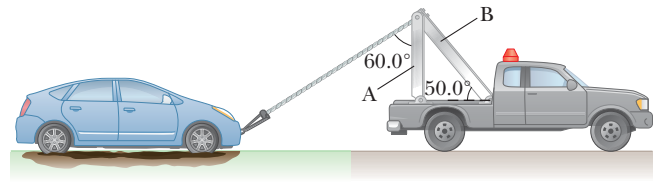


Figura P5.24

25. Un objeto de masa m_1 cuelga de una cuerda que pasa por una polea ligera, fija P_1 , como se muestra en la figura P5.46. La cuerda se conecta a una segunda polea muy ligera P_2 . Una segunda cuerda pasa por esta polea con un extremo fijo a una pared y el otro a un objeto de masa m_2 sobre una mesa horizontal sin fricción. (a) Si a_1 y a_2 son las aceleraciones de m_1 y m_2 , respectivamente, ¿cuál es la relación entre dichas aceleraciones? Encuentre expresiones para (b) las tensiones en las cuerdas y (c) las aceleraciones a_1 y a_2 en términos de las masas m_1 y m_2 , y de g .

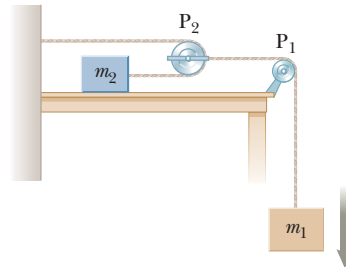


Figura P5.25

SECCIÓN 5.8 Fuerzas de fricción

26. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Su libro de física de 3.80 kg está junto a usted sobre el asiento horizontal de su automóvil. El coeficiente de fricción estática entre el libro y el asiento es 0.650, y el coeficiente de fricción cinética es 0.550. Suponga que viaja a 72.0 km/h y frena para detenerse con aceleración constante en una distancia de 30.0 m. Su libro de física permanece sobre el asiento y no resbala hacia adelante para caer al piso.
27. Considere un camión grande transportando una pesada carga, como vigas de acero. Un riesgo fuerte para el conductor es que la carga pueda deslizarse hacia adelante, y golpear la cabina, si el camión para repentinamente durante un accidente o al frenar. Suponga, por ejemplo, que una carga de 10 000 kg va colocada sobre un camión de 20 000 kg moviéndose a 12.0 m/s. Supongamos que la carga no está atada al camión, pero tiene un coeficiente de fricción de 0.500 con la plataforma del camión. (a) Calcule la distancia mínima de parada para la cual la carga no se deslizará hacia adelante en relación con el camión. (b) ¿Hay algún dato innecesario para la solución?
28. Antes de 1960, se creía que el máximo coeficiente de fricción estática alcanzable para la llanta de un automóvil, sobre un camino, era ms 5 1. Alrededor de 1962, tres compañías independientemente desarrollaron llantas de carreras con coeficientes de 1.6. Este problema muestra que las llantas han mejorado desde aquella ocasión. El más corto intervalo de tiempo para un automóvil con motor de pistones, inicialmente en reposo, para cubrir una distancia de un cuarto de milla es 4.43 s. (a) Suponga que las llantas traseras levantaron las delanteras del pavimento, como lo muestra la figura

P5.28. ¿Qué valor mínimo de μ_s es necesario para lograr el tiempo récord? (b) Suponga que al conductor le fuera posible incrementar la potencia de su motor, y mantener iguales otras cosas. ¿Cómo afectaría este cambio al intervalo de tiempo?



Figura P5.28

29. Un objeto suspendido de 9.00 kg se conecta, mediante una cuerda ligera inextensible sobre una polea ligera sin fricción, a un bloque de 5.00 kg que se desliza sobre una mesa plana (figura P5.22). Si toma el coeficiente de fricción cinética como 0.200, encuentre la tensión en la cuerda.

30. En la figura P5.30, la persona pesa 170 lb. Visto de frente, cada muleta forma un ángulo de 22.0° con la vertical. Las muletas soportan la mitad del peso del individuo. La otra mitad es soportada por las fuerzas verticales del suelo sobre los pies de la persona. Suponga que el hombre se mueve con velocidad constante y que la fuerza ejercida por el piso sobre las muletas actúa a lo largo de ellas, determine (a) el más pequeño coeficiente de fricción posible entre las muletas y el suelo, y (b) la magnitud de la fuerza de compresión en cada muleta.

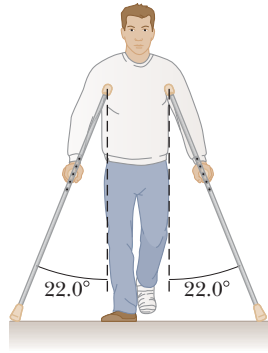


Figura P5.30

31. Tres objetos se conectan sobre una mesa, como se muestra en la figura P5.31. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque de masa m_2 y la mesa es 0.350. Los objetos tienen masas de $m_1 = 4.00$ kg, $m_2 = 1.00$ kg y $m_3 = 2.00$ kg, y las poleas no tienen fricción. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada objeto. (b) Determine la aceleración de cada objeto, incluyendo su dirección. (c) Determine las tensiones en las dos cuerdas. ¿Qué pasaría si? (d) Si la mesa fuera lisa, ¿las tensiones aumentarían, disminuirían, o quedarían intactas? Explique.

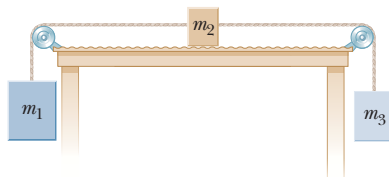


Figura P5.31

32. Usted está trabajando como clasificador de cartas en el Servicio Postal de Estados Unidos. Las normas postales requieren que el calzado de sus empleados tenga un coeficiente de fricción estática de 0.5 o más, sobre una superficie específica. Usted utiliza un calzado de atletismo que no conoce su coeficiente de fricción estática. Para determinar el coeficiente, usted imagina que hay una emergencia y empieza

a correr a través de la habitación. Usted tiene un compañero de trabajo, y encuentra que usted puede comenzar desde el reposo y moverse 4.23 m en 1.20 s. Si intenta moverse más rápido que esto, sus pies resbalan. Suponiendo que su aceleración es constante, ¿su calzado califica para la regulación postal?

33. Usted ha sido llamado como un testigo experto para un juicio en el que un conductor ha sido acusado de exceso de velocidad, pero está reclamando inocencia. Afirma haber pisado sus frenos para evitar chocar con la parte trasera de otro auto, pero golpeó la parte posterior del otro auto justo cuando se detuvo. Usted ha sido contratado por el acusador para demostrar que el conductor de hecho iba a exceso de velocidad. Usted ha obtenido de la policía los datos siguientes: que las marcas de la patinada, dejadas por el conductor son de 56.0 m de largo y la carretera está a nivel. Los neumáticos que coinciden con los del auto del conductor se ha arrastrado por la misma carretera para determinar que el coeficiente de fricción cinética entre los neumáticos y la carretera es de 0.82 en todos los puntos a lo largo de la marca de la patinada. El límite de velocidad en la carretera es 35 mi/h. redacte un argumento para utilizarlo en la corte para demostrar que el conductor de hecho iba a exceso de velocidad.

34. Un bloque de 3.00 kg de masa es empujado contra una pared mediante una fuerza \vec{P} que forma un ángulo $\theta = 50.0^\circ$ con la horizontal, como se muestra en la figura P5.34. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la pared es 0.250. (a) Determine los valores posibles para la magnitud de \vec{P} que permiten al bloque permanecer fijo. (b) Describa qué sucede si $|\vec{P}|$ tiene un valor mayor y qué ocurre si es más pequeño. (c) Repita los incisos (a) y (b) suponiendo que la fuerza forma un ángulo $\theta = 13.0^\circ$ con la horizontal.

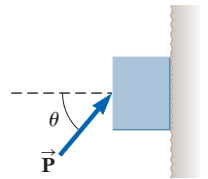


Figura P5.34

35. **Problema de repaso** Un salmón real puede nadar a 3.58 m/s, y también puede saltar verticalmente, abandonando el agua con una rapidez de 6.26 m/s. Un salmón récord tiene 1.50 m de longitud y una masa de 61.0 kg. Considere un pez nadando en línea recta hacia arriba bajo la superficie de un lago. La fuerza gravitacional ejercida sobre el pez es casi cancelada por la fuerza de flotación ejercida por el agua, como se estudiará en el capítulo 14. El pez experimenta una fuerza P hacia arriba ejercida por el agua sobre las aletas de su cola y una fuerza hacia abajo debida a la fricción del fluido que se modela actuando sobre su extremo frontal. Suponga que la fuerza de fricción del fluido desaparece tan pronto como la cabeza del pez corta la superficie del agua, y asuma que la fuerza sobre su cola es constante. Modele la fuerza gravitacional que se elimina rápidamente cuando la mitad del pez está fuera del agua. Encuentre el valor de P .

36. Un bloque de 5.00 kg se coloca encima de un bloque de 10.0 kg (figura P5.36). Una fuerza horizontal de 45.0 N es aplicada al bloque de 10.0 kg, y el bloque de 5.0 kg está amarrado a la pared. El coeficiente de fricción cinética entre todas las superficies en movimiento es 0.200. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada bloque e identifique las fuerzas de acción-reacción entre los bloques. (b) Determine la tensión en la cuerda y la magnitud de la aceleración del bloque de 10.0 kg.

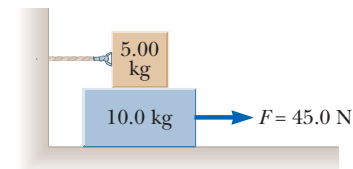


Figura P5.36

PROBLEMAS ADICIONALES

37. Un deslizador de aluminio negro flota sobre una película de aire en una pista de aire de aluminio a nivel. En esencia, el aluminio no siente fuerza en un campo magnético y la resistencia del aire es despreciable. Un imán intenso se une a lo alto del deslizador y forma una masa total de 240 g. Un trozo de chatarra de hierro unido a un tope en la pista atrae al imán con una fuerza de 0.823 N cuando el hierro y el imán están separados 2.50 cm. (a) Encuentre la aceleración del deslizador en este instante. (b) La chatarra de hierro ahora se une a otro deslizador verde y forma una masa total de 120 g. Encuentre la aceleración de cada deslizador cuando se liberan simultáneamente a 2.50 cm de separación.
38. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Un libro se coloca sobre un plano inclinado en la superficie de la Tierra. El ángulo del plano con la horizontal es 60.0° . El coeficiente de fricción cinética entre el libro y el plano es 0.300. Al tiempo $t = 0$, el libro se libera a partir del reposo. Entonces el libro desliza una distancia de 1.00 m, medida a lo largo del plano, en un intervalo de tiempo de 0.483 s.
39. Dos bloques de masas m_1 y m_2 se colocan sobre una tabla en contacto entre sí como se discute en el ejemplo 5.7 y se muestra en la figura 5.13a. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque de la masa m_1 y la tabla es μ_1 , y entre el bloque de masa m_2 y la tabla es μ_2 . Se aplica una fuerza horizontal de magnitud F al bloque de masa m_1 . Deseamos encontrar P , la magnitud de la fuerza de contacto entre los bloques. (a) Dibuje los diagramas que demuestran las fuerzas para cada bloque. (b) ¿Cuál es la fuerza neta en el sistema de dos bloques? (c) ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre m_1 ? (d) ¿Cuál es la fuerza neta que actúa sobre m_2 ? (e) Escriba la segunda ley de Newton en la dirección x para cada bloque. (f) Resuelva las dos ecuaciones con dos incógnitas para la aceleración a de los bloques en términos de las masas, la fuerza aplicada F , los coeficientes de fricción, y g . (g) Encuentre la magnitud P de la fuerza de contacto entre los bloques en términos de las mismas cantidades.
40. Un deslizador de 1.00 kg sobre un riel de aire horizontal es jalado por una cuerda a un ángulo θ . La cuerda tensa pasa por una polea y está ligada a un cuerpo colgando de masa 0.500 kg, como se muestra en la figura P5.40. (a) Muestre que la rapidez v_x del deslizador y la rapidez v_y del objeto que cuelga están relacionadas $v_x = uv_y$, donde $u = z(z^2 - h_0^2)^{-1/2}$. (b) El deslizador se libera a partir del reposo. Demuestre que en ese instante la aceleración a_x del deslizador y la aceleración a_y del objeto colgando están relacionadas por $a_x = ua_y$. (c) Encuentre la tensión en la cuerda en el instante que se libera el deslizador, para $h_0 = 80.0$ cm y $\theta = 30.0^\circ$.

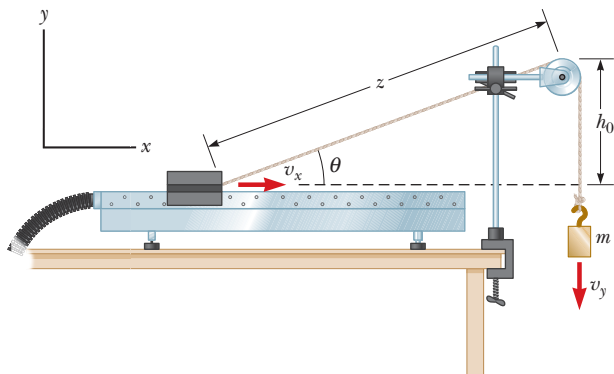


Figura P5.40

41. Un niño inventivo llamado Nick quiere alcanzar una manzana pendiente en un árbol sin escalar. Sentado en una silla unida a una cuerda que pasa sobre una polea sin fricción (figura P5.41). Nick jala sobre el extremo suelto de la cuerda con tal fuerza que la balanza de resorte lee 250 N. El verdadero peso de Nick es 320 N y la silla pesa 160 N. Los pies de Nick no tocan el suelo. (a) Dibuje un par de diagramas que muestren las fuerzas para Nick y la silla considerados como sistemas separados y otro diagrama para Nick y la silla considerados como un sistema. (b) Muestre que la aceleración del sistema es *hacia arriba* y encuentre su magnitud. (c) Encuentre la fuerza que Nick ejerce sobre la silla.



Figura P5.41 Problemas 41 y 44

42. Una cuerda con masa m_r está unida a un bloque de masa m_b , como en la figura P5.42. El bloque descansa sobre una superficie horizontal sin fricción. La cuerda no se estira. El extremo libre de la cuerda se jala hacia la derecha con una fuerza horizontal \vec{F} . (a) Dibuje diagramas de fuerzas para la cuerda y el bloque, observando que la tensión en la cuerda no es uniforme. (b) Encuentre la aceleración del sistema en términos de m_r , m_b y F . (c) Encuentre la magnitud de la fuerza que la cuerda ejerce sobre el bloque. (d) ¿Qué pasa con la fuerza sobre el bloque conforme la masa de la cuerda se aproxima a cero? ¿Qué puede decirse acerca de la tensión en una cuerda *ligera* uniendo a un par de objetos en movimiento?
43. En el ejemplo 5.7 se empujaron dos bloques sobre una mesa. **CIC** Suponga que tres bloques están en contacto mutuo sobre una superficie horizontal sin fricción, como se muestra en la figura P5.43. A m_1 se le aplica una fuerza horizontal \vec{F} . Tome $m_1 = 2.00$ kg, $m_2 = 3.00$ kg, $m_3 = 4.00$ kg y $F = 18.0$ N. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada bloque. (b) Determine la aceleración de los bloques. (c) Encuentre la fuerza *resultante* sobre cada bloque. (d) Encuentre las magnitudes de las fuerzas de contacto entre los bloques. (e) Usted trabaja en un proyecto de construcción. Un colaborador clava cartón-yeso en un lado de un separador ligero y usted está en el lado opuesto, proporcionando "respaldo" al apoyarse contra la pared con su espalda, empujando sobre ella. Cada golpe de martillo hace que su espalda sufra un pinchazo. El supervisor lo ayuda al poner un pesado bloque de madera entre la pared y su espalda. Use la situación analizada en los incisos (a), (b) y (c) como modelo, y explique cómo este cambio funciona para hacer su trabajo más confortable.

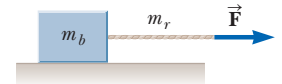


Figura P5.42



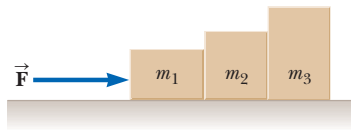


Figura P5.43

44. En la situación descrita en el problema 41 y la figura P5.41, las masas de la cuerda, balanza y polea son despreciables. Los pies de Nick no tocan el suelo. (a) Suponga que Nick está momentáneamente en reposo cuando deja de jalar la cuerda hacia abajo y pasa el extremo de la cuerda a otro niño, de 440 N de peso, que está de pie en el suelo junto a él. La cuerda no se rompe. Describa el movimiento resultante. (b) En vez de ello, suponga que Nick está momentáneamente en reposo cuando amarra el extremo de la cuerda a una saliente en forma de gancho resistente que se deriva del tronco del árbol. Explique por qué esta acción puede hacer que la cuerda se rompa.

45. Una caja de peso F_g es empujada mediante una fuerza \vec{P} sobre un piso horizontal, como se muestra en la figura P5.89. El coeficiente de fricción estática es μ_s , y \vec{P} se dirige a un ángulo θ bajo la horizontal. (a) Demuestre que el valor mínimo de P que moverá la caja está dado por

$$P = \frac{\mu_s F_g \sec \theta}{1 - \mu_s \tan \theta}$$

(b) Encuentre la condición sobre θ , en términos de μ_s , tal que sea imposible el movimiento de la caja para cualquier valor de P .

46. En la figura P5.92, la polea y la cuerda son ligeras, todas las superficies carecen de fricción, y la cuerda no se estira. (a) ¿Qué comparación puede hacerse entre las aceleraciones de los bloques 1 y 2? Explique su razonamiento. (b) La masa del bloque 2 es 1.30 kg. Encuentre su aceleración que depende de la masa m_1 del bloque 1. (c) **¿Qué pasaría si?** ¿Qué predice el resultado del inciso (b) si m_1 es mucho menor que 1.30 kg? d) ¿Qué predice el resultado del inciso (b) si m_1 se aproxima a infinito? (e) En este último caso, ¿cuál es la tensión en la cuerda? (f) ¿Podría usted anticipar las respuestas de los incisos (c), (d) y (e) sin hacer primero el inciso (b)? Explique.

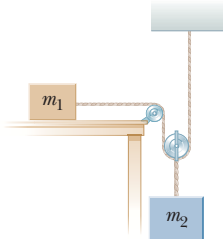


Figura P5.46

47. Usted está trabajando como un testigo experto para la defensa de un capitán de un buque contenedor cuya nave se topó con un arrecife que rodea una isla caribeña. El capitán está siendo acusado de dirigir la nave intencionalmente hacia el arrecife. Se ha descubierto la siguiente información que se ha presentado y los abogados de ambos bandos han estipulado que la información es correcta: el barco viajaba a 2.50 m/s hacia el arrecife cuando una falla mecánica causó que el timón se atascara en la posición recta. En ese momento, la nave estaba a 900 m del arrecife. El viento soplaba directamente hacia el arrecife, y ejercía una fuerza constante de 9.00×10^3 N en el barco en una dirección hacia el arrecife. La masa de la nave y su carga era de 5.50×10^7 kg. Durante la preparación del juicio, el capitán afirma que sin el control de la dirección de viaje, la única opción que tenía era poner el motores en reversa a la potencia máxima, de tal manera que

la fuerza total ejercida por la fuerza de arrastre de fricción del agua y la fuerza del agua en las hélices era de 1.25×10^5 N en una dirección alejándose del arrecife. Con esta información, construya un argumento convincente de que el capitán no podía hacer nada en esta situación para evitar que el buque pegara contra el arrecife.

48. Un cojín plano de masa m se libera desde el reposo en lo alto de un edificio que tiene una altura h . Un viento que sopla a lo largo del lado del edificio ejerce una fuerza horizontal constante de magnitud F sobre el cojín conforme cae, como se muestra en la figura P5.48. El aire no ejerce fuerza vertical. (a) Demuestre que la trayectoria del cojín es una línea recta. (b) ¿El cojín cae con velocidad constante? Explique. (c) Si $m = 1.20$ kg, $h = 8.00$ m y $F = 2.40$ N, ¿a qué distancia del edificio el cojín golpeará el nivel del suelo?

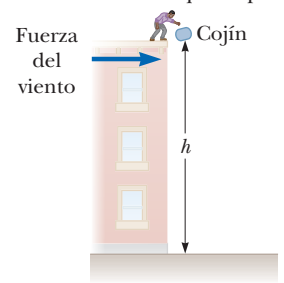


Figura P5.48

¿Qué pasaría si? (d) Si el cojín se lanza hacia abajo con una rapidez distinta de cero, desde lo alto del edificio, ¿cuál será la forma de su trayectoria? Explique.

49. ¿Qué fuerza horizontal debe aplicarse a un gran bloque de masa M , que se muestra en la figura P5.49, para que los otros bloques permanezcan fijos respecto a M ? Suponga que todas las superficies y la polea carecen de fricción. Note que la fuerza ejercida por la cuerda acelera a m_2 .

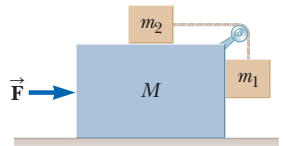


Figura P5.49 Problemas 49 y 53

50. Un objeto de 8.40 kg se desliza hacia abajo por un plano inclinado fijo sin fricción. Use una computadora para determinar y tabular (a) la fuerza normal que se ejerce sobre el objeto y (b) su aceleración para una serie de ángulos de inclinación (medidos desde la horizontal) que varían de 0° a 90° en incrementos de 5° . (c) Trace una gráfica de la fuerza normal y la aceleración como funciones del ángulo de inclinación. (d) En los casos límite de 0° y 90° , ¿sus resultados son consistentes con el comportamiento conocido?

PROBLEMAS DE DESAFÍO

51. Un bloque de masa 2.20 kg se acelera, sobre una superficie rugosa, mediante una cuerda ligera que pasa por una pequeña polea, como se indica en la figura P5.51. La tensión T en la cuerda se mantiene a 10 N, y la polea está a 0.100 m por arriba del bloque. El coeficiente de fricción cinética es 0.400. (a) Determine la aceleración del bloque cuando $x = 0.400$ m. (b) Describa el comportamiento general de la aceleración conforme el bloque se desliza desde una ubicación con x grande hasta $x = 0$. (c) Encuentre el valor máximo de la aceleración y la posición x en donde esto ocurre. (d) Encuentre el valor de x para el cual la aceleración es cero.

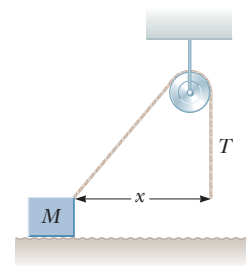


Figura P5.51

52. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Una tostadora de 1.30 kg no está conectada. El coeficiente de fricción estática entre la tostadora y un mostrador horizontal es 0.350. Para hacer que la tostadora comience a moverse, usted jala descuidada-

mente su cordón eléctrico. Desafortunadamente, el cordón se ha debilitado debido a acciones similares y se romperá si la tensión en él excede 4.00 N. Jalando el cordón en un ángulo particular, usted logra que se mueva la tostadora sin romper el cordón.

53. Inicialmente, el sistema de objetos mostrado en la figura P5.49 se mantiene sin movimiento. La polea, todas las superficies y las ruedas carecen de fricción. Acepte que la fuerza \vec{F} es cero y suponga que m_1 sólo se puede mover verticalmente. En el instante después de liberar al sistema de objetos, encuentre (a) la tensión T en la cuerda, (b) la aceleración de m_2 , (c) la aceleración de M , y (d) la aceleración de m_1 . (Nota: La polea acelera junto con el sistema.)

54. Un móvil se forma al soportar cuatro mariposas metálicas de igual masa m de una cuerda de longitud L . Los puntos de soporte están igualmente espaciados una distancia ℓ , como se ilustra en la figura P5.54. La cuerda forma un ángulo θ_1 con el techo en cada punto final. La sección central de la cuerda es horizontal. (a) Encuentre la tensión en cada sección de cuerda en términos de θ_1 , m y g . (b) Encuentre el ángulo θ_2 , en términos de θ_1 , que las secciones de cuerda entre las mariposas exteriores y las mariposas interiores forman con la horizontal. (c) Demuestre que la distancia D entre los puntos extremos de la cuerda es

$$D = \frac{L}{5} \left\{ 2 \cos \theta_1 + 2 \cos \left[\tan^{-1} \left(\frac{1}{2} \tan \theta_1 \right) \right] + 1 \right\}$$

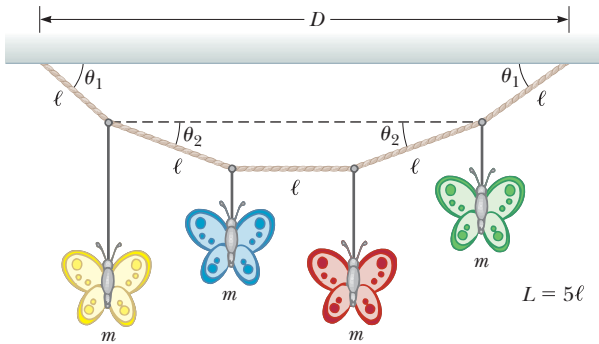


Figura P5.54

55. En la figura P5.55, el plano inclinado tiene masa M y está clavado a la mesa horizontal. El bloque de masa m se coloca cerca del fondo del plano y es liberado con un empujón para deslizarlo hacia arriba. El bloque se coloca cerca de lo alto del plano, como se muestra en la figura, y después se desliza hacia abajo, siempre sin fricción. Encuentre la fuerza que la mesa ejerce sobre el plano durante este movimiento en términos de m , M , g y θ .

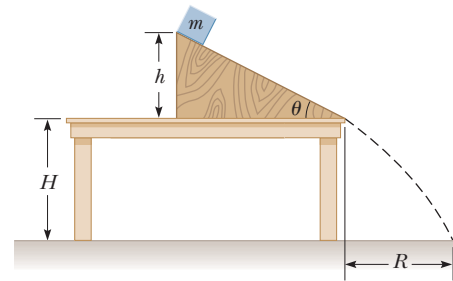


Figura P5.55



Movimiento circular y otras aplicaciones de las leyes de Newton



La fiesta del té loco (*Mad Tea Party*) en Disneylandia es un juego con mucho movimiento circular. Cada taza gira alrededor de un eje central. Además, seis tazas están sobre una base giratoria. Además, tres de estas bases giratorias están sobre un plato giratorio grande que gira en dirección opuesta a las bases giratorias más pequeñas. (*Pascal Le Segretain/Getty Images News/Getty Images*)

IMAGINE Hoy no tiene clase y decide pasar el día en Disneylandia con un amigo. Es un día de la semana, así que las filas son relativamente cortas. En efecto, ¡incluso la línea para La fiesta del té loco es corta! Usted ha leído en línea que este juego está disponible en todos los parques de Disney alrededor del mundo, incluso en el más nuevo Disneylandia en Shanghai, China. En este juego, usted y su amigo se sientan en una taza de té grande que gira rápidamente. Mientras que su amigo manipula la rueda en el centro de la taza de té para que gire rápidamente, usted cuelga su smartphone de una cuerda para formar un péndulo. Coloca el péndulo de su mano en el borde de la taza de té. ¡Observa que el péndulo no cuelga directamente hacia abajo! Abre una app especial en el smartphone que le da una lectura del ángulo que hace el teléfono con respecto a la vertical y de nuevo cuelga el teléfono como un péndulo. ¿Por qué se desvía el péndulo de la vertical? ¿En qué dirección se desvía el péndulo de la vertical? ¿Qué pasa con la lectura del ángulo en el teléfono mientras mueve su mano sosteniendo el péndulo hacia el centro de la taza de té? ¿Por qué la lectura cambia de esta manera?

CONEXIONES En este capítulo, ampliaremos el movimiento circular que estudiamos en el capítulo 4, combinando nuestros nuevos conocimientos sobre la fuerza del capítulo 5. ¿Qué fuerzas actúan sobre un objeto cuando está en movimiento circular? Además, consideramos algunos otros casos en los que las leyes de Newton nos ayudan a entender el movimiento. Consideraremos cómo se presentan las leyes de la física cuando se está en un marco de referencia acelerado, como la taza de té girando de la sección "Imagine". También ampliaremos nuestras discusiones de fricción del capítulo 5 considerando fuerzas resistivas sobre un objeto, como la resistencia del aire. A diferen-

- 6.1 Extensión del modelo de partícula en el movimiento circular uniforme
- 6.2 Movimiento circular no uniforme
- 6.3 Movimiento en marcos acelerados
- 6.4 Movimiento en presencia de fuerzas resistivas



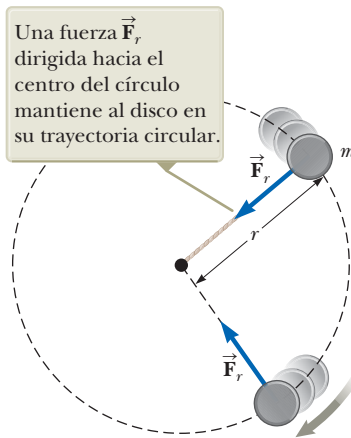


Figura 6.1 Vista superior de un disco móvil en una trayectoria circular en un plano horizontal.

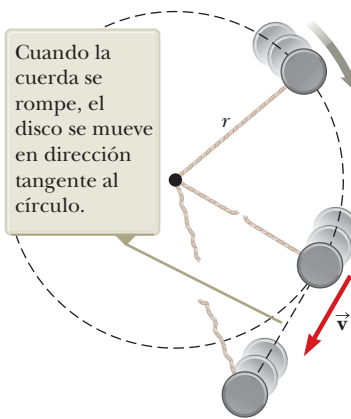


Figura 6.2 Se rompe la cuerda que sostiene al disco en su trayectoria circular.

Fuerza que causa \blacktriangleright
aceleración centrípeta

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 6.1

Dirección de viaje cuando la cuerda se rompe Estudie la figura 6.2 con atención. Muchos estudiantes (de manera errónea) piensan que el disco se moverá radialmente, alejándose del centro del círculo cuando la cuerda se rompe. La velocidad del disco es tangente al círculo. Por la primera ley de Newton, el disco continúa moviéndose en la misma dirección en la que se movía justo cuando desaparece la fuerza de la cuerda.

cia de nuestro modelo de fricción cinética, estas fuerzas varían en magnitud de acuerdo a la rapidez del objeto en relación con el medio circundante. En los próximos capítulos, veremos varios ejemplos del movimiento circular, como planetas en órbita en el capítulo 13, partículas con cargas que se mueven en trayectorias circulares en campos magnéticos en el capítulo 28, y electrones en órbitas circulares en la teoría de Bohr del átomo de hidrógeno el capítulo 41. La acción de las partículas que se encuentran en fuerzas resistivas se presentará en los siguientes capítulos, y veremos análogos eléctricos a las fuerzas resistivas en diferentes tipos de circuitos eléctricos en los capítulos 27 y 31. El material de este capítulo sobre los marcos de referencia acelerados continuará con la discusión de relatividad general en el capítulo 38.

6.1 Extensión del modelo de partícula en el movimiento circular uniforme

En la sección 4.4 se discutió el modelo de una partícula en movimiento circular uniforme, en el que una partícula se mueve con una rapidez constante v en una trayectoria circular de radio r . La partícula experimenta una aceleración que tiene una magnitud

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

La aceleración se llama *aceleración centrípeta* porque \vec{a}_c se dirige hacia el centro del círculo. Además, \vec{a}_c siempre es perpendicular a \vec{v} . (Si hubiera una componente de la aceleración paralela a \vec{v} , la rapidez de la partícula cambiaría.)

Ahora se incorpora el concepto de fuerza en la partícula en el modelo de movimiento circular uniforme de la sección 4.4. Considere un disco de masa m que se amarra a una cuerda de longitud r para hacerlo girar con rapidez constante en una trayectoria circular horizontal, como se ilustra en la figura 6.1. Su peso se sostiene mediante la fuerza normal de una mesa sin fricción, y la cuerda está anclada a una estaca en el centro de la trayectoria circular del disco. ¿Por qué el disco se mueve en un círculo? De acuerdo con la primera ley de Newton, el disco se movería en una línea recta si no hubiese fuerza sobre ella; sin embargo, la cuerda evita el movimiento a lo largo de una línea recta al ejercer en el disco una fuerza radial \vec{F}_r que lo hace seguir la trayectoria circular. Esta fuerza se dirige a lo largo de la cuerda hacia el centro del círculo, como se muestra en la figura 6.1.

Si se aplica la segunda ley de Newton a lo largo de la dirección radial, la fuerza neta que causa la aceleración centrípeta se relaciona con la aceleración del modo siguiente:

$$\sum F = ma_c = m \frac{v^2}{r} \quad (6.1)$$

Una fuerza que causa una aceleración centrípeta actúa hacia el centro de la trayectoria circular y genera un cambio en la dirección del vector velocidad. Si dicha fuerza desapareciera, el objeto ya no se movería en su trayectoria circular; en vez de ello, se movería a lo largo de una trayectoria en línea recta tangente al círculo. Esta idea se ilustra en la figura 6.2 para el disco que gira en el extremo de una cuerda en un plano horizontal. Si la cuerda se rompe en algún instante, el disco se mueve a lo largo de la trayectoria en línea recta que es tangente al círculo en la posición del disco en ese instante.

- E XAMEN RÁPIDO 6.1** Usted se encuentra en una rueda de la fortuna que gira con rapidez constante. La canasta en la que viaja siempre mantiene su orientación correcta hacia arriba; no se invierte. (i) ¿Cuál es la dirección de la fuerza normal sobre usted desde el asiento cuando está en lo alto de la rueda? (a) hacia arriba, (b) hacia abajo, (c) imposible de determinar. (ii) De las mismas opciones, ¿cuál es la dirección de la fuerza neta sobre usted cuando está en lo parte superior de la rueda?

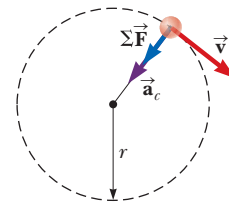
MODELO DE ANÁLISIS Partícula en movimiento circular uniforme (extensión)

Imagine un objeto en movimiento que se puede modelar como una partícula. Si se mueve en una trayectoria circular de radio r rapidez constante v , experimenta una aceleración centrípeta. Ya que la partícula se está acelerando, debe haber una fuerza neta que actúe sobre la partícula. Esa fuerza se dirige hacia el centro de la trayectoria circular y está dada por

$$\sum F = ma_c = m \frac{v^2}{r} \quad (6.1)$$

Ejemplos:

- la tensión en una cuerda de longitud constante actuando en una piedra que gira en círculo
- la fuerza gravitacional que actúa sobre un planeta que viaja alrededor del sol en una órbita perfectamente circular (capítulo 13)
- la fuerza magnética que actúa sobre una partícula con carga moviéndose en un campo magnético uniforme (capítulo 28)
- la fuerza eléctrica que actúa sobre un electrón en órbita alrededor de un núcleo en el modelo de Bohr del átomo del hidrógeno (capítulo 41)



Ejemplo 6.1 El péndulo cónico

Una pequeña bola de masa m se suspende de una cuerda de longitud L . La bola da vueltas con rapidez constante v en un círculo horizontal de radio r , como se muestra en la figura 6.3. (La cuerda hace un recorrido de la superficie en forma de cono (*péndulo cónico*), de ahí el nombre del sistema.) Encuentre una expresión para v en términos de la figura 6.3.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Examine el movimiento de la bola en la figura 6.3a y observe que la cuerda hace un recorrido en cono y que la bola se mueve en círculo horizontal.

Categorizar La bola en la figura 6.3 no tiene aceleración vertical. Debido a eso, se le modela como una *partícula en equilibrio* respecto de la dirección vertical. Experimenta una aceleración centrípeta en la dirección horizontal, de modo que se le modela como una partícula en *movimiento circular uniforme* en esta dirección.

Analizar Sea θ el ángulo entre la cuerda y la vertical. En el diagrama de fuerzas sobre la bola como se muestra en la figura 6.3b, la fuerza \vec{T} que ejerce la cuerda se resuelve en una componente vertical $T \cos \theta$ y una componente horizontal $T \sin \theta$ que actúa hacia el centro de la trayectoria circular.

Aplique el modelo de partícula en equilibrio en la dirección vertical:

$$\sum F_y = T \cos \theta - mg = 0$$

$$(1) \quad T \cos \theta = mg$$

Use la ecuación 6.1 del modelo de partícula en movimiento circular en la dirección horizontal:

$$(2) \quad \sum F_x = T \sin \theta = ma_c = \frac{mv^2}{r}$$

Divida la ecuación 2) entre la ecuación 1) y use $\sin \theta / \cos \theta = \tan \theta$:

$$\tan \theta = \frac{v^2}{rg}$$

Resuelva para v :

$$v = \sqrt{rg \tan \theta}$$

Sustituya $r = L \sin \theta$ a partir de la geometría a la figura 6.3a:

$$(3) \quad v = \sqrt{Lg \sin \theta \tan \theta}$$

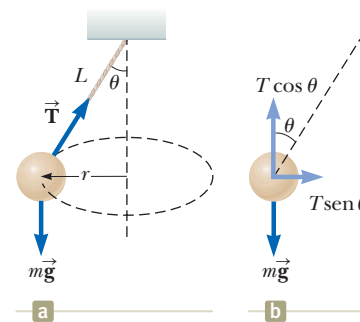


Figura 6.3 (Ejemplo 6.1) (a) Péndulo cónico. La trayectoria del objeto es un círculo horizontal. (b) Fuerzas que actúan sobre la bola.

Finalizar Observe que la rapidez es independiente de la masa de la bola. Considere lo que ocurre cuando θ tiende a 90° de modo que la cuerda es horizontal. Puesto que la tangente de 90° es infinita, la rapidez v es infinita, lo que nos dice que la cuerda posiblemente no es horizontal. Si lo fuese, no habría componente vertical de la fuerza \vec{T} para equilibrar la fuerza gravitacional en la bola. La situación en este problema es similar de alguna manera a su experiencia en el juego de La fiesta de té loco. Mientras mueve la mano que sostiene el smartphone colgante hacia el centro de su taza giratoria, la rapidez v del teléfono cambia, lo que resulta en un ángulo θ diferente, como lo sugiere la ecuación (3).

Ejemplo 6.2 ¿Qué tan rápido puede girar?

Un disco de 0.500 kg de masa se une al extremo de una cuerda de 1.50 m de largo. El disco da vueltas en un círculo horizontal como se muestra en la figura 6.1. Si la cuerda resiste una tensión máxima de 50.0 N, ¿cuál es la máxima rapidez a la que gira el disco antes de que se rompa la cuerda? Suponga que la cuerda permanece horizontal durante el movimiento.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Tiene sentido que, mientras más fuerte sea la cuerda, más rápido gira el disco antes de que la cuerda se rompa. Además, se espera que un disco con mayor masa rompa la cuerda a una rapidez más baja. (¡Imagine girar una bola de boliche en la cuerda!)

Categorizar Puesto que el disco se mueve en una trayectoria circular, se le modela como una *partícula en movimiento circular uniforme*.

Analizar Incorpore la tensión y la aceleración centrípeta en la segunda ley de Newton como se describe en la ecuación 6.1:

$$T = m \frac{v^2}{r}$$

Resuelva para v :

$$(1) \quad v = \sqrt{\frac{Tr}{m}}$$

Encuentre la rapidez máxima que puede tener el disco, que corresponde a la tensión máxima que la cuerda resiste:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{T_{\max} r}{m}} = \sqrt{\frac{(50.0 \text{ N})(1.50 \text{ m})}{0.500 \text{ kg}}} = 12.2 \text{ m/s}$$

Finalizar La ecuación 1) muestra que v aumenta con T y disminuye con m más grande, como se espera de nuestra conceptualización del problema.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que el disco gira en un círculo de mayor radio a la misma rapidez v . ¿Es más o menos probable que la cuerda se rompa?

Respuesta El radio más grande significa que el cambio en la dirección del vector velocidad será más pequeño en un intervalo de tiempo dado. Por ende, la aceleración es más pequeña y la tensión requerida en la cuerda es más pequeña. Como resultado, es menos probable que la cuerda se rompa cuando el disco viaja en un círculo de radio más grande.

Ejemplo 6.3 ¿Cuál es la máxima rapidez del automóvil?

Un automóvil de 1 500 kg, se traslada sobre una curva, plana horizontal como se muestra en la figura 6.4a. Si el radio de la curva es 35.0 m y el coeficiente de fricción estática entre las llantas y el pavimento seco es 0.523, encuentre la rapidez máxima que puede tener el automóvil para dar la vuelta exitosamente.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que la autopista curva es parte de un gran círculo, de modo que el automóvil viaja en una trayectoria circular.

Categorizar Respecto a la etapa conceptualizar del problema, se modela al automóvil como una *partícula en movimiento circular uniforme* en la dirección horizontal. El automóvil no acelera verticalmente, de modo que se modela como una *partícula en equilibrio* en la dirección vertical.

Analizar La vista trasera en la figura 6.4b muestra las fuerzas sobre el automóvil. La fuerza que le permite al automóvil permanecer en su trayectoria circular es la fuerza de fricción estática. (Ésta es *estática* porque no hay deslizamiento en el punto de contacto entre el camino y las llantas. Si esta fuerza de fricción estática fuese cero, por ejemplo, si el automóvil estuviese sobre un camino congelado, el automóvil continuaría en una línea recta y se deslizaría hasta salir del camino.) La rapidez máxima v_{\max} que puede tener el automóvil alrededor de la curva es la rapidez con la que está a punto de derrapar hacia afuera. En este punto, la fuerza de fricción tiene su valor máximo $f_{s, \max} = \mu_s n$.

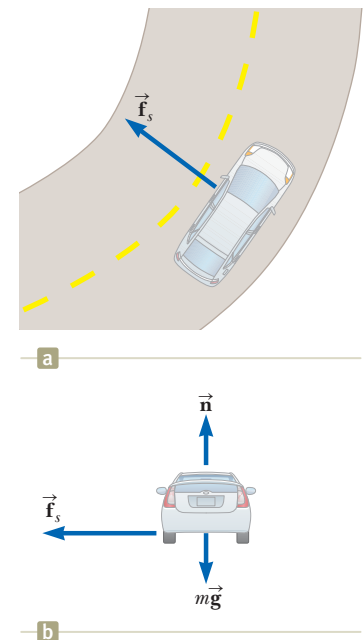


Figura 6.4 (Ejemplo 6.3) (a) La fuerza de fricción estática dirigida hacia el centro de la curva mantiene al automóvil en movimiento en una trayectoria circular. (b) Fuerzas que actúan sobre el automóvil.

6.3 continuación

Aplique la ecuación 6.1 del modelo de una partícula en movimiento circular uniforme en la dirección radial para la condición de rapidez máxima:

$$(1) f_{s,\text{máx}} = \mu_s n = m \frac{v_{\text{máx}}^2}{r}$$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio al automóvil en la dirección vertical:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow n - mg = 0 \rightarrow n = mg$$

Resuelva la ecuación 1) para la rapidez máxima y sustituya para n :

$$(2) v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{\mu_s n r}{m}} = \sqrt{\frac{\mu_s m g r}{m}} = \sqrt{\mu_s g r}$$

Sustituya valores numéricos:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{(0.523)(9.80 \text{ m/s}^2)(35.0 \text{ m})} = 13.4 \text{ m/s}$$

Finalizar Esta rapidez es equivalente a 30.0 mi/h. Por tanto, este camino podría beneficiarse enormemente de cierto peralte, ¡como en el ejemplo siguiente! Note que la rapidez máxima no depende de la masa del automóvil, razón por la cual las autopistas curvas no requieren múltiples límites de rapidez para cubrir las varias masas de los vehículos que usan el camino.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que un automóvil viaja por esta curva en un día húmedo y comienza a derrapar en la curva cuando su rapidez llega sólo a 8.00 m/s. ¿Qué se puede decir acerca del coeficiente de fricción estática en este caso?

Respuesta El coeficiente de fricción estática entre las llantas y el camino húmedo debe ser menor que el existente entre las llantas y un camino seco. Esta expectativa concuerda con la experiencia de conducir, porque un derrape es más probable en un camino húmedo que en un camino seco.

Para comprobar nuestra suposición, se puede resolver la ecuación 2) para el coeficiente de fricción estática:

$$\mu_s = \frac{v_{\text{máx}}^2}{g r}$$

Al sustituir los valores numéricos se obtiene

$$\mu_s = \frac{v_{\text{máx}}^2}{g r} = \frac{(8.00 \text{ m/s})^2}{(9.80 \text{ m/s}^2)(35.0 \text{ m})} = 0.187$$

que de hecho es más pequeño que el coeficiente de 0.523 para el camino seco.

Ejemplo 6.4 La autopista peraltada

Usted es un ingeniero civil a quien se le ha asignado la tarea de rediseñar la curva de la autopista del ejemplo 6.3 de tal forma que un automóvil no tenga que depender de la fricción para circular la curva sin derrapar. En otras palabras, un automóvil que viaja a la rapidez diseñada puede superar la curva incluso cuando el camino esté cubierto con hielo. Dicha rampa normalmente está *peraltada*, lo que significa que la carretera está inclinada hacia el interior de la curva. Suponga que la rapidez diseñada para la rampa es 13.4 m/s (30.0 mi/h) y el radio de la curva es 35.0 m. Necesita determinar el ángulo en el cual la carretera en la curva debe ser peraltada.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La diferencia entre este ejemplo y el ejemplo 6.3 es que el automóvil ya no se mueve en una carretera plana. La figura 6.5 muestra la carretera peraltada, con el centro de la trayectoria circular del automóvil a la izquierda de la figura. Observe que la componente horizontal de la fuerza normal participa en la generación de la aceleración centrípeta del automóvil.

Categorizar Como en el ejemplo 6.3, el automóvil se modela como una *partícula en equilibrio* en la dirección vertical y una *partícula en movimiento circular uniforme* en la dirección horizontal.

Analizar En un camino a nivel (sin peralte), la fuerza que causa la aceleración centrípeta es la fuerza de fricción estática entre las llantas del automóvil y el camino, como se vio en el ejemplo anterior.

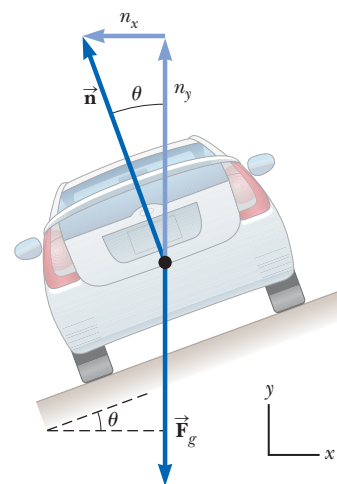


Figura 6.5 (Ejemplo 6.4) Un automóvil que recorre una curva sobre un camino peraltado a un ángulo θ con la horizontal. Cuando la fricción es despreciable, la fuerza que causa la aceleración centrípeta y mantiene al automóvil en movimiento en su trayectoria circular es la componente horizontal de la fuerza normal.

continúa

6.4 continuación

Sin embargo, si el camino está peraltado en un ángulo θ , como en la figura 6.5, la fuerza normal \vec{n} tiene una componente horizontal hacia el centro de la curva. Puesto que la rampa se diseña de modo que la fuerza de fricción estática sea cero, sólo la componente $n_x = n \sin \theta$ causa la aceleración centrípeta.

Escriba la segunda ley de Newton para el automóvil en la dirección radial, que es la dirección $-x$:

$$(1) \sum F_r = n \sin \theta = \frac{mv^2}{r}$$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio al automóvil en la dirección vertical:

$$\sum F_y = n \cos \theta - mg = 0$$

Divida la ecuación 1) entre la ecuación 2):

$$(2) n \cos \theta = mg$$

$$(3) \tan \theta = \frac{v^2}{rg}$$

Resuelva para el ángulo θ y sustituya los valores numéricos:

$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{(13.4 \text{ m/s})^2}{(35.0 \text{ m})(9.80 \text{ m/s}^2)} \right] = 27.6^\circ$$

Finalizar La ecuación 3) muestra que el ángulo de peralte es independiente de la masa del vehículo que entra a la curva. Si un automóvil recorre la curva con una rapidez menor que 13.4 m/s, la fuerza centrípeta disminuye. Por tanto la fuerza normal que no ha cambiado, es suficiente para ocasionar *dos* aceleraciones: la aceleración centrípeta que es menor y la aceleración hacia abajo debida a la inclinación de la carretera. En consecuencia se necesita una fuerza de fricción adicional para evitar que se deslice por el peralte (hacia la izquierda en la figura 6.5). Un conductor que intente superar la curva a una rapidez mayor que 13.4 m/s tiene que depender de la fricción para evitar que derrape afuera del peralte (hacia la derecha en la figura 6.5). Véase el problema 41 para un análisis de esta situación.

¿QUÉ PASARÍA SI? Imagine que en el futuro esta misma carretera se construye en Marte para conectar diferentes centros coloniales. ¿Es posible recorrerla con la misma rapidez?

Respuesta La reducida fuerza gravitacional de Marte significaría que el automóvil no presiona tan fuertemente a la carretera. La reducida fuerza normal da como resultado una componente más pequeña de la fuerza normal hacia el centro del círculo. Esta componente más pequeña no sería suficiente para proporcionar la aceleración centrípeta asociada con la rapidez original. La aceleración centrípeta se debe reducir, lo que se logra al reducir la rapidez v .

En términos matemáticos, advierta que la ecuación (3) muestra que la rapidez v es proporcional a la raíz cuadrada de g para una carretera de radio fijo r peraltada en un ángulo fijo θ . Por tanto, si g es más pequeña, como lo es en Marte, la rapidez v con que la autopista se puede recorrer con seguridad también es más pequeña.

Ejemplo 6.5 Viajar en la rueda de la fortuna

Un niño de masa m se sube en una rueda de la fortuna como se muestra en la figura 6.6a. El niño se mueve en un círculo vertical de radio 10.0 m rapidez constante de 3.00 m/s.

(A) Determine la fuerza ejercida por el asiento del niño en la parte inferior de la rueda. Expresé su respuesta en términos del peso del niño, mg .

SOLUCIÓN

Conceptualizar Observe con atención la figura 6.6a. En función de sus experiencias con ruedas de la fortuna o conduciendo sobre pequeñas colinas en un camino, usted esperaría sentirse más ligero en la parte superior de la trayectoria. Del mismo modo, esperaría sentir más pesado en la parte inferior de la trayectoria. Tanto en la parte inferior de la trayectoria como en la parte superior, las fuerzas gravitacionales y normales en el niño actúan en direcciones *opuestas*. La suma vectorial de estas dos fuerzas da una fuerza de magnitud constante que mantiene al niño moviéndose en una trayectoria circular a una rapidez constante. Para producir una fuerza neta vectorial con la misma magnitud, la fuerza normal en la parte inferior debe ser mayor que en la parte superior.

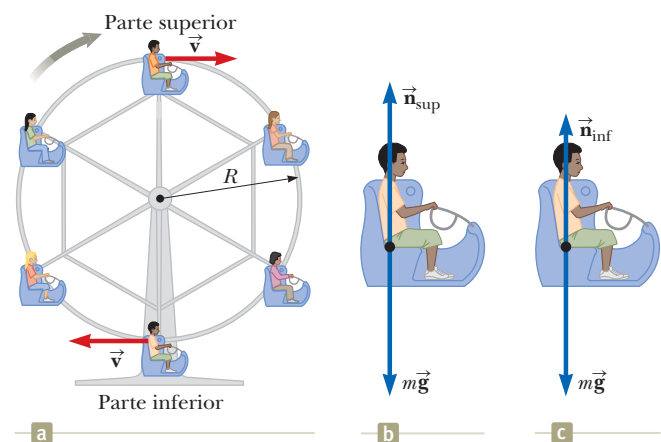


Figura 6.6 (Ejemplo 6.5) (a) Un niño pasea en una rueda de la fortuna. (b) Fuerzas que actúan sobre el niño en la parte inferior de la trayectoria. (c) Fuerzas que actúan sobre el niño en la parte superior de la trayectoria.

6.5 continuación

Categorizar Debido a que la rapidez del niño es constante, podemos clasificar este problema como uno que implica una *partícula* (el niño) en *movimiento circular uniforme*, complicado por la fuerza gravitacional que actúa en todo momento sobre el niño.

Analizar Dibujamos un diagrama de fuerzas que actúan sobre el niño en la parte inferior de la rueda, como se muestra en la figura 6.6b. Las únicas fuerzas que actúan sobre él son la fuerza gravitacional $\vec{F}_g = m\vec{g}$ hacia abajo y la fuerza hacia arriba \vec{n}_{inf} ejercida por el asiento. La fuerza neta hacia arriba sobre el niño que proporciona su aceleración centrípeta tiene una magnitud $n_{\text{inf}} - mg$.

Usando el modelo de partícula en movimiento circular uniforme, aplique la segunda ley de Newton al niño en la dirección radial cuando está en la parte inferior de la rueda:

$$\sum F = n_{\text{inf}} - mg = m \frac{v^2}{r}$$

Resuelva para la fuerza ejercida por el asiento sobre el niño:

$$n_{\text{inf}} = mg + m \frac{v^2}{r} = mg \left(1 + \frac{v^2}{rg} \right)$$

Sustituya los valores numéricos dados para la rapidez y el radio

$$\begin{aligned} n_{\text{inf}} &= mg \left[1 + \frac{(3.00 \text{ m/s})^2}{(10.0 \text{ m})(9.80 \text{ m/s}^2)} \right] \\ &= 1.09 mg \end{aligned}$$

Por tanto, la magnitud de la fuerza \vec{n}_{inf} que ejerce el asiento sobre el niño es *mayor* que el peso del niño por un factor de 1.09. De este modo, el niño experimenta un peso aparente que es mayor que su peso verdadero en un factor de 1.09.

(B) Determine la fuerza que ejerce el asiento sobre el niño en la parte superior de la rueda.

SOLUCIÓN

Analizar En la figura 6.6c se muestra el diagrama de fuerzas que actúan sobre el niño en la parte superior de la rueda. La fuerza neta hacia abajo que proporciona la aceleración centrípeta tiene una magnitud de $mg - n_{\text{sup}}$.

Aplique la segunda ley de Newton al niño en esta posición:

$$\sum F = mg - n_{\text{sup}} = m \frac{v^2}{r}$$

Se resuelve para la fuerza ejercida por el asiento sobre el niño:

$$n_{\text{sup}} = mg - m \frac{v^2}{r} = mg \left(1 - \frac{v^2}{rg} \right)$$

Sustituya los valores numéricos:

$$\begin{aligned} n_{\text{sup}} &= mg \left[1 - \frac{(3.00 \text{ m/s})^2}{(10.0 \text{ m})(9.80 \text{ m/s}^2)} \right] \\ &= 0.908 mg \end{aligned}$$

En este caso, la magnitud de la fuerza que ejerce el asiento sobre el niño es *menor* que su verdadero peso en un factor de 0.908, y el niño se siente más ligero.

Finalizar Las variaciones en la fuerza normal son coherentes con la predicción en la etapa conceptualizar del problema.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que a causa de un defecto en el mecanismo de la rueda de la fortuna la rapidez del niño aumenta a 10.0 m/s. En este caso ¿qué experimenta el niño en la parte superior de la rueda?

Respuesta Si el cálculo anterior se realiza con $v = 10.0$ m/s, la magnitud de la fuerza normal en la parte superior de la rueda es negativa, lo cual es imposible. Interpretamos que la aceleración centrípeta que requiere el niño es más grande debida a la gravedad. Como resultado, el niño perderá contacto con el asiento y sólo se quedará en su trayectoria circular si hay una barra de seguridad o un cinturón de seguridad que proporcione una fuerza hacia abajo sobre él para mantenerlo en su asiento. En la parte inferior de la rueda, la fuerza normal es de 2.02 mg , que sería incómoda.

6.2 Movimiento circular no uniforme

En el capítulo 4 se encontró que, si una partícula se mueve con rapidez variable en una trayectoria circular, existe, además de la componente radial de aceleración, una componente tangencial que tiene magnitud $|dv/dt|$. En consecuencia, la fuerza que actúa sobre la

La fuerza neta que se ejerce sobre la partícula en este caso es la suma vectorial de la fuerza radial y la fuerza tangencial

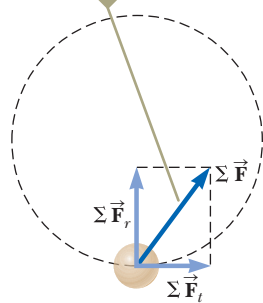


Figura 6.7 Cuando la fuerza neta que actúa sobre una partícula móvil en una trayectoria circular tiene una componente tangencial ΣF_t , la rapidez de la partícula cambia.

partícula también debe tener una componente tangencial y radial. Ya que la aceleración total es $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$, la fuerza total que se ejerce sobre la partícula es $\Sigma \vec{F} = \Sigma \vec{F}_r + \Sigma \vec{F}_t$, como se muestra en la figura 6.7. (Las fuerzas radial y tangencial se expresan como fuerzas netas con la notación de suma porque cada fuerza podría consistir en múltiples fuerzas que se combinan.) El vector $\Sigma \vec{F}_r$ está dirigido hacia el centro del círculo y es responsable de la aceleración centrípeta. El vector $\Sigma \vec{F}_t$ tangente al círculo es responsable de la aceleración tangencial, que representa un cambio en la rapidez de la partícula con el tiempo.

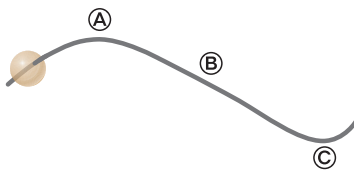


Figura 6.8 (Examen rápido 6.2) Una cuenta se desliza a lo largo de un alambre curvo.

E XAMEN RÁPIDO 6.2 Una cuenta se desliza libremente, con rapidez constante, a lo largo de un alambre curvo que se encuentra sobre una superficie horizontal, como se muestra en la figura 6.8. (a) Dibuje los vectores que representan la fuerza que ejerce el alambre sobre la cuenta en los puntos A, B y C. (b) Suponga que la cuenta de la figura 6.8 aumenta de rapidez con aceleración tangencial constante mientras se mueve hacia la derecha. Dibuje los vectores que representan la fuerza sobre la cuenta en los puntos A, B y C.

Ejemplo 6.6 Mantenga su mirada en la bola

Una pequeña esfera de masa m se une al extremo de una cuerda de longitud R y se pone en movimiento en un círculo vertical en torno a un punto fijo O , como se ilustra en la figura 6.9. Determine la aceleración tangencial de la esfera y la tensión en la cuerda en cualquier instante cuando la rapidez de la esfera sea v y la cuerda forme un ángulo θ con la vertical.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Compare el movimiento de la esfera en la figura 6.9 con el del niño en la figura 6.6a asociado con el ejemplo 6.5. Ambos objetos viajan en una trayectoria circular. Sin embargo, la rapidez de la esfera *no* es uniforme en este ejemplo porque, en la mayoría de los puntos a lo largo de la trayectoria, surge una componente tangencial de aceleración debido a la fuerza gravitacional que se ejerce sobre la esfera.

Categorizar La esfera se modela como una *partícula bajo una fuerza neta* y moviéndose en una trayectoria circular, pero *no* es una partícula en movimiento circular *uniforme*. Es necesario usar las técnicas contenidas en esta sección acerca del movimiento circular no uniforme.

Analizar A partir del diagrama de cuerpo libre en la figura 6.9, se ve que las únicas fuerzas que actúan sobre la esfera son la fuerza gravitacional $\vec{F}_g = m\vec{g}$ ejercida por la tierra y la fuerza \vec{T} ejercida por la cuerda. Descomponemos \vec{F}_g en una componente tangencial $mg \sin \theta$ y un componente radial $mg \cos \theta$.

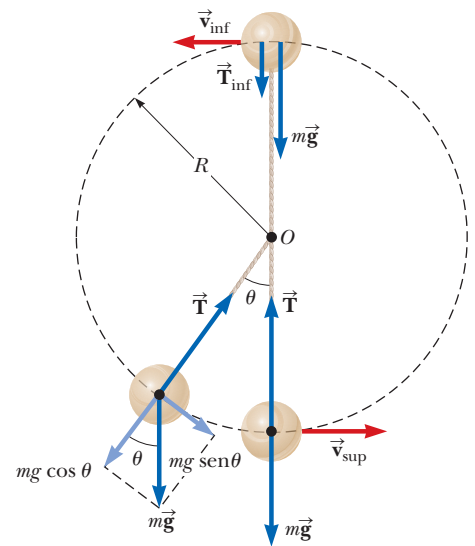


Figura 6.9 (Ejemplo 6.6) Las fuerzas que actúan sobre una esfera de masa m conectada a una cuerda de longitud R y que gira en un círculo vertical centrado en O . Se muestran las fuerzas que actúan sobre la esfera en la parte superior e inferior del círculo y en una posición arbitraria.

6.6 continuación

Del modelo de partícula bajo una fuerza neta, aplique la segunda ley de Newton a la esfera en la dirección tangencial:

$$\sum F_t = mg \sen \theta = ma_t$$

$$a_t = g \sen \theta$$

Aplique la segunda ley de Newton a la esfera en la dirección tangencial, en la dirección radial, observando que tanto \vec{T} como \vec{a}_r están dirigidos hacia O . Como se señaló en la sección 4.5, podemos usar la ecuación 4.21 para la aceleración centrípeta de una partícula incluso cuando se mueve en una trayectoria circular en movimiento no uniforme:

$$\sum F_r = T - mg \cos \theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$T = mg \left(\frac{v^2}{Rg} + \cos \theta \right)$$

Finalizar Evalúe este resultado en las partes superior e inferior de la trayectoria circular (figura 6.9):

$$T_{\text{sup}} = mg \left(\frac{v_{\text{sup}}^2}{Rg} - 1 \right) \quad T_{\text{inf}} = mg \left(\frac{v_{\text{inf}}^2}{Rg} + 1 \right)$$

Estos resultados tienen la misma forma matemática que las fuerzas normales n_{sup} y n_{inf} en el niño del ejemplo 6.5, que es consistente con la fuerza normal sobre el niño, que juega el mismo papel físico en el ejemplo 6.5 que la tensión en la cuerda juega en este ejemplo. No obstante, considere que la fuerza normal \vec{n} en el niño del ejemplo 6.5 está siempre dirigida hacia arriba, mientras que la fuerza T en este ejemplo cambia de dirección porque siempre debe apuntar hacia adentro a lo largo de la cuerda. También observe que v en las expresiones anteriores varía para diferentes posiciones de la esfera, como se indica mediante los subíndices, mientras que v en el ejemplo 6.5 es constante.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si la bola se pone en movimiento con una rapidez menor?

(A) ¿Qué rapidez tendría la bola mientras pasa sobre la parte superior del círculo si la tensión en la cuerda tiende a cero instantáneamente en este punto

Respuesta Sea la tensión igual a cero en la expresión para T_{sup} :

$$0 = mg \left(\frac{v_{\text{sup}}^2}{Rg} - 1 \right) \rightarrow v_{\text{sup}} = \sqrt{gR}$$

(B) ¿Qué sucedería si la bola se pone en movimiento de modo que la rapidez en la parte superior sea menor que este valor? ¿Qué ocurre?

Respuesta En este caso, la bola nunca llega a la parte superior del círculo. En algún punto en el camino hacia arriba, la tensión en la cuerda tiende a cero y la bola se convierte en un proyectil. Sigue un segmento de una trayectoria parabólica, con su pico debajo de la posición más alta de la esfera que se muestra en la figura 6.9, y se vuelve a incorporar a la trayectoria circular en el otro lado cuando la tensión se vuelve distinta de cero nuevamente.

6.3 Movimiento en marcos acelerados

Las leyes de movimiento de Newton, que se presentaron en el capítulo 5, describen observaciones que se realizan en un marco de referencia inercial. En esta sección se analiza cómo son aplicadas las leyes de Newton por un observador en un marco de referencia inercial, es decir, en uno que acelera. Por ejemplo, recuerde la explicación de la mesa de hockey de aire en un tren en la sección 5.2. El tren moviéndose con velocidad constante representa un marco inercial. Un observador en el tren ve que el disco en reposo permanece en reposo, y parece obedecer la primera ley de Newton. El tren acelerado no es un marco inercial. De acuerdo con usted, como el observador en este tren, parece no haber fuerza sobre el disco, y sin embargo acelera desde el reposo hacia la parte trasera del tren, lo que parece violar la primera ley de Newton. Esta es una propiedad general de las observaciones realizadas en marcos no inerciales: parece haber aceleraciones no explicadas de los objetos que no están “amarrados” al marco. Desde luego, la primera ley de Newton no se viola. Sólo parece violarse debido a las observaciones hechas en un marco no inercial.

En el tren que acelera, mientras observa al disco acelerar hacia la parte trasera del tren, puede concluir, respecto a su creencia en la segunda ley de Newton, que una fuerza actuó





Figura 6.10 (a) Un automóvil se aproxima a una rampa de salida curva. ¿Qué hace que una pasajera en el asiento de adelante se mueva hacia la puerta derecha? (b) Desde el marco de referencia de la pasajera. (c) En relación con el marco de referencia de la Tierra.

sobre el disco para hacerlo acelerar. A una fuerza aparente como ésta se le llama **fuerza ficticia** porque no es real y se debe solo a las observaciones hechas en un marco de referencia acelerado. Una fuerza ficticia parece actuar sobre un objeto de la misma manera que una fuerza real. Sin embargo, las fuerzas reales siempre interactúan entre dos objetos, y usted no puede identificar un segundo objeto para una fuerza ficticia. (¿Cuál segundo objeto interactúa con el disco para hacerlo acelerar?) En general, las fuerzas ficticias simples parecen actuar en la dirección *opuesta* a la de la aceleración del marco no inercial. Por ejemplo, el tren acelera hacia delante y parece que hay una fuerza ficticia, haciendo que el disco se deslice hacia la parte trasera del tren.

El ejemplo del tren describe una fuerza ficticia debido a un cambio en la rapidez del tren. Otra fuerza ficticia se debe al cambio en la *dirección* del vector velocidad. Para comprender el movimiento de un sistema que no es inercial debido a un cambio en dirección, examine un automóvil que viaja a lo largo de una autopista con gran rapidez y se aproxima a una rampa de salida curva, como se muestra en la figura 6.10a. A medida que el automóvil toma la cerrada curva izquierda en la rampa, una persona que se sienta en el lado del copiloto se desliza hacia la derecha y pega en la puerta. En dicho punto la fuerza que ejerce la puerta sobre la copiloto evita que salga expulsada del automóvil. ¿Qué la impulsa hacia la puerta? Una explicación popular, pero incorrecta, es que una fuerza que actúa hacia la derecha en la figura 6.10b la empuja hacia afuera desde el centro de la trayectoria circular. Aunque con frecuencia se le llama “fuerza centrífuga”, es una fuerza ficticia. El automóvil representa un marco de referencia no inercial que tiene una aceleración centrípeta hacia el centro de su trayectoria circular. Como resultado, la pasajera siente una fuerza aparente que está dirigida hacia afuera desde el centro de la trayectoria circular, o hacia la derecha en la figura 6.10b, en dirección opuesta a la de la aceleración.

Examinemos este fenómeno en términos de las leyes de Newton. Antes de que el automóvil entre a la rampa, la pasajera se está moviendo en una trayectoria en línea recta. A medida que el automóvil entra a la rampa y recorre una trayectoria curva, la pasajera tiende a moverse a lo largo de la trayectoria recta original, lo que está en concordancia con la primera ley de Newton: la tendencia natural de un objeto es continuar moviéndose en una línea recta. No obstante, si una fuerza suficientemente grande (hacia el centro de curvatura) actúa sobre ella, como en la figura 6.10c, ella se mueve en una trayectoria curva junto con el automóvil. Esta es la fuerza de fricción entre ella y el asiento del automóvil. Si esta fuerza de fricción no es suficientemente grande, el asiento sigue una trayectoria curva mientras la pasajera continúa en la trayectoria en línea recta del automóvil antes de que el automóvil comience a girar. Por tanto, desde el punto de vista de un observador en el automóvil, la pasajera se desliza hacia la derecha en relación con el asiento. Al final, ella encuentra la puerta, que proporciona una fuerza suficientemente grande para permitirle seguir la misma trayectoria curva que el automóvil. Ella se desliza hacia la puerta no a causa de una fuerza exterior sino porque la fuerza de fricción no es suficientemente grande para permitirle viajar a lo largo de la trayectoria circular seguida por el automóvil.

Otra interesante fuerza ficticia es la “fuerza de Coriolis”. Es una fuerza aparente causada al cambiar la posición radial de un objeto en un sistema coordenado en rotación.

Por ejemplo, suponga que usted y un amigo están en lados opuestos de una plataforma circular giratoria y decide lanzar una bola de béisbol a su amigo. La figura 6.11a representa lo que un observador vería si contempla la bola mientras está parado en reposo sobre la plataforma giratoria. De acuerdo con este observador, quien está en un marco inercial, la bola sigue una línea recta de acuerdo con la primera ley de Newton. En $t = 0$ usted lanza la bola hacia su amigo, pero en el tiempo t_f cuando la bola cruza la plataforma, su amigo se movió a una posición nueva. Sin embargo, ahora considere la situación desde el punto de vista de su amigo. Su amigo está en un marco de referencia no inercial porque experimenta una aceleración centrípeta en relación con el marco inercial de la superficie de la Tierra. Comienza a ver la bola que se aproxima hacia él pero, conforme cruza la plataforma, vira a un lado como se muestra en la figura 6.11b. Por tanto, su amigo en la plataforma giratoria afirma que la bola no obedece la primera ley de Newton y dice que una fuerza lateral es la causante de que la bola siga una trayectoria curva. Esta fuerza ficticia se llama fuerza de Coriolis.

Las fuerzas ficticias pueden no ser fuerzas reales, pero tienen efectos reales. Un objeto en el tablero de su automóvil *realmente* se desliza si usted pisa el acelerador de su vehículo. Mientras viaja en un carrusel, siente que lo empujan hacia afuera como si se debiese a la

Para el tiempo t_f en que la bola llega al otro lado de la plataforma, su amigo ya no está para atraparla. De acuerdo con este observador, la bola sigue una trayectoria rectilínea, consistente con las leyes de Newton.

Desde el punto de vista de su amigo, la bola se desvía hacia un lado durante su vuelo. Su amigo introduce una fuerza ficticia para explicar esta desviación de la trayectoria esperada.

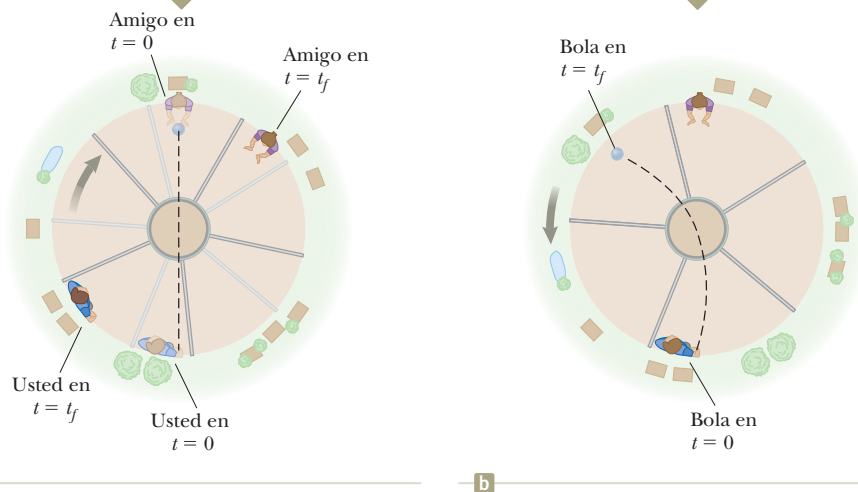


Figura 6.11 Usted y su amigo se sientan en el borde de una plataforma giratoria. En el tiempo $t = 0$ lanza la bola en la dirección de su amigo. (a) Vista superior que observa alguien en un marco de referencia inercial unido a la Tierra. La Tierra aparece estacionaria y la plataforma gira en sentido de las agujas del reloj. (b) Vista superior observada por alguien en un marco de referencia inercial unido a la plataforma. La plataforma aparece inmóvil, y la Tierra gira en sentido contrario a las agujas del reloj.

ficticia “fuerza centrífuga”. Es probable que usted caiga y se lesione debido a la fuerza de Coriolis si camina a lo largo de una línea radial mientras un carrusel gira. (Uno de los autores lo hizo y sufrió separación de ligamentos en las costillas cuando cayó.) La fuerza de Coriolis debida a la rotación de la Tierra es responsable de los giros de los huracanes y de las corrientes oceánicas a gran escala.

- EJEMPLO RÁPIDO 6.3** Considere que la pasajera en el automóvil da vuelta a la izquierda en la figura 6.10. ¿Cuál de las siguientes opciones es correcta en relación con las fuerzas en la dirección horizontal si ella hace contacto con la puerta derecha?
- (a) La pasajera está en equilibrio entre fuerzas reales que actúan hacia la derecha y fuerzas reales que actúan hacia la izquierda.
 - (b) La pasajera está expuesta sólo a fuerzas reales que actúan hacia la derecha.
 - (c) La pasajera está dependiente sólo a fuerzas reales que actúan hacia la izquierda.
 - (d) Ninguno de estos enunciados es verdadero.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 6.2

Fuerza centrífuga “Fuerza centrífuga” es un concepto comúnmente escuchado, que se describe como una fuerza que jala hacia afuera sobre un objeto móvil en una trayectoria circular. Si usted siente una “fuerza centrífuga” cuando está en un carrusel, ¿cuál es el otro objeto con el que interactúa? No es capaz de identificar otro objeto porque es una fuerza ficticia que ocurre debido a que usted está en un marco de referencia no inercial.

Ejemplo 6.7 Fuerzas ficticias en movimiento circular

Considere el experimento descrito en el “Imagine”: usted está en el juego de La fiesta del té loco y sosteniendo su smartphone colgando de una cuerda. Ahora supongamos que su amigo se encuentra en tierra firme al lado del juego mirándole. Usted sostiene el extremo superior de la cuerda por encima de un punto cerca del borde exterior de la taza de té que gira. Tanto el observador inercial (su amigo) como el observador no inercial (usted) concuerdan en que la cuerda hace un ángulo θ con respecto a la vertical. Usted afirma que una fuerza, que sabemos que es ficticia, causa la desviación observada de la cuerda de la vertical. ¿Cómo es la magnitud de esta fuerza relacionada con la aceleración centrípeta del smartphone medido por el observador inercial?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Sitúese en el papel de cada uno de los dos observadores. El observador inercial en el suelo sabe que el smartphone tiene una aceleración centrípeta y que la desviación de la cuerda está relacionada con esta aceleración. Como observador no inercial en la taza de té, Imagine que usted ignora cualquier efecto del giro de la taza de té, por lo que no tienen conocimiento de cualquier aceleración centrípeta. Debido a que no es consciente de esta aceleración, afirma que una fuerza está empujando lateralmente al smartphone la que causa la desviación de la cuerda de la vertical. Para hacer la conceptualización más real, intente correr desde el reposo mientras que sostiene un objeto colgante con una cuerda y observe que la cuerda hace un ángulo con la vertical mientras usted está acelerando, como si una fuerza estuviera empujando el objeto hacia atrás.

6.7 continuación

Categorizar Para el observador inercial, modelamos al smartphone como una *partícula bajo una fuerza neta* en la dirección horizontal y una *partícula en equilibrio* en la dirección vertical. Para el observador no inercial, el smartphone se modela como una *partícula en equilibrio* en ambas direcciones.

Analizar La geometría para el smartphone giratorio y colgante será similar a la indicada para la bola en la figura 6.3 b. De acuerdo con el observador inercial en reposo, las fuerzas sobre el smartphone son la fuerza \vec{T} ejercida por la cuerda y la fuerza de gravedad. El observador inercial concluye que la aceleración centrípeta del smartphone es proporcionada por la componente horizontal de \vec{T} .

Para este observador, aplique los modelos de partícula bajo una fuerza neta y de partícula en equilibrio:

$$\text{Observador inercial} \begin{cases} (1) \sum F_x = T \sin \theta = ma_c \\ (2) \sum F_y = T \cos \theta - mg = 0 \end{cases}$$

De acuerdo con el observador no inercial al estar en la taza de té, la cuerda también hace un ángulo θ con la vertical; sin embargo, para ese observador, el smartphone está en reposo por lo que su aceleración es cero. Por tanto, el observador no inercial introduce una fuerza (que sabemos que es ficticia) en la dirección horizontal para equilibrar la componente horizontal de \vec{T} y afirma que la fuerza neta en el smartphone es cero.

Al aplicar el modelo de la partícula en equilibrio para este observador en ambas direcciones:

$$\text{Observador no inercial} \begin{cases} \sum F'_x = T \sin \theta - F_{\text{ficticia}} = 0 \\ \sum F'_y = T \cos \theta - mg = 0 \end{cases}$$

Estas expresiones son equivalentes a las ecuaciones (1) y (2) si $F_{\text{ficticia}} = ma_c$, donde a_c es la aceleración centrípeta del smartphone de acuerdo con el observador inercial.

Finalizar El ángulo de la cuerda dependerá de dónde se sostiene el extremo superior de la cuerda en relación con el centro de la taza de té. Por ejemplo, si la cuerda se mantiene directamente sobre el centro, el smartphone no se mueve en una trayectoria circular, no tiene aceleración centrípeta debido al movimiento de la taza de té, y la cuerda no se desviará de la vertical. (En la práctica, puede desviarse ligeramente debido a la rotación de los giradiscos en los que se coloca la taza de té.)

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que desea medir la aceleración centrípeta del smartphone a partir de sus observaciones. ¿Cómo podría hacerlo?

Respuesta Nuestra intuición nos dice que el ángulo θ que la cuerda hace con la vertical debe aumentar a medida que aumenta la aceleración. Resolviendo las ecuaciones (1) y (2) simultáneamente para a_c , encontramos que $a_c = g \tan \theta$. Por tanto, usted puede determinar la magnitud de la aceleración centrípeta del smartphone midiendo el ángulo θ y usando esa relación. Ya que la desviación de la cuerda con la vertical sirve como medida de aceleración, *un péndulo simple se puede utilizar como un acelerómetro.*

6.4 Movimiento en presencia de fuerzas resistivas

En el capítulo 5 se describió la fuerza de fricción cinética que se ejerce sobre un objeto que se mueve sobre alguna superficie. Se ignoró por completo cualquier interacción entre el objeto y el medio a través del que se mueve. Ahora considere el efecto de dicho medio, que puede ser o un líquido o un gas. El medio ejerce una **fuerza resistiva** \vec{R} sobre el objeto moviéndose a través de éste. Algunos ejemplos son la resistencia del aire asociada con los vehículos móviles (a veces llamado *arrastre de aire*) y las fuerzas viscosas que actúan sobre los objetos móviles a través de un líquido. La magnitud de \vec{R} depende de factores como la rapidez del objeto, y la dirección de \vec{R} siempre es opuesta a la dirección de movimiento del objeto en relación con el medio. Esta dirección puede o no estar en la dirección opuesta a la velocidad del objeto de acuerdo con el observador. Por ejemplo, si una canica cae en una botella de champú, la canica se mueve hacia abajo y la fuerza resistente es ascendente, resistiendo la caída de la canica. En cambio, imagine el momento en que no hay viento y está mirando una bandera colgada sin fuerza en un mástil. Cuando una brisa comienza a volar hacia la derecha, la bandera se mueve hacia la derecha. En este caso, la fuerza de arrastre en la bandera es el movimiento de aire que es hacia la derecha y el movimiento de la bandera en respuesta también es hacia la derecha, la *misma dirección* que la fuerza de arrastre. Como el aire se mueve hacia la derecha con respecto a la bandera, la bandera se mueve hacia la izquierda en relación con el aire. Por tanto, ¡la dirección de la fuerza de arrastre es opuesta a la dirección del movimiento de la bandera con respecto al aire!



La magnitud de la fuerza resistiva depende de la rapidez en una forma compleja y aquí sólo se consideran dos modelos simplificados. En el primer modelo se supone que la fuerza resistiva es proporcional a la rapidez del objeto móvil; este modelo es válido para objetos que caen lentamente a través de un líquido y para objetos muy pequeños, como las partículas de polvo, que se mueven a través del aire. En el segundo modelo, se supone una fuerza resistiva que es proporcional al cuadrado de la rapidez del objeto móvil; los objetos grandes, como un paracaidista móvil en caída libre a través del aire, experimenta tal fuerza.

Modelo 1: Fuerza resistiva proporcional a la velocidad del objeto

Si modelamos a la fuerza resistiva que actúa sobre un objeto móvil a través de un líquido o gas como proporcional a la velocidad del objeto, la fuerza resistiva se puede expresar como

$$\vec{\mathbf{R}} = -b\vec{\mathbf{v}} \quad (6.2)$$

donde b es una constante cuyo valor depende de las propiedades del medio y de la forma y dimensiones del objeto y $\vec{\mathbf{v}}$ es la velocidad del objeto en relación con el medio. El signo negativo indica que $\vec{\mathbf{R}}$ está en la dirección opuesta a $\vec{\mathbf{v}}$.

Considere una pequeña esfera de masa m que se libera desde el reposo en un líquido, como en la figura 6.12a. Si supone que las únicas fuerzas que actúan sobre la esfera son la fuerza resistiva $\vec{\mathbf{R}} = -b\vec{\mathbf{v}}$ y la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g$, describa su movimiento.¹ Modelamos a la esfera como una partícula bajo una fuerza neta. Al aplicar la segunda ley de Newton al movimiento vertical y elegir la dirección hacia abajo como positiva, se obtiene

$$\sum F_y = ma \rightarrow mg - bv = ma \quad (6.3)$$

donde la aceleración de la esfera es hacia abajo. Al resolver esta expresión para la aceleración dv/dt se obtiene

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v \quad (6.4)$$

Esta ecuación se llama *ecuación diferencial* y los métodos para resolverla pueden aún no serle familiares. No obstante, note que, inicialmente, cuando $v = 0$, la magnitud de la fuerza resistiva es también cero y la aceleración de la esfera es simplemente g . Conforme t aumenta, la magnitud de la fuerza resistiva aumenta y la aceleración disminuye. La

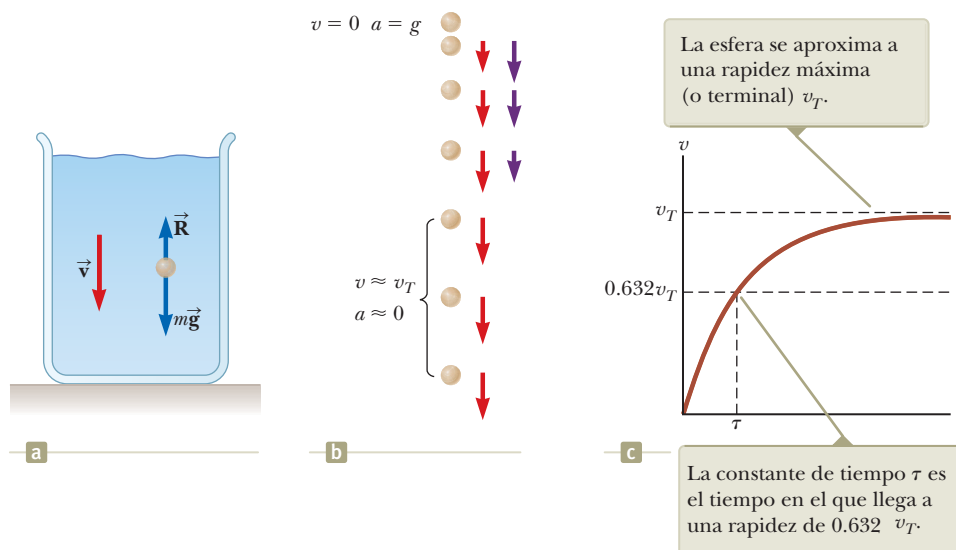


Figura 6.12 (a) Una pequeña esfera que cae a través de un líquido. (b) Diagrama de movimiento de la esfera mientras cae. Se muestran los vectores velocidad (rojo) y aceleración (violeta) para cada imagen después de la primera. (c) Gráfica rapidez-tiempo para la esfera.

¹Sobre un objeto sumergido también actúa una *fuerza de flotación*. Esta fuerza es constante y su magnitud es igual al peso del líquido desplazado. Esta fuerza se puede modelar por el cambio del peso aparente de la esfera por un factor constante, de modo que aquí se ignorará dicha fuerza. Las fuerzas de flotación se discuten en el capítulo 14.

Rapidez terminal ▶

aceleración tiende a cero cuando la magnitud de la fuerza resistiva se aproxima al peso de la esfera, por lo que la fuerza neta sobre la esfera es cero. En esta situación, la rapidez de la esfera tiende a su **rapidez terminal** v_T .

La rapidez terminal se obtiene de la ecuación 6.4 al hacer $dv/dt = 0$. Esto produce

$$0 = g - \frac{b}{m}v_T \quad \text{o} \quad v_T = \frac{mg}{b} \quad (6.5)$$

Debido a que aún puede no estar familiarizado con las ecuaciones diferenciales, no mostramos los detalles del proceso que da la expresión de v para todos los tiempos t . Si $v = 0$ en $t = 0$, esta expresión es

$$v = \frac{mg}{b}(1 - e^{-bt/m}) = v_T(1 - e^{-t/\tau}) \quad (6.6)$$

Esta función se grafica en la figura 6.12c. El símbolo e representa la base del logaritmo natural y también se llama *número de Euler*: $e = 2.718\ 28$. La **constante de tiempo** $\tau = m/b$ (letra griega tau) es el tiempo en el que la esfera liberada del reposo en $t = 0$ alcanza 63.2% de su rapidez terminal: cuando $t = \tau$, la ecuación 6.5 produce $v = 0.632v_T$. (El número 0.632 es $1 - e^{-1}$)

Se puede comprobar que la ecuación 6.6 es una solución de la ecuación 6.4 la derivada directa:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{mg}{b}(1 - e^{-bt/m}) \right] = \frac{mg}{b} \left(0 + \frac{b}{m} e^{-bt/m} \right) = g e^{-bt/m}$$

(Véase la tabla del apéndice B.4 para la derivada de e elevada a alguna potencia.) Este es el lado izquierdo de la ecuación 6.4. El lado derecho es

$$\begin{aligned} g - \frac{b}{m}v &= g - \frac{b}{m} \left[\frac{mg}{b}(1 - e^{-bt/m}) \right] \\ &= g e^{-bt/m} \end{aligned}$$

Debido a que los resultados de ambos lados de la ecuación 6.4 son iguales, la ecuación 6.6 representa una solución de la ecuación 6.4.

EJEMPLO 6.8 Esfera que cae en aceite

Una pequeña esfera de 2.00 g de masa se libera desde el reposo en un gran contenedor lleno con aceite, donde experimenta una fuerza resistiva proporcional a su rapidez. La esfera alcanza una rapidez terminal de 5.00 cm/s. Examine la constante de tiempo τ y el tiempo en el que la esfera alcanza 90.0% de su rapidez terminal.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Con la ayuda de la figura 6.12, imagine soltar la esfera en aceite y observarla hundirse hasta el fondo del contenedor. Si tiene algo de champú denso, suelte una canica en él y observe el movimiento de la canica.

Categorizar La esfera se modela como una *partícula bajo una fuerza neta*, con una de las fuerzas como fuerza resistiva que depende de la rapidez de la esfera. Este modelo conduce al resultado en la ecuación 6.5.

Analizar Con la ecuación 6.5, evalúe el coeficiente b :

$$b = \frac{mg}{v_T}$$

Evalúe la constante de tiempo τ :

$$\tau = \frac{m}{b} = m \left(\frac{v_T}{mg} \right) = \frac{v_T}{g}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\tau = \frac{5.00 \text{ cm/s}}{980 \text{ cm/s}^2} = 5.10 \times 10^{-3} \text{ s}$$



6.8 continúa

Encuentre el tiempo t en el que la esfera alcanza una rapidez de $0.900v_T$ al hacer $v = 0.900v_T$ en la ecuación 6.6 y resuelva para t :

$$0.900v_T = v_T(1 - e^{-t/\tau})$$

$$1 - e^{-t/\tau} = 0.900$$

$$e^{-t/\tau} = 0.100$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln(0.100) = -2.30$$

$$t = 2.30\tau = 2.30(5.10 \times 10^{-3} \text{ s}) = 11.7 \times 10^{-3} \text{ s}$$

$$= 11.7 \text{ ms}$$

Finalizar La esfera alcanza 90.0% de su rapidez terminal en un intervalo de tiempo muy breve. Además tiene que ver este comportamiento si realiza la actividad con la canica y el champú. Debido al corto intervalo de tiempo requerido para alcanzar la velocidad terminal, puede no haber notado el intervalo de tiempo en absoluto. La canica puede haber aparecido moviéndose inmediatamente a través del champú a una velocidad constante.

Modelo 2: Fuerza resistiva proporcional al cuadrado de la rapidez del objeto

Para objetos móviles con magnitudes de velocidad grandes a través del aire, como aviones, paracaidistas, automóviles y pelotas de béisbol, razonablemente la fuerza resistiva se representa con propiedad como proporcional al cuadrado de la rapidez. En estas situaciones, la magnitud de la fuerza resistiva se expresa como

$$R = \frac{1}{2}D\rho Av^2 \quad (6.7)$$

donde D es una cantidad empírica adimensional llamada *coeficiente de arrastre*, ρ es la densidad del aire y A es el área de la sección transversal del objeto móvil observado en un plano perpendicular a su velocidad. El coeficiente de arrastre tiene un valor casi de 0.5 para objetos esféricos, pero puede tener un valor tan grande como 2 para objetos con forma irregular.

Analice el movimiento de un objeto en caída libre expuesto a una fuerza resistiva del aire hacia arriba de magnitud $R = \frac{1}{2}D\rho Av^2$. Suponga que un objeto de masa m se libera desde el reposo. Como muestra la figura 6.13, el objeto experimenta dos fuerzas externas:² La fuerza gravitacional $\vec{F}_g = m\vec{g}$ y la fuerza resistiva hacia arriba \vec{R} . Por tanto, la magnitud de la fuerza neta es

$$\sum F = mg - \frac{1}{2}D\rho Av^2 \quad (6.8)$$

donde hemos tomado hacia abajo a la dirección vertical positiva. Modelando al objeto como una partícula bajo una fuerza neta, con la fuerza neta dada por la ecuación 6.8, encontramos que el objeto tiene una aceleración hacia abajo de magnitud

$$a = g - \left(\frac{D\rho A}{2m}\right)v^2 \quad (6.9)$$

Podemos calcular la rapidez terminal v_T al observar que cuando la fuerza gravitacional es equilibrada por la fuerza resistiva, la fuerza neta sobre el objeto es cero y por tanto su aceleración es cero. Haciendo $a = 0$ en la ecuación 6.9 da

$$0 = g - \left(\frac{D\rho A}{2m}\right)v_T^2$$

Así, resolviendo para v_T

$$v_T = \sqrt{\frac{2mg}{D\rho A}} \quad (6.10)$$

La tabla 6.1 (página 142) menciona las magnitudes de rapidez terminal de diferentes objetos que caen a través del aire.

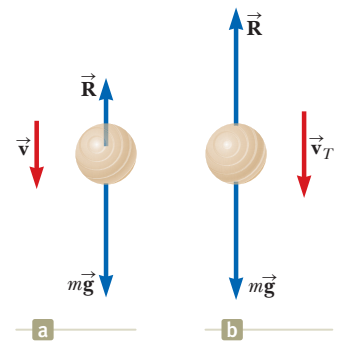


Figura 6.13 Un objeto que cae a través del aire experimenta una fuerza resistiva \vec{R} y una fuerza gravitacional $\vec{F}_g = m\vec{g}$. (b) El objeto alcanza una rapidez terminal cuando la fuerza neta que actúa sobre este es igual a cero, esto es, cuando $\vec{R} = -\vec{F}_g$ o $R = mg$.

²Como con el modelo 1, también hay una fuerza de flotación hacia arriba que se ignora.

TABLA 6.1 Rapidez terminal para varios objetos que caen a través del aire

Objeto	Masa (kg)	Área de sección transversal (m ²)	v_T (m/s)
Paracaidista	75	0.70	60
Pelota de béisbol (3.7 cm de radio)	0.145	4.2×10^{-3}	43
Pelota de golf (2.1 cm de radio)	0.046	1.4×10^{-3}	44
Granizo (0.50 cm de radio)	4.8×10^{-4}	7.9×10^{-5}	14
Gota de lluvia (0.20 cm de radio)	3.4×10^{-5}	1.3×10^{-5}	9.0

EJEMPLO RÁPIDO 6.4 Una pelota de béisbol y una de basquetbol, que tienen la misma masa, se dejan caer a través del aire desde el reposo, de modo que sus partes inferiores están inicialmente a la misma altura sobre el suelo, en el orden de 1 m o más. ¿Cuál golpea el suelo primero? (a) La pelota de béisbol golpea el suelo primero. (b) El balón de basquetbol golpea el suelo primero. (c) Ambas golpean el suelo al mismo tiempo.

Ejemplo conceptual 6.9 El skysurfer

Considere un *skysurfer* (figura 6.14) que salta desde un avión con los pies firmemente atados a su tabla de surf, hace algunos trucos y luego abre su paracaídas. Describa las fuerzas que actúan sobre él durante dichas maniobras.

SOLUCIÓN

Cuando el surfista sale del avión, no tiene velocidad vertical. La fuerza gravitacional hacia abajo hace que él y la tabla aceleren hacia el suelo. A medida que aumenta su rapidez hacia abajo, así lo hace la fuerza resistiva hacia arriba que ejerce el aire sobre su cuerpo y la tabla. Esta fuerza hacia arriba reduce su aceleración y por tanto su rapidez aumenta más lentamente. Al final, van tan rápido que la fuerza resistiva hacia arriba se iguala con la fuerza gravitacional hacia abajo. Ahora la fuerza neta es cero y ya no acelera, y en vez de ello llega a su rapidez terminal. En algún punto después de llegar a su rapidez terminal, abre su paracaídas, lo que resulta en un drástico aumento en la fuerza resistiva hacia arriba. La fuerza neta (y por tanto la aceleración) ahora es hacia arriba, en la dirección opuesta a la dirección de la velocidad. En consecuencia, la velocidad hacia abajo disminuye rápidamente, y la fuerza resistiva sobre el paracaídas también disminuye. Al final, la fuerza resistiva hacia arriba y la fuerza gravitacional hacia abajo se equilibran mutuamente y se alcanza una rapidez terminal mucho más pequeña, lo que permite un aterrizaje seguro.

(Contrario a la creencia popular, el vector velocidad de un paracaidista nunca apunta hacia arriba. Usted debe haber visto un video en el que un paracaidista parece un “cohetes” hacia arriba una vez que el paracaídas se abre. De hecho, lo que ocurre es que el paracaidista frena pero la persona que sostiene la cámara continúa cayendo a gran rapidez.)



Oliver Furrer/Jupiter Images

Figura 6.14 (Ejemplo conceptual 6.9) Un *skysurfer*.

Ejemplo 6.10 Fuerza resistiva ejercida sobre una pelota de béisbol

Un lanzador arroja una pelota de béisbol de 0.145 kg a un lado del bateador a 40.2 m/s (= 90 mi/h). Encuentre la fuerza resistiva que actúa sobre la pelota con esta rapidez.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Este ejemplo es diferente del anterior en que ahora el objeto se mueve horizontalmente a través del aire, en lugar de moverse de manera vertical bajo la influencia de la gravedad y la fuerza resistiva. La fuerza resistiva hace que la pelota disminuya su velocidad mientras la gravedad hace que su trayectoria se curve hacia abajo. La situación se simplifica al suponer que el vector velocidad es exactamente horizontal en el instante en que viaja a 40.2 m/s.

Categorizar En general, la *pelota es una partícula bajo una fuerza neta*. Sin embargo, ya que se considera sólo un instante de tiempo, no hay que preocuparse por la aceleración, de modo que el problema sólo implica encontrar el valor de una de las fuerzas.



6.10 continúa

Analizar Para determinar el coeficiente de arrastre D , imagine que suelta la pelota y la deja llegar a su rapidez terminal. Resuelva la ecuación 6.10 para D :

Use esta expresión para D en la ecuación 6.7 para encontrar una expresión para la magnitud de la fuerza resistiva:

Sustituya los valores apropiados, usando la rapidez terminal de la tabla 6.1:

$$D = \frac{2mg}{v_T^2 \rho A}$$

$$R = \frac{1}{2} D \rho A v^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{2mg}{v_T^2 \rho A} \right) \rho A v^2 = mg \left(\frac{v}{v_T} \right)^2$$

$$R = (0.145 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) \left(\frac{40.2 \text{ m/s}}{43 \text{ m/s}} \right)^2 = 1.2 \text{ N}$$

Finalizar La magnitud de la fuerza resistiva es similar en magnitud al peso de la pelota de béisbol, que es casi 1.4 N. Por tanto, la resistencia del aire desempeña un papel importante en el movimiento de la pelota, como se manifiesta por la variedad de curvas, “de bola alta”, “bola baja” y otras que lanzan los pitchers.

Resumen

► Conceptos y principios

Una partícula que se mueve en un movimiento circular uniforme tiene una aceleración centrípeta; esta aceleración la proporciona una fuerza neta dirigida hacia el centro de la trayectoria circular.

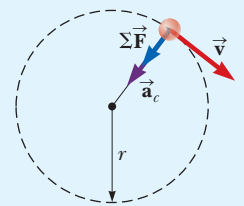
Un observador en un marco de referencia no inercial (acelerado) introduce **fuerzas ficticias** cuando aplica la segunda ley de Newton en dicho marco.

Un objeto que se mueve a través de un líquido o gas experimenta una **fuerza resistiva** dependiente de la rapidez. Esta fuerza resistiva está en dirección opuesta a la velocidad del objeto en relación con el medio y por lo general aumenta con la rapidez. La magnitud de la fuerza resistiva depende del tamaño y forma del objeto y de las propiedades del medio a través del que se mueve el objeto. En el caso límite para un objeto que cae, cuando la magnitud de la fuerza resistiva es igual al peso del objeto, éste alcanza su **rapidez terminal**.


► Modelo de análisis para resolver problemas

Partícula en movimiento circular uniforme (Ampliación) Con el nuevo conocimiento de las fuerzas, se puede ampliar el modelo de una partícula en movimiento circular uniforme, que se introdujo en el capítulo 4. La segunda ley de Newton aplicada a una partícula en movimiento circular uniforme establece que la fuerza neta que permite a la partícula someterse a una aceleración centrípeta (ecuación 4.21) se relaciona con la aceleración de acuerdo con

$$\sum F = m a_c = m \frac{v^2}{r} \quad (6.1)$$



Piense, dialogue y comparta

Consulte el prefacio para una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para obtener más artículos de evaluación para esta sección, visite  **WEBASSIGN** From Cengage

1. Usted está trabajando haciendo entregas para una tienda de lácteos. En la parte de atrás de su camioneta hay una caja de huevos. En la tienda de lácteos se han agotado las cuerdas elásticas, por lo que la caja no está atada. Se le ha dicho que conduzca con cuidado porque el coeficiente de fricción estática entre el cajón y la cama del camión es 0.600. No está preocupado, porque están viajando por una carretera que parece perfectamente recta. Debido a su confianza y falta de atención, su velocidad ha aumentado arriba de 45.0 mi/h. De

repente, ve una curva adelante con un letrero de advertencia que dice, “Peligro: curva no peraltada con radio de curvatura de 35.0 m.” Usted está a 15.0 m de donde empieza la curva. ¿Qué puede hacer para salvar los huevos: (i) tomar la curva a 45.0 mi/h, (ii) frenar hasta detenerse antes de entrar en la curva para pensar en esto, o (iii) reducir la velocidad para tomar la curva a una velocidad más lenta? Discuta estas opciones con su grupo y determine si hay un mejor camino a seguir.

2. **ACTIVIDAD** Encuentre un video de *YouTube* que muestre el ciclo completo de un juego del parque de diversiones llamado el “Rodeo”. En este juego, una persona se encuentra contra una pared en el borde de un disco girando alrededor de un




eje vertical. Cuando el disco alcanza su rapidez de funcionamiento, un brazo eleva el disco a un ángulo para que el disco gire alrededor de un eje que es casi horizontal. Como resultado, la persona se mueve en la parte superior de un círculo vertical, aparentemente sin apoyo, pero no cae hacia abajo. Usando la altura de una persona típica en el juego, calcule el radio del disco, utilizando una imagen detenida del disco en su ángulo más alto. Inicie el vídeo de nuevo y utilice el cronómetro de su smartphone para medir el periodo de rotación del disco. (a) A partir de esta información, calcule la aceleración centrípeta de una persona en la parte superior del recorrido. (b) ¿Cómo se compara esta aceleración con la debida a la gravedad? (c) ¿Por qué no se cae una persona en la parte superior hacia abajo?

3. **ACTIVIDAD** Encuentre un video de *YouTube* que muestra el ciclo completo para un juego del parque de diversiones llamado el “rotor”. En este juego, una persona se encuentra contra una pared en un cilindro gira alrededor de un eje vertical. Cuando el cilindro alcanza su rapidez de funcionamiento, el piso se cae alejándose y las personas permanecen suspendidas en la pared. Usando la altura de una persona típica en el juego, calcule el radio del cilindro, utilizando una imagen detenida del juego. Empiece de nuevo el vídeo y utilice el cronómetro de su smartphone para medir el periodo de rotación del cilindro. Con esta información, determine el coeficiente mínimo de fricción estática necesario entre la persona y la pared para mantener a la persona suspendida.

Problemas

Consulte el prefacio para una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para obtener más artículos de evaluación para esta sección, visite  **WEBASSIGN** From Cengage

SECCIÓN 6.1 Extensión del modelo de partícula en el movimiento circular uniforme

- En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, la rapidez del electrón es aproximadamente 2.20×10^6 m/s. Encuentre (a) la fuerza que actúa sobre el electrón mientras da vueltas en una órbita circular de 0.529×10^{-10} m de radio y (b) la aceleración centrípeta del electrón.
- Mientras dos astronautas del *Apolo* estaban en la superficie de la Luna, un tercer astronauta orbitaba la Luna. Suponga que la órbita es circular y 100 km arriba de la superficie de la Luna, donde la aceleración debida a la gravedad es 1.52 m/s². El radio de la Luna es 1.70×10^6 m. Determine (a) la rapidez orbital del astronauta y (b) el periodo de la órbita.
-  Un automóvil viaja inicialmente hacia el este y da vuelta al norte al viajar en una trayectoria circular con rapidez uniforme, como se muestra en la figura P6.3. La longitud del arco ABC es 235 m y el automóvil completa la vuelta en 36.0 s. (a) ¿Cuál es la aceleración cuando el automóvil está en B , ubicado a un ángulo de 35.0° ? Exprese su respuesta en términos de los vectores unitarios \hat{i} y \hat{j} . Determine (b) la rapidez promedio del automóvil y (c) su aceleración promedio durante el intervalo de 36.0 s.
- Una curva en una carretera forma parte de un círculo horizontal. Cuando la rapidez de un automóvil que circula por ella es de 14 m/s constante, la fuerza total horizontal sobre el conductor tiene 130 N de magnitud. ¿Cuál es la fuerza horizontal total sobre el conductor si la rapidez es 18.0 m/s?
- En un ciclotrón (un tipo de acelerador de partículas), un deuterón (de 2.00 u de masa) alcanza una rapidez final de 10.0% la rapidez de la luz mientras se mueve en una trayectoria circular de 0.480 m de radio. ¿Qué magnitud de fuerza magnética se requiere para mantener el deuterón en una trayectoria circular?
- ¿Por qué es imposible la siguiente situación? El objeto de masa $m = 4.00$ kg en la figura P6.6 se une a una barra vertical mediante dos cuerdas de longitud $\ell = 2.00$ m. Las cuerdas

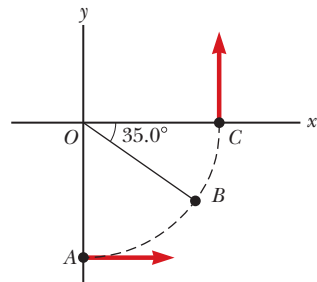


Figura P6.3

están unidas a la varilla en puntos separados por una distancia $d = 3.00$ m. El objeto gira en un círculo horizontal con rapidez constante $v = 3.00$ m/s, y las cuerdas permanecen tensas. La varilla gira junto con el objeto de forma que las cuerdas no se enrollan en la varilla. ¿Qué pasaría si? ¿Esta situación sería posible en otro planeta?

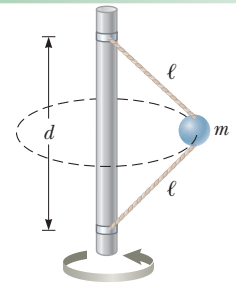




Figura P6.6

-  Usted está trabajando durante sus vacaciones de verano como un operador de juegos del parque de diversiones. El juego que está operando consiste de un cilindro vertical grande que gira sobre su eje lo suficientemente rápido para que cualquier persona en el interior de éste se sostenga contra la pared cuando se retira el piso (figura P6.7). El coeficiente de fricción estática entre una persona de masa m y la pared es μ_s , y el radio del cilindro es R . Usted está girando el juego con una rapidez angular ω sugerida por su supervisor. (a) Suponga que una persona muy pesada sube al juego. ¿Necesita aumentar la rapidez angular para que esta persona no resbale por la pared? (b) Supongamos que alguien que sube al juego lleva un traje deportivo de satén muy resbaladizo. En este caso, ¿necesita aumentar la rapidez angular para que esta persona no resbale por la pared?
-  Un conductor está demandando al Departamento Estatal de carreteras después de un accidente en una autopista curva. El conductor perdió el control y se estrelló contra un árbol situado a poca distancia del borde exterior de la carretera curva. El conductor afirma que el radio de curvatura de la carretera no peraltada era demasiado pequeño para la rapidez límite, lo que causó que se deslizara hacia el exterior en la curva y pegara contra el árbol. Usted ha sido contratado como un testigo experto para la defensa, y se le ha pedido que use su conocimiento de la física para testificar que el radio de curvatura de la carretera es apropiado para el límite de rapidez. Los reglamentos estatales muestran que el radio

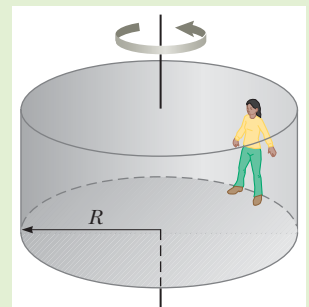


Figura P6.7

de curvatura de una carretera peraltada en la que el límite de velocidad es de 65 mi/h debe ser al menos 150 m. Usted construye un acelerómetro, que es una plomada con un transportador que lo adjunta en el techo de su auto. Un compañero que se sube en su auto observa que la plomada cuelga a un ángulo de 15.0° de la vertical cuando el auto se conduce con la rapidez más segura de 23.0 m/s en la curva en cuestión. ¿Cuál es su testimonio sobre el radio de la curva?

SECCIÓN 6.2 Movimiento circular no uniforme

9. Un halcón vuela en un arco horizontal de 12.0 m de radio con una rapidez constante de 4.00 m/s. (a) Encuentre su aceleración centrípeta. (b) El halcón continúa volando a lo largo del mismo arco horizontal pero aumenta su rapidez a una proporción de 1.20 m/s^2 . Encuentre la aceleración (magnitud y dirección) en esta situación en el momento que la rapidez del halcón es 4 m/s.

10. Un niño de 40.0 kg se mece en un columpio sostenido por dos cuerdas, cada una de 3.00 m de largo. La tensión en cada cuerda en el punto más bajo es 350 N. Encuentre (a) la rapidez del niño en el punto más bajo y (b) la fuerza que ejerce el asiento sobre el niño en el punto más bajo. (Desprecie la masa del asiento.)

11. Un niño de masa m se mece en un columpio sostenido por dos cuerdas, cada una de longitud R . Si la tensión en cada cuerda en el punto más bajo es T . Encuentre (a) la rapidez del niño en el punto más bajo y (b) la fuerza que ejerce el asiento sobre el niño en el punto más bajo. (Desprecie la masa del asiento.)

12. Un extremo de una cuerda está fijo y un objeto pequeño de 0.500 kg se une al otro extremo, donde se balancea en una sección de un círculo vertical de 2.00 m de radio, como se muestra en la figura 6.12. Cuando $\theta = 20.0^\circ$, la rapidez del objeto es 8.00 m/s. En este instante, encuentre (a) la tensión en la cuerda, (b) las componentes tangencial y radial de la aceleración y (c) la aceleración total. (d) ¿Su respuesta cambia si el objeto se balancea hacia su punto más bajo en lugar de balancearse hacia arriba? Explique su respuesta del inciso (d).

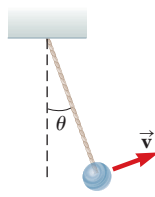


Figura P6.12

13. Una montaña rusa en el parque de diversiones Six Flags Great Escape en Gurnee, Illinois, incorpora cierta tecnología de diseño ingeniosa y algo de física básica. Cada bucle vertical, en lugar de ser circular, tiene forma de lágrima (figura P6.13). Los carros viajan en el interior del bucle en la parte superior, y las magnitudes de velocidad son lo suficientemente grandes para asegurar que los carros permanezcan en la pista. El bucle más grande tiene 40.0 m de alto. Suponga que la rapidez en la parte superior es 13.0 m/s y la aceleración centrípeta correspondiente es $2g$. (a) ¿Cuál es el radio del arco de la lágrima en la parte superior? (b) Si la masa total de un carro más los pasajeros es M , ¿qué fuerza ejerce el riel sobre el carro en la parte superior? (c) Suponga que la montaña rusa tiene un bucle circular de 20.0 m de radio. Si los carros tienen la misma rapidez, 13.0 m/s en la parte superior, ¿cuál es la aceleración centrípeta en la parte superior? (d) Comente acerca de la fuerza normal en la parte superior en la situación descrita en el inciso (c) y de las ventajas de tener bucles con forma de lágrima.



Figura P6.13

SECCIÓN 6.3 Movimiento en marcos acelerados

14. Un objeto de masa $m = 5.00 \text{ kg}$, unido a una balanza de resorte, descansa sobre una superficie horizontal sin fricción, como se muestra en la figura P6.14. La balanza de resorte, unida al extremo frontal de un vagón tiene una lectura de cero cuando el vagón está en reposo. (a) Determine la aceleración del vagón si la balanza de resorte tiene una lectura constante de 18.0 N cuando el carro está en movimiento (b) ¿Qué lectura mostrará la balanza si el vagón se mueve con velocidad constante? (c) Describa las fuerzas sobre el objeto como lo observa alguien en el vagón y alguien en reposo fuera del vagón.

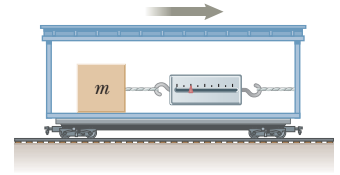


Figura P6.14

15. Una persona está de pie sobre una báscula en un elevador. Cuando el elevador parte, la báscula tiene una lectura constante de 591 N. Más tarde, cuando el elevador se detiene, la lectura de la báscula es 391 N. Suponga que la magnitud de la aceleración es la misma durante la partida y el frenado. Determine: (a) el peso de la persona, (b) la masa de la persona y (c) la aceleración del elevador.

16. **Problema de repaso** Una estudiante está de pie con su mochila en el piso cerca de ella, en un elevador que acelera continuamente hacia arriba con aceleración a . El ancho del elevador es L . La estudiante da a su mochila una patada rápida en $t = 0$ y le imparte una rapidez v que la hace deslizar a través del piso del elevador. Al tiempo t , la mochila golpea la pared opuesta. Encuentre el coeficiente de fricción cinética μ_k entre la mochila y el piso del elevador.

17. Un pequeño contenedor de agua se coloca sobre el carrusel dentro de un horno de microondas en un radio de 12.0 cm desde el centro. El carrusel gira de manera uniforme y da una revolución cada 7.25 s. ¿Qué ángulo forma la superficie del agua con la horizontal?

SECCIÓN 6.4 Movimiento en presencia de fuerzas resistivas

18. La masa de un automóvil deportivo es 1 200 kg. La forma del cuerpo es tal que el coeficiente de arrastre aerodinámico es 0.250 y el área frontal es 2.20 m^2 . Si ignora todas las otras fuentes de fricción, calcule la aceleración inicial que tiene el automóvil si ha viajado a 100 km/h y cuando cambia a neutral y se le permite deslizarse.

19. **Problema de repaso.** Una persona que lava ventanas jala un rodillo de goma por una ventana vertical muy alta. El rodillo tiene 160 g de masa y está montado en el extremo de una barra ligera. El coeficiente de fricción cinética entre el rodillo y el vidrio seco es 0.900. La persona lo presiona contra la ventana con una fuerza que tiene una componente horizontal de 4.00 N. (a) Si ella jala el rodillo por la ventana a velocidad constante, ¿qué componente de fuerza vertical debe ejercer? (b) La persona aumenta la componente de fuerza hacia abajo en 25.0%, pero todas las otras fuerzas permanecen iguales. Encuentre la aceleración del rodillo en esta situación. (c) Luego el rodillo se mueve en una porción húmeda de la ventana, donde su movimiento es resistido por una fuerza de arrastre de fluido R proporcional a su velocidad de acuerdo con $R = -20.0 v$, donde R está en newtons y v está en metros por segundo. Encuentre la velocidad terminal a la que se aproxima el rodillo, si supone que la persona ejerce la misma fuerza descrita en el inciso (b).

- 20.** Un pequeño trozo de espuma de poliestireno, material de empaque, se suelta desde una altura de 2.00 m sobre el suelo. Hasta que llega a su rapidez terminal, la magnitud de su aceleración se conoce mediante $a = g - Bv$. Después de caer 0.500 m, la espuma de estireno en efecto alcanza su rapidez terminal y después tarda 5.00 s más en llegar al suelo. (a) ¿Cuál es el valor de la constante B ? (b) ¿Cuál es la aceleración en $t = 0$? (c) ¿Cuál es la aceleración cuando la rapidez es 0.150 m/s?
- 21.** Una esfera pequeña de 3.00 g de masa se libera desde el reposo en $t = 0$ desde un punto bajo la superficie de un fluido viscoso. Se observa que la rapidez terminal es $v_T = 2.00$ cm/s. Encuentre (a) el valor de la constante b en la ecuación 6.2, (b) el tiempo t en el que la esfera alcanza $0.632v_T$ y (c) el valor de la fuerza resistiva cuando la esfera alcanza su rapidez terminal.
- 22.** Suponga que la fuerza resistiva que actúa sobre un patinador rápido es $f = -kmv^2$, donde k es una constante y m es la masa del patinador. El patinador cruza la línea de meta de una competencia en línea recta con rapidez v_i y después disminuye su rapidez deslizándose sobre sus patines. Demuestre que la rapidez del patinador en cualquier tiempo t después de cruzar la línea final es $v(t) = v_i/(1 + ktv_i)$.
- 23.** Usted puede sentir una fuerza de arrastre de aire sobre su mano si estira el brazo por afuera de una ventana abierta en un automóvil que se mueve rápidamente. *Nota:* No se ponga en peligro. ¿Cuál es el orden de magnitud de esta fuerza? En su solución, establezca las cantidades que mida o estime y sus valores.

PROBLEMAS ADICIONALES

- 24.** Un auto viaja en sentido de las agujas del reloj con rapidez constante alrededor de una sección circular de una carretera horizontal como se muestra en la vista aérea de la figura P6.24. Encuentra la dirección de su velocidad y aceleración en la posición (a) Ⓐ y (b) en la posición Ⓑ.
- 25.** Se utiliza una cuerda bajo una tensión de 50.0 N para dar de vueltas a una piedra en un círculo horizontal de radio 2.50 m a una rapidez de 20.4 m/s en una superficie sin fricción, como se muestra en la figura P6.25. Conforme se jala de la cuerda, aumenta la rapidez de la piedra. Cuando la cuerda sobre la mesa es de 1.00 m de largo y la rapidez de la piedra es 51.0 m/s, la cuerda se rompe. ¿Cuál es la resistencia al rompimiento de la cuerda, en newtons?

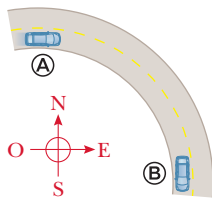


Figura P6.24

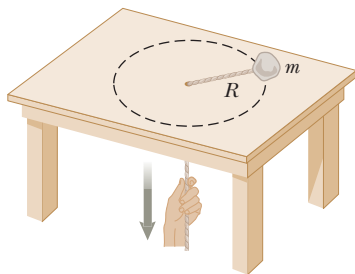


Figura P6.25

- 26.** Perturbado por el exceso de velocidad de los automóviles fuera de su lugar de trabajo, El premio Nobel Arthur Holly Compton diseñó un tope (llamado el "tope Holly") y lo instaló. Suponga que un auto de 1 800 kg pasa por un tope en un camino que sigue un arco de un círculo de radio 20.4 m como se muestra en la figura P6.26. (a) Si el auto

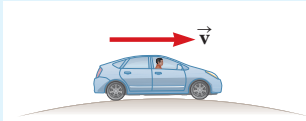


Figura P6.26
Problemas 26 y 27

viaja a 30.0 km/h, ¿qué fuerza ejerce la carretera sobre el auto cuando el automóvil pasa por el punto más alto del tope? (b) ¿Qué pasaría si? ¿Cuál es la rapidez máxima que el automóvil puede tener sin perder contacto con la carretera cuando pasa este punto más alto?

- 27.** Un automóvil de masa m pasa sobre un tope en un camino que sigue el arco de un círculo de radio R , como se muestra en la figura P6.26. (a) ¿Qué fuerza ejerce el camino sobre el automóvil mientras éste pasa el punto más alto del tope si viaja a una rapidez v ? (b) ¿Qué pasaría si? ¿Cuál es la máxima rapidez que puede tener el automóvil mientras pasa el punto más alto sin perder contacto con el camino?

- 28.** El juguete de un niño consiste en una pequeña cuña que tiene un ángulo agudo θ (figura P6.28). El lado inclinado de la cuña no tiene fricción, y un objeto de masa m en él se mantiene a una altura constante si la cuña se hace girar a cierta rapidez constante. La cuña está girando al rotar su eje, una varilla vertical que está firmemente sujeta a la cuña en el extremo inferior. Demuestre que, cuando el objeto se encuentra en reposo en un punto a una distancia L arriba a lo largo de la cuña, la rapidez del objeto debe ser $v = (gL \sin \theta)^{1/2}$.

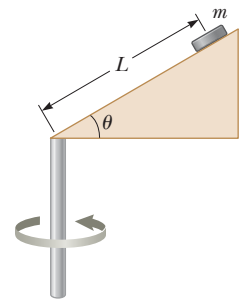


Figura P6.28

- 29.** Un hidroavión de masa total m acuatiza en un lago con rapidez inicial $v_x \hat{i}$. La única fuerza horizontal sobre éste es una fuerza resistiva sobre sus flotadores desde el agua. La fuerza resistiva es proporcional a la velocidad del hidroavión: $\vec{R} = -b\vec{v}$. La segunda ley de Newton aplicada al hidroavión es $-bv\hat{i} = m(dv/dt)\hat{i}$. A partir del teorema fundamental del cálculo, esta ecuación diferencial implica que la relación de cambio es de acuerdo con

$$\int_{v_i}^v \frac{dv}{v} = -\frac{b}{m} \int_0^t dt$$

- (a) Realice las integraciones para determinar la rapidez del hidroavión como función del tiempo. (b) Trace una gráfica de la rapidez como función del tiempo. (c) ¿El hidroavión se detiene por completo después de un intervalo de tiempo finito? (d) ¿El hidroavión viaja una distancia finita para detenerse?

- 30.** Un objeto de masa $m_1 = 4.00$ kg está atado a un objeto de masa $m_2 = 3.00$ kg con la cuerda 1 de longitud $\ell = 0.500$ m. La combinación se hace oscilar en una trayectoria circular vertical sobre una segunda cuerda, la cuerda 2, de longitud, $\ell = 0.500$

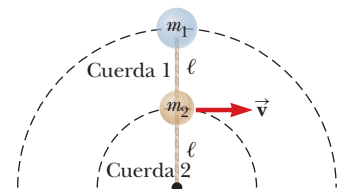


Figura P6.30

- m. Durante el movimiento, las dos cuerdas son colineales como se muestra en la figura P6.30. En la parte superior de su movimiento, m_2 viaja a $v = 4.00$ m/s. (a) ¿Cuál es la tensión en la cuerda 1 en este instante? (b) ¿Cuál es la tensión en la cuerda 2 en este instante? (c) ¿Cuál cuerda se romperá primero si la combinación se gira más y más rápido?

- 31.** Una bola de masa $m = 0.275$ kg se mantiene en una trayectoria circular vertical en una cuerda de longitud $L = 0.850$ m como en la figura P6.31. (a) ¿Cuáles son las fuerzas que actúan en

la bola en cualquier punto de la trayectoria? (b) Dibuje diagramas de fuerza para la bola cuando se encuentra en la parte inferior del círculo y cuando está en la cima. (c) Si su rapidez es de 5.20 m/s en la parte superior del círculo, ¿cuál es la tensión en la cuerda ahí? (d) si la cuerda se rompe cuando su tensión excede 22.5 N, ¿cuál es la rapidez máxima que puede tener la pelota en el fondo antes de que ocurra?

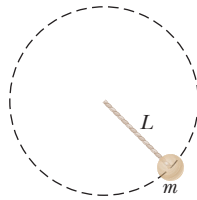


Figura P6.31

32. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Un niño travieso va a un parque de diversiones con su familia. En un juego, después de una severa reprimenda de su madre, él se desliza fuera de su asiento y trepa a la parte superior de la estructura del juego, que tiene forma de cono con su eje vertical y sus lados inclinados, haciendo un ángulo de $\theta = 20.0^\circ$ con la horizontal como se muestra en la figura P6.32. Esta parte de la estructura gira alrededor del eje central vertical cuando opera el juego. El niño se sienta en la superficie inclinada en un punto $d = 5.32$ m debajo del centro del cono por el lado oblicuo del cono y está enfadado. El coeficiente de fricción estática entre el niño y el cono es 0.700. El operador del juego no se da cuenta de que el niño está lejos de su asiento y así continúa operando el juego. Como resultado, el niño sentado, haciendo pucheros gira en una trayectoria circular a una rapidez de 3.75 m/s.

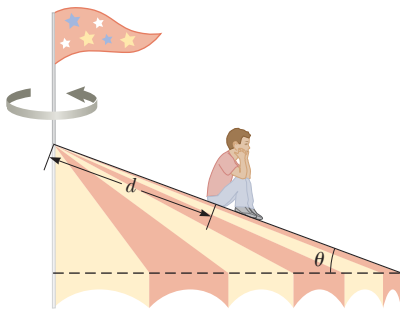


Figura P6.32

33. El piloto de un avión ejecuta una maniobra de rizo con rapidez constante en un círculo vertical. La rapidez del avión es 300 mi/h en la parte superior del rizo y 450 mi/h en la parte inferior y el radio del círculo es 1 200 pies. (a) ¿Cuál es el peso aparente del piloto en el punto más bajo si su peso verdadero es 160 lb? (b) ¿Cuál es su peso aparente en el punto más alto? (c) **¿Qué pasaría si?** Describa cómo experimentaría el piloto la sensación de ausencia de peso si puede variar el radio y la rapidez. *Nota:* Su peso aparente es igual a la magnitud de la fuerza que ejerce el asiento sobre su cuerpo.
34. Una vasija que rodea un drenaje tiene la forma de un cono circular que se abre hacia arriba, y en todas partes tiene un ángulo de 35.0° con la horizontal. Un cubo de hielo de 25.0 g se hace deslizar alrededor del cono sin fricción en un círculo horizontal de radio R . (a) Encuentre la rapidez que debe tener el cubo de hielo como función de R . (b) ¿Es innecesaria alguna parte de la información para la solución? Suponga que R se hace dos veces más grande. (c) ¿La rapidez requerida aumenta, disminuye o permanece constante? Si cambia, ¿en qué factor? (d) ¿El tiempo requerido para cada revolución aumenta, disminuye o permanece constante? Si cambia, en qué factor? (e) ¿Las respuestas a los incisos (c) y (d) parecen contradictorias? Explique.
35. **Problema de repaso.** Mientras aprende a conducir, usted está en un automóvil de 1 200 kg que se mueve a 20.0 m/s a través

de un gran estacionamiento vacío y a nivel. Súbitamente se da cuenta de que se dirige justo hacia una pared de ladrillos de un gran supermercado y está en peligro de chocar con ella. El pavimento puede ejercer una fuerza horizontal máxima de 7 000 N en el automóvil. (a) Explique por qué debería esperar que la fuerza tenga un valor máximo bien definido. (b) Suponga que pisa los frenos y no gira el volante. Encuentre la distancia mínima a la que debe estar de la pared para evitar un choque. (c) Si no frena y en vez de ello mantiene rapidez constante y gira el volante, ¿cuál es la distancia mínima a la que debe estar de la pared para evitar un choque? (d) ¿Cuál método, (b) o (c), es mejor para evitar una colisión? O, ¿debe usar tanto frenos como volante, o ninguno? Explique. (e) ¿La conclusión del inciso (d) depende de los valores numéricos que se proporcionan en este problema, o es verdad en general? Explique.

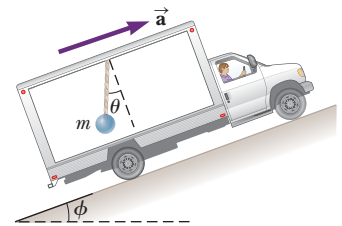


Figura P6.36

36. Un camión se mueve con aceleración constante a en una colina que hace un ángulo ϕ con la horizontal como en la figura P6.36. Una pequeña esfera de masa m está suspendida desde el techo de la camioneta por un cable ligero. Si el péndulo hace un ángulo constante θ con la perpendicular al techo, ¿a qué es igual a ?
37. Ya que la Tierra gira en torno a su eje, un punto sobre el ecuador experimenta una aceleración centrípeta de 0.0337 m/s², mientras que un punto en los polos no experimenta aceleración centrípeta. Si una persona en el ecuador tiene una masa de 75.0 kg, calcule (a) la fuerza gravitacional (peso real) sobre la persona y (b) la fuerza normal (peso aparente) de la persona. (c) ¿Cuál es mayor? Suponga que la Tierra es una esfera uniforme y considere $g = 9.800$ m/s².

38. Un disco de masa m_1 se une a una cuerda y se le permite dar de vueltas en un círculo de radio R sobre una mesa horizontal sin fricción. El otro extremo de la cuerda pasa a través de un pequeño orificio en el centro de la mesa, y una carga de masa m_2 se une a la cuerda (figura P6.38). La carga suspendida permanece en equilibrio mientras que el disco en la mesa da vueltas. Encuentre expresiones simbólicas para (a) la tensión en la cuerda, (b) la fuerza radial que actúa sobre el disco y (c) la rapidez del disco? (d) Describa cualitativamente qué ocurrirá en el movimiento del disco si el valor de m_2 aumenta un poco al colocar una carga adicional sobre éste. (e) Describa cualitativamente qué ocurrirá en el movimiento del disco si el valor de m_2 disminuye al remover una parte de la carga suspendida.

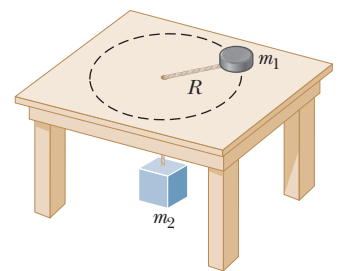


Figura P6.38

39. Galileo pensó acerca de si la aceleración debía definirse como la relación de cambio de la velocidad en el tiempo o como la relación de cambio en velocidad en la distancia. Él eligió la anterior, así que use el nombre "vroomosidad" para la función de cambio de la velocidad con la distancia. Para el movimiento de una partícula en una línea recta con aceleración constante, la ecuación $v = v_i + at$ da su velocidad v como función del

tiempo. De igual modo, para el movimiento lineal de una partícula con viscosidad constante k , la ecuación $v = v_i + kvx$ da la velocidad como función de la posición x si la rapidez de la partícula es v_i en $x = 0$. (a) Encuentre la ley que describe la fuerza total que actúa en este objeto, de masa m . (b) Describa un ejemplo de tal movimiento o explique por qué tal movimiento es irreal. Considere (c) la posibilidad de k positiva y también (d) la posibilidad de k negativa.

40. A los integrantes de un club de paracaidismo se les dieron los siguientes datos para usar en la planeación de sus saltos. En la tabla, d es la distancia que cae desde el reposo un paracaidista en una “posición extendida estable en caída libre” en función del tiempo de caída t . (a) Convierta las distancias en pies a metros. (b) Grafique d (en metros) en función de t . (c) Determine el valor de la rapidez terminal v_T al encontrar la pendiente de la porción recta de la curva. Aplique un ajuste de mínimos cuadrados para determinar esta pendiente.

t (s)	d (ft)	t (s)	d (ft)	t (s)	d (ft)
0	0	7	652	14	1 831
1	16	8	808	15	2 005
2	62	9	971	16	2 179
3	138	10	1 138	17	2 353
4	242	11	1 309	18	2 527
5	366	12	1 483	19	2 701
6	504	13	1 657	20	2 875

41. Un automóvil recorre una curva peraltada como se explicó en el ejemplo 6.4 y se muestra en la figura 6.5. El radio de curvatura del camino es R , el ángulo de peralte es θ y el coeficiente de fricción estática es μ_s . (a) Determine el intervalo de rapidez que puede tener el automóvil sin deslizarse arriba o abajo del peralte. (b) Encuentre el valor mínimo para μ_s tal que la rapidez mínima sea cero.

42. En el ejemplo 6.5, investigamos las fuerzas que un niño experimenta en una rueda de la fortuna. Suponga que los datos en ese ejemplo se aplican a este problema. ¿Qué fuerza (magnitud y dirección) ejerce el asiento sobre un niño de 40.0 kg cuando éste está a medio camino entre la parte superior e inferior?

43. **Problema de repaso.** Una porción de masilla inicialmente se ubica en el punto A en el borde de una rueda de molino que gira en torno a un eje horizontal. La masilla se desplaza del punto A cuando el diámetro a través de A es horizontal. Luego se eleva verticalmente y regresa a A en el instante en que la rueda completa una revolución. Usando esta información, se quiere encontrar la rapidez v de la masilla, cuando sale de la rueda y la fuerza que la sostenía a la rueda. (a) ¿Qué modelo de análisis es apropiado para el movimiento de la masilla conforme se levanta y cae? (b) Use este modelo para encontrar una expresión simbólica para el intervalo de tiempo entre que la masilla deja el punto A y cuando llega a A, en términos de v y g . (c) ¿Cuál es el modelo de análisis adecuado para describir un punto sobre la rueda? (d) Encuentre el periodo del movimiento del punto A en términos de la rapidez tangencial v y el radio R de la rueda. (e) Haga el intervalo de tiempo del inciso (b) igual al periodo del inciso (d) y resuelva para la rapidez v de la masilla cuando deja la rueda. (f) Si la masa de la masilla es m , ¿cuál es la magnitud de la fuerza que la mantuvo en la rueda antes de ser liberada?

44. Un modelo de avión de masa 0.750 kg vuela con una rapidez de 35.0 m/s en un círculo horizontal en el extremo de un cable de control de 60.0 m de largo como se muestra en la figura P6.44b. En la figura P6.44a se muestran las fuerzas

ejercidas sobre el avión: la tensión en el alambre de control, la fuerza gravitacional y la elevación aerodinámica que actúa en $\theta = 20.0^\circ$ hacia adentro de la vertical. Calcule la tensión en el cable, suponiendo que hace un ángulo constante de $\theta = 20.0^\circ$ con la horizontal.

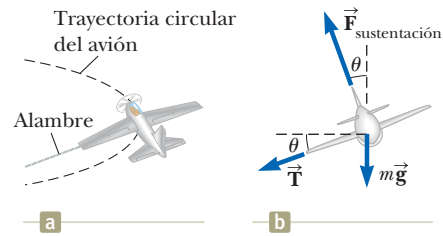


Figura P6.44

PROBLEMAS DE DESAFÍO

45. Un objeto de 9.00 kg que parte del reposo cae a través de un medio viscoso y experimenta una fuerza resistiva dada por la ecuación 6.2. El objeto alcanza la mitad de su rapidez terminal en 5.54 s. (a) Determine la rapidez terminal. (b) ¿En qué tiempo la rapidez del objeto es tres cuartos de la rapidez terminal? (c) ¿Qué distancia recorrió el objeto en los primeros 5.54 s de movimiento?

46. Para $t < 0$, un objeto de masa m no experimenta fuerza y se mueve en la dirección x positiva con una rapidez constante v_i . Comenzando en $t = 0$, cuando el objeto pasa de la posición $x = 0$, experimenta una fuerza neta resistiva proporcional al cuadrado de su rapidez: $\vec{F}_{net} = -mkv^2 \hat{i}$, donde k es una constante. La rapidez del objeto después de $t = 0$ viene dada por $v = v_i / (1 + kv_i t)$. (a) Encuentre la posición x del objeto como una función del tiempo. (b) Encuentre la velocidad del objeto como una función de la posición.

47. Un golfista saca desde una posición precisamente a $\phi_i = 35.0^\circ$ latitud norte. Golpea la bola hacia el sur, con un alcance de 285 m. La velocidad inicial de la bola está a 48.0° sobre la horizontal. Suponga que la resistencia del aire es despreciable para la pelota de golf. (a) ¿Cuánto tiempo está la bola en vuelo?

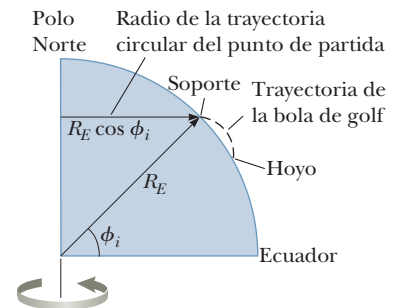


Figura P6.47

El hoyo está hacia el sur de la posición del golfista, y haría un hoyo en uno si la Tierra no girará. La rotación de la Tierra hace que el punto de partida se mueva en un círculo de radio $R_E \cos \phi_i = (6.37 \times 10^6 \text{ m}) \cos 35.0^\circ$, como se muestra en la figura P6.47. El punto de partida completa una revolución cada día. (b) Encuentre la rapidez hacia el este del punto de partida, en relación con las estrellas. El hoyo también se mueve al este, pero está 285 m más al sur y por tanto a una latitud ligeramente menor ϕ_f . Dado que el hoyo se mueve en un círculo ligeramente más grande, su rapidez debe ser mayor que la del punto de partida. (c) ¿Por cuánto la rapidez del hoyo supera la del punto de partida? Durante el intervalo de tiempo en que la bola está en vuelo, se mueve arriba y abajo así como al sur con el movimiento de proyectil que estudió en el capítulo 4, pero también se mueve al este con la rapidez que encontró en el inciso (b). Sin embargo, el hoyo se mueve al este a una rapidez mayor, y jala la bola con la rapidez relativa que encontró en el

inciso (c). (d) ¿A qué distancia hacia el oeste del hoyo aterriza la bola?

- 48.** Una sola cuenta puede deslizarse con fricción despreciable en un alambre rígido que se dobló en una espira circular de 15.0 cm de radio, como se muestra en la figura P6.48. El círculo siempre está en un plano vertical y gira de manera estable en torno a su diámetro vertical con (a) un periodo de 0.450 s. La posición de la cuenta se describe mediante el ángulo θ que la línea radial, desde el centro de la espira a la cuenta, forma con la vertical. (a) ¿A qué ángulo arriba del fondo del círculo puede permanecer la cuenta sin movimiento en relación con el círculo que gira? (b) **¿Qué pasaría si?** Repita el problema y considere que el periodo de rotación del círculo es 0.850 s. (c) Describa cómo la solución al inciso (b) es fundamentalmente diferente de la solución al inciso (a). (d) Para cualquier periodo o tamaño de espira, ¿siempre hay un ángulo al que la cuenta puede permanecer quieta en relación con la espira? (e) ¿Alguna vez hay más de dos ángulos? Arnold Arons sugirió la idea para este problema.
- 49.** Debido a la rotación de la Tierra, una plomada no cuelga exactamente a lo largo de una línea recta dirigida hacia el centro de la Tierra. ¿Cuánto se desvía la plomada de una línea radial a 35.0° latitud norte? Suponga que la Tierra es esférica.

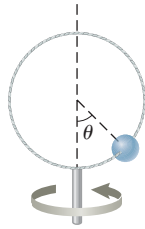


Figura P6.48

- 50.** Usted tiene un gran empleo ¡trabajar en un estadio de béisbol de las grandes ligas durante el verano! En este estadio, la rapidez de cada lanzamiento se mide usando una pistola de radar dirigida al lanzador por un operador detrás de la base. El operador tiene tanta experiencia con este trabajo que ha perfeccionado una técnica por la cual puede hacer cada medida en el instante exacto en que la pelota sale de la mano del lanzador. Su supervisor le pide que construya un algoritmo que proporcione la rapidez con la que la bola cruza la base, a 18.3 m del lanzador, con base en la rapidez medida v_i de la pelota cuando sale de la mano del lanzador. La rapidez en la base será más baja debido a la fuerza resistiva del aire sobre la pelota de béisbol. El movimiento vertical de la bola es pequeño, por lo que, para una buena aproximación, podemos considerar sólo el movimiento horizontal de la pelota. Usted empieza a desarrollar su algoritmo aplicando el modelo de partícula bajo una fuerza neta a la pelota de béisbol en la dirección horizontal. Mide que un lanzamiento tiene una rapidez de 40.2 m/s cuando sale de la mano del lanzador. Usted debe decirle a su supervisor la rapidez con la que viajaba, cuando cruzó la base. (*Sugerencia:* Utilice la regla de la cadena para expresar la aceleración en términos de una derivada con respecto a x , y luego resuelva una ecuación diferencial para v para encontrar una expresión para la rapidez de la pelota de béisbol en función de su posición. La función implicará una exponencial. También utilice la tabla 6.1.)



7

Energía de un sistema



Se utiliza papel de lija para suavizar la superficie de un trozo de madera. El papel de lija y la madera se calientan. ¿Cómo incorporamos el *calor* a nuestra creciente lista de conceptos de física? (DJTaylor/Shutterstock.com)

- 7.1 Sistemas y entornos
- 7.2 Trabajo realizado por una fuerza constante
- 7.3 Producto escalar de dos vectores
- 7.4 Trabajo realizado por una fuerza variable
- 7.5 Energía cinética y el teorema trabajo-energía cinética
- 7.6 Energía potencial de un sistema
- 7.7 Fuerzas conservativas y no conservativas
- 7.8 Relación entre fuerzas conservativas y energía potencial
- 7.9 Diagramas de energía y equilibrio de un sistema

IMAGINE Sus observaciones como estudiante inquisitivo de física le han agotado y decide pasar un día tranquilo en casa. Va a su garaje para trabajar más en un proyecto de carpintería que empezó hace un tiempo. Usted está pensando en lo mucho que ha aprendido en sus investigaciones de mecánica cuando encuentra su papel de lija y un pedazo de madera que necesita lijar. Usted comienza a lijar la madera, aun pensando que sus estudios de mecánica hacen una descripción muy completa de la naturaleza y del universo. Luego se da cuenta que el papel de lija y la madera, junto con los dedos, están más *calientes* conforme lija. “Espera. ¡Esto es nuevo! Usted está aplicando fuerza a la lija, y acelera, por tanto, cambia su velocidad. Hay fricción entre el papel de lija y la madera. Todo esto es *mecánica*; Usted ha pensado en todos estos conceptos y los ha aprendido en capítulos anteriores. Pero *calor*? ¿Qué es todo esto? ¡quizá tenga que pensar más!

CONEXIONES En este capítulo, vamos a investigar una cantidad que es muy diferente a las estudiadas en los capítulos anteriores. Los capítulos del 2 a 6 tratan con el *cambio*. La velocidad es un *cambio* en la posición, y la aceleración es un *cambio* en la velocidad (capítulos 2 y 4). La fuerza es la causa de *cambios* en el movimiento (capítulo 5). En este capítulo y en el siguiente, vamos a estudiar una cantidad, la energía, que se *conserva*. Es decir, la energía total en un sistema aislado *no cambia* durante cualquier proceso que ocurra en el sistema. O si la energía total en un sistema cambia, por ejemplo, ¡si aumenta, encontramos que la energía del entorno del sistema disminuye en la misma cantidad! Por tanto, la energía de todo el universo es fija; ¡tiene el mismo valor en todo momento! Nuestros modelos de análisis presentados en capítulos anteriores se basaron en el movimiento de una *partícula*, o un objeto que podría modelarse como una partícula. Comenzamos nuestro nuevo enfoque centrando nuestra atención en un

nuevo modelo de simplificación, *sistema*, y modelos de análisis basados en el modelo de un sistema. Estos modelos de análisis se presentarán formalmente en el capítulo 8. En este capítulo, introducimos sistemas y tres formas para almacenar energía en un sistema. Empezamos por hacer una conexión entre un concepto familiar, la fuerza, y nuestro nuevo tema, *energía*. Vamos a identificar varias formas en las que la energía puede existir en un sistema. Aunque esta nueva cantidad tiene una naturaleza diferente de las cantidades previamente estudiadas, es muy importante y nos permite resolver una clase totalmente nueva de problemas. Además, usted podría estar feliz de saber que la energía es un escalar, por lo que ¡no tenemos que realizar cálculos complicados de vectores! Conforme continuemos estudiando física en el resto de los capítulos de este libro, veremos con frecuencia que podemos seguir una propuesta de fuerza a una nueva área de estudio y también podemos seguir una aproximación de energía. Los dos métodos son complementarios.

7.1 Sistemas y entornos

En el modelo de sistema la atención se dirige a una porción pequeña del Universo, el **sistema**, y se ignoran detalles del resto del Universo afuera del sistema. Una habilidad vital para aplicar el modelo de sistema a problemas es la *identificación del sistema*. Un sistema válido

- puede ser un objeto simple o partícula
- puede ser un conjunto de objetos o partículas
- puede ser una región de espacio (como el interior del cilindro de combustión de un motor de automóvil)
- puede variar con el tiempo en tamaño y forma (como una bola de goma, que se deforma al golpear una pared).

Identificar la necesidad de un a diferencia de una aproximación de sistema para el planteamiento del modelo de análisis para la resolución de un problema (a diferencia de una aproximación de partícula) es parte del paso Categorizar en la “Estrategia general para resolver problemas” como se indicó en el capítulo 2. Identificar el sistema particular es una segunda parte de esta etapa.

No importa cuál sea el sistema particular en un problema dado, se identifica una **frontera del sistema**, como una superficie imaginaria (que no necesariamente coincide con una superficie física) que divide al Universo en el sistema y en el **entorno** que rodea al sistema.

Como ejemplo, imagine una fuerza aplicada a un objeto en el espacio vacío. Se puede definir el objeto como el sistema y su superficie como la frontera del sistema. La fuerza aplicada a él es una influencia sobre el sistema desde el entorno que actúa a través de la frontera del sistema. En una sección posterior de este capítulo se verá cómo analizar esta situación desde un método de sistema.

Otro ejemplo se vio en el ejemplo 5.10, donde el sistema se define como la combinación de la bola, el bloque y la cuerda. La influencia del entorno incluye las fuerzas gravitacionales sobre la bola y el bloque, las fuerzas normal y de fricción en el bloque, y la fuerza ejercida por la polea en la cuerda. La fuerza que ejerce la cuerda en la bola y el bloque son internas al sistema y debido a esto no se incluye como una influencia del entorno.

Existen mecanismos mediante los cuales un sistema recibe influencia de su entorno. El primero que se investigará es el *trabajo*.

7.2 Trabajo realizado por una fuerza constante

Casi todos los términos utilizados hasta el momento, velocidad, aceleración, fuerza, etcétera, tienen un significado similar en física como en la vida diaria. Sin embargo, ahora se encuentra un término cuyo significado en física es particularmente diferente de su significado cotidiano: trabajo.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.1

Identifique el sistema La *primera* etapa más importante a considerar en la solución de un problema aplicando el método de energía es identificar el sistema de interés adecuado.





Figura 7.1 Un borrador se empuja a lo largo del riel de un pizarrón mediante una fuerza que actúa a diferentes ángulos respecto a la dirección horizontal.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.2

Trabajo realizado por ... en

... No sólo debe identificar el sistema, también debe saber qué agente en el entorno realiza trabajo en el sistema. Cuando se analice el trabajo, siempre use la frase “el trabajo realizado por ... en ...”. Después de “por” inserte la parte del entorno que interactúa directamente con el sistema. Después de “en”, inserte el sistema. Por ejemplo, “el trabajo realizado por el martillo en el clavo” identifica al clavo como el sistema y la fuerza del martillo representa la influencia del entorno.

Para comprender que significa trabajo, como una influencia en un sistema para un físico, considere la situación ilustrada en la figura 7.1. Una fuerza \vec{F} se aplica a un borrador, que se identifica como el sistema, y el borrador se desliza a lo largo del riel. Si queremos saber qué tan efectiva es la fuerza para mover el borrador, debe considerar no sólo la magnitud de la fuerza sino también su dirección. Observe que el dedo en la figura 7.1 aplica fuerzas en tres direcciones diferentes en el borrador si supone que la magnitud de la fuerza aplicada es la misma en las tres fotografías, el empuje aplicado en la figura 7.1b es más efectivo para mover el borrador que el empuje en la figura 7.1a. Por otra parte, la figura 7.1c muestra una situación en que la fuerza aplicada no mueve el borrador en absoluto, sin importar cuán fuerte se empuje (a menos, desde luego, ¡que se aplique una fuerza tan grande que rompa el riel!). Estos resultados sugieren que cuando se analizan fuerzas para determinar la influencia que tienen sobre el sistema, se debe considerar la naturaleza vectorial de las fuerzas. También se debe conocer la magnitud de la fuerza. Aplicar una fuerza de magnitud $|\vec{F}| = 2 \text{ N}$ a través de un desplazamiento representa mayor influencia sobre el sistema que la aplicación de una fuerza de magnitud 1 N a lo largo del mismo desplazamiento. También es importante una mayor influencia que moverlo 3 m a lo largo del riel representa una mayor influencia que moverlo 2 cm si en ambos casos se aplica la misma fuerza.

Examine la situación de la figura 7.2, donde el objeto (el sistema) se somete a un desplazamiento a lo largo de una línea recta mientras en él actúa una fuerza constante de magnitud F que forma un ángulo θ con la dirección del desplazamiento.

El **trabajo** W realizado en un sistema por un agente que ejerce una fuerza constante en el sistema es el producto de la magnitud F de la fuerza, la magnitud Δr del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza y $\cos \theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores fuerza y desplazamiento:

$$W \equiv F \Delta r \cos \theta \quad (7.1)$$

Trabajo realizado por una fuerza constante

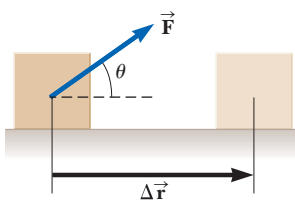


Figura 7.2 Un objeto experimenta un desplazamiento $\Delta \vec{r}$ sometido a la acción de una fuerza constante \vec{F} .

Observe en la ecuación 7.1 que el trabajo es un escalar, aun cuando se defina en términos de dos vectores, una fuerza \vec{F} y un desplazamiento $\Delta \vec{r}$. En la sección 7.3 se explora cómo combinar dos vectores para generar una cantidad escalar.

También observe que el desplazamiento en la ecuación 7.1 se refiere *al punto de aplicación de la fuerza*. Si la fuerza se aplica a una partícula o a un objeto rígido que pueden modelarse como una partícula, este desplazamiento es el mismo que el de una partícula. Sin embargo, para un sistema deformable estos desplazamientos no son iguales. Por ejemplo, imagínese presionando los lados de un globo con ambas manos. El centro de la pelota tiene desplazamiento cero. Sin embargo, los puntos de aplicación de las fuerzas de sus manos a los lados del globo se mueven a través de un desplazamiento a medida que el globo se comprime y éste es el desplazamiento utilizado en la ecuación 7.1. Se verán otros ejemplos de sistemas deformables, como resortes y muestras de gas en un recipiente.

Como ejemplo de la distinción entre la definición de trabajo y la comprensión cotidiana de la palabra, considere sostener una pesada silla con los brazos extendidos durante 3 minutos. Al final de este intervalo de tiempo, sus cansados brazos pueden hacerle creer que realizó una cantidad considerable de trabajo en la silla. Sin embargo, de acuerdo con la definición, en ella no ha realizado ningún trabajo. Usted ejerce una fuerza para sostener la silla, pero no la mueve. Una fuerza no realiza trabajo en un objeto si la fuerza no lo mueve a través de un desplazamiento. Si $\Delta \mathbf{r} = 0$, la ecuación 7.1 da $W = 0$, que es la situación que se representa en la figura 7.1c.

En la ecuación 7.1 observe también que el trabajo realizado por una fuerza en un objeto en movimiento es cero cuando la fuerza aplicada es perpendicular al desplazamiento de su punto de aplicación. Esto es, si $\theta = 90^\circ$, por tanto $W = 0$ porque $\cos 90^\circ = 0$. Por ejemplo, en la figura 7.3, el trabajo realizado por la fuerza normal en el objeto y el trabajo realizado por la fuerza gravitacional en el objeto son ambos cero porque ambas fuerzas son perpendiculares al desplazamiento y tienen componentes cero a lo largo de un eje en la dirección de $\Delta \mathbf{r}$.

El signo del trabajo también depende de la dirección de $\vec{\mathbf{F}}$ en relación con $\Delta \mathbf{r}$. El trabajo realizado por la fuerza aplicada sobre un sistema es positivo cuando la proyección de $\vec{\mathbf{F}}$ sobre $\Delta \mathbf{r}$ está en la misma dirección que el desplazamiento. Por ejemplo, cuando un objeto se levanta, el trabajo realizado por la fuerza aplicada en el objeto es positivo porque la dirección de dicha fuerza es hacia arriba, en la misma dirección que el desplazamiento de su punto de aplicación. Cuando la proyección de $\vec{\mathbf{F}}$ sobre $\Delta \mathbf{r}$ está en la dirección opuesta al desplazamiento, W es negativo. Por ejemplo, conforme se levanta un objeto, el trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre el objeto es negativo. El factor $\cos \theta$ en la definición de W (ecuación 7.1) automáticamente toma en cuenta el signo.

Si una fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}$ está en la misma dirección que el desplazamiento $\Delta \mathbf{r}$, entonces $\theta = 0$ y $\cos 0 = 1$. En este caso, la ecuación 7.1 produce

$$W = F \Delta r$$

Las unidades de trabajo son las de fuerza multiplicada por longitud. En consecuencia, la unidad del SI de trabajo es el **newton \times metro** ($\text{N} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$). Esta combinación de unidades se usa con tanta frecuencia que se le ha dado un nombre propio, **joule (J)**.

Una consideración a destacar para un método de sistema a los problemas es que **el trabajo es una transferencia de energía**. Por ahora la energía suena misteriosa, porque todavía no la hemos estudiado. Es difícil definir la energía, aparte de decir que es una cantidad física que se conserva. Ese comportamiento, es similar al *dinero*. Cuando se produce una transacción financiera en su cuenta de cheques, el dinero se transfiere a través de la frontera de su cuenta: por ejemplo, hacia adentro por los depósitos y hacia fuera por los retiros. Cuando se produce un proceso físico, la energía se transfiere a través de la frontera de un sistema. Nuestro entendimiento de energía mejorará a medida que investiguemos varios ejemplos en este capítulo. Si W es el trabajo realizado en un sistema y W es positivo, la energía se transfiere *al* sistema; si W es negativo, la energía se transfiere *desde* el sistema. Por tanto, si un sistema interactúa con su entorno, esta interacción se describe como una transferencia de energía a través de la frontera del sistema. El resultado es un cambio en la energía almacenada en el sistema. En la sección 7.5 se aprenderá acerca del primer tipo de almacenamiento de energía, después de investigar más aspectos del trabajo.

E XAMEN RÁPIDO 7.1 La fuerza gravitacional que ejerce el Sol sobre la Tierra mantiene a ésta en una órbita alrededor de aquél. Suponga que la órbita es perfectamente circular. El trabajo realizado por esta fuerza gravitacional durante un intervalo de tiempo breve, en el que la Tierra se mueve a través de un desplazamiento en su trayectoria orbital, es (a) cero, (b) positivo, (c) negativo, (d) imposible de determinar.

E XAMEN RÁPIDO 7.2 La figura 7.4 muestra cuatro situaciones en las que una fuerza se aplica a un objeto. En los cuatro casos, la fuerza tiene la misma magnitud y el desplazamiento del objeto es hacia la derecha y de la misma magnitud. Clasifique las situaciones en orden del trabajo realizado por la fuerza sobre el objeto, del más positivo al más negativo.

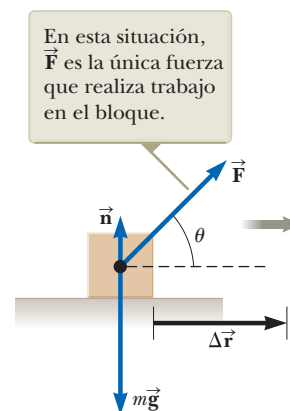


Figura 7.3 Un objeto se desplaza sobre una superficie horizontal sin fricción. La fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ y la fuerza gravitacional $m\vec{\mathbf{g}}$ no trabajan sobre el objeto.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.3

Causa del desplazamiento Es posible calcular el trabajo realizado por una fuerza sobre un objeto, pero dicha fuerza *no* necesariamente es la causa del desplazamiento del objeto. Por ejemplo, si levanta un objeto, la fuerza gravitacional realiza trabajo (negativo) sobre el objeto, ¡aunque la gravedad no es la causa de que el objeto se mueva hacia arriba!

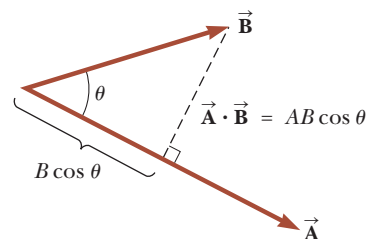


Figura 7.4 (Examen rápido 7.2) Se jala un bloque en cuatro direcciones diferentes. En cada caso, el desplazamiento del bloque es hacia la derecha y de la misma magnitud.

Ejemplo 7.1 Sr. Limpio

Un hombre que limpia un piso jala una aspiradora con una fuerza de magnitud $F = 50.0 \text{ N}$ en un ángulo de 30.0° con la horizontal (figura 7.5). Calcule el trabajo realizado por la fuerza en la aspiradora a medida que ésta se desplaza 3.00 m hacia la derecha.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 7.5 ayuda a formar ideas de la situación. Piense en una experiencia de su vida en la que jaló un objeto a través del piso con una sogá o cuerda.

Categorizar Nos preguntan el trabajo realizado en un objeto por una fuerza y se da ésta, el desplazamiento del objeto y el ángulo entre los dos vectores, de modo que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución. La aspiradora se clasifica como el sistema.

Use la definición de trabajo (ecuación 7.1):

$$W = F \Delta r \cos \theta = (50.0 \text{ N})(3.00 \text{ m})(\cos 30.0^\circ) = 130 \text{ J}$$

Observe en esta situación que la fuerza normal \vec{n} y la gravitacional $\vec{F}_g = m\vec{g}$ no realizan trabajo sobre la aspiradora porque estas fuerzas son perpendiculares a los desplazamientos de sus puntos de aplicación. Además, no se menciona si existe fricción entre la aspiradora y el suelo. La presencia o ausencia de fricción no importa al calcular el trabajo efectuado por la fuerza aplicada. Además, este trabajo no depende si la aspiradora se movió a velocidad constante o si estuvo acelerada.

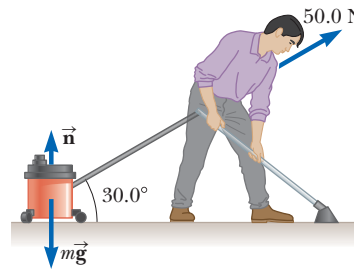


Figura 7.5 (Ejemplo 7.1) Una aspiradora se jala con un ángulo de 30.0° desde la horizontal.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.4

El trabajo es un escalar Aunque la ecuación 7.3 define el trabajo en términos de dos vectores, *el trabajo es un escalar*, no hay dirección asociada con él. Todas las clases de energía y de transferencia de energía son escalares. Este hecho es una gran ventaja del método de energía, ¡porque no se necesitan cálculos vectoriales!

Producto escalar de dos vectores cualesquiera \vec{A} y \vec{B}

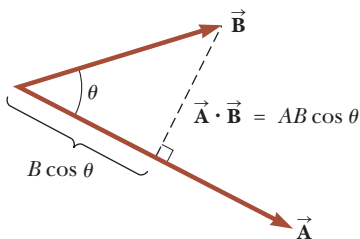


Figura 7.6 El producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ es igual a la magnitud de \vec{A} multiplicada por $B \cos \theta$, que es la proyección de \vec{B} sobre \vec{A} .

7.3 Producto escalar de dos vectores

Debido a la manera en que los vectores fuerza y desplazamiento se combinan en la ecuación 7.1, es útil aplicar una herramienta matemática conveniente denominada **producto escalar** de dos vectores. Este **producto escalar** de los vectores \vec{A} y \vec{B} se escribe como $\vec{A} \cdot \vec{B}$. (Debido al símbolo punto, con frecuencia al producto escalar se le llama **producto punto**.)

El producto escalar de dos vectores cualesquiera \vec{A} y \vec{B} se define como una cantidad escalar igual al producto de las magnitudes de los dos vectores y el coseno del ángulo θ entre ellos:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv AB \cos \theta \quad (7.2)$$

Como es el caso con cualquier multiplicación, \vec{A} y \vec{B} no necesitan tener las mismas unidades.

Al comparar esta definición con la ecuación 7.1, esta ecuación se expresa como un producto escalar:

$$W = F \Delta r \cos \theta = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} \quad (7.3)$$

En otras palabras, $\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$ es una notación abreviada de $F \Delta r \cos \theta$.

Antes de continuar con el análisis del trabajo, se investigan algunas propiedades del producto punto. La figura 7.6 muestra dos vectores \vec{A} y \vec{B} y el ángulo θ entre ellos, que se utiliza en la definición del producto punto. En la figura 7.6, $B \cos \theta$ es la proyección de \vec{B} sobre \vec{A} . Debido a eso, la ecuación 7.2 significa que $\vec{A} \cdot \vec{B}$ es el producto de la magnitud de \vec{A} y la proyección de \vec{B} sobre \vec{A} .

Del lado derecho de la ecuación 7.2, también se ve que el producto escalar es **conmutativo**.¹ Esto es,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

¹ La conmutatividad del producto punto significa que $\vec{A} \cdot \vec{B}$ también es igual al producto de la magnitud de \vec{B} y la proyección de \vec{A} sobre \vec{B} . En el capítulo 11, se verá otra forma de combinar vectores que resultan útiles en física y no es conmutativa.

Por último, el producto escalar obedece la **ley distributiva de la multiplicación**, de este modo

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

El producto escalar es simple de evaluar a partir de la ecuación 7.2 cuando \vec{A} es perpendicular o paralelo a \vec{B} . Si \vec{A} es perpendicular a \vec{B} ($\theta = 90^\circ$), entonces $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$. (La igualdad $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB$ también se cumple en el caso más trivial en el que \vec{A} o \vec{B} es cero.) Si el vector \vec{A} es paralelo al vector \vec{B} y los dos apuntan en la misma dirección ($\theta = 0$), entonces $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB$. Si el vector \vec{A} es paralelo al vector \vec{B} solo que los dos apuntan en direcciones opuestas ($\theta = 180^\circ$), entonces $\vec{A} \cdot \vec{B} = -AB$. El producto escalar es negativo cuando $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$.

Los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} , que se definieron en el capítulo 3, se encuentran en las direcciones x , y y z positivas, respectivamente, de un sistema coordenado de mano derecha. Por tanto, surge de la definición de $\vec{A} \cdot \vec{B}$ que los productos escalares de estos vectores unitarios son

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \quad (7.4)$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0 \quad (7.5)$$

◀ Producto escalar de vectores unitarios

Las ecuaciones 3.17 y 3.18 establecen que dos vectores \vec{A} y \vec{B} se expresan en forma de vector unitario como

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

Utilizando estas expresiones para los vectores y la información dada en las ecuaciones 7.4 y 7.5 se demuestra que el producto escalar de \vec{A} y \vec{B} se reduce a

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (7.6)$$

(Los detalles de la deducción se le dejan al lector en el problema 5 al final del capítulo). En el caso especial en el que $\vec{A} = \vec{B}$, se ve que

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2$$

- E XAMEN RÁPIDO 7.3** ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero respecto a la relación entre el producto punto de dos vectores y el producto de las magnitudes de los vectores? (a) $\vec{A} \cdot \vec{B}$ es mayor que AB . (b) $\vec{A} \cdot \vec{B}$ es menor que AB . (c) $\vec{A} \cdot \vec{B}$ podría ser mayor o menor que AB , dependiendo del ángulo entre los vectores. (d) $\vec{A} \cdot \vec{B}$ podría ser igual a AB .

Ejemplo 7.2 El producto escalar

Los vectores \vec{A} y \vec{B} están dados por $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ y $\vec{B} = -\hat{i} + 2\hat{j}$.

(A) Determine el producto escalar

SOLUCIÓN

Conceptualizar No hay sistema físico a imaginar aquí. Sólo es un ejercicio matemático que involucra dos vectores.

Categorizar Puesto que se tiene una definición para el producto escalar, este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Sustituya las expresiones vectoriales específicas para \vec{A} y \vec{B} :

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (2\hat{i} + 3\hat{j}) \cdot (-\hat{i} + 2\hat{j}) \\ &= -2\hat{i} \cdot \hat{i} + 2\hat{i} \cdot 2\hat{j} - 3\hat{j} \cdot \hat{i} + 3\hat{j} \cdot 2\hat{j} \\ &= -2(1) + 4(0) - 3(0) + 6(1) = -2 + 6 = 4 \end{aligned}$$

Se obtiene el mismo resultado cuando se aplica directamente la ecuación 7.6, donde $A_x = 2$, $A_y = 3$, $B_x = -1$ y $B_y = 2$.

continúa

7.2 continuación

(B) Encuentre el ángulo θ entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$.

SOLUCIÓN

Evalúe las magnitudes de $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ con el teorema de Pitágoras:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

Aplique la ecuación 7.2 y el resultado del inciso (A) para encontrar el ángulo:

$$\cos \theta = \frac{\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{4}{\sqrt{65}} = 60.3^\circ$$

Ejemplo 7.3 Trabajo realizado por una fuerza constante

Una partícula móvil en el plano xy se somete a un desplazamiento dado por $\Delta\vec{\mathbf{r}} = (2.0\hat{\mathbf{i}} + 3.0\hat{\mathbf{j}})$ cuando la fuerza constante $\vec{\mathbf{F}} = (5.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})$ actúa en la partícula. Calcule el trabajo realizado por $\vec{\mathbf{F}}$ sobre la partícula.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Aunque este ejemplo es un poco más físico que el anterior, en cuanto que identifica una fuerza y un desplazamiento, es similar en términos de su estructura matemática.

Categorizar Ya que se proporcionan la fuerza y los vectores de desplazamiento y se pide encontrar el trabajo realizado por esta fuerza sobre la partícula, este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Sustituya las expresiones para $\vec{\mathbf{F}}$ y $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ en la ecuación 7.3 y aplique las ecuaciones 7.4 y 7.5:

$$\begin{aligned} W &= \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}} = [(5.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}}) \text{ N}] \cdot [(2.0\hat{\mathbf{i}} + 3.0\hat{\mathbf{j}}) \text{ m}] \\ &= (5.0\hat{\mathbf{i}} \cdot 2.0\hat{\mathbf{i}} + 5.0\hat{\mathbf{i}} \cdot 3.0\hat{\mathbf{j}} + 2.0\hat{\mathbf{j}} \cdot 2.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}} \cdot 3.0\hat{\mathbf{j}}) \text{ N} \cdot \text{m} \\ &= [10 + 0 + 0 + 6] \text{ N} \cdot \text{m} = 16 \text{ J} \end{aligned}$$

7.4 Trabajo realizado por una fuerza variable

Considere una partícula que se desplaza a lo largo del eje x bajo la acción de una fuerza que varía con la posición. En tal situación, no puede emplearse la ecuación 7.1 para calcular el trabajo realizado por la fuerza porque esta relación se aplica sólo cuando $\vec{\mathbf{F}}$ es constante en magnitud y dirección. La figura 7.7a muestra una fuerza variable aplicada en una partícula que se mueve desde la posición inicial x_i a la posición final x_f . Imagine una partícula que se somete a un desplazamiento muy pequeño Δx , mostrado en la figura. La componente F_x de la fuerza F_x , es aproximadamente constante en este intervalo pequeño; para este pequeño desplazamiento, se puede aproximar el trabajo realizado en la partícula por la fuerza utilizando la ecuación 7.1 como

$$W \approx F_x \Delta x$$

que es el área del rectángulo sombreado en la figura 7.7a. Si la curva F_x en términos de x se divide en un gran número de tales intervalos, el trabajo total realizado para el desplazamiento de x_i a x_f es aproximadamente igual a la suma de un gran número de tales términos

$$W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x$$

Si se hace que el tamaño de los desplazamientos pequeños se aproxime a cero, el número de términos en la suma aumenta sin límite, pero el valor de la suma se aproxima a un



valor definido que es igual al área limitada por la curva F_x y el eje x , expresado como una integral:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

En consecuencia, el trabajo realizado por F_x en el sistema de la partícula conforme ésta se mueve de x_i a x_f se puede expresar como

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx \quad (7.7)$$

Esta ecuación se reduce a la ecuación 7.1 cuando la componente $F_x = F \cos \theta$ es constante.

Si más de una fuerza actúa en un sistema y *el sistema se puede modelar como una partícula*, los puntos de aplicación de todas las fuerzas se mueven a través del mismo desplazamiento, el trabajo total realizado en el sistema es justo el trabajo efectuado por la fuerza neta. Si la fuerza neta en la dirección x se expresa como ΣF_x , el trabajo total, o *trabajo neto*, realizado conforme la partícula se mueve de x_i a x_f es

$$\Sigma W = W_{\text{ext}} = \int_{x_i}^{x_f} (\Sigma F_x) dx \quad (\text{partícula})$$

Para el caso general de una fuerza neta $\Sigma \vec{F}$ cuya magnitud y dirección pueden variar, se aplica el producto escalar:

$$\Sigma W = W_{\text{ext}} = \int (\Sigma \vec{F}) \cdot d\vec{r} \quad (\text{partícula}) \quad (7.8)$$

donde la integral se calcula a través de la trayectoria que recorre la partícula por el espacio. El subíndice "ext" en el trabajo es para recordar que el trabajo neto es realizado por un agente *externo* en el sistema. En este capítulo se utilizará esta notación como un recordatorio y para diferenciar este trabajo del trabajo *interno* que en breve se explicará.

Si no es posible modelar el sistema como una partícula (por ejemplo, si el sistema es deformable), no se puede usar la ecuación 7.8 porque fuerzas diferentes sobre el sistema pueden moverse a través de distintos desplazamientos. En este caso, se debe evaluar el trabajo realizado por cada fuerza por separado y después sumar algebraicamente los trabajos para encontrar el trabajo neto efectuado sobre el sistema:

$$\Sigma W = W_{\text{ext}} = \sum_{\text{fuerzas}} \left(\int \vec{F} \cdot d\vec{r} \right) \quad (\text{sistema deformable})$$

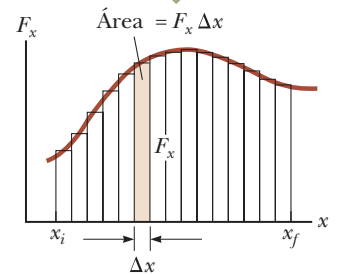
Ejemplo 7.4 Cálculo del trabajo total a partir de una gráfica

Una fuerza que actúa en una partícula varía con x como se muestra en la figura 7.8. Calcule el trabajo realizado por la fuerza en sobre la partícula conforme se traslada de $x = 0$ a $x = 6.0$ m.

SOLUCIÓN

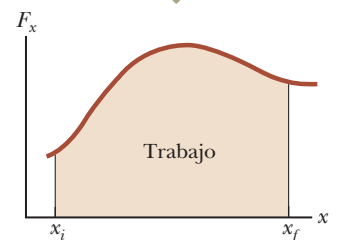
Conceptualizar Imagine una partícula sometida a la fuerza de la figura 7.8. Observe que la fuerza permanece constante a medida que la partícula se mueve a través de los primeros 4.0 m y después disminuye linealmente a cero en 6.0 m. En términos del anterior análisis del movimiento, la partícula podría ser modelada como una partícula bajo aceleración constante para los primeros 4.0 m porque la fuerza es constante. Sin embargo, entre 4.0 m y 6.0 m el movimiento no encaja en uno de los anteriores modelos de análisis porque la aceleración de la partícula está variando. Si la partícula inicia desde el reposo, su rapidez se incrementa durante el movimiento, y la partícula siempre se mueve en la dirección x positiva. Sin embargo, estos detalles sobre su rapidez y dirección no son necesarios para el cálculo del trabajo efectuado.

El trabajo total realizado por el desplazamiento de x_i a x_f es aproximadamente igual a la suma de las áreas de todos los rectángulos.



a

El trabajo efectuado por la componente F_x de la fuerza variable conforme la partícula se mueve de x_i a x_f es exactamente igual al área bajo la curva.



b

Figura 7.7 (a) El trabajo realizado en una partícula por la componente de fuerza F_x para el pequeño desplazamiento Δx es $F_x \Delta x$, que es igual al área de rectángulo sombreado. (b) El ancho Δx de cada rectángulo se aproxima a cero.

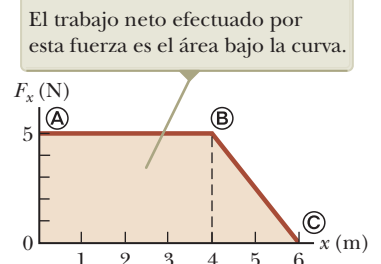


Figura 7.8 (Ejemplo 7.4) La fuerza que actúa en una partícula es constante para los primeros 4.0 m de movimiento y después disminuye linealmente con x de $x_{\text{A}} = 4.0$ m a $x_{\text{C}} = 6.0$ m.

continúa

7.4 continuación

Categorizar Ya que la fuerza varía durante el movimiento de la partícula, se deben aplicar las técnicas para el trabajo realizado por fuerzas variables. En este caso, puede emplearse la representación gráfica de la figura 7.8 para evaluar el trabajo efectuado.

Analizar El trabajo realizado por la fuerza es igual al área bajo la curva de $x_{\text{A}} = 0$ a $x_{\text{B}} = 6.0$ m. Esta área es igual al área de la sección rectangular de **A** a **B** más el área de la sección triangular de **B** a **C**.

Evalúe el área del rectángulo:

$$W_{\text{A a B}} = (5.0 \text{ N})(4.0 \text{ m}) = 20 \text{ J}$$

Obtenga el área del triángulo:

$$W_{\text{B a C}} = \frac{1}{2}(5.0 \text{ N})(2.0 \text{ m}) = 5.0 \text{ J}$$

Encuentre el trabajo total realizado por la fuerza sobre la partícula:

$$W_{\text{A a C}} = W_{\text{A to B}} + W_{\text{B a C}} = 20 \text{ J} + 5.0 \text{ J} = 25 \text{ J}$$

Finalizar: Ya que la gráfica de la fuerza consiste de líneas rectas, se pueden emplear reglas para encontrar las áreas de modelos geométricos simples para evaluar el trabajo total realizado en este ejemplo. Si una fuerza no varía linealmente como en la figura 7.7, tales reglas no se pueden aplicar y la función fuerza se debe integrar como en las ecuaciones 7.7 o 7.8.

Trabajo realizado por un resorte

En la figura 7.9 se muestra un modelo de sistema físico común en el que la fuerza varía con la posición. El sistema es un bloque sobre una superficie horizontal sin fricción y conectado a un resorte. Para muchos resortes, si el resorte está estirado o comprimido una distancia pequeña desde su configuración sin estirar (en equilibrio), ejerce en el bloque una fuerza que se puede modelar matemáticamente como

Fuerza del resorte ►

$$F_s = -kx$$

(7.9)

donde x es la posición del bloque respecto a su posición de equilibrio ($x = 0$) y k es una constante positiva llamada la **constante de fuerza** o la **constante de elástica** del resorte.

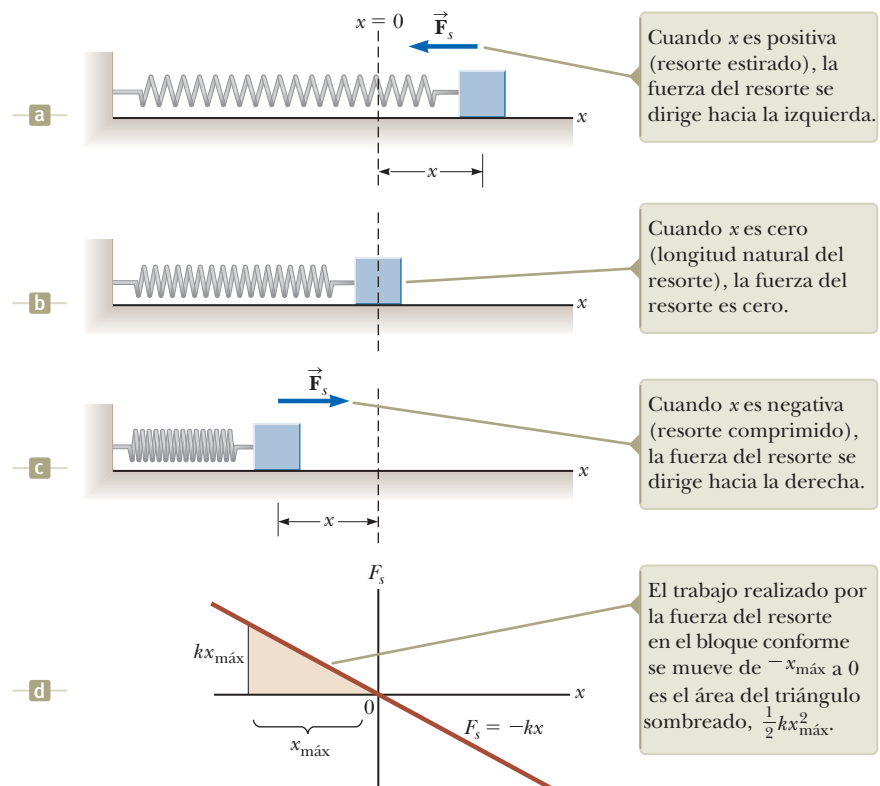


Figura 7.9 La fuerza que ejerce un resorte en un bloque varía con la posición x del bloque respecto a la posición de equilibrio $x = 0$. (a) x es positiva. (b) x es cero. (c) x es negativa. (d) Gráfica de F_s en función de x para el sistema bloque-resorte.

En otras palabras, la fuerza que se requiere para estirar o comprimir un resorte es proporcional a la cantidad de estiramiento o compresión x . Esta ley de fuerza para resortes se conoce como **ley de Hooke**. El valor de k es una medida de la *rigidez* del resorte. Los resortes rígidos tienen grandes valores k , y los resortes suaves tienen pequeños valores k . Como se puede ver de la ecuación 7.9, las unidades de k son N/m.

La forma vectorial de la ecuación 7.9 es

$$\vec{\mathbf{F}}_s = F_s \hat{\mathbf{i}} = -kx \hat{\mathbf{i}} \quad (7.10)$$

donde el eje x se eligió en la dirección de extensión o compresión del resorte.

El signo negativo en las ecuaciones 7.9 y 7.10 significa que la fuerza ejercida por el resorte siempre tiene una dirección *opuesta* al desplazamiento respecto al equilibrio. Cuando $x > 0$, como en la figura 7.9a, de modo que el bloque está a la derecha de la posición de equilibrio, la fuerza del resorte se dirige hacia la izquierda, en la dirección x negativa. Cuando $x < 0$, como en la figura 7.9c, el bloque está a la izquierda del equilibrio y la fuerza del resorte se dirige hacia la derecha, en la dirección x positiva. Cuando $x = 0$, como en la figura 7.9b, el resorte no está estirado y $F_s = 0$. Puesto que la fuerza del resorte siempre actúa hacia la posición de equilibrio ($x = 0$), a veces se le llama *fuerza de restitución*.

Si el resorte se comprime hasta que el bloque está en el punto $-x_{\text{máx}}$ y después se libera, el bloque se traslada de $-x_{\text{máx}}$ a través de cero hasta $+x_{\text{máx}}$. Después invierte la dirección, regresa a $-x_{\text{máx}}$ y continúa oscilando de ida y vuelta. En el capítulo 15 se estudiarán en detalle esas oscilaciones. Por ahora, se investigará el trabajo realizado por el resorte en el bloque en pequeñas porciones de una oscilación.

Suponga que el bloque se empuja hacia la izquierda a una posición $-x_{\text{máx}}$ y después se libera como se muestra en la figura 7.10. Identifique el bloque como el sistema y calcule el trabajo W_s efectuado por la fuerza del resorte en el bloque conforme éste se traslada de $x_i = -x_{\text{máx}}$ a $x_f = 0$. Al aplicar la ecuación 7.8 y suponer que el bloque se puede modelar como una partícula, se obtiene

$$W_s = \int \vec{\mathbf{F}}_s \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx \hat{\mathbf{i}}) \cdot (dx \hat{\mathbf{i}}) = \int_{-x_{\text{máx}}}^0 (-kx) dx = \frac{1}{2} kx_{\text{máx}}^2 \quad (7.11)$$

donde se aplica la integral $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)$ con $n = 1$. El trabajo realizado por la fuerza del resorte es positivo porque la fuerza está en la misma dirección que su desplazamiento (ambos hacia la derecha). Puesto que el bloque llega a $x = 0$ con cierta rapidez, continuará moviéndose hasta que alcance una posición $+x_{\text{máx}}$. El trabajo efectuado por la fuerza del resorte en el bloque al moverse de $x_i = 0$ a $x_f = x_{\text{máx}}$ es $W_s = -\frac{1}{2} kx_{\text{máx}}^2$. El trabajo es negativo porque para esta parte del movimiento la fuerza del resorte es hacia la izquierda y su desplazamiento es hacia la derecha. Por tanto, el trabajo *neto* realizado por la fuerza del resorte en el bloque conforme se traslada de $x_i = -x_{\text{máx}}$ a $x_f = x_{\text{máx}}$ es *cero*.

La figura 7.9d es una gráfica de F_s en términos de x . La ecuación 7.9 indica que F_s es proporcional a x , por lo que la gráfica de F_s en función de x es una línea recta. El trabajo calculado en la ecuación 7.11 es el área del triángulo sombreado, que corresponde al desplazamiento desde $-x_{\text{máx}}$ hasta 0. Ya que el triángulo tiene base $x_{\text{máx}}$ y altura $kx_{\text{máx}}$, su área es de $\frac{1}{2} kx_{\text{máx}}^2$, de acuerdo con el trabajo efectuado por el resorte dado por la ecuación 7.11 con integración.

Si el bloque experimenta un desplazamiento arbitrario desde $x = x_i$ a $x = x_f$, el trabajo realizado por la fuerza del resorte en el bloque es

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = \frac{1}{2} kx_i^2 - \frac{1}{2} kx_f^2 \quad (7.12)$$

De la ecuación 7.12 se ve que el trabajo realizado por la fuerza del resorte es cero para cualquier movimiento que termine donde empezó ($x_i = x_f$). En el capítulo 8 se usará este importante resultado cuando se describa con mayor detalle el movimiento de este sistema.

Las ecuaciones 7.11 y 7.12 describen el trabajo efectuado por el resorte en el bloque. Ahora considere el trabajo realizado en el bloque por un *agente externo* conforme el agente aplica una fuerza en el bloque y éste se mueve lentamente de $x_i = -x_{\text{máx}}$ a $x_f = 0$, como en la figura 7.11. Compare las dos figuras cuidadosamente. En la figura 7.10, el resorte se expande

La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_s$ ejercida por el resorte realiza el trabajo sobre el bloque que se mueve a su posición final.

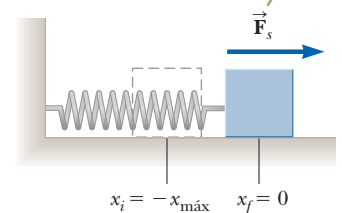


Figura 7.10 Se empuja un bloque a la posición inicial $x_i = -x_{\text{máx}}$ y luego se suelta a partir del reposo. Identifique la posición final como la posición de equilibrio $x_f = 0$.

◀ Trabajo realizado por un resorte



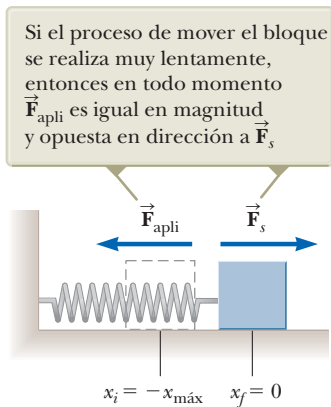


Figura 7.11 Un bloque se mueve de $x_i = -x_{\text{máx}}$ a $x_f = 0$ sobre una superficie sin fricción conforme una fuerza \vec{F}_{apli} es aplicada al bloque.

libremente. Sin embargo, en la figura 7.11, la *fuerza aplicada* \vec{F}_{apli} empuja hacia adentro y evita esta expansión libre. La magnitud de la fuerza aplicada se ajusta a que el bloque se mueva a su posición final muy lentamente. Se puede calcular este trabajo al notar que, en cualquier valor de la posición, la *fuerza aplicada* \vec{F}_{apli} es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza del resorte \vec{F}_s de modo que $\vec{F}_{\text{apli}} = F_{\text{apli}} \hat{i} = -\vec{F}_s = -(-kx\hat{i}) = kx\hat{i}$. Debido a eso, el trabajo realizado por esta fuerza aplicada (el agente externo) en el sistema del bloque para el movimiento descrito es

$$W_{\text{ext}} = \int \vec{F}_{\text{apli}} \cdot d\vec{r} = \int_{x_i}^{x_f} (kx\hat{i}) \cdot (dx\hat{i}) = \int_{-x_{\text{máx}}}^0 kx dx = -\frac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2$$

Este trabajo es igual al negativo del trabajo efectuado por la fuerza del resorte para este desplazamiento (ecuación 7.11). El trabajo es negativo porque el agente externo debe empujar hacia dentro del resorte para impedir que se expanda, y esta dirección es opuesta a la dirección del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza conforme el bloque se mueve de $-x_{\text{máx}}$ a 0.

Para un desplazamiento arbitrario del bloque, el trabajo realizado en el sistema por el agente externo es

$$W_{\text{ext}} = \int_{x_i}^{x_f} kx dx = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 \quad (7.13)$$

Observe que esta ecuación es el negativo de la ecuación 7.12.

- EJAMEN RÁPIDO 1.2** Un dardo se inserta en una pistola de resorte, comprimiendo a éste por una distancia x . Para la siguiente carga, el resorte se comprime $2x$. ¿Cuánto trabajo se necesitó para cargar el segundo dardo comparado con el efectuado durante la primera carga? (a) cuatro veces más, (b) dos veces más, (c) lo mismo, (d) la mitad cuando mucho, (e) la cuarta parte a lo más.

Ejemplo 7.5 Medición de k para un resorte

En la figura 7.12 se muestra una técnica común utilizada para medir la constante de fuerza de un resorte. El resorte cuelga verticalmente (figura 7.11a), y un objeto de masa m se coloca en su extremo inferior. Bajo la acción de la “carga” mg , el resorte se estira una distancia d respecto a su posición de equilibrio (figura 7.11b).

(A) Si un resorte es estirado 2.0 cm por un objeto suspendido de masa 0.55 kg, ¿cuál es la constante elástica?

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 7.12b muestra qué le ocurre al resorte cuando el objeto se suspende de él. Simule esta situación colgando un objeto de una banda elástica.

Categorizar En la figura 7.12b el objeto está en reposo sin aceleración, así puede modelarse como una *partícula en equilibrio*.

Analizar Como el objeto está en equilibrio, la fuerza neta sobre él es cero y la fuerza del resorte hacia arriba balancea a la fuerza gravitacional $m\vec{g}$ hacia abajo (figura 7.12(c)).

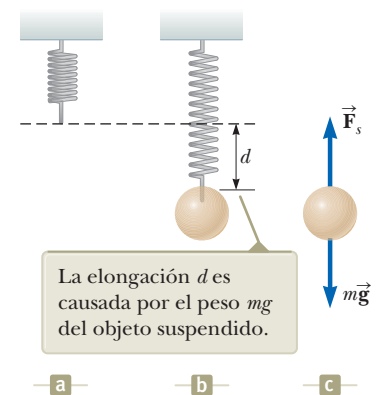


Figura 7.12 (Ejemplo 7.5) Determinación de la constante de fuerza k de un resorte.

Aplique el modelo de partícula en equilibrio al objeto:

$$\vec{F}_s + m\vec{g} = 0 \rightarrow F_s - mg = 0 \rightarrow F_s = mg$$

Aplique la ley de Hooke para dar $F_s = kd$ y resuelva para k :

$$k = \frac{mg}{d} = \frac{(0.55 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)}{2.0 \times 10^{-2} \text{ m}} = 2.7 \times 10^2 \text{ N/m}$$

(B) ¿Cuánto trabajo realiza el resorte en el objeto conforme se estira a través de esta distancia?



7.5 continuación

SOLUCIÓN

Utilice la ecuación 7.12 para encontrar el trabajo realizado por el resorte sobre el objeto:

$$W_s = 0 - \frac{1}{2}kd^2 = -\frac{1}{2}(2.7 \times 10^2 \text{ N/m})(2.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2 = -5.4 \times 10^{-2} \text{ J}$$

Finalizar Este trabajo es negativo porque la fuerza del resorte actúa hacia arriba en el objeto, pero su punto de aplicación (donde el resorte se une al objeto) se mueve hacia abajo. Conforme el objeto se mueve 2.0 cm, la fuerza gravitacional también hace trabajo sobre él. Este trabajo es positivo porque la fuerza gravitacional es hacia abajo y así lo es el desplazamiento del punto de aplicación de esta fuerza. ¿Esperaría que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional, cuando la fuerza aplicada en dirección opuesta a la fuerza del resorte, sea el negativo de la respuesta anterior? Descúbralo.

Evalúe el trabajo efectuado por la fuerza gravitacional en el objeto:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = (mg)(d) \cos 0 = mgd = (0.55 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(2.0 \times 10^{-2} \text{ m}) = 1.1 \times 10^{-1} \text{ J}$$

Si usted esperaba que el trabajo realizado por la gravedad simplemente fuera el efectuado por el resorte con un signo positivo, ¡es posible que le sorprenda este resultado! Para comprender por qué éste no es el caso, es necesario explorar más, como se hace en la siguiente sección.

7.5 Energía cinética y el teorema trabajo-energía cinética

Cuando se transfiere energía a través de la frontera de un sistema, cambia la cantidad de energía almacenada en el sistema. Ya se investigó el trabajo con cierta profundidad y se le identificó como un mecanismo de transferencia de energía en un sistema. Se ha establecido que el trabajo es una influencia sobre un sistema proveniente del entorno, solo que no se ha discutido el resultado de esta influencia en el sistema. Un resultado posible de hacer trabajo sobre un sistema es que el sistema cambia su rapidez: una experiencia común es empujar un objeto y observar el cambio de estado de reposo a movimiento. En esta sección se investiga esta situación y se introduce el primer tipo de almacenamiento de energía en un sistema, llamada *energía cinética*.

Considere un sistema que consiste de un solo objeto. La figura 7.13 muestra un bloque de masa m que se mueve a través de un desplazamiento dirigido hacia la derecha sometido a la acción de una fuerza neta $\Sigma \vec{F}$, también dirigida hacia la derecha. Se sabe de la segunda ley de Newton que el bloque se mueve con una aceleración \vec{a} . Si el bloque (y por tanto la fuerza) se mueven a través de un desplazamiento $\Delta \vec{r} = \Delta x \hat{i} = (x_f - x_i) \hat{i}$, el trabajo neto realizado en el bloque por la fuerza neta externa $\Sigma \vec{F}$ está dado por la ecuación 7.7:

$$W_{\text{ext}} = \int_{x_i}^{x_f} \Sigma F dx \quad (7.14)$$

Al aplicar la segunda ley de Newton, se sustituye para la magnitud de la fuerza neta $\Sigma F = ma$ y después se realizan las siguientes manipulaciones de la regla de la cadena en el integrando:

$$W_{\text{ext}} = \int_{x_i}^{x_f} ma dx = \int_{x_i}^{x_f} m \frac{dv}{dt} dx = \int_{x_i}^{x_f} m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} dx = \int_{v_i}^{v_f} mv dv \quad (7.15)$$

$$W_{\text{ext}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

donde v_i es la rapidez del bloque cuando está en $x = x_i$ y v_f es su rapidez en x_f .

La ecuación 7.15 se generó por la situación específica de movimiento en una dimensión, pero es un resultado general. Dice que el trabajo realizado por la fuerza neta sobre una partícula de masa m es igual a la diferencia entre los valores inicial y final de una cantidad $\frac{1}{2}mv^2$. Esta cantidad es tan importante que se le ha dado un nombre especial, **energía cinética**:

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2 \quad (7.16)$$

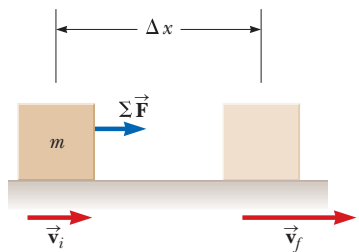


Figura 7.13 Un objeto se somete a un desplazamiento $\Delta \vec{r} = \Delta x \hat{i}$ y un cambio en velocidad bajo la acción de una fuerza neta constante $\Sigma \vec{F}$.

◀ Energía cinética



TABLA 7.1 Energías cinéticas de diferentes objetos

Objeto	Masa (kg)	Rapidez (m/s)	Energía cinética (J)
Tierra orbitando el Sol	5.97×10^{24}	2.98×10^4	2.65×10^{33}
Luna orbitando la Tierra	7.35×10^{22}	1.02×10^3	3.82×10^{28}
Cohete que se mueve con rapidez de escape ^a	500	1.12×10^4	3.14×10^{10}
Automóvil a 65 mi/h	2 000	29	8.4×10^5
Atleta corriendo	70	10	3 500
Piedra que se deja caer desde 10 m	1.0	14	98
Pelota de golf con rapidez terminal	0.046	44	45
Gota de lluvia con rapidez terminal	3.5×10^{-5}	9.0	1.4×10^{-3}
Molécula de oxígeno en aire	5.3×10^{-26}	500	6.6×10^{-21}

^aRapidez de escape es la rapidez mínima que un objeto debe lograr cerca de la superficie de la Tierra para alejarse infinitamente de ésta.

La energía cinética representa la energía asociada con el movimiento de la partícula. La energía cinética es una cantidad escalar y tiene las mismas unidades que el trabajo. Por ejemplo, un objeto de 2.0 kg que se mueve con una rapidez de 4.0 m/s tiene una energía cinética de 16 J. La tabla 7.1 exhibe las energías cinéticas de diferentes objetos.

La ecuación 7.15 establece que el trabajo realizado en una partícula por una fuerza neta $\Sigma \vec{F}$ que actúa en él es igual al cambio en energía cinética de la partícula. Con frecuencia es conveniente escribir la ecuación 7.15 en la forma

$$W_{\text{ext}} = K_f - K_i = \Delta K \quad (7.17)$$

Otra forma de escribirla es $K_f = K_i + W_{\text{ext}}$ que dice que la energía cinética final de un objeto es igual a su energía cinética inicial más el cambio en energía debido al trabajo neto realizado en él.

La ecuación 7.17 se generó al suponer que se realiza trabajo en una partícula. Si se identifica a la partícula como un sistema, se ha aumentado la cantidad de energía almacenada en el sistema haciendo un trabajo en ella. Se ha almacenado la energía en la forma particular de energía cinética, que se representa por el movimiento del sistema a través del espacio. También se podría hacer trabajo en un sistema deformable, en el que las partes del sistema se muevan entre sí. En este caso, también se encuentra que la ecuación 7.17 es válida en tanto el trabajo neto se encuentre al sumar los trabajos efectuados por cada fuerza, como se discutió anteriormente en relación con la ecuación 7.8. La energía cinética K del sistema es la suma de las energías cinéticas de todas las partes del sistema.

La ecuación 7.17 es un resultado importante conocido como **teorema trabajo-energía cinética**:

Teorema trabajo-energía cinética ▶

Cuando se realiza trabajo en un sistema y el único cambio en éste es en su rapidez de sus partes, el trabajo neto efectuado en el sistema es igual al cambio en energía cinética del sistema, como se expresa con la ecuación 7.17: $W = \Delta K$.

El teorema trabajo-energía cinética indica que la energía cinética de un sistema *aumenta* si el trabajo neto realizado en él es *positivo*: la energía se transfiere al sistema. La energía cinética *disminuye* si el trabajo neto es *negativo*: la energía se está transfiriendo fuera del sistema.

Puesto que hasta el momento sólo se ha investigado movimiento traslacional a través del espacio, se llegó al teorema trabajo-energía cinética al analizar situaciones que involucran este movimiento. Otro tipo de movimiento es el *movimiento rotacional*, en el que un objeto gira en torno a un eje. Este tipo de movimiento se estudiará en el capítulo 10. El teorema trabajo-energía cinética también es válido para sistemas que se someten a un cambio en la rapidez rotacional debido al trabajo realizado en el sistema. El molino de viento es un ejemplo de trabajo (realizado por el viento) que causa movimiento rotacional.



El teorema trabajo-energía cinética pondrá en claro un resultado visto anteriormente en este capítulo que puede parecer extraño. En la sección 7.4 se llegó a un resultado de trabajo neto realizado cero cuando un resorte empujó un bloque de $x_i = -x_{\text{máx}}$ a $x_f = x_{\text{máx}}$. Observe que, ya que la rapidez del bloque cambia continuamente, puede parecer complicado analizar este proceso. Sin embargo, la cantidad ΔK en el teorema trabajo-energía cinética sólo se refiere a las configuraciones inicial y final del sistema. No depende de los detalles de la trayectoria seguida por algún componente del sistema. Por tanto, dado que la rapidez es cero tanto en el punto inicial como en el final del movimiento, el trabajo neto realizado sobre el bloque es cero. Con frecuencia este concepto de independencia con la trayectoria se verá en planteamientos similares a los problemas.

Volvamos también al misterio en la etapa Finalizar al final del ejemplo 7.5. ¿Por qué el trabajo efectuado por la gravedad no fue sólo el trabajo realizado por el resorte con un signo positivo? Note que el trabajo ejecutado por la gravedad es mayor que la magnitud del trabajo realizado por el resorte. Por tanto, el trabajo total efectuado por todas las fuerzas en el objeto es positivo. Ahora piense cómo crear la situación en que las *únicas* fuerzas sobre el objeto son la fuerza del resorte y la fuerza gravitacional. Debe soportar el objeto en el punto más alto y después *quitar* su mano y dejar que el objeto caiga. Si lo hace, sabe que, cuando el objeto alcanza una posición 2.0 cm debajo de su mano, se estará *moviendo*, lo que es consistente con la ecuación 7.17. El trabajo neto positivo en el objeto y el resultado es que tiene una energía cinética cuando pasa a través del punto de 2.0 cm.

La única manera de evitar que el objeto tenga una energía cinética después de moverse 2.0 cm es detenerlo lentamente con su mano. Sin embargo, existe una tercera fuerza efectuando trabajo en el objeto, la fuerza normal de su mano. Si este trabajo se calcula y suma al realizado por la fuerza del resorte y la fuerza gravitacional, el trabajo neto efectuado en el objeto es cero, que es consistente porque no es móvil en el punto 2.0 cm.

Antes se indicó que el trabajo se considera un mecanismo para la transferencia de energía en un sistema. La ecuación 7.17 es un enunciado matemático de este concepto. Cuando se efectúa trabajo W_{ext} en un sistema, el resultado es una transferencia de energía a través de la frontera del sistema. El efecto en el sistema, en el caso de la ecuación 7.17, es un cambio ΔK de energía cinética. En la siguiente sección se investiga otro tipo de energía que se puede almacenar en un sistema como un resultado de realizar trabajo en el sistema.

E XAMEN RÁPIDO 7.5 Un dardo se carga en una pistola de resorte al comprimir a \bullet éste en una distancia x . En la segunda carga, al resorte se le comprime una distancia \bullet $2x$. ¿Qué tan rápido, comparado con el primero, el segundo dardo abandona la pistola? \bullet **(a)** cuatro veces más, **(b)** dos veces más, **(c)** igual, **(d)** la mitad, **(e)** la cuarta parte.

Ejemplo 7.6 Un bloque que se jala sobre una superficie sin fricción

Un bloque de 6.0 kg inicialmente en reposo, se jala hacia la derecha, a lo largo de una superficie horizontal sin fricción, mediante una fuerza horizontal constante de 12 N. Encuentre la rapidez del bloque después de que se ha movido una distancia horizontal de 3.0 m.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 7.14 ilustra esta situación. Suponga que jala un carro de juguete sobre una mesa con una banda elástica horizontal unida al frente del carro. La fuerza se mantiene constante al asegurar que la banda elástica estirada siempre tiene la misma longitud.

Categorizar Se podrían aplicar las ecuaciones de cinemática para determinar la respuesta, sin embargo, practiquemos la aproximación de la energía. El bloque es el sistema, y en él actúan tres fuerzas externas. La fuerza normal equilibra la fuerza gravitacional en el bloque y ninguna de estas fuerzas que actúan verticalmente realiza trabajo en el bloque porque sus puntos de aplicación se desplazan verticalmente.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.5

Condiciones para el teorema trabajo-energía cinética El teorema trabajo-energía cinética es importante, pero limitado en su aplicación; no es un principio general. En muchas situaciones, ocurren otros cambios en el sistema además de su rapidez, y existen otras interacciones con el entorno además del trabajo. Un principio más general que involucra energía es la *conservación de energía* en la sección 8.1.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.6

El teorema trabajo-energía cinética: rapidez, no velocidad El teorema trabajo-energía cinética relaciona el trabajo con un cambio en la *rapidez* de un sistema, no con un cambio en su velocidad. Por ejemplo, si un objeto está en movimiento circular uniforme, su rapidez es constante. Aun cuando su velocidad cambie, no se realiza trabajo sobre el objeto por la fuerza que causa el movimiento circular.

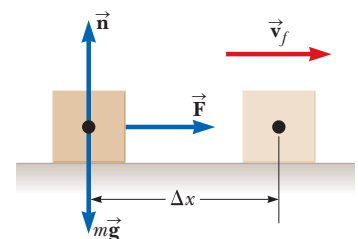


Figura 7.14 (Ejemplo 7.6) Un bloque se jala hacia la derecha sobre una superficie sin fricción mediante una fuerza horizontal constante.



7.6 continuación

Analizar La fuerza externa neta que actúa en el bloque es la fuerza horizontal de 12 N.

Aplique el teorema trabajo-energía cinética para el bloque y note que su energía cinética inicial es cero:

$$W_{\text{ext}} = \Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv_f^2 - 0 = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Resuelva para v_f y use la ecuación 7.1 para el trabajo realizado en el bloque por \vec{F} :

$$v_f = \sqrt{\frac{2W_{\text{ext}}}{m}} = \sqrt{\frac{2F\Delta x}{m}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$v_f = \sqrt{\frac{2(12 \text{ N})(3.0 \text{ m})}{6.0 \text{ kg}}} = 3.5 \text{ m/s}$$

Finalizar Le sería útil resolver este problema de nuevo, modelando el bloque como una *partícula bajo una fuerza neta* para encontrar su aceleración y luego como una *partícula bajo aceleración constante* para obtener su velocidad final. En el capítulo 8, se verá que el procedimiento de energía aquí presentado es un ejemplo del modelo de del *sistema no-aislado*.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que la magnitud de la fuerza en este ejemplo se duplica a $F' = 2F$. El bloque de 6.0 kg acelera a 3.5 m/s debido a esta fuerza aplicada mientras se mueve a través de un desplazamiento $\Delta x'$. ¿Cómo se compara el desplazamiento $\Delta x'$ con el desplazamiento original Δx ?

Respuesta Si se jala más fuerte, el bloque debería acelerar a una cierta rapidez en una distancia más corta, así se espera que $\Delta x' < \Delta x$. En ambos casos, el bloque experimenta el mismo cambio en energía cinética ΔK . Matemáticamente, a partir del teorema trabajo-energía cinética, se encuentra que

$$W_{\text{ext}} = F'\Delta x' = \Delta K = F\Delta x$$

$$\Delta x' = \frac{F}{F'}\Delta x = \frac{F}{2F}\Delta x = \frac{1}{2}\Delta x$$

y la distancia es más corta, como sugiere el argumento conceptual.

Ejemplo conceptual 7.7 ¿La rampa reduce el trabajo requerido?

Un hombre quiere cargar un refrigerador en una camioneta con el uso de una rampa a un ángulo θ , como se muestra en la figura 7.15. Él afirma que se debe requerir menos trabajo para cargar la camioneta si la longitud L de la rampa aumenta por lo que el ángulo θ será más pequeño. ¿Esta afirmación es válida?

SOLUCIÓN

No. Suponga que el refrigerador se sube por la rampa en una carretilla con rapidez constante. En este caso, para el sistema del refrigerador y la carretilla, $\Delta K = 0$. La fuerza normal que ejerce la rampa sobre el sistema se dirige 90° al desplazamiento de su punto de aplicación y por tanto no realiza trabajo sobre el sistema. Puesto que $\Delta K = 0$, el teorema trabajo-energía cinética produce

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{por hombre}} + W_{\text{por gravedad}} = 0$$

El trabajo realizado por la fuerza gravitacional es igual al producto del peso mg del sistema, la distancia L a través de la que se desplaza el refrigerador y $\cos(\theta + 90^\circ)$. En consecuencia,

$$W_{\text{por hombre}} = -W_{\text{por gravedad}} = -(mg)(L)[\cos(\theta + 90^\circ)]$$

$$= mgL \sin \theta = mgh$$

donde $h = L \sin \theta$ es la altura de la rampa. Por tanto, el hombre debe efectuar la misma cantidad de trabajo mgh sobre el sistema *sin importar* la longitud de la rampa. El trabajo sólo depende de la altura de la rampa. Aunque se requiere menos fuerza con una rampa más larga, el punto de aplicación de dicha fuerza se mueve a través de un mayor desplazamiento.

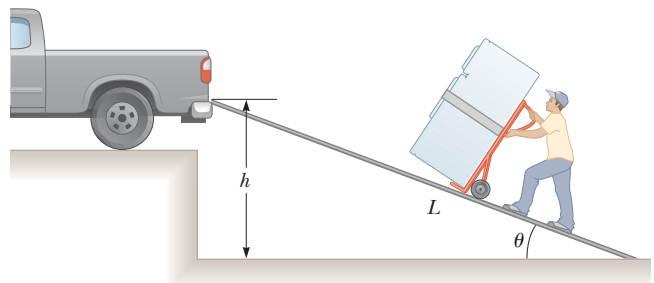


Figura 7.15 (Ejemplo conceptual 7.7) Un refrigerador transportado con una carretilla con ruedas sin fricción se mueve por una rampa con rapidez constante.

7.6 Energía potencial de un sistema

Hasta el momento en este capítulo se ha definido un sistema en general, pero la atención se ha centrado principalmente en partículas u objetos sometidos a la influencia de fuerzas externas. Considere ahora sistemas de dos o más partículas u objetos que interactúan a través de una fuerza que es *interna* al sistema. La energía cinética de tal sistema es la suma algebraica de las energías cinéticas de todas las partes del sistema. Sin embargo, puede haber sistemas en los que un objeto sea tan masivo que se pueda modelar como fijo y su energía cinética sea despreciable. Por ejemplo, si se considera un sistema bola-Tierra mientras la bola cae a la Tierra, la energía cinética del sistema se puede considerar sólo como la energía cinética de la bola. La Tierra se mueve tan lentamente en este proceso que se puede ignorar su energía cinética. Por otra parte, la energía cinética de un sistema de dos electrones debe incluir las energías cinéticas de ambas partículas.

Piense en un sistema que consiste de un libro y la Tierra, que interactúa vía la fuerza gravitacional. Se hace algo de trabajo en el sistema al levantar el libro lentamente desde el reposo a través de un desplazamiento vertical $\Delta\vec{r} = (y_f - y_i)\hat{j}$ como en la figura 7.16. De acuerdo con la discusión del trabajo como una transferencia de energía, este trabajo realizado en el sistema debe aparecer como un aumento en energía del sistema. El libro está en reposo antes y después de efectuar el trabajo. Por tanto, no hay cambio en la energía cinética del sistema.

Puesto que el cambio de energía del sistema no es en la forma de energía cinética, el teorema trabajo-energía cinética no se aplica en este caso por lo que el cambio en energía debe aparecer como alguna otra forma de almacenamiento de energía que no sea energía cinética. Después de levantar el libro, se le podría liberar y dejar que caiga de vuelta a la posición y_i . Note que el libro (y, por tanto, el sistema) ahora tiene energía cinética y su fuente está en el trabajo que se hizo al levantar el libro. Mientras el libro estaba en el punto más alto, el sistema tenía el potencial de *poseer* energía cinética, pero no lo hizo hasta que al libro se le permitió caer. En consecuencia, al mecanismo de almacenamiento de energía antes de que el libro se libere se le llama **energía potencial**. Se encontrará que la energía potencial de un sistema sólo se asocia con tipos específicos de fuerzas que actúan entre partes de un sistema. La cantidad de energía potencial en el sistema se determina mediante la *configuración* del mismo. Mover las partes del sistema a diferentes posiciones o girarlos cambia su configuración y por ende su energía potencial.

Ahora deduzca una expresión para la energía potencial asociada con un objeto en cierta ubicación sobre la superficie de la Tierra. Considere un agente externo que levanta un objeto de masa m desde una altura inicial y_i sobre el suelo a una altura final y_f como en la figura 7.15. Se supone que el levantamiento se hace lentamente, sin aceleración, de modo que la fuerza aplicada del agente se representa como igual en magnitud a la fuerza gravitacional en el objeto: éste se modela como una partícula en equilibrio que se mueve con velocidad constante. El trabajo realizado por el agente externo sobre el sistema (objeto y la Tierra) conforme el objeto se somete este desplazamiento hacia arriba, está dado por el producto de la fuerza aplicada hacia arriba \vec{F}_{apli} y el desplazamiento hacia arriba de esta fuerza, $\Delta\vec{r} = \Delta y\hat{j}$:

$$W_{\text{ext}} = (\vec{F}_{\text{apli}}) \cdot \Delta\vec{r} = (mg\hat{j}) \cdot [(y_f - y_i)\hat{j}] = mgy_f - mgy_i \quad (7.18)$$

donde este resultado es el trabajo neto efectuado en el sistema porque la fuerza aplicada es la única fuerza en el sistema desde el entorno. (Recuerde que la fuerza gravitacional es *interna* al sistema.) Observe la similitud entre la ecuación 7.18 y la ecuación 7.15. En cada ecuación, el trabajo realizado sobre un sistema es igual a una diferencia entre los valores final e inicial de una cantidad. En la ecuación 7.15, el trabajo representa una transferencia de energía en el sistema y el incremento en energía del sistema es en forma cinética. En la ecuación 7.18, el trabajo representa una transferencia de energía al sistema y la energía del sistema se presenta en una forma diferente, a lo que se llamamos energía potencial.

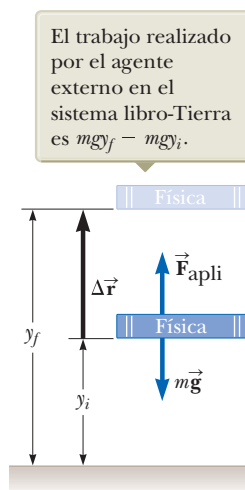


Figura 7.16 Un agente externo levanta lentamente un libro desde la altura y_i a una altura y_f .

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.7

Energía potencial La frase *energía potencial* no se refiere a algo que tenga el potencial de convertirse en energía. La energía potencial es energía.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.8

La energía potencial pertenece a un sistema La energía potencial siempre se asocia con un sistema de dos o más objetos interactuando. Cuando un objeto pequeño se mueve cerca de la superficie de la Tierra bajo la influencia de la gravedad, a veces se puede hacer referencia a la energía potencial “asociada con el objeto” en lugar de “asociada con el sistema”, que es lo más apropiado, porque la Tierra no se mueve significativamente. Sin embargo, en el texto no se hará alusión a la energía potencial “del objeto” porque esta frase ignora el papel de la Tierra.

En consecuencia, la cantidad mgy se puede identificar como la **energía potencial gravitacional** U_g del sistema de un objeto de masa m y la Tierra:

Energía potencial gravitacional ►

$$U_g \equiv mgy \quad (7.19)$$

Las unidades de la energía potencial gravitacional son joules, las mismas unidades que el trabajo y la energía cinética. La energía potencial, al igual que el trabajo y la energía cinética, es una cantidad escalar. Observe que la ecuación 7.19 sólo es válida para objetos cerca de la superficie de la Tierra, donde g es aproximadamente constante.²

Al usar la definición de energía potencial gravitacional, la ecuación 7.18 ahora se puede describir como

$$W_{\text{ext}} = \Delta U_g \quad (7.20)$$

que matemáticamente describe que el trabajo externo neto efectuado en el sistema en esta situación aparece como un cambio en la energía potencial gravitacional del sistema.

La ecuación 7.20 es de forma similar al teorema trabajo-energía cinética, ecuación 7.17. En ésta, el trabajo se realiza sobre un sistema y la energía aparece en el sistema como energía cinética, representando *movimiento* de los componentes del sistema. En la ecuación 7.20, el trabajo se efectúa en el sistema y la energía se presenta en el sistema como energía potencial, representando un cambio en la *configuración* de los componentes del sistema.

La energía potencial gravitacional sólo depende de la altura vertical del objeto por arriba de la superficie de la Tierra. La misma cantidad de trabajo se debe realizar en un sistema objeto-Tierra ya sea que el objeto se levante verticalmente desde la Tierra o se empuje desde el mismo punto hacia arriba de un plano inclinado sin fricción para terminar en la misma altura. Este enunciado se verifica para una situación específica como rodar un refrigerador sobre una rampa en el ejemplo conceptual 7.7. Se puede demostrar que este enunciado es verdadero en general al calcular el trabajo efectuado en un objeto por un agente que mueve el objeto a lo largo de un desplazamiento que tiene componentes tanto vertical como horizontal:

$$W_{\text{ext}} = (\vec{\mathbf{F}}_{\text{apli}}) \cdot \Delta \vec{\mathbf{r}} = (mg\hat{\mathbf{j}}) \cdot [(x_f - x_i)\hat{\mathbf{i}} + (y_f - y_i)\hat{\mathbf{j}}] = mgy_f - mgy_i$$

donde no hay término que involucre a x en el resultado final porque $\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0$.

Al resolver problemas, debe elegir una configuración de referencia para la cual la energía potencial gravitacional del sistema se haga igual a algún valor de referencia, que normalmente es cero. La elección de la configuración de referencia es completamente arbitraria porque la cantidad importante es la *diferencia* en energía potencial, y esta diferencia es independiente de la elección de la configuración de referencia.

Con frecuencia es conveniente elegir como la configuración de referencia para la energía potencial gravitacional la configuración en la que un objeto está en la superficie de la Tierra, pero esta elección no es esencial. Frecuentemente el enunciado del problema sugiere aplicar una configuración conveniente.

- EJEMPLO RÁPIDO 7.6** Elija la respuesta correcta. La energía potencial gravitacional de un sistema (a) siempre es positiva, (b) siempre es negativa, (c) puede ser negativa o positiva.

Ejemplo 7.8 El orgulloso atleta y el dedo lastimado

Un atleta muestra un trofeo cuando, por un descuido, se desliza de sus manos y cae sobre un dedo de su pie. Si elige el nivel del suelo como el punto $y = 0$ de su sistema coordenado, estime el cambio en energía potencial gravitacional del sistema trofeo-Tierra mientras el trofeo cae. Repita el cálculo usando la coronilla de la cabeza del atleta como el origen de coordenadas.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El trofeo cambia su posición vertical en relación con la superficie de la Tierra. Asociado con este cambio de posición, hay un cambio en la energía potencial gravitacional del sistema trofeo-Tierra.

²La suposición de que g es constante es válida en tanto que el desplazamiento vertical del objeto sea pequeño en comparación con el radio de la Tierra.

7.8 continuación

Categorizar Se evalúa un cambio de energía potencial gravitacional definido en esta sección, de modo que este ejemplo se clasifique como un problema de sustitución. También es un problema de estimación porque en el enunciado del problema no se proporcionan números.

El enunciado del problema dice que la configuración de referencia del sistema trofeo-Tierra que corresponde a energía potencial cero es cuando el punto más bajo del trofeo está en el suelo. Para encontrar el cambio de energía del sistema, es necesario estimar unos cuantos valores. Un trofeo tiene una masa de aproximadamente 2 kg, y la parte superior del dedo del pie de una persona está aproximadamente a 0.05 m sobre el suelo. Además, se debe suponer que el trofeo cae desde una altura de 1.4 m.

Calcule la energía potencial gravitacional del sistema trofeo-Tierra justo antes de que el trofeo se libere:

$$U_i = mgy_i = (2 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(1.4 \text{ m}) = 27.4 \text{ J}$$

Calcule la energía potencial gravitacional del sistema trofeo-Tierra cuando el trofeo llega al dedo del atleta:

$$U_f = mgy_f = (2 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(0.05 \text{ m}) = 0.98 \text{ J}$$

Evalúe el cambio en energía potencial gravitacional del sistema trofeo-Tierra:

$$\Delta U_g = 0.98 \text{ J} - 27.4 \text{ J} = -26.4 \text{ J}$$

Probablemente sólo deben mantenerse dos dígitos debido a lo burdo de las estimaciones; en consecuencia, se estima que el cambio en energía potencial gravitacional es -26 J . El sistema tiene 27 J de energía potencial gravitacional antes de que el trofeo inicie su caída y aproximadamente 1 J de energía potencial cuando el trofeo llega a la parte superior del dedo.

El segundo caso indica que la configuración de referencia del sistema para la energía potencial cero se elige cuando el trofeo está en la cabeza del atleta (aun cuando el trofeo nunca está en tal posición en su movimiento). Se estima que esta posición es 2.0 m sobre el suelo.

Calcule la energía potencial gravitacional del sistema trofeo-Tierra justo antes de que el trofeo se libere desde su posición 0.6 m abajo de la cabeza del atleta:

$$U_i = mgy_i = (2 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(-0.6 \text{ m}) = -11.8 \text{ J}$$

Calcule la energía potencial gravitacional del sistema trofeo-Tierra cuando el trofeo llega al dedo del atleta localizado 1.95 m abajo de su cabeza:

$$U_f = mgy_f = (2 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(-1.95 \text{ m}) = -38.2 \text{ J}$$

Evalúe el cambio en energía potencial gravitacional del sistema trofeo-Tierra:

$$\Delta U_g = -38.2 \text{ J} - (-11.8 \text{ J}) = -26.4 \text{ J} \approx -26 \text{ J}$$

Este valor es el mismo que antes, como debe ser. El cambio en energía potencial es independiente de la elección de la configuración del sistema representando el cero de energía potencial. Si se quiere mantener sólo un dígito en las estimaciones, entonces el resultado final podría escribirse como $3 \times 10^1 \text{ J}$.

Energía potencial elástica

Debido a que los componentes de un sistema pueden interactuar entre sí mediante diferentes tipos de fuerzas, es posible que en un sistema existan distintos tipos de energía potencial. Ya está familiarizado con la energía potencial gravitacional de un sistema en donde sus componentes interactúan vía la fuerza gravitacional. Explore un segundo tipo de energía potencial que puede poseer un sistema.

Considere un sistema que consta de un bloque y un resorte, como se muestra en la figura 7.17 (página 168). En la sección 7.4 se consideró que sólo el bloque era el sistema. Ahora se incluye tanto el bloque como el resorte formando el sistema aceptando que la fuerza del resorte es la interacción entre los dos componentes del sistema. La fuerza que el resorte ejerce en el bloque está dada por $F_s = -kx$ (ecuación 7.9). El trabajo externo realizado por una fuerza aplicada F_{apli} en el sistema bloque-resorte se proporciona por la ecuación 7.13:

$$W_{\text{ext}} = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 \quad (7.21)$$

En esta situación, las coordenadas inicial y final x del bloque se miden desde su posición de equilibrio, $x = 0$. De nuevo (como en el caso gravitacional, ecuación 7.18) el trabajo



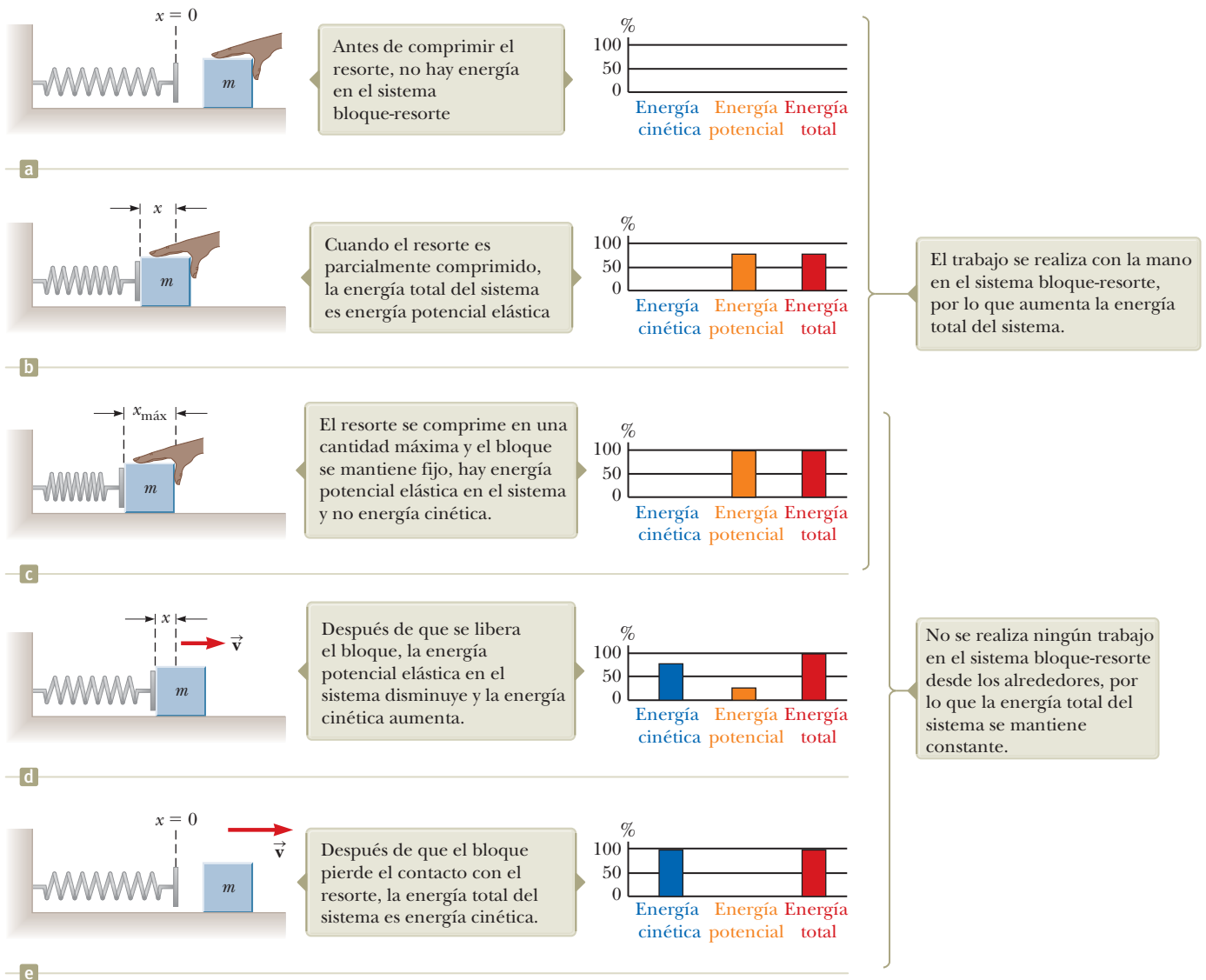


Figura 7.17 Un resorte sobre una superficie horizontal sin fricción se comprime una distancia $x_{m\acute{a}x}$ cuando un bloque de masa m se empuja contra él. Entonces se libera el bloque y el resorte lo empuja hacia la derecha, y el bloque finalmente pierde contacto con el resorte. Los incisos (a) hasta (e) muestran diversos instantes en el proceso. Las gráficas de barras de energía, a la derecha de cada inciso, ayudan a monitorear la energía en el sistema.

efectuado en el sistema es igual a la diferencia entre los valores inicial y final de una expresión relacionada con la configuración del sistema. La función de **energía potencial elástica** asociada con el sistema bloque-resorte se define como

Energía potencial elástica ►

$$U_s \equiv \frac{1}{2}kx^2 \tag{7.22}$$

La ecuación 7.21 puede expresarse en la forma

$$W_{\text{ext}} = \Delta U_s \tag{7.23}$$

Compare esta ecuación con las ecuaciones 7.17 y 7.20. En las tres situaciones, el trabajo externo se realiza en el sistema y, como un resultado, una forma de almacenamiento de energía en el sistema cambia.

La energía potencial elástica del sistema se puede percibir como la energía almacenada en el resorte deformado (uno que está comprimido o estirado desde su posición de equilibrio). La energía potencial elástica almacenada en un resorte es cero siempre que el



resorte no esté deformado ($x = 0$). La energía se almacena en el resorte sólo cuando el resorte está estirado o comprimido. Puesto que la energía potencial elástica es proporcional a x^2 , se ve que U_s siempre es positiva en un resorte deformado. Ejemplos cotidianos del almacenamiento de energía potencial elástica pueden encontrarse en relojes antiguos o en relojes que operan mediante un resorte enrollado, y en pequeños juguetes de cuerda para los niños.

Una vez más, considere la figura 7.17 la cual muestra un resorte sobre una superficie horizontal sin fricción. Cuando un agente externo empuja un bloque contra el resorte, la energía potencial elástica y la energía total del sistema se incrementan como lo indica la figura 7.17b. Cuando el resorte se comprime una distancia $x_{m\acute{a}x}$ (figura 7.17c), la energía potencial elástica almacenada en el resorte es $\frac{1}{2}kx_{m\acute{a}x}^2$. Cuando el bloque se libera a partir del reposo, el resorte ejerce una fuerza sobre el bloque y empuja a éste hacia la derecha. La energía potencial elástica del sistema disminuye, mientras que la energía cinética aumenta y la energía total permanece fija (figura 7.17d). Cuando el resorte retorna a su longitud original, la energía potencial elástica almacenada es completamente transformada en energía cinética del bloque (figura 7.17e).

- E XAMEN RÁPIDO 7.7** Una bola se conecta a un resorte ligero suspendido verticalmente, como se muestra en la figura 7.18. Cuando se jala hacia abajo desde su posición de equilibrio y se libera, la bola oscila arriba y abajo. **i)** En el sistema de *la bola, el resorte y la Tierra*, ¿qué formas de energías existen durante el movimiento? **(a)** cinética y potencial elástica, **(b)** cinética y potencial gravitacional, **(c)** cinética, potencial elástica y potencial gravitacional, **(d)** potencial elástica y potencial gravitacional. **ii)** En el sistema de *la bola y el resorte*, ¿qué formas de energía existen durante el movimiento?
- Elija de las mismas posibilidades de la **(a)** a la **(d)**.



Figura 7.18 (Examen rápido 7.7) Una bola conectada a un resorte sin masa suspendido verticalmente. ¿Qué formas de energía potencial se asocian con el sistema cuando la bola se desplaza hacia abajo?

Gráficas de barras de energía

La figura 7.17 muestra una representación gráfica importante de información relacionada con la energía de sistemas llamada **gráfica de barras de energía**. El eje vertical representa la cantidad de energía de una clase determinada en el sistema. El eje horizontal muestra las clases de energía en el sistema. La gráfica de barras de la figura 7.17a muestra que el sistema contiene energía cero porque el resorte está relajado y el bloque no se mueve. Entre la figura 7.17a y la figura 7.17c, la mano realiza trabajo sobre el sistema, comprime el resorte y almacena energía potencial elástica en el sistema. En la figura 7.17d, el bloque ha sido liberado y se mueve hacia la derecha mientras continúa en contacto con el resorte. La altura de la barra para la energía potencial elástica del sistema disminuye, se incrementa la barra de la energía cinética, y la barra de la energía total permanece fija. En la figura 7.17e, el resorte ha retornado a su longitud relajada y ahora el sistema sólo contiene energía cinética asociada al bloque en movimiento.

Las gráficas de barras de energía pueden ser representaciones muy útiles para monitorear los diversos tipos de energía en un sistema. Para practicar, intente elaborar gráficas de barras de energía para el sistema libro-Tierra de la figura 7.16 cuando el libro es soltado desde una posición elevada. La figura 7.18 asociada con el examen rápido 7.7 muestra otro sistema para el cual sería un buen ejercicio dibujar su gráfica de barras de energía. En este capítulo en algunas figuras se mostrarán gráficas de barras de energía.

7.7 Fuerzas conservativas y no conservativas

Ahora se introduce un tercer tipo de energía que un sistema puede poseer y almacenar. Imagine que el libro de la figura 7.19a (página 170) ha sido acelerado por su mano y ahora se desliza hacia la derecha sobre la superficie de una mesa pesada y frena debido a la fuerza de fricción. Suponga que la *superficie* es el sistema. A continuación, de nuestra explicación del trabajo, podemos argumentar que la fuerza de fricción del libro que se desliza realiza trabajo en la superficie. La fuerza sobre ésta es hacia la derecha y el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza es hacia la derecha porque el libro se ha



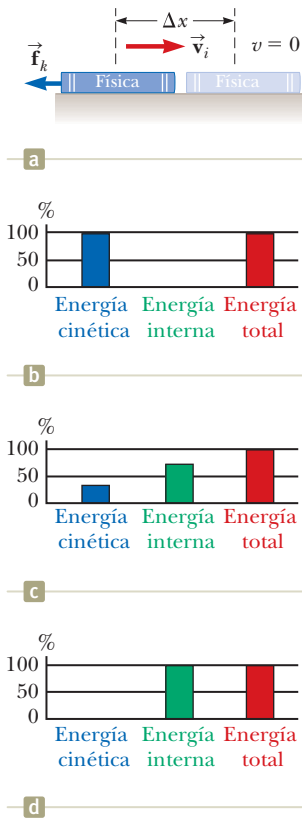


Figura 7.19 (a) Un libro que se desliza hacia la derecha sobre una superficie horizontal frena en presencia de una fuerza de fricción cinética que actúa hacia la izquierda. (b) Gráfica de barras de energía que muestra la energía en el sistema del libro y la superficie en el instante de tiempo inicial. (c) Mientras el libro se desliza, disminuye la energía cinética del sistema conforme es transformada a energía interna. (d) Después de que el libro se detiene, la energía del sistema es toda energía interna.

movido en esa dirección. El trabajo efectuado sobre la superficie es positivo, pero ésta no se mueve después de que el libro se detiene. Sobre la superficie se realizó trabajo positivo, aunque no hay aumento en la energía cinética de la superficie. Tampoco hay ningún cambio en la de cualquier sistema. Así que se ha realizado trabajo, ¿dónde está la energía?

A partir de su experiencia cotidiana con el deslizamiento sobre superficies con fricción, probablemente usted puede adivinar que la superficie se *calentará* después de que el libro se deslice sobre ella. Esto fue lo que encontró cuando lija la madera en la sección “Imagine”. El trabajo que se hizo sobre la superficie se fue en calentar a ésta en lugar de aumentar su rapidez o cambiar la configuración de un sistema. A la energía asociada con la temperatura de un sistema se le llama **energía interna**, que se simboliza E_{int} . (En el capítulo 19 se definirá de manera más general la energía interna.) En este caso, el trabajo realizado sobre la superficie de hecho representa la energía transferida hacia dentro del sistema, pero aparece en el sistema como energía interna en lugar de energía cinética o potencial.

Ahora considere el libro y la superficie en la figura 7.19a juntos como un sistema. Inicialmente, el sistema tiene energía cinética porque el libro se está moviendo. Mientras el libro se desliza, aumenta la energía interna del sistema: el libro y la superficie están más calientes que antes. Cuando el libro se detiene, la energía cinética se ha transformado completamente a energía interna. Se puede considerar a la fuerza fricción dentro del sistema (es decir, entre el libro y la superficie) como un *mecanismo de transformación* para energía. Esta fuerza transforma la energía cinética del sistema en energía interna. ¡Junta tus manos y frótalas vigorosamente para experimentar este efecto!

Las figuras 7.19b a la 7.19d muestran gráficas de barras de energía para la situación en la figura 7.19a. En la figura 7.19b, la gráfica de barras muestra que el sistema contiene energía cinética en el instante en que su mano libera el libro. En ese instante se define como cero la cantidad de energía interna de referencia. La figura 7.19c muestra a la energía cinética transformándose a energía interna conforme el libro se frena debido a la fuerza de fricción. En la figura 7.19d, después de que el libro deja de deslizarse, la energía cinética es cero y ahora el sistema sólo contiene energía interna E_{int} . Note que la barra de energía total en rojo no ha cambiado durante el proceso. La cantidad de energía interna en el sistema, después de que el libro llega al reposo, es igual a la cantidad de energía cinética en el sistema en el instante inicial. Esta igualdad se describe mediante un importante principio llamado *conservación de energía*. Este principio se explorará en el capítulo 8.

Ahora considere con más detalle un objeto que se mueve hacia abajo, cerca de la superficie de la Tierra. El trabajo realizado por la fuerza gravitacional en el objeto no depende de si cae vertical o se desliza hacia abajo sobre un plano inclinado con fricción. Todo lo que importa es el cambio de elevación del objeto. Sin embargo, la transformación de energía a energía interna debida a la fricción en dicho plano depende de la distancia que el objeto se desliza. Entre más largo es el plano inclinado, más energía potencial se transforma a energía interna. En otras palabras, la trayectoria no hace diferencia cuando se considera el trabajo realizado por la fuerza gravitacional, pero sí hace una diferencia cuando se considera la transformación de energía debida a fuerzas de fricción. Se puede usar esta dependencia variable con la trayectoria para clasificar fuerzas como *conservativas* o *no conservativas*. De las dos fuerzas mencionadas, la fuerza gravitacional es conservativa y la fuerza de fricción es no conservativa.

Fuerzas conservativas

Las **fuerzas conservativas** tienen estas dos propiedades equivalentes:

1. El trabajo realizado por una fuerza conservativa en una partícula moviéndose entre dos puntos cualesquiera es independiente de la trayectoria tomada por la partícula.
2. El trabajo efectuado por una fuerza conservativa en una partícula moviéndose a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es cero. (Una trayectoria cerrada es aquella en la que el punto de partida y el punto final son idénticos.)

La fuerza gravitacional es un ejemplo de fuerza conservativa; la fuerza que un resorte ideal ejerce en cualquier objeto unido al resorte es otra. El trabajo realizado por la fuerza

Propiedades de fuerzas conservativas



gravitacional en un objeto moviéndose entre dos puntos cualesquiera cerca de la superficie de la Tierra es $W_g = -mg\hat{\mathbf{j}} \cdot [(y_f - y_i)\hat{\mathbf{j}}] = mgy_i - mgy_f$. A partir de esta ecuación, observe que W_g sólo depende de las coordenadas y inicial y final del objeto y por tanto es independiente de la trayectoria. Además, W_g es cero cuando el objeto se traslada en cualquier trayectoria cerrada (donde $y_i = y_f$).

Para el caso del sistema objeto-resorte, el trabajo W_s realizado por la fuerza del resorte está dado por $W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$ (ecuación 7.12). Se ve que la fuerza del resorte es conservativa porque W_s sólo depende de las coordenadas x inicial y final del objeto y es cero para cualquier trayectoria cerrada (donde $x_i = x_f$).

Fuerzas no conservativas

Una fuerza es **no conservativa** si no satisface las mencionadas propiedades 1 y 2. El trabajo efectuado por una fuerza no conservativa depende de la trayectoria. Se define la suma de las energías cinética y potencial de un sistema como la **energía mecánica** del sistema:

$$E_{\text{mec}} \equiv K + U \quad (7.24)$$

donde K incluye la energía cinética de todos los componentes móviles del sistema y U incluye todos los tipos de energía potencial en el sistema. Para un libro que cae bajo la acción de la fuerza gravitacional, la energía mecánica del sistema libro-Tierra permanece fija; la energía potencial gravitacional se transforma a energía cinética, y la energía total del sistema permanece constante. Sin embargo, las fuerzas no conservativas que actúan dentro de un sistema causan un *cambio* en la energía mecánica del sistema. Por ejemplo, para un libro que se desliza sobre una superficie horizontal que no es sin fricción (figura 7.18a), la energía mecánica del sistema libro-superficie se transforma en energía interna, como se discutió anteriormente. Sólo parte de la energía cinética del libro se transforma en energía interna en el libro. El resto aparece como energía interna en la superficie. (Cuando tropieza y se desliza por el suelo de un gimnasio, no sólo la piel en sus rodillas se calienta, ¡también lo hace el piso!) Puesto que la fuerza de fricción cinética transforma la energía mecánica de un sistema en energía interna, esta es una fuerza no conservativa.

Como ejemplo de la dependencia del trabajo con la trayectoria para una fuerza no conservativa, considere la figura 7.20. Suponga que desplaza un libro entre dos puntos sobre una mesa. Si el libro se desplaza en una línea recta a lo largo de la trayectoria azul entre los puntos A y B de la figura 7.20, realiza cierta cantidad de trabajo contra la fuerza de fricción cinética para mantener al libro moviéndose con una rapidez constante. Ahora, piense que empuja el libro a lo largo de la trayectoria semicircular café en la figura 7.20. Realiza más trabajo contra la fricción a lo largo de esta trayectoria curva que a lo largo de la trayectoria recta porque el camino curvo es más largo. El trabajo realizado sobre el libro depende de la trayectoria, así que la fuerza de fricción *no puede ser* conservativa.

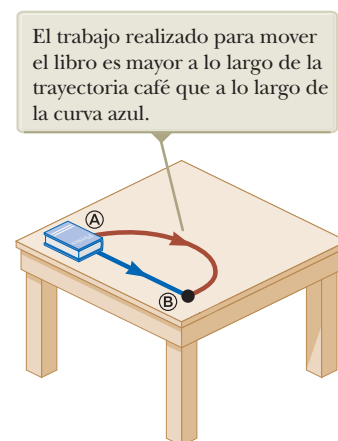


Figura 7.20 El trabajo efectuado contra la fuerza de fricción cinética depende de la trayectoria tomada mientras el libro se traslada de A a B.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.9

Advertencia sobre ecuaciones similares Compare la ecuación 7.25 con la ecuación 7.20. Estas ecuaciones son similares excepto por el signo negativo, que es una fuente común de confusión. La ecuación 7.20 dice que el trabajo positivo realizado por un agente externo en un sistema causa un incremento en la energía potencial del sistema (sin cambio alguno en la energía cinética o en la energía interna). La ecuación 7.25 establece que el trabajo positivo efectuado en una componente de un sistema por una fuerza conservativa, interna al sistema, causa una disminución de la energía potencial del sistema.

7.8 Diagramas de energía y equilibrio de un sistema

Se puede asociar una **función de energía potencial** U para un sistema con una fuerza que actúa entre los componentes del sistema, pero *sólo podemos hacerlo si la fuerza es conservativa*. En general, el trabajo W_{int} hecho por una fuerza conservativa en un objeto que es un componente de un sistema a medida que el sistema cambia de una configuración a otra es igual al valor inicial de la energía potencial del sistema menos el valor final:

$$W_{\text{int}} = U_i - U_f = -\Delta U \quad (7.25)$$

El subíndice “int” en la ecuación 7.25 nos recuerda que el trabajo que estamos analizando es hecho por un componente del sistema a otro y es por tanto *interno* para el sistema. Es diferente del trabajo W_{ext} hecho *en* el sistema en su conjunto por un agente externo. Como ejemplo, compare la ecuación 7.25 con la ecuación para el trabajo realizado por un agente externo en un sistema bloque-resorte (ecuación 7.23) conforme cambia la extensión del resorte.

Imagine un sistema de partículas en el cual una fuerza conservativa \vec{F} actúa entre las partículas. También imagine que la configuración del sistema cambia debido al movimiento de una partícula a lo largo del eje x . Entonces se puede evaluar el trabajo interno realizado por esta fuerza conforme la partícula se mueve sobre el eje x^3 utilizando las ecuaciones 7.7 y 7.25:

$$W_{\text{int}} = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = -\Delta U \quad (7.26)$$

donde F_x es la componente de \vec{F} en la dirección del desplazamiento. La ecuación 7.26 también se puede expresar como

$$\Delta U = U_f - U_i = - \int_{x_i}^{x_f} F_x dx \quad (7.27)$$

Por tanto, ΔU es negativa cuando F_x y dx están en la misma dirección, como cuando se baja un objeto en un campo gravitacional o cuando un resorte empuja un objeto hacia el equilibrio.

Con frecuencia es conveniente establecer alguna ubicación particular x_i de un componente de un sistema como representativo de una configuración de referencia y medir todas las diferencias de energía potencial en relación a él. Entonces se puede definir la función de energía potencial como

$$U_f(x) = - \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + U_i \quad (7.27)$$

Frecuentemente el valor de U_i se considera cero para la configuración de referencia. No importa qué valor se asigne a U_i porque cualquier valor distinto de cero simplemente desplaza a $U_f(x)$ en una cantidad constante y sólo el cambio en energía potencial es físicamente significativo.

Si el punto de aplicación de la fuerza se somete a un desplazamiento infinitesimal dx , el cambio infinitesimal en la energía potencial del sistema dU se expresa como

$$dU = -F_x dx$$

Por tanto, la fuerza conservativa se relaciona con la función de energía potencial mediante la correspondencia⁴

$$F_x = - \frac{dU}{dx} \quad (7.29)$$

Relación de fuerza entre componentes de un sistema y la energía potencial del sistema

Es decir, la componente x de una fuerza conservativa que actúa en un objeto dentro de un sistema es igual a la derivada negativa de la energía potencial del sistema en relación con x .

Es fácil comprobar la ecuación 7.29 para los dos ejemplos ya analizados. En el caso del resorte deformado, $U_s = \frac{1}{2}kx^2$; por tanto

$$F_s = - \frac{dU_s}{dx} = - \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}kx^2 \right) = -kx$$

que corresponde a la fuerza restauradora en el resorte (ley de Hooke). Ya que la función de energía potencial gravitacional es $U_g = mgy$, se sigue de la ecuación 7.29 que $F_g = -mg$ cuando deriva U_g respecto de y en lugar de x .

Ahora se ve que U es una función importante porque de ella se deduce una fuerza conservativa. Además, la ecuación 7.29 pone en claro que sumar una constante a la energía potencial no es relevante porque la derivada de una constante es cero.

³Para un desplazamiento general, el trabajo efectuado en dos o tres dimensiones también es igual a $-\Delta U$, donde $U = U(x,y,z)$. Esta ecuación se escribe formalmente como $W_{\text{int}} = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} = U_i - U_f$.

⁴En tres dimensiones, la expresión es

$$\vec{F} = - \frac{\partial U}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \hat{k}$$

donde $(\partial U / \partial x)$ y así sucesivamente son derivadas parciales. En el lenguaje del cálculo vectorial, \vec{F} es igual al negativo del *gradiente* de la cantidad escalar $U(x, y, z)$.

- E XAMEN RÁPIDO 7.8** ¿Qué representa la pendiente de una gráfica de $U(x)$ en función de x ? (a) la magnitud de la fuerza en el objeto, (b) el negativo de la magnitud de la fuerza en el objeto, (c) la componente x de la fuerza en el objeto, (d) el negativo de la componente x de la fuerza en el objeto.

7.9 Diagramas de energía y equilibrio de un sistema

Con frecuencia el movimiento de un sistema se puede entender cualitativamente mediante una gráfica de su energía potencial contra la posición de un componente del sistema. Considere la función de energía potencial para un sistema bloque-resorte, dada por $U_s = \frac{1}{2}kx^2$. En la figura 7.21a se grafica esta función en términos de x , donde x es la posición del bloque.

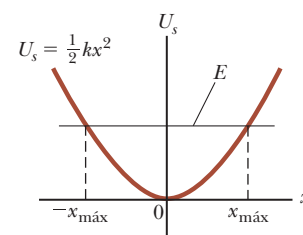
Como se vio en el examen rápido 7.8, la componente x de la fuerza es igual al negativo de la pendiente de la curva U en función de x . Cuando el bloque se coloca en reposo en la posición de equilibrio del resorte ($x = 0$), donde $F_s = 0$, permanecerá ahí a menos que alguna fuerza externa F_{ext} actúe en él. Si esta fuerza externa estira el resorte desde el equilibrio, x es positivo y la pendiente dU/dx es positiva; por tanto, la fuerza F_s que ejerce el resorte es negativa y el bloque acelera de regreso hacia $x = 0$ cuando se libera. Si la fuerza externa comprime el resorte, x es negativa y la pendiente es negativa; entonces, F_s es positiva y una vez más la masa acelera hacia $x = 0$ al momento de liberarse.

A partir de este análisis, se concluye que la posición $x = 0$ para un sistema bloque-resorte es aquella de **equilibrio estable**. Es decir, cualquier movimiento que se aleje de esta posición da como resultado una fuerza que se dirige de regreso hacia $x = 0$. En general, las configuraciones de un sistema en equilibrio estable corresponden a aquellas para las cuales $U(x)$ del sistema es un mínimo.

Otro sistema mecánico simple con una configuración de equilibrio estable es una bola que rueda en el fondo de un tazón. En cualquier momento que la bola se desplaza de su posición más baja, tiende a regresar a dicha posición cuando se libera.

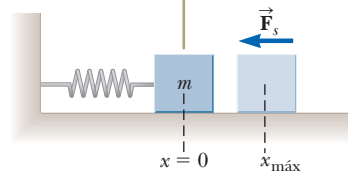
Ahora considere una partícula moviéndose a lo largo del eje x bajo la influencia de una fuerza conservativa F_x , donde la curva U en términos de x se muestra en la figura 7.22. Nuevamente, $F_x = 0$ en $x = 0$, y por ende la partícula está en equilibrio en este punto. Sin embargo, esta posición es de **equilibrio inestable** por la siguiente razón. Suponga que la partícula se desplaza hacia la derecha ($x > 0$). Ya que la pendiente es negativa para $x > 0$, $F_x = -dU/dx$ es positiva y la partícula acelera alejándose de $x = 0$. Si en vez de ello la partícula está en $x = 0$ y se desplaza hacia la izquierda ($x < 0$), la fuerza es negativa porque la pendiente es positiva para $x < 0$ y la partícula de nuevo acelera alejándose de la posición de equilibrio. En esta situación la posición $x = 0$ es de equilibrio inestable porque, para cualquier desplazamiento a partir de este punto, la fuerza empuja la partícula más lejos del equilibrio y hacia una posición de menor energía potencial. Un lápiz que se equilibra sobre su punta está en una posición de equilibrio inestable. Si el lápiz se desplaza un poco de su posición absolutamente vertical y después se libera, es seguro que caerá. En general, las configuraciones de un sistema en equilibrio inestable corresponden a aquellas para las que $U(x)$ del sistema es un máximo.

Por último, una configuración llamada **equilibrio neutro** surge cuando U es constante en alguna región. Pequeños desplazamientos de un objeto desde una posición en esta región no producen fuerzas restauradoras ni de ruptura. Una bola que yace sobre una superficie horizontal plana es un ejemplo de un objeto en equilibrio neutro.



a

La fuerza restauradora que ejerce el resorte siempre actúa hacia $x = 0$, la posición de equilibrio estable.



b

Figura 7.21 (a) Energía potencial como función de x para el sistema bloque-resorte sin fricción que se muestra en (b). Para una energía dada E del sistema, el bloque oscila entre los puntos de retorno, los cuales tienen las coordenadas $x = \pm x_{máx}$.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.10

Diagramas de energía Un error común es pensar que la energía potencial en la gráfica de un diagrama de energía representa la altura de algún objeto. Por ejemplo, no es el caso en la figura 7.21, donde el bloque sólo se mueve horizontalmente.

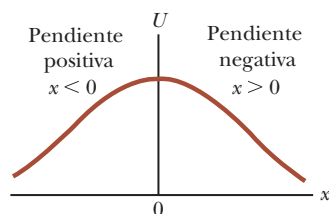


Figura 7.22 Gráfica de U en función de x para una partícula que tiene una posición de equilibrio inestable ubicado en $x = 0$. Para cualquier desplazamiento finito de la partícula, la fuerza en la partícula se dirige alejándose de $x = 0$.

Ejemplo 7.9 Fuerza y energía a escala atómica

La energía potencial asociada con la fuerza entre dos átomos neutros en una molécula se representa mediante la función de energía potencial de Lennard-Jones:

$$U(r) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]$$

donde r es la separación de los átomos. La función $U(r)$ contiene dos parámetros σ y ϵ que están determinados experimentalmente. Valores muestra para la interacción entre dos átomos en una molécula son $\sigma = 0.263 \text{ nm}$ y $\epsilon = 1.51 \times 10^{-22} \text{ J}$. Con una hoja de cálculo o herramienta similar, grafique esta función y encuentre la distancia más probable entre los dos átomos.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Los dos átomos en la molécula se identifican como un sistema. Basados en que sabemos que existen moléculas estables, se espera encontrar equilibrio estable cuando los dos átomos estén separados por cierta distancia de equilibrio.

Categorizar Ya que existe una función de energía potencial, la fuerza entre los átomos se clasifica como conservativa. Para una fuerza conservativa, la ecuación 7.29 describe la relación entre la fuerza y la función de energía potencial.

Analizar Existe equilibrio estable para una distancia de separación en que la energía potencial del sistema de dos átomos (la molécula) es un mínimo.

Tome la derivada de la función $U(r)$:

$$\frac{dU(r)}{dr} = 4\epsilon \frac{d}{dr} \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right] = 4\epsilon \left[\frac{-12\sigma^{12}}{r^{13}} + \frac{6\sigma^6}{r^7} \right]$$

Minimice la función $U(r)$ al hacer su derivada igual a cero:

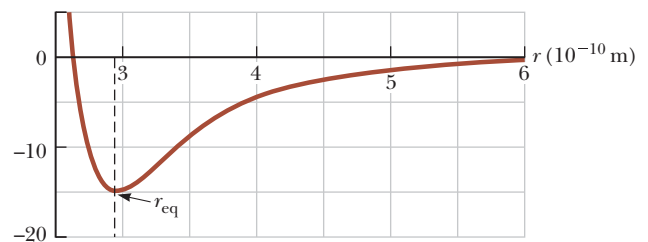
$$4\epsilon \left[\frac{-12\sigma^{12}}{r_{\text{eq}}^{13}} + \frac{6\sigma^6}{r_{\text{eq}}^7} \right] = 0 \rightarrow r_{\text{eq}} = (2)^{1/6}\sigma$$

Evalúe r_{eq} , la separación de equilibrio de los dos átomos en la molécula:

$$r_{\text{eq}} = (2)^{1/6}(0.263 \text{ nm}) = 2.95 \times 10^{-10} \text{ m}$$

Grafique la función de Lennard-Jones en ambos lados de este valor crítico para generar el diagrama de energía como se muestra en la figura 7.23.

$U (10^{-23} \text{ J})$



Finalizar Adverta que $U(r)$ es extremadamente grande cuando los átomos están muy cerca uno del otro, es un mínimo cuando los átomos están en su separación crítica y después aumenta de nuevo conforme los átomos se separan. Cuando $U(r)$ es mínima, los átomos están en equilibrio estable, lo que indica que la separación más probable entre ellos se presenta en este punto.

Figura 7.23 (Ejemplo 7.9) Curva de energía potencial asociada con una molécula. La distancia r es la separación entre los dos átomos que conforman la molécula.

Resumen

Definiciones

Con mucha frecuencia, un **sistema** es una sola partícula, un conjunto de partículas o una región del espacio, y puede variar en tamaño y forma. La **frontera del sistema** separa al sistema del **entorno**.

El **trabajo** W realizado sobre un sistema por un agente que ejerce una fuerza constante \vec{F} en el sistema es el producto de la magnitud Δr del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza y la componente $F \cos \theta$ de la fuerza a lo largo de la dirección del desplazamiento $\Delta \vec{r}$:

$$W \equiv F \Delta r \cos \theta \quad (7.1)$$



Si una fuerza variable realiza trabajo en una partícula conforme ésta se mueve a lo largo del eje x desde x_i hasta x_f , el trabajo efectuado por la fuerza en la partícula está dado por

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx \quad (7.7)$$

donde F_x es la componente de fuerza en la dirección x .

El **producto escalar** (producto punto) de dos vectores \vec{A} y \vec{B} se define mediante la relación

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv AB \cos \theta \quad (7.2)$$

donde el resultado es una cantidad escalar y θ es el ángulo entre los dos vectores. El producto escalar obedece a las leyes conmutativa y distributiva.

La **energía cinética** de una partícula de masa m que se mueve con una rapidez v es

$$K \equiv \frac{1}{2}mv^2 \quad (7.16)$$

Si una partícula de masa m está a una distancia y sobre la superficie de la Tierra, la **energía potencial gravitacional** del sistema partícula-Tierra es

$$U_g \equiv mgy \quad (7.19)$$

La **energía potencial elástica** almacenada en un resorte de constante de elástica k es

$$U_s \equiv \frac{1}{2}kx^2 \quad (7.22)$$

Una fuerza es **conservativa** si el trabajo que realiza en una partícula que es parte del sistema, conforme la partícula se mueve entre dos puntos, es independiente de la trayectoria que sigue la partícula entre los dos puntos. Además, una fuerza es conservativa si el trabajo que efectúa en una partícula es cero cuando la partícula se mueve a través de una trayectoria cerrada arbitraria y regresa a su posición inicial. Una fuerza que no satisface estos criterios se dice que es **no conservativa**.

La **energía mecánica total de un sistema** se define como la suma de la energía cinética y la energía potencial:

$$E_{\text{mec}} \equiv K + U \quad (7.24)$$

► Conceptos y principios

El **teorema trabajo-energía cinética** establece que, si una fuerza externa realiza trabajo en un sistema y el único cambio en el sistema es en la rapidez de sus partes,

$$W_{\text{ext}} = K_f - K_i = \Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \quad (7.15, 7.17)$$

Si solo cambia la configuración del sistema,

$$W_{\text{ext}} = \Delta U \quad (7.20, 7.23)$$

Los sistemas pueden estar en tres tipos de configuraciones de equilibrio cuando la fuerza neta en un componente del sistema es cero. Las configuraciones de **equilibrio estable** son aquellas donde $U(x)$ es un mínimo.


Una **función de energía potencial** U se asocia sólo con una fuerza conservativa. Si una fuerza conservativa \vec{F} actúa entre partes de un sistema mientras un componente se mueve a lo largo del eje x de x_i a x_f , el cambio en la energía potencial del sistema es igual al negativo del trabajo realizado por dicha fuerza:

$$U_f - U_i = - \int_{x_i}^{x_f} F_x dx \quad (7.27)$$

Las configuraciones de **equilibrio inestable** corresponden a $U(x)$ máxima.

El **equilibrio neutro** surge cuando U es constante mientras una parte del sistema se mueve en alguna región.

Piense, dialogue y comparta

Consulte el prefacio para una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para obtener más artículos de evaluación para esta sección, visite  WEBASSIGN.
From Cengage

1. Usted está trabajando en una planta de fabricación. Una de las máquinas de la planta utiliza un resorte. Para un nuevo proceso, sería deseable que se utilizaran resortes con diferentes constantes elásticas durante diferentes partes del proceso. Su jefe le pide consejo sobre cómo cambiar un resorte por otro rápidamente para que todo el proceso pueda tener lugar en una cantidad razonable de tiempo. Usted sugiere que, en lugar de cambiar resortes continuamente, usted cambiaría la constante elástica de uno de los resortes largos sujetándolo en diferentes posiciones para definir un nuevo extremo fijo del resorte. Entonces el resorte efectivo consiste


solamente de las bobinas que están más allá de la abrazadera. Usted diseña un sistema que consiste de un resorte largo con N bobinas y una constante elástica k . Usted diseña un sistema de abrazadera que aislará parte del resorte, dejando N' bobinas más allá de la abrazadera fija. (a) Escriba una expresión para la constante elástica k del extremo libre del resorte en términos de k , N , y N' . (b) El extremo del resorte relajado y no sujeta es sujetado y jalado hacia afuera una distancia x . En el proceso, la mano que sostiene el extremo del resorte hace un trabajo W en el resorte. Ahora, se regresa el resorte a su estado relajado y luego se fija en su punto central. El extremo libre del resorte relajado con abrazadera, se sujeta y se jala hacia fuera la misma distancia x . ¿Cuánto trabajo hace la mano en el resorte en este caso? ¿ W ? ¿ $2W$? ¿ $4W$? ¿Otro valor?



2. **ACTIVIDAD** En la tabla de datos, vemos las distancias de frenado mínimas d en función de la rapidez inicial v de un auto. Trabaje en su grupo para responder lo siguiente. (a) Si duplica la rapidez inicial, ¿se necesita el doble de distancia para detener el auto? (b) Suponga que la distancia de frenado es proporcional a la rapidez del auto elevada a cierta potencia: $d \propto v^n$. Usar técnicas gráficas para determinar n . (c) ¿Por qué la distancia de frenado depende del valor particular de n que encontró en (b)?

Rapidez (mi/h)	Distancia de frenado (ft)
20	22.5
25	35.0
30	50.4
35	68.6
40	89.6
45	113.5
50	140.0
55	169.5
60	201.7
65	236.7
70	274.5

Problemas

Consulte el prefacio para una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para obtener más artículos de evaluación para esta sección, visite  **WEBASSIGN** From Cengage

SECCIÓN 7.2 Trabajo realizado por una fuerza constante

1. Una cliente en un supermercado empuja un carro con una fuerza de 35.0 N dirigida a un ángulo de 25.0° bajo la horizontal. La fuerza es justo lo suficiente para equilibrar a varias fuerzas de fricción, así el carro se mueve con rapidez constante. (a) Encuentre el trabajo realizado por la cliente sobre el carro conforme ella avanza 50.0 m a lo largo del pasillo. (b) La cliente camina al siguiente pasillo, empujando horizontalmente y manteniendo la misma rapidez que antes. Si la fuerza de fricción no cambia, ¿La fuerza aplicada de la cliente sería mayor, menor o la misma? (c) ¿Qué puede decirse sobre el trabajo realizado por la persona sobre el carro?

2. El récord de levantamiento de botes, incluyendo el objeto y su tripulación de diez miembros, corresponde a Sami Heinonen y Juha Räsänen de Suecia, en el 2000. Ellos levantaron una masa total de 653.2 kg aproximadamente a 4 pulgadas del suelo, y lo hicieron 24 veces. Estime el trabajo total efectuado por los dos hombres en el bote en este levantamiento récord, ignore el trabajo negativo realizado por los hombres cuando descienden el bote al suelo.

3. En 1990, Walter Arfeuille, de Bélgica, levantó un objeto de 281.5 kg a través de una distancia de 17.1 cm utilizando únicamente sus dientes. (a) ¿Cuánto trabajo realizó Arfeuille en este proceso, suponiendo que el objeto se levantó a rapidez constante? (b) ¿Qué fuerza total se ejerció en los dientes de Arfeuille durante este proceso?

4. El hombre araña, cuya masa es 80.0 kg, está colgado en el extremo libre de una soga de 12.0 m, el otro extremo está fijo de la rama de un árbol arriba de él. Al flexionar repetidamente la cintura, hace que la cuerda se ponga en movimiento, y eventualmente la hace balancear lo suficiente para que pueda llegar a una repisa cuando la cuerda forma un ángulo de 60.0° con la vertical. ¿Cuánto trabajo realizó la fuerza gravitacional en el hombre araña en esta maniobra?

SECCIÓN 7.3 Producto escalar de dos vectores

5. Para dos vectores cualesquiera \vec{A} y \vec{B} , demuestre que $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$. *Sugerencia:* Escriba \vec{A} y \vec{B} en forma de vectores unitarios y aplique las ecuaciones 7.4 y 7.5.

6. El vector \vec{A} tiene una magnitud de 5.00 unidades y \vec{B} tiene una magnitud de 9.00 unidades. Los dos vectores forman un ángulo de 50.0° entre sí. Determine $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

Nota: En los problemas 7 y 8, obtenga respuestas numéricas con tres cifras significativas, como es usual.

7. Encuentre el producto escalar de los vectores en la figura P7.7.

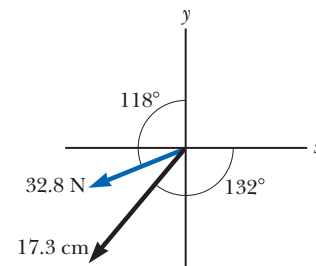


Figura P7.7

8. Con la definición del producto escalar, encuentre los ángulos entre (a) $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$ y $\vec{B} = 4\hat{i} - 4\hat{j}$, (b) $\vec{A} = -2\hat{i} + 4\hat{j}$, y $\vec{B} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$, y (c) $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ y $\vec{B} = 3\hat{j} + 4\hat{k}$.

SECCIÓN 7.4 Trabajo realizado por una fuerza variable

9. Una partícula se somete a una fuerza F_x que varía con la posición como se muestra en la figura P7.9. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza en la partícula mientras se mueve (a) de $x = 0$ a $x = 5.00$ m, (b) de $x = 5.00$ m a $x = 10.0$ m y (c) de $x = 10.0$ m a $x = 15.0$ m. (d) ¿Cuál es el trabajo total efectuado por la fuerza a través de la distancia $x = 0$ a $x = 15.0$ m?

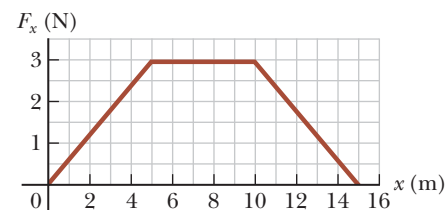


Figura P7.9 Problemas 9 y 22



10. En un sistema de control, un acelerómetro consiste de un objeto de 4.70 g que se desliza sobre un riel horizontal calibrado. Un resorte de masa pequeña une al objeto a una pestaña en un extremo del riel. La grasa en el riel hace despreñable la fricción estática, pero amortigua rápidamente las vibraciones del objeto deslizante. Cuando se somete a una aceleración fija de 0.800g, el objeto debería estar en una posición 0.500 cm de su posición de equilibrio. Encuentre la constante elástica del resorte requerida para una correcta calibración.

11. Cuando un objeto de 4.00 kg cuelga verticalmente en cierto resorte ligero descrito por la ley de Hooke, el resorte se estira 2.50 cm. Si se quita el objeto de 4.00 kg, (a) ¿cuánto se estirará el resorte si se le cuelga un objeto de 1.50 kg? (b) ¿Cuánto trabajo debe efectuar un agente externo para estirar el mismo resorte 4.00 cm desde su posición sin estirar?

12. Expresar, en unidades fundamentales SI, las unidades de la constante elástica de un resorte.

13. El dispensador de charolas en su cafetería se ha roto y no se puede reparar. El encargado sabe que usted es bueno diseñando cosas y le pide que le ayude a construir un nuevo dispensador con partes que tiene en su mesa de trabajo. El dispensador de charolas sostiene una pila de charolas sobre un anaquel que se apoya en cuatro resortes en uno en cada esquina del anaquel. Cada charola es rectangular, de 45.3 cm por 35.6 cm, 0.450 cm de grosor y 580 g de masa. El encargado le pide que diseñe un nuevo dispensador de cuatro resortes de manera que cuando se saca una charola del dispensador éste empuja hacia arriba a la pila restante para que la charola superior esté en la misma posición que la de la charola que acaba de quitar. Él tiene una gran variedad de resortes que puede utilizar para construir el dispensador. ¿Qué resortes debe usar?

14. Un resorte ligero, con constante elástica de 3.85 N/m, se comprime 8.00 cm mientras se mantiene entre un bloque de 0.250 kg a la izquierda y un bloque de 0.500 kg a la derecha, ambos en reposo sobre una superficie horizontal. El resorte ejerce una fuerza en cada bloque, y tiende a separarlos. Los bloques se sueltan simultáneamente desde el reposo. Encuentre la aceleración con la que cada bloque comienza a moverse, dado que el coeficiente de fricción cinética entre cada bloque y la superficie es (a) 0, (b) 0.100 y (c) 0.462.

15. Una partícula pequeña de masa m se jala hacia lo alto de un medio cilindro sin fricción (de radio R) mediante una cuerda que pasa sobre lo alto del cilindro, como se ilustra en la figura P7.15. (a) Si supone que la partícula se mueve con rapidez constante, demuestre que $F = mg \cos \theta$. Nota: Si la partícula se mueve con rapidez constante, la componente de su aceleración tangente al cilindro debe ser cero en todo momento. (b) Mediante integración directa de $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$, encuentre el trabajo realizado al mover la partícula con rapidez constante desde el fondo hasta lo alto del medio cilindro.

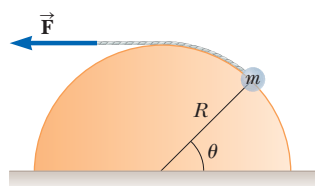


Figura P7.15

16. La fuerza que actúa en una partícula es $F_x = (8x - 16)$, donde F está en newtons y x está en metros. (a) Grafique esta fuerza en términos de x desde $x = 0$ hasta $x = 3.00$ m. (b) A partir de su gráfica, encuentre el trabajo neto realizado por esta fuerza en la partícula conforme se traslada de $x = 0$ a $x = 3.00$ m.

17. Cuando se cuelgan diferentes cargas de un resorte, el resorte se estira a diferentes longitudes, como se muestra en la siguiente tabla. (a) Elabore una gráfica de la fuerza apli-

cada en términos de la extensión del resorte. (b) Mediante ajuste por mínimos cuadrados, determine la línea recta que ajusta mejor los datos. (c) Para completar el inciso (b), ¿quiere emplear todos los datos o debería ignorar algunos de ellos? Explique. (d) A partir de la pendiente de la línea recta de mejor ajuste, encuentre la constante elástica k . (e) Si el resorte se extiende a 105 mm, ¿qué fuerza ejerce sobre el objeto suspendido?

F (N)	2.0	4.0	6.0	8.0	10	12	14	16	18	20	22
L (mm)	15	32	49	64	79	98	112	126	149	175	190

18. Se dispara una bola de 100 g de un rifle que tiene un cañón de 0.600 m de largo. Elija el origen como la ubicación donde la bala comienza a moverse. Entonces la fuerza (en newtons) que ejercen en la bala los gases en expansión es $15\,000 + 10\,000x - 25\,000x^2$, donde x está en metros. (a) Determine el trabajo efectuado por el gas en la bala conforme ésta recorre la longitud del cañón. (b) ¿Qué pasaría si? Si el cañón mide 1.00 m de largo, ¿cuánto trabajo se realiza?, y (c) ¿cómo se compara este valor con el trabajo calculado en el inciso (a)?

19. Una fuerza $\vec{F} = (4x\hat{i} + 3y\hat{j})$, donde \vec{F} está en newtons y x y y están en metros, actúa en un objeto conforme éste se mueve en la dirección x desde el origen hasta $x = 5.00$ m. Encuentre el trabajo $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ efectuado por la fuerza en el objeto. (b) ¿Qué pasaría si? Encuentre el trabajo $W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ hecho por la fuerza en el objeto si se mueve del origen a (5.0 m, 5.00 m) a lo largo de una trayectoria recta que hace un ángulo de 45.0° con el eje x positivo. ¿Es el trabajo realizado por esta fuerza dependiente de la trayectoria tomada entre los puntos iniciales y finales?

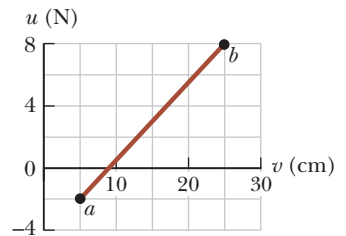


Figura P7.20

20. Problema de repaso. La gráfica en la figura P7.20 especifica $\int_a^b u dv$. (b) Obtenga $\int_b^a u dv$. (c) Encuentre $\int_a^b v du$.

SECCIÓN 7.5 Energía cinética y teorema trabajo-energía cinética.

21. Una partícula de 0.600 kg tiene una rapidez de 2.00 m/s en el punto A y energía cinética de 7.50 J en el punto B. ¿Cuáles es (a) su energía cinética en A, (b) su rapidez en B y (c) el trabajo neto realizado en la partícula por las fuerzas externas cuando se mueve de A a B?

22. Una partícula de 4.00 kg se somete a una fuerza neta que varía con la posición, como se muestra en la figura P7.15. La partícula parte del reposo en $x = 0$. ¿Cuál es su rapidez en (a) $x = 5.00$ m, (b) $x = 10.0$ m y (c) $x = 15.0$ m?

23. Un martinete de 2 100 kg se usa para enterrar una viga I de acero en la tierra. El martinete cae 5.00 m antes de quedar en contacto con la parte superior de la viga, y clava la viga 12.0 cm más en el suelo mientras llega al reposo. Aplicando consideraciones de energía, calcule la fuerza promedio que la viga ejerce en el martinete mientras éste logra el reposo.

24. Problema de repaso. En un microscopio electrónico, hay un cañón de electrones que contiene dos placas metálicas con carga, separadas 2.80 cm. Una fuerza eléctrica acelera cada electrón en el haz desde el reposo hasta 9.60% de la rapidez de la luz a través de esta distancia. (a) Determine la energía cinética del electrón mientras abandona el cañón de electrones. Los electrones llevan esta energía a un mate-

rial fosforescente en la superficie interior de la pantalla del televisor y lo hacen brillar. Para un electrón que pasa entre las placas en el cañón de electrones, determine, (b) la magnitud de la fuerza eléctrica constante que actúa en el electrón, (c) la aceleración del electrón y (d) el tiempo de vuelo entre las placas.

- 25. Problema de repaso.** Se puede considerar al teorema trabajo-energía cinética como una segunda teoría de movimiento, paralela a las leyes de Newton, en cuanto que describe cómo las influencias externas afectan al movimiento de un objeto. En este problema, resuelva los incisos (a), (b) y (c) por separado de los incisos (d) y (e), de modo que pueda comparar las predicciones de las dos teorías. En un cañón de rifle de longitud 72.0 cm, una bala de 15.0 g acelera desde el reposo hasta una rapidez de 780 m/s. (a) Encuentre la energía cinética de la bala cuando abandona el cañón. (b) Use el teorema trabajo-energía cinética para obtener el trabajo neto realizado sobre la bala. (c) Utilice su resultado del inciso (b) para encontrar la magnitud de la fuerza neta promedio que actuó en la bala mientras ésta estaba en el cañón. (d) Ahora modele a la bala como una partícula bajo aceleración constante. Obtenga la aceleración constante de una bala que inicia desde el reposo y gana una rapidez de 780 m/s en una distancia de 72.0 cm. (e) Modele la bala como una partícula bajo una fuerza neta, para encontrar la fuerza neta que actuó en ella durante su aceleración. (f) ¿Qué conclusión obtiene al comparar los resultados de los incisos (c) y (e)?

- 26.** Usted está acostado en su dormitorio, descansando después de hacer su tarea de física. A medida que mira fijamente el techo, le llega la idea de un nuevo juego. Toma un dardo con una nariz pegajosa y una masa de 19.0 g. También toma un resorte que tiene en su escritorio de algún proyecto anterior. Pinta un objetivo en el techo. Su nuevo juego es colocar el resorte verticalmente en el suelo, colocar el dardo de la nariz pegajosa hacia arriba en el resorte, y empujar el resorte hacia abajo hasta que el resorte este comprimido, como se muestra a la derecha en la figura P7.26. Luego suelta el resorte, disparando el dardo hacia el blanco en su techo, donde su nariz pegajosa hará que cuelgue del techo. El resorte tiene una longitud sin comprimir del extremo a extremo de 5.00 cm, como se muestra a la izquierda en la figura P7.26, se puede comprimir a una longitud de extremo a extremo de 1.00 cm cuando el resorte está muy comprimido. Antes de probar el juego, usted sostiene el extremo superior del resorte en una mano y cuelga un paquete de diez dardos idénticos del extremo inferior del resorte. El resorte se extiende 1.00 cm debido al peso de los dardos. Está tan entusiasmado con el nuevo juego que, antes de hacer una prueba del juego, corre para reunirse con sus amigos para mostrarlo. Cuando sus amigos están en su habitación viendo y les muestra el primer disparo de su nuevo juego, ¿por qué se avergüenza?

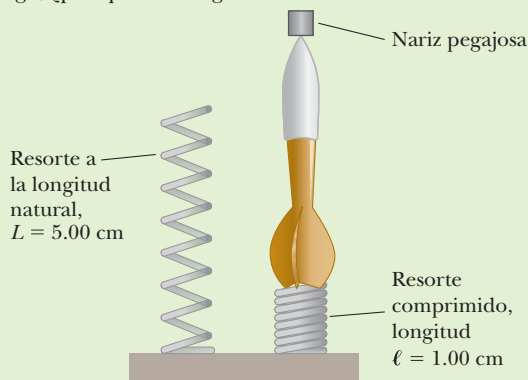


Figura P2.26

- 27. Problema de repaso.** Un objeto de 5.75 kg pasa por el origen en el tiempo $t = 0$ tal que la componente x de su velocidad es 5.00 m/s y su componente y de velocidad es -3.00 m/s. (a) ¿Cuál es la energía cinética del objeto en este instante? (b) Al tiempo $t = 2.00$ s, la partícula se localiza en $x = 8.50$ m y $y = 5.00$ m. ¿Qué fuerza constante actuó sobre el objeto durante este intervalo de tiempo? (c) ¿Cuál es la rapidez de la partícula en $t = 2.00$ s?
- 28. Problema de repaso.** Una bala de 7.80 g con una rapidez de 575 m/s golpea la mano de un superhéroe, haciendo que su mano se mueva 5.50 cm en la dirección de la velocidad de la bala antes de parar. (a) Use consideraciones de trabajo y energía para encontrar la fuerza promedio que detuvo a la bala. (b) Suponga que la fuerza es constante, luego determine cuánto tiempo transcurrió entre el momento que la bala golpeó la mano hasta el instante en que se detiene.

SECCIÓN 7.6 Energía potencial de un sistema

- 29.** Una piedra de 0.20 kg se mantiene a 1.3 m sobre el borde de un pozo de agua y entonces se le deja caer en él. El pozo tiene una profundidad de 5.0 m. Respecto a la configuración con la piedra en el borde del pozo, ¿cuál es la energía potencial gravitacional del sistema piedra-Tierra (a) antes de liberar la piedra y (b) cuando ésta llega al fondo del pozo? (c) ¿Cuál es el cambio en energía potencial gravitacional del sistema desde que se suelta la piedra hasta que alcanza el fondo del pozo?
- 30.** Un carro de montaña rusa, de 1 000 kg, inicialmente está en lo alto de un bucle, en el punto \textcircled{A} . Luego se mueve 135 pies a un ángulo de 40.0° bajo la horizontal, hacia un punto inferior \textcircled{B} . (a) Elija el carro en el punto \textcircled{B} como la configuración cero para la energía potencial gravitacional del sistema montaña rusa-Tierra. Determine la energía potencial del sistema cuando el carro está en los puntos \textcircled{A} y \textcircled{B} , y el cambio en energía potencial conforme se mueve el carro entre estos puntos. (b) Repita el inciso (a), pero haga la configuración cero con el carro en el punto \textcircled{A} .

SECCIÓN 7.7 Fuerzas conservativas y no conservativas

- 31.** Una partícula de 4.00 kg se mueve desde el origen a la posición \textcircled{C} , que tiene coordenadas $x = 5.00$ m y $y = 5.00$ m (figura P7.31). Una fuerza en la partícula es la fuerza gravitacional que actúa en la dirección y negativa. Con la ecuación 7.3, calcule el trabajo realizado por la fuerza gravitacional en la partícula conforme va de O a \textcircled{C} a lo largo de (a) la trayectoria violeta, (b) la trayectoria roja y (c) la trayectoria azul. (d) Sus resultados deberían ser idénticos, ¿por qué?
- 32.** (a) Suponga que una fuerza constante actúa en un objeto. La fuerza no varía con el tiempo o con la posición o la velocidad del objeto. Comience con la definición general del trabajo realizado por una fuerza

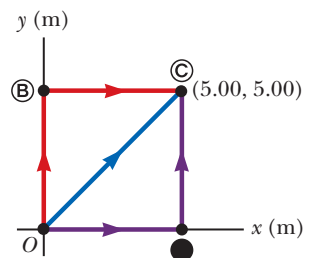


Figura P7.31

Problemas 31 al 33.

$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

y demuestre que la fuerza es conservativa. (b) Como caso especial, suponga que la fuerza $\vec{F} = (3\hat{i} + 4\hat{j})$ actúa en una partícula que se mueve de O a \textcircled{C} en la figura P7.31. Calcule el trabajo efectuado por \vec{F} en la partícula conforme se mueve a lo largo de cada una de las tres trayectorias mostradas en

la figura y demuestre que el trabajo realizado tiene el mismo valor para las tres trayectorias. (c) **¿Qué pasaría si?** Es el trabajo hecho también idéntico a lo largo de las tres trayectorias de la fuerza $\vec{F} = (4x\hat{i} + 3y\hat{j})$, donde \vec{F} está en Newtons y x y y están en metros, del problema 19? d) **¿Qué pasaría si?** Suponga que la fuerza está dada por $\vec{F} = (y\hat{i} - x\hat{j})$, donde \vec{F} está en newtons y x y y están en metros. Es el trabajo hecho idéntico a lo largo de las tres trayectorias para esta fuerza?

33. Una fuerza que actúa en una partícula moviéndose en el plano xy está dada por $\vec{F} = (2y\hat{i} + x^2\hat{j})$, donde \vec{F} está en newtons y x y y están en metros. La partícula se mueve desde el origen hasta la posición final con coordenadas $x = 5.00$ m y $y = 5.00$ m, como se muestra en la figura P7.31. Calcule el trabajo efectuado por \vec{F} sobre la partícula cuando ésta se desplaza a lo largo de (a) la trayectoria violeta, (b) la trayectoria roja y (c) la trayectoria azul. (d) \vec{F} es conservativa o no conservativa? (e) Explique su respuesta al inciso (d).

SECCIÓN 7.8 Relación entre fuerzas conservativas y energía potencial

34. **¿Por qué es imposible la siguiente situación?** Un bibliotecario levanta un libro desde el suelo hasta un estante, haciendo 20.0 J de trabajo en este proceso. Cuando él se voltea, el libro cae del estante de regreso al suelo. La fuerza gravitacional de la Tierra sobre el libro efectúa 20.0 J de trabajo sobre él mientras cae. Como el trabajo realizado fue 20.0 J + 20.0 J = 40.0 J, el libro golpea el suelo con 40.0 J de energía cinética.
35. Una sola fuerza conservativa actúa en una partícula de 5.00 kg dentro de un sistema debido a su interacción con el resto del sistema. La ecuación $F_x = 2x + 4$ describe la fuerza, donde F_x está en newtons y x está en metros. Conforme la partícula se desplaza a lo largo del eje x desde $x = 1.00$ m hasta $x = 5.00$ m, calcule (a) el trabajo realizado por esta fuerza en la partícula, (b) el cambio en la energía potencial del sistema y (c) la energía cinética que tiene la partícula en $x = 5.00$ m si su rapidez es 3.00 m/s en $x = 1.00$ m.
36. Una función de energía potencial para un sistema en el cual una fuerza en dos dimensiones actúa de la forma $U = 3x^3y - 7x$. Encuentre la fuerza que actúa en el punto (x,y) .
37. La energía potencial de un sistema de dos partículas separadas por una distancia r está dada por $U(r) = A/r$, donde A es una constante. Encuentre la fuerza radial \vec{F}_r que cada partícula ejerce sobre la otra.

SECCIÓN 7.9 Diagramas de energía y equilibrio de un sistema

38. Para la curva de energía potencial que se muestra en la figura P7.38, (a) determine si la fuerza F_x es positiva, negativa o cero en los cinco puntos señalados. (b) Indique los puntos de equilibrio estable, inestable y neutro. (c) Trace la gráfica de la curva de F_x en función de x desde $x = 0$ hasta $x = 9.5$ m.

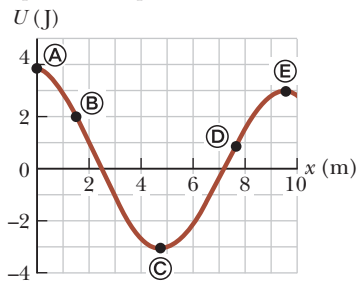


Figura P7.38

39. Un cono circular recto se puede equilibrar, teóricamente, sobre una superficie horizontal en tres diferentes formas. Trace estas tres configuraciones de equilibrio e identifíquelas como posiciones de equilibrio estable, inestable o neutro.

PROBLEMAS ADICIONALES

40. La función de energía potencial de un sistema de partículas está dada por $U(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$, donde x es la posición de una partícula en el sistema. (a) Determine la fuerza F_x en la partícula como una función de x . (b) \vec{F} para qué valores de x es la fuerza igual a cero? (c) Grafique $U(x)$ en función de x y F_x en términos de x y señale los puntos de equilibrio estable y de equilibrio inestable.

41. Usted tiene una nueva pasantía, donde está ayudando a diseñar un nuevo patio de carga para la estación de trenes de su ciudad. Habrá un número vías de carga donde se pueden almacenar los vagones solos hasta que se necesiten. Para evitar que los vagones se deslicen en las vías, se ha diseñado una combinación de dos resortes en espiral como se ilustra en la figura P7.41. Cuando un vagón se mueve a la derecha en la figura y pega en los resortes, que ejercen una fuerza hacia la izquierda sobre el vagón para frenarlo.

Ambos resortes se describen con la ley de Hooke y tienen constantes elásticas $k_1 = 1\,600$ N/m y $k_2 = 3\,400$ N/m. Después de que el primer resorte se comprime una distancia de 30.0 cm, el segundo resorte actúa con el primero para aumentar la fuerza hacia la izquierda en el vagón en la figura P7.41. Cuando el resorte con la constante elástica k_2 se comprime 50.0 cm, las espirales de alambre de ambos resortes se presionan entre sí, por lo que los resortes ya no se pueden comprimir. Un vagón típico en la vía de carga tiene una masa de 6 000 kg. Cuando usted presenta su diseño a su supervisor, le pide la rapidez máxima que un vagón puede tener y ser detenido por su dispositivo.

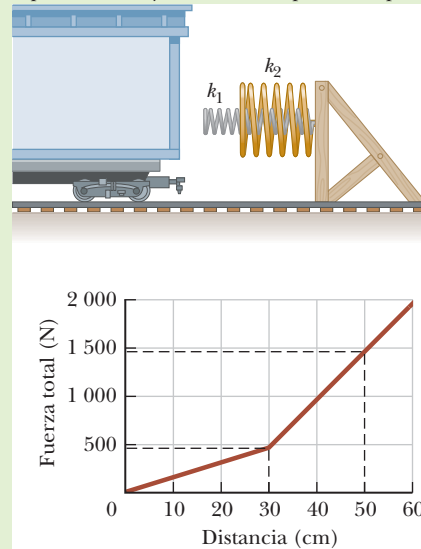


Figura P7.41

42. Cuando un objeto se desplaza una cantidad x de su equilibrio estable, entonces una fuerza restauradora actúa en él, intentando retornar al objeto a su posición de equilibrio. La magnitud de la fuerza de restitución puede ser una complicada función de x . En tales casos, en general se puede suponer que la función de fuerza $F(x)$ es una serie de potencias en x como $F(x) = -(k_1x + k_2x^2 + k_3x^3 + \dots)$. Aquí el primer término es justamente la ley de Hooke, la cual describe la fuerza ejercida por un resorte simple para pequeños desplazamientos. Para pequeñas excursiones fuera del equilibrio, en general ignoramos los términos de orden superior, pero en algunos casos puede ser deseable mantener el segundo término. Si la fuerza de restitución se modela como $F(x) = -(k_1x + k_2x^2)$, ¿cuánto trabajo se realiza en un objeto al desplazarlo de $x = 0$ a $x = x_{m\acute{a}x}$ mediante una fuerza aplicada $-F$?

43. Una partícula se mueve a lo largo del eje x desde $x = 12.8$ m hasta $x = 23.7$ m sometido a la influencia de una fuerza

$$F = \frac{375}{x^3 + 3.75x}$$

donde F está en newtons y x en metros. Con el uso de integración numérica, determine el trabajo efectuado por esta fuerza en la partícula durante este desplazamiento. Su resultado debe ser preciso dentro del 2%.

44. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? En un nuevo casino, se introduce una máquina de pinball gigante. El casino advierte que su tamaño es comparable a la altura de un jugador de basketball. El lanzador de bola en la máquina envía bolas de metal por un lado de la máquina para jugar. El resorte en el lanzador (figura P7.44) tiene una constante elástica de 1.20 N/cm. La superficie sobre la que se mueve la bola está inclinada $\theta = 10.0^\circ$ respecto de la horizontal. El resorte inicialmente se comprime su distancia máxima $d = 5.00$ cm. Una bola de masa 100 g es lanzada para entrar en juego al soltar el émbolo. En el casino los visitantes encuentran muy emocionante este juego con la gigantesca máquina.

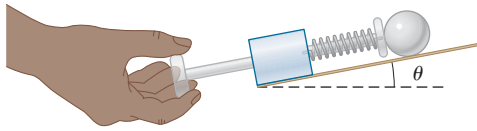


Figura P7.44

$d = 0.300$ m del resorte. Desde esta posición, el bloque es proyectado hacia abajo dirigido al resorte con rapidez $v = 0.750$ m/s. ¿Cuánto se comprime el resorte cuando el bloque está momentáneamente en reposo?

48. Un plano inclinado de ángulo θ tiene un resorte de constante elástica k anclado en el fondo tal que el resorte es paralelo a la superficie. Un bloque de masa m se coloca sobre el plano a una distancia d del resorte. Desde esta posición, se libera el bloque y se proyecta hacia el resorte con rapidez v , como se muestra en la figura P7.47. ¿Cuánto se comprime el resorte cuando el bloque está momentáneamente en reposo?

49. Durante las vacaciones de Navidad, está haciendo algo de dinero extra para comprar regalos trabajando en una fábrica, ayudando a mover cajas. En un momento determinado, usted encuentra que todas las carretillas, plataformas, y carros están en uso, por lo que debe mover una caja a través de la habitación una distancia en línea recta de 35.0 m sin la ayuda de estos dispositivos. Observe que la caja tiene una cuerda atada a la mitad de una de sus caras verticales. Decide mover la caja jalando de la sog. La caja tiene una masa de 130 kilogramos, y el coeficiente de fricción cinética entre la caja y el piso de concreto es 0.350. (a) Determine el ángulo respecto a la horizontal con el que debe jalar hacia arriba la cuerda para que pueda mover la caja la distancia deseada con la fuerza de magnitud *más* pequeña. (b) Con este ángulo jale la cuerda, ¿cuánto trabajo haces al arrastrar la caja en la distancia deseada?

PROBLEMA DE DESAFÍO

50. Una partícula de masa $m = 1.18$ kg se une entre dos resortes idénticos sobre una mesa horizontal sin fricción. Ambos resortes tienen constante elástica k e inicialmente no están estirados, y la partícula está en $x = 0$. (a) La partícula se jala una distancia x a lo largo de una dirección perpendicular a la configuración inicial de los resortes, como se muestra en la figura P7.50. Demuestre que la fuerza ejercida en la partícula es

$$\vec{F} = -2kx \left(1 - \frac{L}{\sqrt{x^2 + L^2}} \right) \hat{i}$$

- (b) Demuestre que la energía potencial del sistema es

$$U(x) = kx^2 + 2kL(L - \sqrt{x^2 + L^2})$$

- (c) Elabore una gráfica de $U(x)$ en términos de x e identifique todos los puntos de equilibrio. Suponga $L = 1.20$ m y $k = 40.0$ N/m. (d) Si la partícula se jala 0.500 m hacia la derecha y después se libera, ¿cuál es su rapidez al llegar a $x = 0$?

Vista superior

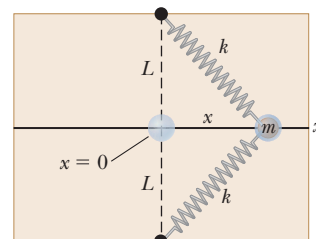


Figura P7.50

45. **Problema de reposo.** Dos fuerzas constantes actúan en un objeto de 5.00 kg que se mueve en el plano xy , como se muestra en la figura P7.45. La fuerza \vec{F}_1 es de 25.0 N a 35.0° y la fuerza \vec{F}_2 es de 42.0 N a 150° . En el tiempo $t = 0$, el objeto está en el origen y tiene velocidad $(4.00\hat{i} + 2.50\hat{j})$. (a) Exprese las dos fuerzas en notación de vector unitario. Use notación de vectores unitarios para sus otras respuestas. (b) Encuentre la fuerza total que se ejerce en el objeto. (c) Encuentre la aceleración del objeto. Ahora, considere el instante $t = 3.00$ s, encuentre (d) la velocidad del objeto, (e) su posición, (f) su energía cinética a partir de $\frac{1}{2}mv_f^2$, y (g) su energía cinética a partir de $\frac{1}{2}mv_i^2 + \sum \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$. (h) ¿Qué conclusión puede sacar al comparar las respuestas a los incisos (f) y (g)?

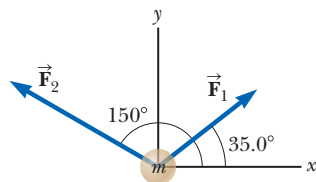


Figura P7.45

46. (a) Tome $U = 5$ para un sistema con una partícula en la posición $x = 0$ y calcule la energía potencial del sistema como una función de la posición x de la partícula. La fuerza sobre la partícula está dada por $(8e^{-2x})\hat{i}$. (b) Explique si la fuerza es conservativa o no conservativa y cómo puede decirlo.

47. Un plano inclinado de ángulo $\theta = 20.0^\circ$ tiene un resorte de constante elástica $k = 500$ N/m anclado en el fondo tal que el resorte queda paralelo a la superficie, como se muestra en la figura P7.47. Un bloque de masa $m = 2.50$ kg se coloca en el plano a una distancia

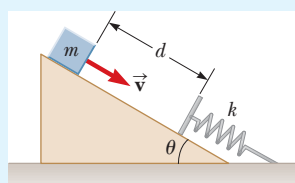


Figura P7.47
Problemas 47 y 48

Conservación de la energía

8



IMAGINE En el capítulo anterior, usted frotó el papel de lija en madera y asociamos el calor resultante con energía interna. Ahora busque a su alrededor en el garaje más ejemplos de energía. Ahora su auto está en reposo en el garaje, pero tiene energía cinética cuando funciona. ¿Cómo obtiene esa energía? ¿De la gasolina! ¿cómo llegó la gasolina al auto? ¿de la gasolinera! ¿dónde la obtiene la gasolinera? ¿De la refinería! ¿de dónde la ha obtenido la refinería?, ¡estas preguntas son una tras otra! Para sacar de su mente estas preguntas, comienza a cortar un largo trozo de madera con la sierra de mesa. ¡Espere un momento! Cuando está funcionando, la hoja de sierra tiene energía cinética rotacional. ¿de dónde viene esa energía? Ah, usted ¡la conecto, por lo que la energía proviene del contacto de la pared! Pero, ¿cómo llegó la energía al contacto?, ¡debe provenir de las líneas eléctricas de una central eléctrica! Pero ¿de dónde obtiene la energía la central eléctrica? Mientras continúa buscando en el garaje, ve que se debe transferir energía a diferentes dispositivos para que funcionen. Y esa energía debe transferirse de algo: un tanque de gasolina, un contacto en la pared, baterías, etcétera.

CONEXIONES En el capítulo anterior, encontramos que la energía puede pertenecer a un sistema en diferentes formas. En este capítulo, vamos a investigar las formas en que la energía puede *transferirse* dentro o fuera de un sistema, o *transformarse* dentro de un sistema. Por ejemplo, en el sistema del papel de lija y la madera para su proyecto de carpintería del capítulo 7, la energía cinética del papel de lija se *transforma* en energía interna. Por otra parte, para el sistema de su sierra de mesa de este capítulo, la energía se *transfiere* al sistema mediante electricidad para hacerla funcionar. Vamos a ver todo el poder del planteamiento de energía en este capítulo, representado en el principio de *conservación de la energía*. Este método nos dará herramientas para resolver problemas que serían extremadamente difíciles de resolver con las leyes de Newton. En los capítulos siguientes, veremos muchos casos en los que el principio de conservación de la energía se aplica a diferentes situaciones.

Usted utiliza una sierra de mesa para hacer un corte en un trozo de madera. ¿Cómo se transfiere la energía a la sierra para que la hoja gire? (George Rudy/Shutterstock.com)

- 8.1 Modelo de análisis: Sistema no aislado (Energía)
- 8.2 Modelo de análisis: El sistema aislado (Energía)
- 8.3 Situaciones que incluyen fricción cinética
- 8.4 Cambios en la energía mecánica para fuerzas no conservativas
- 8.5 Potencia



8.1 Modelo de análisis: Sistema aislado (Energía)

Como se ha visto, en un objeto, modelado como partícula pueden actuar fuerzas diferentes, resultando un cambio en su energía cinética de acuerdo con el teorema del trabajo-energía cinética del capítulo 7. Si elegimos el objeto como el sistema, esta situación muy simple es el primer ejemplo de un *sistema no aislado*, en el cual la energía cruza la frontera del sistema durante cierto intervalo de tiempo debido a una interacción con el medio ambiente. Este escenario es común en problemas de física. Si un sistema no interactúa con su medio ambiente, se denomina aislado y se estudiará en la sección 8.2.

El teorema trabajo-energía cinética (ecuación 7.17) es el primer ejemplo de una ecuación de energía adecuada para un sistema no aislado. En el caso de dicho teorema, la interacción del sistema con su entorno es el trabajo hecho por la fuerza externa, y la cantidad que cambia en el sistema es la energía cinética.

Hasta el momento sólo se ha visto una forma de transferir energía a un sistema: trabajo. En seguida se mencionan otras formas de transferencia de energía hacia o desde un sistema. Los detalles de estos procesos se estudiarán en otras secciones del libro, solo que le deberían ser familiares a partir de la experiencia cotidiana. En la figura 8.1 se ilustran mecanismos para transferir energía y se resumen del modo siguiente.

El **trabajo**, como aprendió en el capítulo 7, es un método para transferir energía hacia un sistema mediante la aplicación de una fuerza al sistema y causar un desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza (figura 8.1a).

Las **ondas mecánicas** (capítulos 16-17) son un medio de transferencia de energía al permitir que una perturbación se propague a través del aire u otro medio. Es el método mediante el que la energía (que usted detecta como *sonido*) sale de su radio reloj a través de la bocina y entra a sus oídos para estimular el proceso de audición (figura 8.1b). Otros ejemplos de ondas mecánicas son las ondas sísmicas y las ondas oceánicas.

El **calor** (capítulo 19) es un mecanismo de transferencia de energía que se activa mediante una diferencia de temperatura entre dos regiones del espacio. Por ejemplo, imagine dividir una cuchara de metal en dos partes: el mango, que identificamos como el sis-



Figura 8.1 Mecanismos de transferencia de energía. En cada caso, se indica el sistema sobre el cual o del cual se transfiere la energía.

tema, y la porción sumergida en una taza de café, que es parte del medio ambiente (figura 8.1c). El mango de la cuchara se calienta porque los electrones y los átomos en la parte sumergida de la cuchara chocan con los más lentos en la parte cercana del mango. Dichas partículas se mueven más rápido debido a las colisiones y chocan con el siguiente grupo de partículas lentas. Por tanto, la energía interna del mango de la cuchara se eleva a causa de la transferencia de energía debida a este proceso de colisión.

La **transferencia de materia** (capítulo 19) involucra situaciones en las cuales la materia cruza físicamente la frontera de un sistema, transportando energía. Los ejemplos incluyen llenar el tanque de su automóvil con gasolina (figura 8.1d) y transportar energía a las habitaciones de su hogar mediante circulación de aire caliente del horno, un proceso llamado *convección*.

La **transmisión eléctrica** (capítulos 26 y 27) es la transferencia de energía mediante corrientes eléctricas. Es como se transfiere energía en su secadora de pelo (figura 8.1e), sistema de sonido o cualquier otro dispositivo eléctrico como la sierra de mesa de su garaje de la Imagine.

La **radiación electromagnética** (capítulo 33) se refiere a las ondas electromagnéticas como la luz, microondas y ondas de radio (figura 8.1f) que cruza la frontera de un sistema. Los ejemplos de este método de transferencia incluyen cocinar una papa en su horno de microondas y la energía luminosa que viaja del Sol hacia la Tierra a través del espacio.¹

Una característica central del método de energía es el concepto de que no se puede crear ni destruir energía, la energía siempre se *conserva*. Esta característica se ha comprobado en incontables experimentos, y ningún experimento ha demostrado jamás que este enunciado sea incorrecto. Por lo que, **si la cantidad total de energía en un sistema cambia, sólo es porque la energía cruzó la frontera del sistema mediante un mecanismo de transferencia, como alguno de los métodos mencionados anteriormente.**

La energía es una de las diferentes cantidades que se conservan en física. En los capítulos siguientes, vamos a ver otras cantidades que se conservan. Hay muchas cantidades físicas que no obedecen un principio de conservación. Por ejemplo, no hay ningún principio de conservación de la fuerza o principio de conservación de la velocidad. Asimismo, en otras áreas distintas de las cantidades físicas, como en la vida cotidiana, se conservan algunas cantidades y algunas no. Por ejemplo, el dinero en el sistema de su cuenta bancaria es una cantidad que se conserva. La única forma de que el balance de su cuenta cambie es si su dinero cruza la frontera del sistema por depósitos o retiros. Por otro lado, el número de personas en el sistema de un país no se conserva. Aunque la gente de hecho cruza la frontera del sistema, el cual cambia la población total, la población también puede cambiar por gente que muere y por el nacimiento de bebés. Incluso si no hay personas que crucen la frontera del sistema, los nacimientos y las muertes cambiarán el número de personas en el sistema. No hay ningún equivalente en el concepto de energía para morir o nacer. El enunciado general del principio de **conservación de la energía** se puede describir matemáticamente con la **ecuación de conservación de la energía** de la siguiente forma:

$$\Delta E_{\text{sistema}} = \sum T \quad (8.1)$$

donde E_{sistema} es la energía total del sistema, incluidos todos los métodos de almacenamiento de energía (cinética, potencial e interna) y T (para *transferir*) es la cantidad de energía transferida a través de la frontera del sistema mediante algún mecanismo y la sumatoria es sobre todos los posibles mecanismos de transferencia. Dos de los mecanismos de transferencia tienen notaciones simbólicas bien establecidas. Para trabajo, $T_{\text{trabajo}} = W$, como se discutió en el capítulo 7, y para calor, $T_{\text{calor}} = Q$, como se define en el capítulo 19. (Ahora que estamos familiarizados con el trabajo, podemos simplificar su apariencia en las ecuaciones haciendo que el simple símbolo W represente el trabajo externo W_{ext} en un sistema. Para el trabajo interno, *siempre* utilizaremos W_{int} para diferenciarlo de W .) Los otros cuatro términos de la lista no tienen símbolos establecidos, así que se les lla-

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 8.1

El calor no es una forma de energía

La palabra *calor* es una de las palabras que está más mal empleada en nuestro lenguaje popular. El calor es un método de *transferencia* de energía, no una forma de almacenar energía. Por tanto, frases como “contenido de calor”, “el calor del verano” y “el calor se escapó” representan los usos de esta palabra que son inconsistentes con la definición física. Véase el capítulo 19.

◀ Conservación de la energía

¹La radiación electromagnética y el trabajo hecho por las fuerzas de campo son los únicos mecanismos de transferencia de energía que no requieren de moléculas del medio ambiente disponibles en la frontera del sistema. Debido a eso, los sistemas rodeados por un vacío (como los planetas) sólo intercambian energía con el medio ambiente mediante estas dos posibilidades.

mará T_{OM} (ondas mecánicas), T_{TM} (transferencia de materia), T_{TE} (transmisión eléctrica) y T_{RE} (radiación electromagnética).

El desarrollo completo de la ecuación 8.1 es

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = W + Q + T_{MW} + T_{MT} + T_{ET} + T_{ER} \quad (8.2)$$

La ecuación desarrollada de la conservación de la energía. ▶

que es la representación matemática básica de la versión energética del modelo de análisis del de **sistema no aislado**. (En capítulos posteriores se verán otras versiones, incluida la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular.) En la mayoría de los casos, la ecuación 8.2 se reduce a una mucho más simple, porque algunos de los términos son cero. Si, para un sistema conocido, todos los términos en el lado derecho de la ecuación de conservación de energía son cero, el sistema es un *sistema aislado*, que se estudia en la siguiente sección.

La ecuación de conservación de energía no es más complicada que el proceso de balances en su cuenta de cheques. Si su cuenta es el sistema, el cambio en el saldo para un mes determinado es la suma de todas las transferencias: depósitos, retiros, comisiones, intereses y cheques expedidos. ¡Puede resultarle útil pensar en la energía como la *moneda de la naturaleza*!

La ecuación 8.2 representa una situación *general*; cubre todas las situaciones posibles en la física clásica que encontraremos a lo largo de este libro. Usted no necesita memorizar diferentes ecuaciones energéticas para diferentes situaciones. La ecuación 8.2 es la *única* ecuación que necesita para comenzar con un método de energía para la solución de un problema.

Cuando se utiliza para resolver un problema, el procedimiento es analizar la situación y establecer los términos en la ecuación 8.2 que no se aplican a la situación igual a cero. Esto reducirá la ecuación 8.2 a una ecuación más pequeña que sea apropiada para la situación. Por ejemplo, suponga que se aplica una fuerza a un sistema no aislado y el punto de aplicación de la fuerza se mueve a través de un desplazamiento. Ahora suponga que el único efecto en el sistema es cambiar la rapidez de uno o más componentes del sistema. Entonces la ecuación 8.2 se reduce a

$$\Delta K = W \quad (8.3)$$

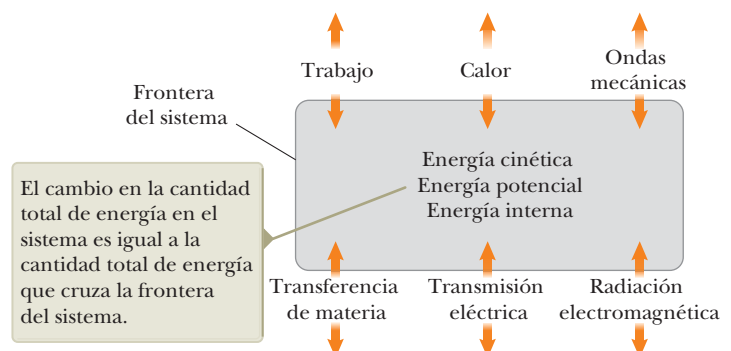
que es el teorema trabajo-energía cinética. Este teorema es un caso especial del principio más general de conservación de energía. Se verán varios casos especiales en capítulos futuros.

- E XAMEN RÁPIDO 8.1** Considere un bloque que se desliza sobre una superficie horizontal con fricción. Ignore cualquier sonido que pueda producir el deslizamiento.
- (i) Si el sistema es el *bloque*, este sistema es (a) aislado, (b) no aislado, (c) imposible de determinar. (ii) Si el sistema es la *superficie*, describa el sistema a partir del mismo conjunto de opciones. (iii) Si el sistema es el *bloque y la superficie*, describa el sistema a partir del mismo conjunto de opciones.

MODELO DE ANÁLISIS Sistema no aislado (energía)

Imagine que ha identificado un sistema para ser analizado y ha definido una frontera del sistema. La energía puede existir en el sistema en tres formas: cinética, potencial e interna. El total de la energía puede cambiar cuando la energía cruza la frontera del sistema por cualquiera de los seis métodos de transferencia que se muestran en el diagrama. El cambio total de energía en el sistema es igual a la cantidad total de energía que ha cruzado las fronteras del sistema. El enunciado matemático de ese concepto se expresa en la **ecuación de conservación de la energía**:

$$\Delta E_{\text{sistema}} = \Sigma T \quad (8.1)$$



MODELO DE ANÁLISIS Sistema no aislado (energía) (continuación)

El desarrollo completo de la ecuación 8.1 muestra los tipos específicos de almacenamiento y transferencia de energía:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = W + Q + T_{\text{OM}} + T_{\text{TM}} + T_{\text{TE}} + T_{\text{RE}} \quad (8.2)$$

Para un problema específico, esta ecuación se reduce generalmente a un número menor de términos eliminando los términos que son iguales a cero porque no son adecuadas a la situación. Vea el siguiente ejemplo conceptual 8.1.

Ejemplos:

- una fuerza hace trabajo en un sistema de un solo objeto, al cambiar su rapidez: el teorema de trabajo-energía cinética, $W = \Delta K$
- se realiza trabajo en un gas contenido en un recipiente y se somete a una transferencia de energía por calor, dando como resultado un cambio en su temperatura: la primera ley de la termodinámica, $\Delta E_{\text{int}} = W + Q$ (capítulo 19)
- se enciende una lámpara incandescente, con energía entrando en el filamento por electricidad, causando que su temperatura aumente y salga luz: $\Delta E_{\text{int}} = T_{\text{TE}} + T_{\text{RE}}$ (capítulo 26)
- un fotón que entra en un metal, causa que un electrón se expulse del metal: el efecto fotoeléctrico, $\Delta K + \Delta U = T_{\text{RE}}$ (capítulo 39)

Ejemplo conceptual 8.1 Reducción de la ecuación 8.2 en situaciones específicas

Cuando se utiliza la ecuación 8.2 para resolver un problema, se deben recordar los siguientes pasos: (1) definir el sistema; (2) identificar el principio y el final del intervalo de tiempo de interés; (3) identificar las configuraciones iniciales y finales del sistema (posiciones de objetos en situaciones gravitacionales, extensiones de resortes, etc.) y asignar los valores de referencia apropiados de la energía potencial; (4) escribir la ecuación 8.2, eliminando o estableciendo términos iguales a cero que no se aplican en la situación. Considere los siguientes ejemplos. Para cada ejemplo, se proporciona el sistema y el intervalo de tiempo antes de que el dispositivo se encienda hasta que ha estado operando por unos momentos.

(A) Su televisor.

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = W + Q + T_{\text{OM}} + T_{\text{TM}} + T_{\text{TE}} + T_{\text{RE}} \rightarrow \Delta E_{\text{int}} = Q + T_{\text{OM}} + T_{\text{TE}} + T_{\text{RE}}$$

SOLUCIÓN

Su televisión es un sistema no aislado, que se calienta después de que se enciende, toma energía mediante la electricidad para funcionar, y emite energía por el sonido de los altavoces, la luz de la pantalla, y el calor de las superficies calientes.

(B) Su podadora con motor de gasolina. El intervalo de tiempo incluye el proceso de llenar el tanque con gasolina.

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = W + Q + T_{\text{OM}} + T_{\text{TM}} + T_{\text{TE}} + T_{\text{RE}} \rightarrow \Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = W + Q + T_{\text{OM}} + T_{\text{TM}}$$

Su podadora es un sistema no aislado, con una cuchilla móvil, una gran energía potencial en el combustible que se agregó, y una temperatura creciente mientras funciona. La energía entró en la podadora cuando se llenó de combustible y sale con el sonido y calor de las superficies calientes. El objetivo del dispositivo es el trabajo que hace sobre el pasto conforme se corta. Observe que puede haber procesos eléctricos asociados con la bujía del motor de la podadora, pero estos procesos son *internos* al sistema, por lo que no representan energía que cruza la frontera.

(C) Una taza de té que se calienta en un horno de microondas.

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = W + Q + T_{\text{OM}} + T_{\text{TM}} + T_{\text{TE}} + T_{\text{RE}} \rightarrow \Delta E_{\text{int}} = Q + T_{\text{RE}}$$

Su taza de té es un sistema no aislado, con una temperatura cada vez mayor. La entrada de energía es por la radiación electromagnética: las microondas. El término del calor representa un poco de energía que transfiere del té caliente en el aire de temperatura baja que rodea la taza.

8.2 Modelo de análisis: El sistema aislado (Energía)

En esta sección se estudia otro escenario muy común en problemas físicos: un sistema se elige de manera tal que la energía no cruza la frontera del sistema por ningún método. En primer término, se considera una situación gravitacional. Piense en el sistema libro-Tierra



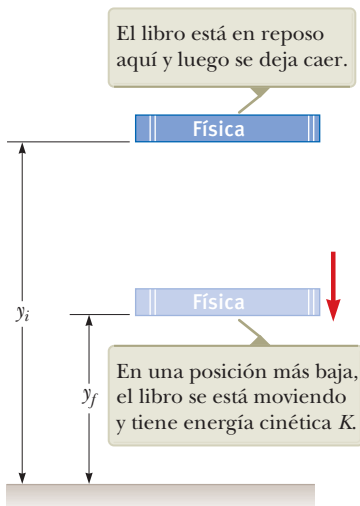


Figura 8.2 Un libro se libera a partir del reposo y cae debido al trabajo realizado por la fuerza gravitacional en el libro.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 8.2

Condiciones para la ecuación

8.5 La ecuación 8.5 sólo es verdadera para un sistema en el que actúan fuerzas conservativas. Se verá cómo manejar fuerzas no conservativas en las secciones 8.3 y 8.4.

Se conserva la energía mecánica de un sistema aislado cuando no actúa alguna fuerza no conservativa.

La energía total de un sistema aislado se conserva.

de la figura 7.16 en el capítulo anterior. Después de levantar el libro, existe energía potencial gravitacional almacenada en el sistema, que se calcula a partir del trabajo hecho por el agente externo en el sistema, con $W = \Delta U_g$. (Verifique que esta ecuación, que hemos visto antes como la ecuación 7.20, está contenida en la ecuación 8.2 anterior.)

Ahora imagine que deja caer el libro de la posición a la que lo levantó, como se muestra en la figura 8.2. El sistema libro-Tierra ahora no interactúa con el medio ambiente, ya que su mano ya no está en contacto con el libro. A medida que el libro cae, la energía cinética del sistema, debida al movimiento del libro solo, aumenta, y la energía potencial gravitacional del sistema disminuye. De la ecuación 8.2, vemos que

$$\Delta K + \Delta U_g = 0 \quad (8.4)$$

El lado izquierdo de esta ecuación representa una suma de cambios de la energía almacenada en el sistema. No hay transferencias de energía de ningún tipo a través de las fronteras del sistema, por lo que hace todos los términos en el lado derecho de la ecuación 8.2 igual a cero; el sistema libro-Tierra está *aislado* del medio ambiente. Desarrollamos esta ecuación para un sistema gravitacional, pero se puede demostrar que es válida para un sistema con cualquier tipo de energía potencial. Por tanto, para este sistema aislado,

$$\Delta K + \Delta U = 0 \quad (8.5)$$

(Compruebe que esta ecuación está contenida dentro de la ecuación 8.2.) Observe lo que sucede en este proceso. La energía no se *transfiere* a través de la frontera de un sistema aislado. Más bien, la energía se *transforma* dentro del sistema, de un tipo a otro. En caso del libro cayendo en la figura 8.2, el *mecanismo de transformación* es el trabajo interno realizado en el libro dentro del sistema por la fuerza gravitacional.

Definimos en el capítulo 7 la suma de las energías cinéticas y potenciales de un sistema como su energía mecánica:

$$E_{\text{mec}} \equiv K + U \quad (8.6)$$

donde U representa el total de *todos* los tipos de energía potencial. Ya que el sistema en consideración está aislado, las ecuaciones 8.5 y 8.6 nos dicen que la energía mecánica del sistema se conserva:

$$\Delta E_{\text{sistema}} = 0 \quad (8.7)$$

La ecuación 8.7 es un enunciado de la **conservación de energía mecánica** para un sistema aislado sin que actúen fuerzas no conservativas. La energía mecánica en tal sistema se conserva: la suma de las energías cinética y potencial permanece constante.

Ahora escribimos explícitamente los cambios en la energía en la ecuación 8.5:

$$\begin{aligned} (K_f - K_i) + (U_f - U_i) &= 0 \\ K_f + U_f &= K_i + U_i \end{aligned} \quad (8.8)$$

Para la situación gravitacional del libro que cae, la ecuación 8.8 se puede escribir como

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i \quad (8.9)$$

donde $v_i = 0$ si el libro de la figura 8.2 cae desde el reposo. Mientras el libro cae hacia la Tierra, el sistema libro-Tierra pierde energía potencial y gana energía cinética tal que el total de las dos clases de energía siempre permanece constante. $E_{\text{total},i} = E_{\text{total},f}$

Si hay fuerzas no conservativas actuando dentro del sistema, la energía mecánica se transforma en energía interna como se discutió en la sección 7.7. Si fuerzas no conservativas actúan en un sistema aislado, la energía total del sistema se conserva aunque no la energía mecánica. En este caso, la conservación de energía del sistema se expresa como

$$\Delta E_{\text{sistema}} = 0 \quad (8.10)$$

donde E_{sistema} incluye todas las energías cinética, potencial e interna. Esta ecuación es el enunciado más general del modelo de **sistema aislado**. Es equivalente a la ecuación 8.2

con todos los términos del lado derecho iguales a cero. Al utilizar los modelos de sistema aislado o no aislado como se ha discutido aquí, agregaremos el calificador *para energía o (energía)*. Encontraremos en los siguientes capítulos que también hay modelos de sistemas aislados y no aislados para otras cantidades.

Asociados con esta ecuación más general para el sistema aislado hay una variedad de nuevos mecanismos de transformación. Los ejemplos incluyen fuerzas no conservativas (el calentamiento del papel de lija en el “Imagine” del capítulo 7), las reacciones químicas (un petardo explosivo), y las reacciones nucleares (la operación de un reactor nuclear).

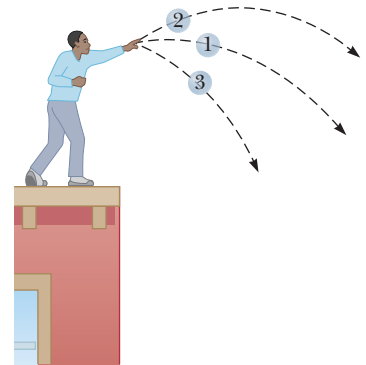


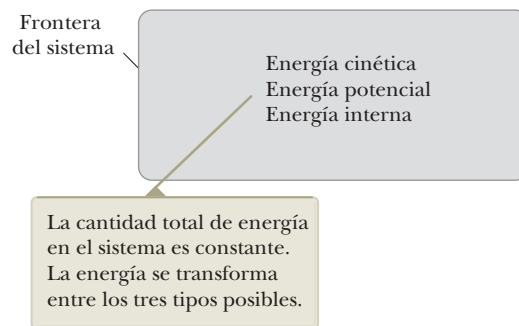
Figura 8.3 (Examen rápido 8.3) Tres bolas idénticas se lanzan con la misma rapidez inicial de la parte superior de un edificio.

- E XAMEN RÁPIDO 8.2** Una roca de masa m se deja caer hacia el suelo desde una altura h . Una segunda roca, con masa $2m$, se deja caer desde la misma altura. Cuando la segunda roca golpea el suelo, ¿cuál es su energía cinética? (a) el doble de la primera roca, (b) cuatro veces la de la primera roca, (c) la misma que en la primera roca, (d) la mitad de la primera roca (e) imposible de determinar.

- E XAMEN RÁPIDO 8.3** Tres bolas idénticas se lanzan desde lo alto de un edificio, todas con la misma rapidez inicial. Como se muestra en la figura 8.3, la primera se lanza horizontalmente, la segunda a cierto ángulo sobre la horizontal y la tercera a cierto ángulo bajo la horizontal. Desprecie la resistencia del aire y clasifique las rapidez-ces de las bolas en el instante en que cada una golpea el suelo.

MODELO DE ANÁLISIS Sistema aislado (Energía)

Imagine que ha identificado un sistema para analizar y ha definido una frontera del sistema. La energía puede existir en el sistema en tres formas: cinética, potencial e interna. También imagine una situación en la que ninguna energía cruza la frontera del sistema por cualquier método. Entonces, el sistema es aislado; la energía se transforma de una forma a otra y la ecuación 8.2 se convierte en



$$\Delta E_{\text{sistema}} = 0 \quad (8.10)$$

Si no actúan fuerzas no conservativas dentro del sistema aislado, se conserva la energía mecánica del sistema, así

$$\Delta E_{\text{mec}} = 0 \quad (8.7)$$

Ejemplos:

- un objeto en caída libre; la energía potencial gravitacional se transforma en energía cinética: $\Delta K + \Delta U = 0$
- una pelota de básquetbol rodando a través de un piso de un gimnasio se detiene; la energía cinética se transforma en energía interna: $\Delta K + \Delta E_{\text{int}} = 0$
- se eleva un péndulo y se suelta con una rapidez inicial; su movimiento con el tiempo se detiene debido a la resistencia del aire; se transforma la energía potencial gravitacional y la energía cinética a energía interna, $\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = 0$ (capítulo 15)
- se conecta una batería a un resistor; la energía potencial química de la batería se transforma en energía interna en el resistor: $\Delta U + \Delta E_{\text{int}} = 0$ (capítulo 27)

Ejemplo 8.2 Bola en caída libre

Una bola de masa m se deja caer desde una altura h sobre el suelo, como se muestra en la figura 8.4 (página 188).

(A) Ignore la resistencia del aire y determine la rapidez de la bola cuando está a una altura y sobre el suelo. Elija el sistema como la bola y la Tierra.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 8.4 y la experiencia cotidiana con objetos que caen nos permiten formar ideas de la situación. Aunque este problema se resuelve fácilmente con las técnicas del capítulo 2, practique el método de energía.

Categorizar Como sugiere el problema, el sistema se identifica como la bola y la Tierra. Ya que no hay ni resistencia del aire ni alguna otra interacción entre el sistema y el medio ambiente, el *sistema es aislado* y usamos el modelo de sistema aislado para la energía. La única fuerza entre los componentes del sistema es la fuerza gravitacional, que es conservativa.

continúa

8.2 continuación

Analizar Ya que el sistema es aislado y no existen fuerzas no conservativas actuando dentro del sistema, se aplica el principio de conservación de energía mecánica al sistema bola-Tierra. En el instante cuando la bola se libera, su energía cinética es $K_i = 0$ y la energía potencial gravitacional del sistema es $U_{gi} = mgh$. Cuando la bola está a una distancia y sobre el suelo, su energía cinética es $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$ y la energía potencial en relación con el suelo es $U_{gf} = mgy$.

Escriba la reducción adecuada de la ecuación 8.2, indicando que los únicos tipos de energía en el sistema que cambian son la energía cinética y la energía potencial gravitacional:

$$\Delta K + \Delta U_g = 0$$

Sustituya las energías:

$$\left(\frac{1}{2}mv_f^2 - 0\right) + (mgy - mgh) = 0$$

Resuelva para v_f :

$$v_f^2 = 2g(h - y) \rightarrow v_f = \sqrt{2g(h - y)}$$

La rapidez siempre es positiva. Si se le pidió encontrar la velocidad de la bola, usará el valor negativo de la raíz cuadrada como la componente y para indicar el movimiento hacia abajo.

(B) Determine la rapidez de la bola en y eligiendo a la bola como el sistema.

SOLUCIÓN

Categorizar En este caso, el único tipo de energía en el sistema que cambia es la energía cinética. Un sólo objeto que se puede modelar como una partícula no puede poseer energía potencial. El efecto de la gravedad es trabajar sobre la bola a través de la frontera del sistema. Utilizamos el modelo de *sistema no aislado* para la energía.

Analizar Escriba la reducción apropiada de la ecuación 8.2:

$$\Delta K = W$$

Sustituya las energías cinéticas iniciales y finales y el trabajo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}mv_f^2 - 0\right) &= \vec{\mathbf{F}}_g \cdot \Delta \vec{\mathbf{r}} = -mg\hat{\mathbf{j}} \cdot \Delta y\hat{\mathbf{j}} \\ &= -mg\Delta y = -mg(y - h) = mg(h - y) \end{aligned}$$

Se resuelve para v_f :

$$v_f^2 = 2g(h - y) \quad \text{S} \quad v_f = \sqrt{2g(h - y)}$$

Finalizar El resultado final es el mismo, independientemente de la elección del sistema. En la solución de su problema futuro, considere que la elección del sistema es suya. A veces el problema es mucho más fácil de resolver si se realiza una elección juiciosa del sistema a analizar.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Qué pasa si la bola se lanza hacia abajo desde la altura máxima con una rapidez v_i ? ¿Cuál sería su rapidez en la altura y ?

Respuesta Si al inicio la bola se lanza hacia abajo, esperamos que su rapidez a la altura y sea más grande que si simplemente se soltó. Haga su elección del sistema, ya sea solo la bola o la bola y la Tierra. Encontrará que cualquier opción da el siguiente resultado:

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + 2g(h - y)}$$

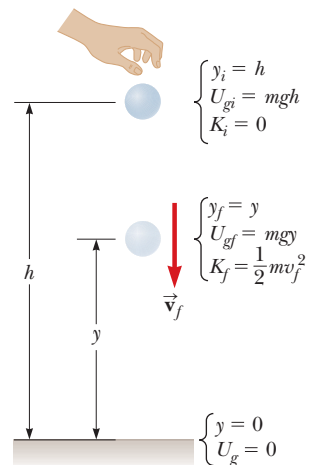


Figura 8.4 (Ejemplo 8.2) Una bola se deja caer desde una altura h sobre el suelo. Al inicio, la energía total del sistema bola-Tierra es energía potencial gravitacional, igual a mgh en relación con el suelo. En la elevación y , la energía total es la suma de las energías cinética y potencial.

Ejemplo 8.3 Una gran entrada

Se le pide diseñar un aparato para sostener a un actor de 65 kg de masa que “volará” hacia el escenario durante la representación de una obra. Usted sujeta el arnés del actor a un saco de arena de 130 kg mediante un cable de acero ligero que corre de manera uniforme en dos poleas sin fricción, como en la figura 8.5a. Necesita 3.0 m de cable entre el arnés y la polea más cercana, de modo que quede oculta detrás de una cortina. Para que el aparato funcione, el saco de arena nunca debe levantarse arriba del suelo mientras el actor se balancea desde arriba del escenario hacia el suelo. Llame θ al ángulo inicial que el cable del actor forma con la vertical. ¿Cuál es el valor máximo que tiene θ antes de que el saco de arena se levante del suelo?

8.3 continuación

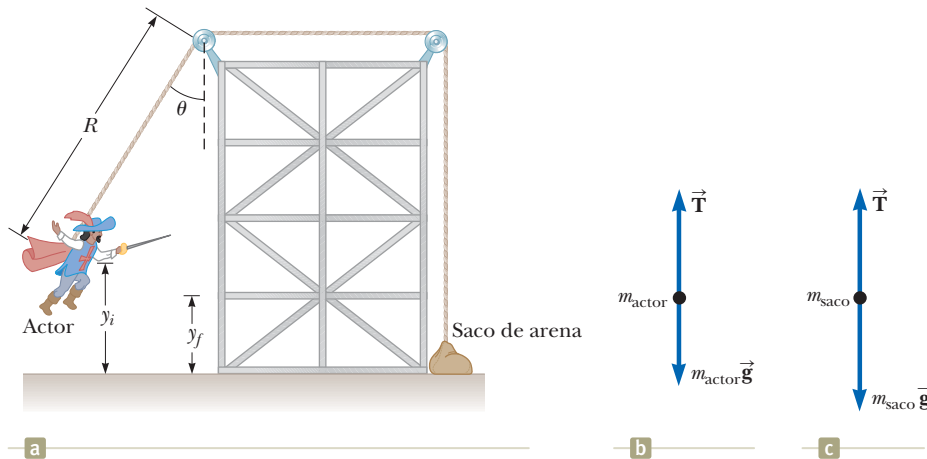


Figura 8.5 (Ejemplo 8.3) (a) Un actor usa una ingeniosa tramoya para hacer su entrada. (b) Diagrama de cuerpo libre para el actor en la parte inferior de la trayectoria circular. (c) Diagrama de cuerpo libre para el saco de arena si la fuerza normal desde el suelo tiende a cero.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Se deben usar muchos conceptos para resolver este problema. Piense lo que sucede conforme el actor se aproxima a la parte baja del columpio. En la parte baja, el cable es vertical y debe soportar su peso, así como proporcionar aceleración centrípeta de su cuerpo en la dirección hacia arriba. En este punto de la oscilación, la tensión en el cable es la más alta y el saco de arena tiene más probabilidades de levantarse del suelo.

Categorizar Primero, al observar la oscilación del actor desde el punto inicial hasta el punto más bajo, se modela al actor y a la Tierra como un *sistema aislado*. Se ignora la resistencia del aire, de modo que no hay fuerzas no conservativas en acción. En principio debe estar tentado a modelar el sistema como no aislado, debido a la interacción del sistema con el cable, que está en el entorno. Sin embargo, la fuerza aplicada al actor por el cable siempre es perpendicular a cada elemento del desplazamiento del actor y por tanto no realiza trabajo. En consecuencia, en términos de transferencias de energía a través de la frontera, el sistema está aislado.

Analizar Primero se encuentra la rapidez del actor a medida que llega al suelo como función del ángulo inicial θ y el radio R de la trayectoria circular que recorre. Usemos el modelo de partícula eligiendo un punto particular en el cuerpo del actor.

Usando el modelo de sistema aislado, realice la reducción apropiada de la ecuación 8.2 para el sistema de actor-Tierra:

$$(1) \quad \Delta K + \Delta U_g = 0$$

Sea y_i la altura inicial del actor sobre el suelo y v_f su rapidez en el instante antes de aterrizar. (Observe que $K_i = 0$ porque el actor parte del reposo.) Inserte las energías en la ecuación (1) y resuelva para la rapidez final del actor.

$$\left(\frac{1}{2}m_{\text{actor}}v_f^2 - 0\right) + (m_{\text{actor}}gy_f - m_{\text{actor}}gy_i) = 0$$

$$(2) \quad v_f^2 = 2g(y_f - y_i)$$

De la geometría en la figura 8.5a, observe que $y_f - y_i = R - R \cos \theta = R(1 - \cos \theta)$. Aplique esta correspondencia en la ecuación (2)

$$(3) \quad v_f^2 = 2gR(1 - \cos \theta)$$

Categorizar Ahora, concéntrese en el instante cuando el actor está en el punto más bajo. Ya que la tensión en el cable se transfiere como una fuerza aplicada al saco de arena, en este instante el actor se modela como una *partícula bajo una fuerza neta*. Ya que el actor se mueve a lo largo de un arco circular, él experimenta en la parte inferior de la oscilación una aceleración centrípeta de v_f^2/R dirigida hacia arriba.

Analizar Aplique la segunda ley de Newton al actor en la parte baja de su trayectoria, con el diagrama de cuerpo libre de la figura 8.5b como guía, y reconozca a la aceleración como centrípeta:

$$\sum F_y = T - m_{\text{actor}}g = m_{\text{actor}} \frac{v_f^2}{R}$$

$$(4) \quad T = m_{\text{actor}}g + m_{\text{actor}} \frac{v_f^2}{R}$$

Categorizar Por último, observe que el saco de arena se levanta del suelo cuando la fuerza hacia arriba que el cable ejerce sobre él supera la fuerza gravitacional que también actúa sobre él; la fuerza normal es cero cuando esto ocurre. Sin embargo, *no* se quiere que el saco de arena se levante del suelo. El saco de arena debe permanecer en reposo, así que se le modela como una *partícula en equilibrio*.

continúa

8.3 continuación

Analizar Una fuerza T de magnitud dada por la ecuación 4) se transmite mediante el cable al saco de arena. Si el saco de arena permanece en reposo, pero puede levantarse del suelo si el cable aplica un poco más de fuerza, la fuerza normal sobre él se vuelve cero y el modelo de partícula en equilibrio dice que $T = m_{\text{saco}}g$, como en la figura 8.5c.

Sustituya esta condición y la ecuación (3) en la (4):

$$m_{\text{saco}}g = m_{\text{actor}}g + m_{\text{actor}} \frac{2gR(1 - \cos \theta)}{R}$$

Resuelva para $\cos \theta$ y sustituya los parámetros que se proporcionan:

$$\cos \theta = \frac{3m_{\text{actor}} - m_{\text{saco}}}{2m_{\text{actor}}} = \frac{3(65.0 \text{ kg}) - 130 \text{ kg}}{2(65.0 \text{ kg})} = 0.500$$

$$\theta = 60.0^\circ$$

Finalizar En este caso se combinaron técnicas de diferentes áreas de nuestro estudio. Observe que la longitud R del cable desde el arnés del actor hasta la polea de la izquierda no aparece en la ecuación algebraica final para $\cos \theta$. Por tanto, la respuesta final es independiente de R .

Ejemplo 8.4 El rifle de juguete cargado por resorte

El mecanismo de lanzamiento de un rifle de juguete consiste en un resorte que suelta el gatillo (figura 8.6a). El resorte se comprime a una posición y_{A} y el gatillo es disparado. El proyectil de masa m se eleva a una posición y_{C} sobre la posición en la que deja el resorte, indicada en la figura 8.6b como la posición $y_{\text{B}} = 0$. Considere un disparo del rifle para el que $m = 35.0 \text{ g}$, $y_{\text{A}} = -0.120 \text{ m}$ y $y_{\text{C}} = 20.0 \text{ m}$.

(A) Desprecie todas las fuerzas resistivas, determine la constante elástica.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en el proceso que se ilustra en los incisos (a) y (b) en la figura 8.6. El proyectil parte del reposo en **(A)**, aumenta su rapidez conforme el resorte lo empuja hacia arriba, deja el resorte en **(B)** y después disminuye su velocidad mientras la fuerza gravitacional lo jala hacia abajo, finalmente llega al reposo en el punto **(C)**. Observe que hay dos tipos de energía potencial en este sistema: gravitacional y elástica.

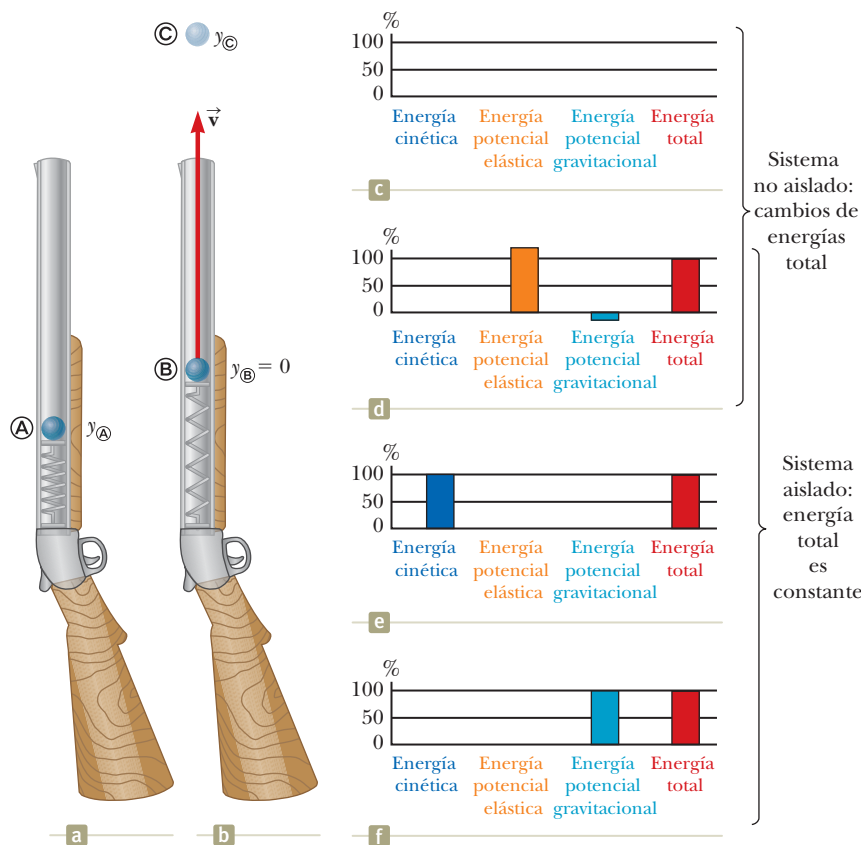


Figura 8.6 (Ejemplo 8.4) Rifle con resorte (a) antes de disparar y (b) cuando el resorte se extiende a su longitud relajada. (c) Una gráfica de barras para el sistema rifle-proyectil-Tierra antes de que se cargue el rifle de juguete. La energía en el sistema es cero. (d) El rifle de juguete se carga por medio de un agente externo que hace trabajo en el sistema para empujar hacia abajo el resorte. Por tanto, el sistema es no aislado durante este proceso. Después de que se carga el rifle de juguete, la energía potencial elástica se almacena en el resorte y la energía potencial gravitacional del sistema es menor porque el proyectil está por debajo del punto **(B)**. (e) cuando el proyectil pasa por el punto **(B)**, toda la energía del sistema aislado es cinética. (f) cuando el proyectil alcanza el punto **(C)**, toda la energía del sistema aislado es potencial gravitacional.

8.4 continuación

Categorizar El sistema se identifica como el proyectil, el resorte y la Tierra. Se ignora tanto la resistencia del aire sobre el proyectil como la fricción en el rifle; de esa manera el sistema se modela como aislado sin que actúen fuerzas no conservativas.

Analizar Puesto que el proyectil parte del reposo, su energía cinética inicial es cero. La configuración cero para la energía potencial gravitacional del sistema se elige cuando el proyectil deja el resorte en \textcircled{B} . Para esta configuración, la energía potencial elástica también es cero.

Después de disparar el rifle, el proyectil se eleva a una altura máxima $y_{\textcircled{C}}$. La energía cinética final del proyectil es cero.

Del modelo de sistema aislado, escriba una ecuación de conservación de energía mecánica para el sistema entre las configuraciones, cuando el proyectil está en los puntos \textcircled{A} y \textcircled{C} :

$$(1) \quad \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_s = 0$$

Sustituya las energías final e inicial:

$$(0 - 0) + (mgy_{\textcircled{C}} - mgy_{\textcircled{A}}) + (0 - \frac{1}{2}kx^2) = 0$$

Resuelva para k :

$$k = \frac{2mg(y_{\textcircled{C}} - y_{\textcircled{A}})}{x^2}$$

Sustituya valores numéricos:

$$k = \frac{2(0.035 \text{ 0 kg})(9.80 \text{ m/s}^2)[20.0 \text{ m} - (-0.120 \text{ m})]}{(0.120 \text{ m})^2} = 958 \text{ N/m}$$

(B) Encuentre la rapidez del proyectil a medida que se mueve a través de la posición de equilibrio del resorte, como se muestra en la figura 8.6b.

SOLUCIÓN

Analizar La energía del sistema a medida que el proyectil se mueve a través de la posición de equilibrio del resorte, sólo incluye la energía cinética del proyectil $\frac{1}{2}mv^2$. Ambos tipos de energía potencial son iguales a cero para esta configuración del sistema.

Escriba la ecuación (1) nuevamente para el sistema entre los puntos \textcircled{A} y \textcircled{B} :

$$\Delta K + \Delta U_g + \Delta U_s = 0$$

Sustituya las energías inicial y final:

$$(\frac{1}{2}mv^2 - 0) + (0 - mgy_{\textcircled{A}}) + (0 - \frac{1}{2}kx^2) = 0$$

Resuelva para $v_{\textcircled{B}}$:

$$v = \sqrt{\frac{kx^2}{m} + 2gy_{\textcircled{A}}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$v = \sqrt{\frac{(958 \text{ N/m})(0.120 \text{ m})^2}{(0.035 \text{ 0 kg})} + 2(9.80 \text{ m/s}^2)(-0.120 \text{ m})} = 19.8 \text{ m/s}$$

Finalizar Este es el primer ejemplo en el que se han incluido dos tipos de energía potencial. Observe en la parte (A) que nunca hemos necesitado considerar algo acerca de la rapidez de la bola entre los puntos \textcircled{A} y \textcircled{C} , lo que es parte del poder del enfoque de energía: los cambios en la energía cinética y potencial dependen sólo de los valores iniciales y finales, no de lo que ocurre entre las configuraciones correspondientes a estos valores.

8.3 Situaciones que incluyen fricción cinética

Considere de nuevo el libro de la figura 7.19a que se desliza hacia la derecha sobre la superficie de una mesa pesada y disminuye su velocidad debido a la fuerza de fricción. La fuerza de fricción hace trabajo porque hay una fuerza y un desplazamiento. Sin embargo, considere que las ecuaciones para trabajo incluyen el desplazamiento *del punto de aplicación de la fuerza*. En la figura 8.7a (página 192) se muestra un modelo simple de la fuerza de fricción entre el libro y la superficie. Toda la fuerza de fricción entre el libro y la superficie se representa con dos dientes idénticos que se soldaron puntualmente uno con otro.² Un diente se proyecta hacia arriba desde la superficie, el otro hacia abajo desde el libro, y

²La figura 8.7 y su análisis se inspiraron en un artículo clásico acerca de fricción: B.A. Sherwood y W.H. Bernard, "Work and heat transfer in the presence of sliding friction", *American Journal of Physics*, 52 p. 1001, 1984.

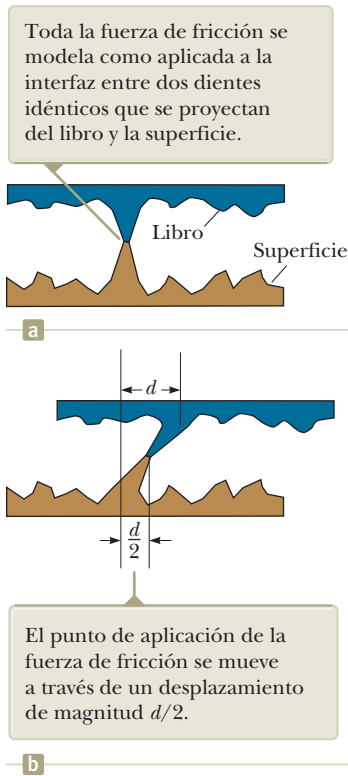


Figura 8.7 (a) Un modelo de fricción simplificado entre un libro y una superficie. (b) El libro se mueve hacia la derecha una distancia d .

están soldados en los puntos donde se tocan. La fuerza de fricción actúa en la unión de los dos dientes. Piense que el libro se desliza una pequeña distancia d hacia la derecha, como en la figura 8.7b. Ya que los dientes se modelan como idénticos, su unión se mueve hacia la derecha una distancia $d/2$. En consecuencia, el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza de fricción es $d/2$, pero el desplazamiento del libro es d !

Sin embargo, en realidad, la fuerza de fricción se dispersa sobre toda el área de contacto de un objeto que se desliza sobre una superficie, de modo que la fuerza no se localiza en un punto. Además, ya que las magnitudes de las fuerzas de fricción en varios puntos cambian constantemente a medida que se presentan los puntos de soldadura individuales, la superficie y el libro se deforman en la zona, y de este modo el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza de fricción no es en absoluto el mismo que el desplazamiento del libro. De hecho, el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza de fricción no es calculable y tampoco lo es el trabajo hecho por la fuerza de fricción.

El teorema trabajo-energía cinética es válido para una partícula o un objeto que se modela como partícula. No obstante, cuando actúa una fuerza de fricción, no se puede calcular el trabajo hecho por la fricción. Para tales situaciones, la segunda ley de Newton todavía es válida para el sistema aun cuando el teorema trabajo-energía cinética no lo sea. El caso de un objeto no deformable como el libro que se desliza sobre la superficie³ se puede manejar de una manera relativamente directa.

A partir de una situación en la que fuerzas, incluida la fricción, se apliquen al libro, es posible seguir un procedimiento similar al efectuado en el desarrollo de la ecuación 7.17. Comience por escribir la ecuación 7.8 para todas las fuerzas distintas de la fricción:

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} = \int (\sum \vec{F}_{\text{otras fuerzas}}) \cdot d\vec{r} \quad (8.11)$$

El $d\vec{r}$ en esta ecuación es el desplazamiento del objeto porque, para fuerzas distintas de la fricción, bajo la suposición de que dichas fuerzas no deforman el objeto, este desplazamiento es el mismo que el desplazamiento del punto de aplicación de las fuerzas. A cada lado de la ecuación 8.11 se añade la integral del producto escalar de la fuerza de fricción cinética y $d\vec{r}$. De esta manera, ¡no estamos definiendo esta cantidad como trabajo! Simplemente estamos diciendo que es una cantidad que se puede calcular matemáticamente y llegará a ser útil para nosotros en lo que sigue.

$$\begin{aligned} \sum W_{\text{otras fuerzas}} + \int \vec{f}_k \cdot d\vec{r} &= \int (\sum \vec{F}_{\text{otras fuerzas}}) \cdot d\vec{r} + \int \vec{f}_k \cdot d\vec{r} \\ &= \int (\sum \vec{F}_{\text{otras fuerzas}} + \vec{f}_k) \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

El integrando en el lado derecho de esta ecuación es la fuerza neta $\sum \vec{F}$, de modo que

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} + \int \vec{f}_k \cdot d\vec{r} = \int \sum \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Al incorporar la segunda ley de Newton $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ se obtiene

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} + \int \vec{f}_k \cdot d\vec{r} = \int m\vec{a} \cdot d\vec{r} = \int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt \quad (8.12)$$

donde se usó la ecuación 4.3 para rescribir $d\vec{r}$ como $\vec{v}dt$. El producto escalar obedece la regla del producto para la derivación (véase la ecuación B.30 en el apéndice B.6), de modo que la derivada del producto escalar de \vec{v} consigo misma se puede escribir

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$$

³La forma general del libro permanece igual, por lo que se dice que es indeformable. Sin embargo, a nivel microscópico, existe deformación de la cara del libro cuando se desliza sobre la superficie.

Donde se usó la propiedad conmutativa del producto escalar para justificar la expresión final en esta ecuación. En consecuencia,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt}$$

Al sustituir este resultado en la ecuación 8.12 se obtiene

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} + \int_{t_i}^{t_f} \vec{f}_k \cdot d\vec{r} = \int_{v_i}^{v_f} m \left(\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} \right) dt = \frac{1}{2} m \int_{v_i}^{v_f} d(v^2) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \Delta K$$

Al observar el lado izquierdo de esta ecuación, observe que, en el marco inercial de la superficie, \vec{f}_k y $d\vec{r}$ estarán en direcciones opuestas para cada incremento $d\vec{r}$ de la trayectoria que sigue el objeto. En consecuencia, $\vec{f}_k \cdot d\vec{r} = -f_k dr$. Ahora la expresión anterior se convierte en

$$\sum W_{\text{otras fuerzas}} - \int f_k dr = \Delta K$$

En el modelo para la fricción, la magnitud de la fuerza de fricción cinética es constante, de modo de f_k se puede sacar de la integral. La integral restante $\int dr$ es simplemente la suma de incrementos de longitud a lo largo de la trayectoria, que es la longitud de trayectoria total d . Por tanto,

$$W - f_k d = \Delta K \quad (8.13)$$

donde W representa el trabajo realizado en el objeto por todas las fuerzas distintas de la fricción. La ecuación 8.13 se puede utilizar cuando una fuerza de fricción actúa en un objeto. El cambio en la energía cinética es igual al trabajo realizado por todas las fuerzas distintas de la fricción menos un término $f_k d$ asociado con la fuerza de fricción.

Considere de nuevo la situación del desplazamiento del libro, identifiquemos el sistema más grande del libro y la superficie que ralentiza el libro bajo la influencia de una sola fuerza de fricción. No hay trabajo hecho a través de la frontera de este sistema porque el sistema no interactúa con el medio ambiente. No hay otros tipos de transferencia de energía que ocurran a través de la frontera del sistema, ¡suponiendo que se ignora el inevitable sonido que hace el libro al deslizarse! En este caso, la ecuación 8.2 se convierte en

$$\Delta K + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

El cambio en energía cinética del sistema libro-superficie es el mismo que el cambio en energía cinética del libro porque el libro es la única parte del sistema que se mueve. Por tanto, incorporando ecuación 8.13 sin hacer trabajo por otras fuerzas da

$$-f_k d + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

$$\Delta E_{\text{int}} = f_k d \quad (8.14)$$

La ecuación 8.14 nos dice que el aumento de energía interna del sistema es igual al producto de la fuerza de fricción y la longitud de trayectoria en la que se mueve el libro. En resumen, una fuerza de fricción transforma la energía cinética de un sistema en energía interna. Si se hace trabajo en el sistema por fuerzas que no sean de fricción, la ecuación 8.13, con la ayuda de la ecuación 8.14, se puede escribir como

$$W = \Delta K + \Delta E_{\text{int}} \quad (8.15)$$

que es una forma reducida de la ecuación 8.2 y representa el modelo de sistema no aislado para un sistema dentro del cual actúa una fuerza no conservativa. Para cualquier sistema en el que la fuerza de fricción cinética actúa entre los componentes del sistema, podemos escribir la forma completa de la ecuación 8.2, reducirla de acuerdo con ésta, y luego utilizar la ecuación 8.14 para sustituir el cambio de energía interna.

◀ Cambio en la energía interna debido a una fuerza de rozamiento constante dentro del sistema



- E XAMEN RÁPIDO 8.4** Usted viaja a lo largo de una autopista a 65 mi/h. Su automóvil tiene energía cinética. Súbitamente derrapa hasta detenerse debido a un congestionamiento de tránsito. ¿Dónde está la energía cinética que alguna vez tuvo su automóvil? (a) Toda está en energía interna en el camino. (b) Toda está en energía interna en las llantas. (c) Parte de ella se transformó en energía interna y otra parte se transfirió mediante ondas mecánicas. (d) Toda se transfirió del automóvil mediante diferentes mecanismos.

Ejemplo 1.1 Se jala un bloque sobre una superficie rugosa

Un bloque de 6.0 kg, inicialmente en reposo, se jala hacia la derecha a lo largo de una superficie horizontal mediante una fuerza horizontal constante de 12 N.

(A) Encuentre la rapidez del bloque después de que se mueve 3.0 m si las superficies en contacto tienen un coeficiente de fricción cinética de 0.15.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Este ejemplo es similar al ejemplo 7.6 (página 163), pero en este caso el ejemplo 7.6 se modifica de tal manera que la superficie ya no es sin fricción. La superficie rugosa aplica una fuerza de fricción en el bloque, opuesta a la fuerza aplicada. Como resultado, espera que la rapidez sea menor que la encontrada en el ejemplo 7.6.

Categorizar El bloque se jala mediante una fuerza y la superficie es rugosa, de modo que el sistema bloque-superficie se representa como un *sistema no aislado* con una fuerza no conservativa en acción.

Analizar La figura 8.8a ilustra esta situación. Ni la fuerza normal ni la fuerza gravitacional realizan trabajo en el sistema porque sus puntos de aplicación se desplazan horizontalmente.

Escriba la reducción apropiada de la ecuación 8.2:

$$(1) \quad \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = W$$

Encuentre el trabajo realizado en el sistema por la fuerza aplicada igual que en el ejemplo 7.6, observe que $\Delta x = d$ ya que el movimiento es rectilíneo:

$$W = F \Delta x = Fd$$

Aplique el modelo de *partícula en equilibrio* al bloque en la dirección vertical:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow n - mg = 0 \rightarrow n = mg$$

Encuentre la magnitud de la fuerza de fricción:

$$f_k = \mu_k n = \mu_k mg$$

Sustituya las energías en la ecuación (1), usando la ecuación (8.14) para ΔE_{int} y resuelva para la rapidez final del bloque

$$\left(\frac{1}{2}mv_f^2 - 0\right) + (\mu_k mg)d = Fd$$

$$v_f = \sqrt{2d \left(\frac{F}{m} - \mu_k g \right)}$$

Sustituya valores numéricos

$$v_f = \sqrt{2(3.0 \text{ m}) \left[\frac{12 \text{ N}}{6.0 \text{ kg}} - (0.15)(9.80 \text{ m/s}^2) \right]} = 1.8 \text{ m/s}$$

Finalizar Como era de esperar, este valor es inferior a los 3.5 m/s al que se encontró en el caso del bloque que desliza sobre una superficie sin fricción (véase el ejemplo 7.6). La diferencia de energías cinéticas entre el bloque de ejemplo 7.6 y el de este ejemplo es igual al aumento en energía interna del sistema bloque-superficie en este ejemplo.

(B) Suponga que se aplica la fuerza \vec{F} en un ángulo θ como se muestra en la figura 8.8b. ¿A qué ángulo se debe aplicar la fuerza para lograr la mayor rapidez posible después de que el bloque se ha movido 3.0 m a la derecha?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Puede suponer que $\theta = 0$ daría la mayor rapidez porque la fuerza tendría la mayor componente posible en la dirección paralela a la superficie. Sin embargo, piense en un ángulo arbitrario distinto de cero. Aunque la componente horizontal de la fuerza se redujera, la componente vertical de la fuerza reduciría la fuerza normal, lo que a su vez reduce la fuerza de fricción, esto sugiere que la rapidez se podría maximizar al jalar en un ángulo distinto de $\theta = 0$.

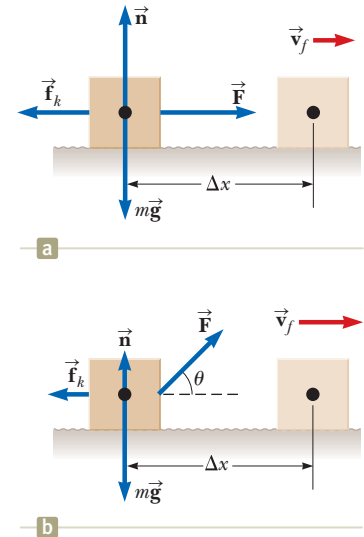


Figura 8.8 (Ejemplo 8.5) (a) Se jala un bloque hacia la derecha sobre una superficie rugosa mediante una fuerza horizontal constante. (b) La fuerza aplicada está en un ángulo θ con la horizontal.

8.5 continuación

Categorizar Como en el inciso (A), el sistema bloque-superficie se modela como un *sistema no aislado* para la energía con una fuerza no conservativa actuando.

Analizar Escriba la reducción apropiada de la ecuación 8.2:

$$(1) \quad \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = W$$

Encuentre el trabajo hecho por la fuerza aplicada:

$$(2) \quad W = F \Delta x \cos \theta = Fd \cos \theta$$

Aplique el modelo de partícula en equilibrio al bloque en la dirección vertical:

$$\sum F_y = n + F \sin \theta - mg = 0$$

Resuelva para n :

$$(2) \quad n = mg - F \sin \theta$$

Sustituya para los cambios de energía en la ecuación (1) y resuelva para la energía cinética final del bloque:

$$(K_f - 0) + f_k d = W \rightarrow K_f = W - f_k d$$

Sustituya los resultados encontrados en las ecuaciones (1) y (2):

$$K_f = Fd \cos \theta - \mu_k n d = Fd \cos \theta - \mu_k (mg - F \sin \theta) d$$

Maximizar la rapidez es equivalente a maximizar la energía cinética final. En consecuencia, transforme en su derivada K_f respecto de θ e iguale el resultado a cero:

$$\frac{dK_f}{d\theta} = -Fd \sin \theta - \mu_k (0 - F \cos \theta) d = 0$$

$$-\sin \theta + \mu_k \cos \theta = 0$$

$$\tan \theta = \mu_k$$

Evalúe θ para $\mu_k = 0.15$:

$$\theta = \tan^{-1}(\mu_k) = \tan^{-1}(0.15) = 8.5^\circ$$

Finalizar Note que el ángulo en que la rapidez del bloque es un máximo no es, de hecho, $\theta = 0$. Cuando el ángulo supera 8.5° , la componente horizontal de la fuerza aplicada es demasiado pequeña para compensarse mediante la fuerza de fricción reducida y la rapidez del bloque comienza a disminuir de su valor máximo.

Ejemplo 8.6 Un sistema bloque-resorte

Un bloque de 1.6 kg de masa se une a un resorte horizontal que tiene una constante elástica de 1 000 N/m, como se muestra en la figura 8.9a. El resorte se comprime 2.0 cm y después se libera desde el reposo.

(A) Calcule la rapidez del bloque mientras pasa a través de la posición de equilibrio $x = 0$ si la superficie no tiene fricción.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Esta situación ya se explicó antes y es fácil visualizar el bloque cuando se empuja hacia la derecha por el resorte y se mueve con cierta rapidez en $x = 0$.

Categorizar El sistema se identifica como el bloque y se modela como un *sistema no aislado* para energía.

Analizar Escriba la reducción apropiada de la ecuación 8.2 para el bloque empujado por el resorte:

$$(1) \quad \Delta K = W_s$$

Aplique la ecuación 7.11 para encontrar el trabajo hecho por el resorte en el sistema:

$$(2) \quad W_s = \frac{1}{2} k x_{\text{máx}}^2$$

Sustituya las energías cinética inicial y final a la izquierda de la ecuación (1) y la expresión para el trabajo en la ecuación (2) a la derecha:

$$\left(\frac{1}{2} m v_f^2 - 0\right) = \frac{1}{2} k x_{\text{máx}}^2 \rightarrow v_f = x_{\text{máx}} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Sustituyendo valores numéricos:

$$v_f = (0.020 \text{ m}) \sqrt{\frac{1\,000 \text{ N/m}}{1.6 \text{ kg}}} = 0.50 \text{ m/s}$$

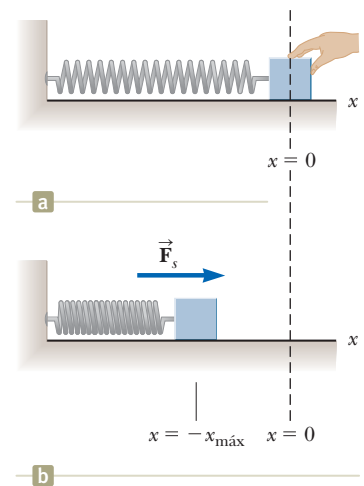


Figura 8.9 (Ejemplo 8.6) (a) Un bloque unido a un resorte es empujado hacia la izquierda desde una posición inicial $x = 0$ por un agente externo. (b) En la posición x , el bloque se suelta a partir del reposo y el resorte lo empuja hacia la derecha.

continúa

8.6 continuación

Finalizar Aunque este problema se pudo haber resuelto en el capítulo 7, aquí se presenta para ver la diferencia con el siguiente inciso (B), que requiere las técnicas de este capítulo.

(B) Calcule la rapidez del bloque mientras pasa por la posición de equilibrio si una fuerza de fricción constante de 4.0 N retarda su movimiento desde el momento en que se libera.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La respuesta correcta debe ser menor que la encontrada en el inciso (A) porque la fuerza de fricción retarda el movimiento.

Categorizar El sistema se identifica como el bloque y la superficie, un sistema no aislado por energía debido al trabajo realizado por el resorte. Hay una fuerza no conservativa que actúa dentro del sistema: la fricción entre el bloque y la superficie.

Analizar Escriba la reducción adecuada de la ecuación 8.2 y sustituya los cambios de energía:

$$\Delta K + \Delta E_{\text{int}} = W_s \rightarrow \left(\frac{1}{2}mv_f^2 - 0\right) + f_k d = W_s$$

Resuelva para v_f :

$$v_f = \sqrt{\frac{2}{m}(W_s - f_k d)}$$

Sustituya el trabajo hecho por el resorte que se encontró en el inciso(A):

$$v_f = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2}kx_{\text{max}}^2 - f_k d\right)}$$

Sustituya valores numéricos:

$$v_f = \sqrt{\frac{2}{1.6 \text{ kg}}\left[\frac{1}{2}(1000 \text{ N/m})(0.020 \text{ m})^2 - (4.0 \text{ N})(0.020 \text{ m})\right]} = 0.39 \text{ m/s}$$

Finalizar Como se esperaba, este valor es menor que los 0.50 m/s encontrados en el inciso (A).

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si la fricción aumenta a 10.0 N? ¿Cuál es la rapidez del bloque en $x = 0$?

Respuesta En este caso, el valor de $f_k d$ mientras el bloque se mueve a $x = 0$ es

$$f_k d = (10.0 \text{ N})(0.020 \text{ m}) = 0.20 \text{ J}$$

que es igual en magnitud a la energía cinética en $x = 0$ para el caso sin fricción (¡Verifique esto!). Por lo tanto, toda

la energía cinética se ha transformado a energía interna por fricción cuando el bloque llega a $x = 0$, y su rapidez en este punto es $v = 0$.

En esta situación, así como en el inciso (B), la rapidez del bloque alcanza un máximo en alguna posición distinta de $x = 0$. El problema 27 le pide ubicar dichas posiciones.

8.4 Cambios en energía mecánica para fuerzas no conservativas

En la discusión que conduce a la ecuación 8.14, que identifica el cambio en la energía interna de un sistema debido a la fricción, consideramos las fuerzas no conservativas que sólo afectan a la energía *cinética* del sistema. Sin embargo, ahora considere que el libro es parte de un sistema que además presenta un cambio en energía potencial. En este caso, $f_k d$ es la cantidad por la que cambia la energía interna debida a que la energía *mecánica* del sistema disminuye debido a la fuerza de fricción cinética. Por ejemplo, si el libro se mueve sobre un plano inclinado que no es sin fricción, hay un cambio tanto en la energía cinética como en la energía potencial gravitacional del sistema libro-plano inclinado-Tierra. En consecuencia, la ecuación (8.2) se puede escribir como

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

donde ΔE_{int} está dado por la ecuación 8.14.



Ejemplo 8.7 Caja que se desliza por una rampa

Una caja de 3.00 kg se desliza hacia abajo por una rampa. La rampa mide 1.00 m de largo y está inclinada en un ángulo de 30.0° , como se muestra en la figura 8.10. La caja parte del reposo en lo alto, se somete a una fuerza de fricción constante de 5.00 N de magnitud y continúa su movimiento una corta distancia sobre el piso horizontal, después de dejar la rampa y luego llega al reposo.

(A) Utilice la aproximación de energía para determinar la rapidez de la caja en la parte más baja de la rampa.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en la caja que se desliza por la rampa en la figura 8.10. Mientras más grande sea la fuerza de fricción, más lenta se deslizará la caja.

Categorizar Identifique la caja, la superficie y la Tierra como el sistema. El sistema se clasifica como un *sistema aislado* con una fuerza no conservativa actuando. Consideremos el intervalo de tiempo desde que la caja deja la parte superior de la rampa hasta que llega a la parte inferior.

Analizar Ya que $v_i = 0$, la energía cinética inicial del sistema, cuando la caja está en lo alto de la rampa, es cero. Si la coordenada y se mide desde la base de la rampa (la posición final de la caja, para la cual se elige que la energía potencial gravitacional del sistema sea cero) con la dirección hacia arriba positiva, por tanto $y_i = 0.500$ m.

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

Escriba la ecuación de conservación de la energía (ec. 8.2) para este sistema.

$$\left(\frac{1}{2}mv_f^2 - 0\right) + (0 - mgy_i) + f_k d = 0$$

Sustituya para las energías:

$$(1) \quad v_f = \sqrt{\frac{2}{m}(mgy_i - f_k d)}$$

Resuelva en favor de v_f :

$$v_f = \sqrt{\frac{2}{3.00 \text{ kg}} [(3.00 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(0.500 \text{ m}) - (5.00 \text{ N})(1.00 \text{ m})]} = 2.54 \text{ m/s}$$

Sustituya valores numéricos:

(B) ¿A qué distancia se desliza la caja sobre el piso horizontal si continúa sometido a una fuerza de fricción de 5.00 N de magnitud?

SOLUCIÓN

Analizar Esta parte del problema se maneja exactamente igual que el inciso (A), solo que en este caso consideramos el intervalo de tiempo desde el momento en que la caja comienza a deslizarse en la parte superior de la rampa hasta que alcanza el reposo en el suelo.

Escriba la ecuación de la conservación de la energía para esta situación:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

Sustituya las energías observando que la caja se desliza una distancia total, rampa y piso, que llamamos d_{total} :

$$(0 - 0) + (0 - mgy_i) + f_k d_{\text{total}} = 0$$

Resuelva para la distancia d_{total} y sustituya los valores numéricos: $d_{\text{total}} = \frac{mgy_i}{f_k} = \frac{(3.00 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(0.500 \text{ m})}{5.00 \text{ N}} = 2.94 \text{ m}$

Restando la longitud de 1.00 m de la rampa nos da **1.94 m** que la caja se desliza en el suelo.

Finalizar Por comparación, es posible que pretenda calcular la rapidez de la caja en la parte baja de la rampa como un caso en el que la rampa no tiene fricción. Note también que el aumento en energía interna del para todo el movimiento de la caja, es $f_k d_{\text{total}} = (5.00 \text{ N})(2.94 \text{ m}) = 14.7 \text{ J}$. Esta energía se comparte entre la caja y la superficie, y cada una está un poco más caliente que antes.

Observe además que la distancia d que se desliza el objeto sobre la superficie horizontal es infinita si la superficie no tiene fricción. ¿Esto es consistente con nuestra conceptualización de la situación?

¿QUÉ PASARÍA SI? Un trabajador precavido decide que la rapidez de la caja cuando llega a la parte baja de la rampa es tal que su contenido podría dañarse. Por tanto, sustituye la rampa con una más larga de modo que la nueva rampa forma un ángulo de 25.0° con el suelo. ¿Esta nueva rampa reduce la rapidez de la caja a medida que llega al suelo?

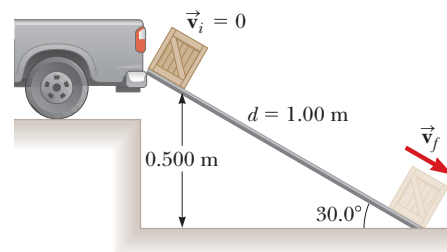


Figura 8.10 (Ejemplo 8.7) Una caja se desliza hacia abajo por una rampa bajo la influencia de la gravedad. La energía potencial del sistema disminuye, mientras que la energía cinética aumenta.

continúa

8.7 continuación

Respuesta Ya que la rampa es más larga, la fuerza de fricción actúa en una distancia mayor y transforma más de la energía mecánica en energía interna. El resultado es una reducción en la energía cinética de la caja y se espera una rapidez menor cuando llegue al suelo.

Encuentre la longitud d de la rampa nueva: $\text{sen } 25.0^\circ = \frac{0.500 \text{ m}}{d} \rightarrow d = \frac{0.500 \text{ m}}{\text{sen } 25.0^\circ} = 1.18 \text{ m}$

Determine v_f de la ecuación (1) en el inciso (A): $v_f = \sqrt{\frac{2}{3.00 \text{ kg}} [(3.00 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(0.500 \text{ m}) - (5.00 \text{ N})(1.18 \text{ m})]} = 2.42 \text{ m/s}$

De hecho la rapidez final es menor que en el caso de un ángulo mayor.

Ejemplo 8.8 Colisión bloque-resorte

A un bloque, que tiene 0.80 kg de masa, se le da una velocidad inicial $v_{\text{A}} = 1.2 \text{ m/s}$ hacia la derecha y choca con un resorte con masa despreciable y cuya constante elástica es $k = 50 \text{ N/m}$, como se muestra en la figura 8.11.

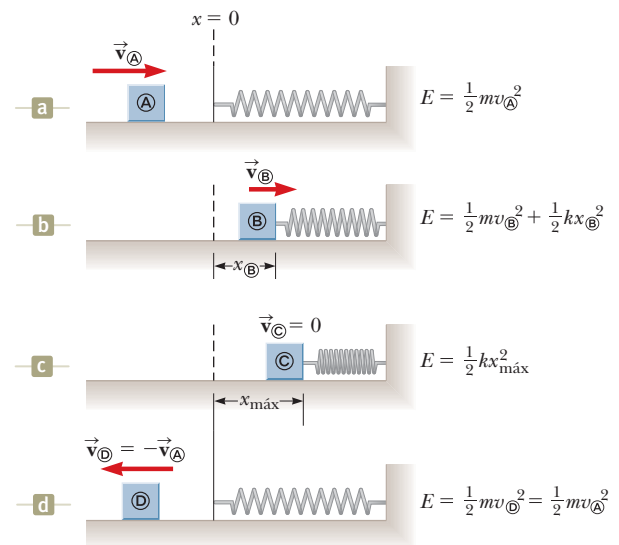
(A) Suponga que la superficie no tiene fricción y calcule la compresión máxima del resorte después del choque.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Las diversas partes de la figura 8.11 ayudan a imaginar lo que hará el bloque en esta situación. Todo el movimiento tiene lugar en un plano horizontal, así que no es necesario considerar cambios en energía potencial gravitacional. Antes de la colisión, cuando el bloque está en **A**, tiene energía cinética y el resorte no se comprime, así que la energía potencial elástica almacenada en el sistema es cero. Por tanto, la energía mecánica total del sistema antes de la colisión es exactamente $\frac{1}{2}mv^2$. Después de la colisión, cuando el bloque está en **C**, el resorte está completamente comprimido; ahora el bloque está en reposo y así que tiene energía cinética cero. Sin embargo, la energía potencial elástica almacenada en el sistema, tiene su máximo valor $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2$, donde el origen de coordenadas $x = 0$ se elige como la posición del equilibrio del resorte y $x_{\text{máx}}$ es la compresión máxima del resorte, que en este caso es x_{C} . La energía mecánica total del sistema se conserva porque no hay fuerzas no conservativas que actúen en los objetos dentro del sistema aislado.

Figura 8.11 (Ejemplo 8.8)

Un bloque que se desliza sobre una superficie horizontal, sin fricción choca con un resorte ligero. (a) Al inicio, el bloque se desliza hacia la derecha acercándose al resorte. (b) el bloque pega en el resorte y comienza a comprimirlo. (c) El bloque se detiene momentáneamente en la compresión máxima del resorte. (d) El resorte empuja el bloque hacia la izquierda. Cuando el resorte regresa a su longitud de equilibrio, el bloque continúa moviéndose hacia la izquierda. Las ecuaciones de energía a la derecha muestran las energías del sistema en el caso sin fricción del inciso (A).



El sistema se identifica como el bloque y el resorte y se modela como un sistema aislado para la energía sin que actúen fuerzas no conservativas.

Categorizar El sistema se identifica como el bloque y el resorte y se modela como un sistema aislado para la energía sin que actúen fuerzas no conservativas.

Analizar Escriba la reducción apropiada de la ecuación 8.2 entre los puntos **A** y **C**:

Sustituya para las energías:

Despeje $x_{\text{máx}}$ y evalúe:

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

$$(0 - \frac{1}{2}mv^2) + (\frac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2 - 0) = 0$$

$$x_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{m}{k}} v = \sqrt{\frac{0.80 \text{ kg}}{50 \text{ N/m}}} (1.2 \text{ m/s}) = 0.15 \text{ m}$$



8.8 continuación

(B) Suponga que una fuerza constante de fricción cinética actúa entre el bloque y la superficie, con $\mu_k = 0.50$. Si la rapidez del bloque en el momento que choca con el resorte es $v_{\text{Ⓢ}} = 1.2 \text{ m/s}$, ¿cuál es la compresión máxima $x_{\text{Ⓢ}}$ en el resorte?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Debido a la fuerza de fricción, se espera que la compresión del resorte sea más pequeña que en el inciso (A), porque parte de la energía cinética del bloque se transforma en energía interna en el bloque y la superficie.

Categorizar El sistema se identifica como el bloque, la superficie y el resorte. Este es un *sistema está aislado*, para la energía, solo que ahora involucra una fuerza no conservativa.

Analizar En este caso, la energía mecánica $E_{\text{mec}} = K + U_s$ del sistema no se conserva porque una fuerza de fricción actúa en el bloque. A partir del modelo de *partícula en equilibrio* en la dirección vertical, se ve que $n = mg$.

Evalúe la magnitud de la fuerza de fricción:

$$f_k = \mu_k n = \mu_k mg$$

Escriba la reducción adecuada de la ecuación 8.2 para esta situación:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

Sustituya las energías inicial y final:

$$(0 - \frac{1}{2}mv^2) + (\frac{1}{2}kx^2 - 0) + \mu_k mgx = 0$$

Reacomode los términos en una ecuación cuadrática:

$$kx^2 + 2\mu_k mgx - mv^2 = 0$$

Resuelva la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{\mu_k mg}{k} \left(\pm \sqrt{1 + \frac{kv^2}{\mu_k^2 mg^2}} - 1 \right)$$

Sustituyendo los valores numéricos se obtiene $x_{\text{Ⓢ}} = 0.092 \text{ m}$ y $x_{\text{Ⓢ}} = 20.25 \text{ m}$. La raíz físicamente significativa es $x = 0.092 \text{ m}$.

Finalizar La raíz negativa no aplica a esta situación porque el bloque debe estar a la derecha del origen (valor positivo de x) cuando llegue al reposo. Note que el valor de 0.092 m es menor que la distancia obtenida en el caso sin fricción del inciso (A), como se esperaba.

Ejemplo 8.9 Bloques conectados en movimiento

Dos bloques se conectan mediante una cuerda ligera que pasa sobre una polea sin fricción, como se muestra en la figura 8.12. El bloque de masa m_1 se encuentra en una superficie horizontal y está conectado a un resorte con una constante elástica k . El sistema se libera desde el reposo cuando el resorte no está estirado. Si el bloque que cuelga de masa m_2 cae una distancia h antes de llegar al reposo, calcule el coeficiente de fricción cinética entre el bloque de masa m_1 y la superficie.

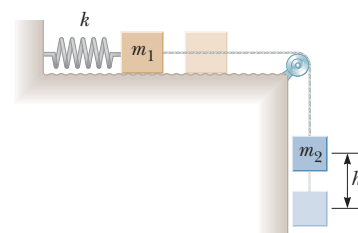


Figura 8.12 (Ejemplo 8.9) Conforme se mueve el bloque que cuelga de su elevación más alta a su nivel más bajo, el sistema pierde energía potencial gravitacional, pero gana energía potencial elástica en el resorte. Parte de la energía mecánica se transforma en energía interna debido a la fricción entre el bloque deslizante y la superficie.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La palabra clave *reposo* aparece dos veces en el enunciado del problema. Esta palabra sugiere que las configuraciones del sistema asociadas con reposo son buenas candidatas para las configuraciones inicial y final porque la energía cinética del sistema es cero para dichas configuraciones.

Categorizar En esta situación, el sistema consiste en dos bloques, el resorte y la Tierra. Este es un *sistema está aislado* actuando con una fuerza no conservativa. Modelamos al bloque deslizante como una *partícula en equilibrio* en la dirección vertical, lo que conduce a $n = m_1g$.

Analizar Es necesario considerar dos formas de energía potencial para el sistema, gravitacional y elástica: $\Delta U_g = U_{gf} - U_{gi}$ es el cambio en la energía potencial gravitacional del sistema y $\Delta U_s = U_{sf} - U_{si}$ es el cambio en la energía potencial elástica del sistema. El cambio en la energía potencial gravitacional del sistema se asocia sólo con el bloque que cae porque la coordenada vertical del bloque que se desliza horizontalmente no cambia.

continúa

8.9 continuación

Escriba la reducción adecuada de la ecuación 8.2:

$$(1) \quad \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_s + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

Sustituya las energías, para el intervalo de tiempo que comienza cuando se suelta y termina cuando el sistema está de nuevo en reposo, indicando que conforme el bloque que cuelga cae una distancia h , el bloque horizontal en movimiento se mueve la misma distancia h a la derecha, y el resorte se estira una distancia h :

$$(0 - 0) + (0 - m_2gh) + (\frac{1}{2}kh^2 - 0) + f_k h = 0$$

Sustituyendo la fuerza de fricción:

$$-m_2gh + \frac{1}{2}kh^2 + \mu_k m_1gh = 0$$

Despeje μ_k :

$$\mu_k = \frac{m_2g - \frac{1}{2}kh}{m_1g}$$

Finalizar Esta configuración representa un método de medición del coeficiente de fricción cinética entre un objeto y cierta superficie. Observe cómo hemos resuelto los ejemplos en este capítulo utilizando la aproximación de energía. Comenzamos con la ecuación 8.2 y luego lo adaptamos a la situación física. Este proceso puede incluir eliminar términos, como el término energía cinética y todos los términos en el lado derecho de la ecuación 8.2 en este ejemplo. También puede incluir desarrollar términos así como reescribir ΔU debido a los dos tipos de energía potencial en este ejemplo.

Ejemplo conceptual 8.10 Interpretación de las barras de energía

Las gráficas de barras de energía en la figura 8.13 muestran tres instantes en el movimiento del sistema en la figura 8.12 y se describen en el ejemplo 8.9. Para cada gráfica de barras, identifique la configuración del sistema que corresponde a la gráfica.

SOLUCIÓN

En la figura 8.13a, no hay ninguna energía cinética en el sistema. Por tanto, nada en el sistema se está moviendo. La gráfica de barras muestra que el sistema contiene sólo energía potencial gravitacional sólo y sin energía interna, que corresponde a la configuración de los bloques más oscuros en la figura 8.12 y representa el instante justo después de que se libera el sistema.

En la figura 8.13b, el sistema contiene cuatro tipos de energía. La altura de la barra de energía potencial gravitacional es al 50%, lo que nos dice que el bloque que cuelga se ha movido a mitad de camino entre su posición correspondiente a la figura 8.13a y la posición definida como $y = 0$. Por tanto, en esta configuración, el bloque que cuelga está entre las imágenes claras y oscuras del bloque que cuelga en la figura 8.12. El sistema ha ganado energía cinética porque los bloques se mueven, energía potencial elástica porque el resorte se estira y energía interna debido a la fricción entre el bloque de masa m_1 y la superficie.

En la figura 8.13c, la altura de la barra de energía potencial gravitacional es cero, nos dice que el bloque que cuelga está en $y = 0$. Además, la altura de la barra de energía cinética es cero, indicando que los bloques se han detenido momentáneamente. Por tanto, la configuración del sistema se muestra con las imágenes claras de los bloques de la figura 8.12. La altura de la barra de energía potencial elástica es alta porque el resorte se estira a su valor máximo. La altura de la barra de energía interna es mayor que en la figura 8.13b porque el bloque de masa m_1 ha continuado deslizándose sobre la superficie después de la configuración que se muestra en la figura 8.13b.

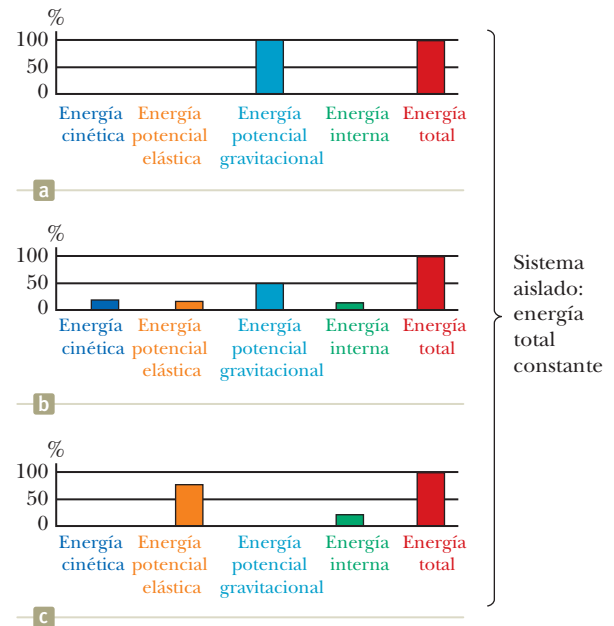


Figura 8.13 (Ejemplo conceptual 8.10) Se muestran tres gráficas de barras de energía para el sistema en la figura 8.12.

8.5 Potencia

Considere de nuevo el ejemplo conceptual 7.7, que implicó rodar un refrigerador hacia arriba de una rampa para llegar a una camioneta. Suponga que el hombre no está convencido de que el trabajo es el mismo sin importar la longitud de la rampa y coloca una rampa larga con



una suave elevación. Aunque él realiza la misma cantidad de trabajo que alguien que usa una rampa más corta, le toma más tiempo realizar el trabajo porque tiene que mover el refrigerador una mayor distancia. Aunque el trabajo realizado sobre ambas rampas es el mismo, hay algo diferente acerca de las tareas: el *intervalo de tiempo* durante el que se realiza el trabajo.

La cantidad de transferencia de energía con el tiempo se llama **potencia instantánea** P y se define como sigue:

$$P \equiv \frac{dE}{dt} \quad (8.17)$$

◀ Definición de potencia

Nos enfocaremos en el trabajo como el método de transferencia de energía en esta explicación, pero considere que el concepto de potencia es válido para *cualquier* medio de transferencia de energía discutido en la sección 8.1. Si una fuerza externa se aplica a un objeto (que se representa como partícula) y si el trabajo invertido por esta fuerza en el objeto en el intervalo de tiempo Δt es W , la **potencia promedio** durante este intervalo es

$$P_{\text{prom}} = \frac{W}{\Delta t}$$

Debido a eso, en el ejemplo conceptual 7.7, aunque se consume el mismo trabajo al rodar el refrigerador por ambas rampas, para la rampa más larga se requiere menos potencia.

Al igual que la definición de velocidad y aceleración, la potencia instantánea es el valor límite de la potencia promedio a medida que Δt tiende a cero:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

donde se representó el valor infinitesimal del trabajo hecho mediante dW . De la ecuación 7.3 se encuentra que $dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$. En consecuencia, para una fuerza constante, la potencia instantánea se escribe

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \quad (8.18)$$

donde $\vec{\mathbf{v}} = d\vec{\mathbf{r}}/dt$.

La unidad del SI de potencia es joules por segundo (J/s), también llamado **watt** (W) en honor de James Watt:

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$$

◀ El watt

Una unidad de potencia en el sistema acostumbrado estadounidense es el **caballo de fuerza** (hp):

$$1 \text{ hp} = 746 \text{ W}$$

Ahora se puede definir una unidad de energía (o trabajo) en términos de la unidad de potencia. Un **kilowatt hora** (kWh) es la energía transferida en 1 h en una rapidez constante de $1 \text{ kW} = 1\,000 \text{ J/s}$. La cantidad de energía representada por 1 kWh es

$$1 \text{ kWh} = (10^3 \text{ W})(3\,600 \text{ s}) = 3.60 \times 10^6 \text{ J}$$

Un kilowatt hora es una unidad de energía, no de potencia. Cuando usted paga el recibo de la electricidad, usted está comprando energía, y la cantidad de energía transferida por la transmisión eléctrica hacia un hogar durante el periodo representado por el recibo se expresa en kilowatt horas. Por ejemplo, su recibo puede establecer que usted usó 900 kWh de energía durante un mes y que se le cobra en una tarifa de 11¢ por kilowatt hora. Por tanto su deuda es de 99 dólares por esta cantidad de energía. Como otro ejemplo, suponga que una lámpara se especifica en 100 W. En 1.00 hora de operación, la línea de transmisión eléctrica tendría que transferir energía a la lámpara la cantidad de $(0.100 \text{ kW})(1.00 \text{ h}) = 0.100 \text{ kWh} = 3.60 \times 10^5 \text{ J}$.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 8.3

W, Wy watts No confunda el símbolo W para el watt con el símbolo en cursiva W para trabajo. También, recuerde que el watt representa una rapidez de transferencia de energía, así que “watts por segundo” no tiene sentido. El watt es *lo mismo que* un joule por segundo.



Ejemplo 8.11 Potencia entregada por un motor de elevador

Un elevador (figura 8.14a) tiene una masa de 1 600 kg y transporta pasajeros con una masa combinada de 200 kg. Una fuerza de fricción constante de 4 000 N retarda su movimiento.

(A) ¿Cuánta potencia debe proporcionar un motor para levantar el elevador y a sus pasajeros con una rapidez constante de 3.00 m/s?

SOLUCIÓN

Conceptualizar El motor debe suministrar la fuerza de magnitud T que jale el elevador hacia arriba.

Categorizar La fuerza de fricción aumenta la potencia necesaria para levantar el elevador. El problema establece que la rapidez del elevador es constante: $a = 0$. El elevador se modela como una *partícula en equilibrio*.

Analizar El diagrama de cuerpo libre en la figura 8.14b especifica la dirección hacia arriba como positiva. La masa *total* M del sistema (cabina más pasajeros) es igual a 1 800 kg.

Mediante el modelo de partícula en equilibrio, aplique la segunda ley de Newton para el elevador:

$$\sum F_y = T - f - Mg = 0$$

Despeje T :

$$T = Mg + f$$

Utilice la ecuación 8.18 y que \vec{T} está en la misma dirección que \vec{v} para encontrar la potencia:

$$P = \vec{T} \cdot \vec{v} = Tv = (Mg + f)v$$

Sustituya valores numéricos

$$P = [(1\,800\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2) + (4\,000\text{ N})](3.00\text{ m/s}) = 6.49 \times 10^4\text{ W}$$

(B) ¿Qué potencia debe entregar el motor en el instante en que la rapidez del elevador es v si el motor está diseñado para proporcionar al elevador una aceleración hacia arriba de 1.00 m/s^2 ?

SOLUCIÓN

Conceptualizar En este caso, el motor debe proporcionar la fuerza de magnitud T que jala al elevador hacia arriba con una rapidez creciente. Se espera que se requiera más potencia para hacer lo que en el inciso (A), ya que el motor ahora debe realizar la tarea adicional de acelerar el elevador.

Categorizar En este caso, el elevador se modela como una *partícula sometida a una fuerza neta* porque está acelerando.

Analiza Usando un modelo de partícula sometido a una fuerza neta, aplique la segunda ley de Newton al elevador:

$$\sum F_y = T - f - Mg = Ma$$

Despeje T :

$$T = M(a + g) + f$$

Use la ecuación 8.18 para obtener la potencia requerida:

$$P = Tv = [M(a + g) + f]v$$

Sustituyendo valores numéricos:

$$P = [(1\,800\text{ kg})(1.00\text{ m/s}^2 + 9.80\text{ m/s}^2) + 4\,000\text{ N}]v = (2.34 \times 10^4)v$$

donde v es la rapidez instantánea del elevador en metros por segundo y P está en watts.

Finalizar Para comparar con el inciso (A), sea $v = 3.00\text{ m/s}$, que proporciona una potencia de

$$P = (2.34 \times 10^4\text{ N})(3.00\text{ m/s}) = 7.02 \times 10^4\text{ W}$$

que es mayor que la potencia encontrada en el inciso (A), como se esperaba.

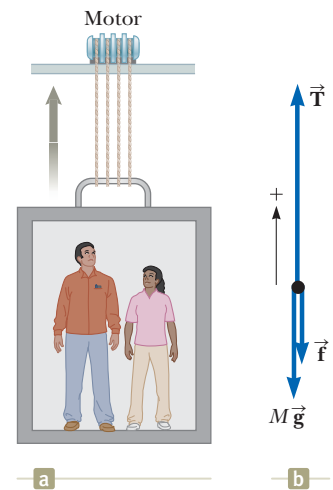


Figura 8.14 (Ejemplo 8.11) (a) El motor ejerce una fuerza hacia arriba \vec{T} en el elevador. La magnitud de esta fuerza es la tensión T en el cable que conecta el elevador y el motor. Las fuerzas que actúan hacia abajo del elevador son una fuerza de fricción \vec{f} y la fuerza gravitacional $\vec{F}_g = M\vec{g}$. (b) Diagrama de cuerpo libre para el elevador.



Resumen

Definiciones

Un **sistema no aislado** es uno para el que la energía cruza la frontera del sistema. Un **sistema aislado** es uno para el que la energía no cruza la frontera del sistema.

La **potencia instantánea** P se define como la rapidez de transferencia de energía en el tiempo:

$$P \equiv \frac{dE}{dt} \quad (8.17)$$

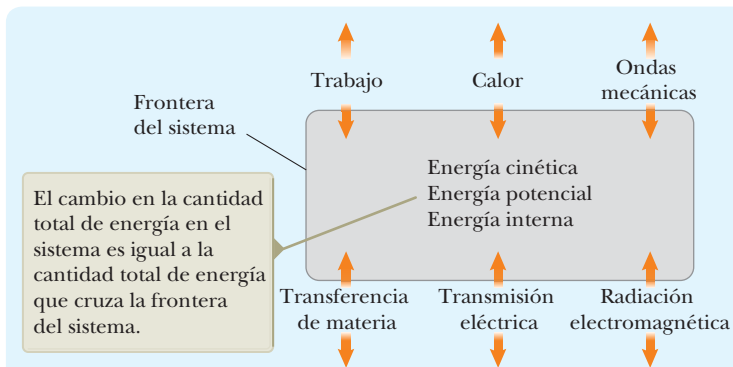
Conceptos y principios

Para un sistema no aislado, podemos igualar el cambio en la energía total almacenada en el sistema con la suma de todas las transferencias de energía a través de las fronteras del sistema, que es un enunciado de **conservación de la energía**. Para un sistema aislado, la energía total es constante.

Si una fuerza de fricción de magnitud f_k actúa a través de una distancia d dentro de un sistema, el cambio en la energía interna del sistema es

$$\Delta E_{\text{int}} = f_k d \quad (8.14)$$

Modelos de análisis para la resolución de problemas



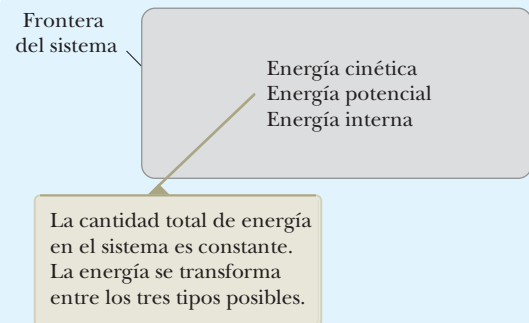
Sistema no aislado (energía). El enunciado más general que describe el comportamiento de un sistema no aislado es la ecuación de **conservación de energía**:

$$\Delta E_{\text{sistema}} = \Sigma T \quad (8.1)$$

Al incluir los tipos de almacenamiento de energía y transferencia de energía que se han discutido se produce

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = W + Q + T_{\text{OM}} + T_{\text{TM}} + T_{\text{TE}} + T_{\text{RE}} \quad (8.2)$$

Para un problema específico, esta ecuación por lo general se reduce a un número más pequeño de términos al eliminar los términos que no son adecuados a la situación.



Sistema aislado (energía). La energía total de un sistema aislado se conserva, de modo que

$$\Delta E_{\text{sistema}} = 0 \quad (8.10)$$

Si dentro del sistema no actúan fuerzas no conservativas, la energía mecánica del sistema se conserva, de modo que

$$\Delta E_{\text{mec}} = 0 \quad (8.7)$$

que se puede escribir como


$$\Delta K + \Delta U = 0 \quad (8.5)$$

Si una fuerza no conservativa como la fricción actúa dentro del sistema, hay un cambio en la energía interna, por lo que

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = 0 \quad (8.16)$$



Piense, dialogue y comparta

Consulte el prefacio para una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para obtener más artículos de evaluación para esta sección, visite  **WEBASSIGN** From Cengage

- Usted es miembro de un grupo de expertos que proporciona servicios científicos a la comunidad legal. Su grupo ha pedido un abogado defensor para demostrar en el juicio que un conductor no excedió el límite de velocidad. Se le proporcionan los siguientes datos: la masa del auto es 1.50×10^3 kg. La masa del conductor es 95.0 kg. El coeficiente de fricción cinética entre los neumáticos del auto y la carretera es 0.580. El coeficiente de fricción estática entre los neumáticos del auto y la carretera es 0.820. El límite de velocidad registrado en la carretera es 25 mi/h. La carretera estaba seca y el clima era soleado en la hora del incidente.

También se le proporciona la siguiente descripción del incidente: el conductor estaba conduciendo por una colina que hace un ángulo de 17.5° con la horizontal. El conductor vio a un perro que corrió hacia la carretera, piso los frenos y dejó una marca de la patinada de 17.0 m de largo. El auto se detuvo al final de la marca de la patinada. El conductor no le pegó al perro, pero el sonido de las llantas chirriantes atrajo la atención de un policía cercano, quien multó al conductor por exceso de velocidad. ¿Su grupo está de acuerdo en ofrecer testimonio de defensa en este caso? (Observe que este problema es el mismo que el problema 5.1 del Piense, dialogue y comparta del capítulo 5 (véase la página 120), pero ahora queremos utilizar un método de energía para comparar.)

- Usted está trabajando en un equipo de testigos expertos para una empresa de automóviles. La empresa está siendo deman-

dada por un persistente inventor que está frustrado porque la empresa no va a adoptar su idea de un auto operado exclusivamente con energía solar. Prepare un argumento que su empresa utilice en el juicio para mostrar que simplemente no se recibe suficiente energía para que un auto de tamaño normal opere con energía solar en las calles y carreteras. Utilice el hecho de que la intensidad máxima de la luz del sol disponible, cerca del ecuador, es de $1\,000 \text{ W/m}^2$.

- ACTIVIDAD** (a) Dibuje un diagrama simple de una casa e indique todos los principales medios de transferencia de energía entre la casa y el medio ambiente. (b) ¿Qué medios se pueden utilizar para combatir o aprovechar transferencias de energía para mantener la temperatura de la casa fija a un costo mensual más bajo para facturas de servicios de electricidad? (c) Las siguientes son palabras utilizadas en arquitectura al discutir consideraciones de energía para un edificio: Inso-lación, infiltración. Asigne estas palabras arquitectónicas a los términos específicos correspondientes de la ecuación 8.2.
- ACTIVIDAD** Considere el rifle de juguete del ejemplo 8.4. Suponga que la masa del proyectil, la distancia de compresión, y la constante del resorte siguen siendo las mismas que se dan o se calculan en el ejemplo. Sin embargo, suponga que hay una fuerza de fricción de magnitud 2.00 N actuando en el proyectil a medida que roza contra el interior del barril. La longitud vertical desde el punto **A** hasta el final del barril es de 0.600 m. (a) Después el resorte se comprime y el rifle de juguete se dispara, ¿por lo que hasta qué altura el proyectil se eleva por encima del punto **B**? (b) Dibuje cuatro gráficas de barras de energía para esta situación, similares a las de las figuras 8.6 c-d.

Problemas

Consulte el prefacio para una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para obtener más artículos de evaluación para esta sección, visite  **WEBASSIGN** From Cengage

SECCIÓN 8.1 Modelo de análisis: Sistema no aislado (Energía)

- Una bola de masa m cae desde una altura h al piso. (a) Escriba la versión adecuada de la ecuación 8.2 para el sistema de la bola y la Tierra y utilícela para calcular la rapidez de la bola justo antes de que pegue en la Tierra. (b) Escriba la versión apropiada de la ecuación 8.2 para el sistema de la bola y utilícela para calcular la rapidez de la pelota justo antes de que pegue en la Tierra.

SECCIÓN 8.2 Modelo de análisis: El sistema aislado (energía)

- Una bola de cañón de 20.0 kg se dispara desde un cañón con rapidez de boquilla de $1\,000 \text{ m/s}$ con un ángulo de 37.0° con la horizontal. Una segunda bala de cañón se dispara con un ángulo de 90.0° . Aplique el modelo de sistema aislado para encontrar (a) la altura máxima que alcanza cada bola y (b) la energía mecánica total del sistema bola-Tierra en la altura máxima para cada bola. Sea $y = 0$ en el cañón.
- Un bloque de masa $m = 5.00 \text{ kg}$ se libera desde el punto **A** y se desliza sobre la pista sin fricción que se muestra en la figura P8.3. Determine (a) la rapidez del bloque en los puntos **B** y **C** y (b) el trabajo neto hecho por la fuerza gravitacional en el bloque cuando se mueve de **A** a **C**.

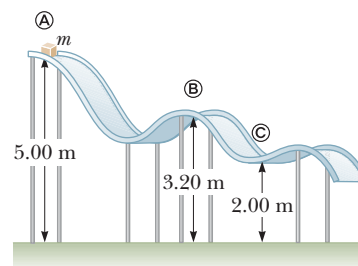


Figura TP8.3

- A las 11:00 a.m. del 7 de septiembre de 2001, más de 1 millón de escolares británicos saltaron hacia arriba y hacia abajo durante un minuto para simular un terremoto. (a) Encuentre la energía almacenada en los cuerpos de los niños que fue convertida en energía interna en el suelo y en sus cuerpos y se propagó en el suelo mediante ondas sísmicas durante el experimento. Suponga que los 1 050 000 niños de masa promedio 36.0 kg saltaron 12 veces cada uno, elevando sus centros de masa por 25.0 cm cada vez y descansando brevemente entre un salto y el siguiente. (b) De la energía que se propaga en el suelo, la mayoría produce vibraciones de alta frecuencia “microtemblores” que fueron rápidamente amortiguadas y no viajaron mucho. Suponga el 0.01% de la energía total se



transportó lejos por ondas sísmicas de largo alcance. La magnitud de un sismo en la escala de Richter está dada por:

$$M = \frac{\log E - 4.8}{1.5}$$

donde E es la energía de la onda sísmica en joules. De acuerdo con este modelo, ¿cuál fue la magnitud de sismo de demostración?

- Una barra ligera rígida mide 77.0 cm de largo. Su extremo superior está articulado en un eje horizontal sin fricción. La barra cuelga recta hacia abajo en reposo con una pequeña bola de gran masa unida a su extremo inferior. Usted golpea la bola y súbitamente le da una velocidad horizontal de modo que logra un círculo completo. ¿Qué rapidez mínima se requiere en la parte más baja para hacer que la bola recorra lo alto del círculo?
- Problema de repaso.** El sistema que se muestra en la figura P8.6 consiste de una cuerda ligera inextensible; poleas ligeras sin fricción; y bloques de igual masa. Observe que el bloque B está unido a una de las poleas. Inicialmente el sistema se mantiene en reposo de modo que los bloques están a la misma altura sobre el suelo. Después los bloques se liberan. Encuentre la rapidez del bloque A en el momento en que la separación vertical de los bloques es h .

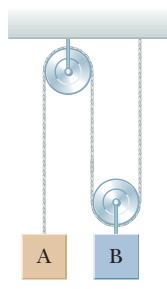


Figura P8.6

SECCIÓN 8.3 Situaciones que incluyen fricción cinética

- Una caja de 10.0 kg de masa se jala hacia arriba de un plano inclinado rugoso con una rapidez inicial de 1.50 m/s. La fuerza del jalón es 100 N paralela al plano, que forma un ángulo de 20.0° con la horizontal. El coeficiente de fricción cinética es 0.400 y la caja se jala 5.00 m. (a) ¿Cuánto trabajo hace la fuerza gravitacional en la caja? (b) Determine el aumento en energía interna del sistema caja-plano inclinado debido a fricción. (c) ¿Cuánto trabajo hace la fuerza de 100 N en la caja? (d) ¿Cuál es el cambio en energía cinética de la caja? (e) ¿Cuál es la rapidez de la caja después de que se ha jalado 5.00 m?
- Una caja de 40.0 kg, inicialmente en reposo, se empuja 5.00 m a lo largo de un suelo horizontal rugoso, con una fuerza constante horizontal aplicada de 130 N. El coeficiente de fricción entre la caja y el suelo es 0.300. Encuentre: (a) el trabajo hecho por la fuerza aplicada, (b) el aumento en energía interna en el sistema caja-suelo como resultado de la fricción, (c) el trabajo hecho por la fuerza normal, (d) el trabajo hecho por la fuerza gravitacional, (e) el cambio en energía cinética de la caja y (f) la rapidez final de la caja.
- Se coloca un aro circular plano con un radio de 0.500 m sobre el piso. Una partícula 0.400 kg se desliza alrededor del borde interior del aro. A la partícula se le da una rapidez inicial de 8.00 m/s. Después de una revolución, su rapidez cae a 6.00 m/s debido a la fricción con el suelo rugoso de la pista. (a) Encuentre la energía transformada de mecánica a interna en el partícula-aro-piso como resultado de la fricción en una revolución. (b) ¿Cuál es el número total de revoluciones que da la partícula antes de detenerse? Suponga que la fuerza de fricción permanece constante durante todo el movimiento.

SECCIÓN 8.4 Cambios en la energía mecánica para fuerzas no conservativas

- Como se muestra en la figura P8.10, una cuenta verde de masa 25 g se desliza a lo largo de un alambre recto. La longitud del

alambre desde el punto A al punto B es 0.600 m y el punto A está 0.200 m más arriba que el punto B. Una fuerza de rozamiento constante de magnitud 0.025 0 N actúa en la cuenta. (a) Si la cuenta se libera a partir del reposo en el punto A, ¿cuál es su rapidez en el punto B? (b) Una cuenta roja de masa 25 g se desliza a lo largo de un alambre curvado, sujeto a una fuerza de la fricción con la misma magnitud constante que la cuenta verde. Si las cuentas verde y roja se liberan al mismo tiempo a partir del reposo en el punto A, ¿qué cuenta alcanza el punto B con una rapidez mayor? Explique.

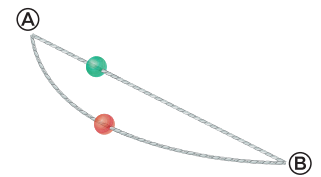


Figura P8.6

- En un tiempo t_1 , la energía cinética de una partícula es 30.0 J y la energía potencial del sistema al que pertenece es 10.0 J. En algún tiempo posterior t_2 , la energía cinética de la partícula es 18.0 J. (a) Si sólo fuerzas conservativas actúan en la partícula, ¿cuáles son la energía potencial y la energía total en el tiempo t_2 ? (b) Si la energía potencial del sistema en el tiempo t_2 es 5.00 J, ¿existen fuerzas no conservativas que actúan en la partícula? (c) Explique su respuesta del inciso (b).
- Un objeto de 1.50 kg se mantiene 1.20 m sobre un resorte vertical relajado sin masa con una constante elástica de 320 N/m. Se deja caer el objeto sobre el resorte. (a) ¿Cuánto comprime al resorte? (b) **¿Qué pasaría si?** Repita el inciso (a), pero esta vez suponga que una fuerza de resistencia al aire constante de 0.700 N actúa en el objeto durante su movimiento. (c) **¿Qué pasaría si?** ¿Cuánto comprime el objeto al resorte si el mismo experimento se realiza en la Luna, donde $g = 1.63 \text{ m/s}^2$ y se desprecia la resistencia del aire?
- Una niña de masa m parte del reposo y se desliza sin fricción desde una altura h a lo largo de un tobogán al lado de una piscina (figura P8.13). Se lanzó desde una altura $h/5$ en el aire sobre la piscina. Queremos encontrar la altura máxima que alcanza arriba del agua en su movimiento como proyectil. (a) ¿Es el sistema niña-Tierra aislado o no aislado? ¿Por qué? (b) ¿Hay una fuerza no conservativa que actúa dentro del sistema? (c) Defina la configuración del sistema cuando la niña está en el nivel del agua que tiene cero energía potencial gravitacional. Expresé la energía total del sistema cuando la niña está en la parte superior del tobogán. (d) Expresé la energía total del sistema cuando la niña está en el punto de lanzamiento. (e) Expresé la energía total del sistema cuando la niña está en el punto más alto en su movimiento de proyectil. (f) A partir de los incisos (c) y (d), determine su rapidez inicial v_i en el punto de lanzamiento en términos de g y h . (g) De los incisos (d), (e) y (f), determine su altura máxima en el aire $y_{\text{máx}}$ en términos de h y del ángulo de lanzamiento θ . (h) Sus respuestas serían las mismas si el tobogán no tuviera fricción? Explique.

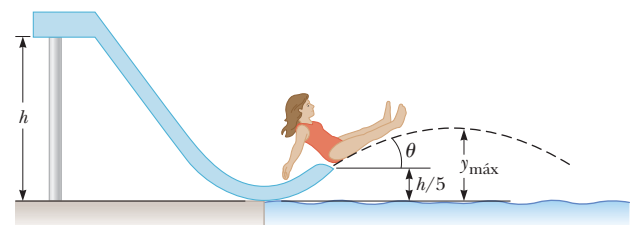


Figura P8.13



14. Un paracaidista de 80.0 kg salta de un globo a una altura de 1 000 m y abre el paracaídas a una altitud de 200 m. (a) Si supone que la fuerza retardadora total sobre el paracaidista es constante en 50.0 N con el paracaídas cerrado y constante en 3 600 N con el paracaídas abierto, encuentre la rapidez del paracaidista cuando aterriza en el suelo. (b) ¿Cree que el paracaidista se lesionará. Explique. (c) ¿A qué altura se debe abrir el paracaídas de modo que la rapidez final del paracaidista cuando golpee el suelo sea 5.00 m/s? (d) ¿Qué tan real es la suposición de que la fuerza retardadora total es constante? Explique.

15. Usted ha pasado un largo día esquiendo y está cansado. Está de pie en la parte superior de una colina, mirando hacia el albergue que está en la parte inferior de la colina. Está tan cansado que quiere simplemente llegar a descansar y baja la ladera, sin empujar con sus bastones o hacer cualquier otra cosa para cambiar su movimiento. ¡Quiere que la gravedad haga todo el trabajo! Usted tiene la opción de dos senderos para llegar al albergue. Ambos senderos tienen el mismo coeficiente de fricción μ_k . Además, ambos senderos representan la misma separación horizontal entre los puntos inicial y final. El sendero A tiene una bajada corta y empinada y luego un deslizamiento largo y plano hacia al albergue. El sendero B tiene una pendiente descendente larga y ligera y luego un restante deslizamiento corto y plano al albergue. ¿Con cuál sendero llegará al albergue con la rapidez final más grande?

SECCIÓN 8.5 Potencia

16. El motor eléctrico de un tren a escala acelera al tren desde el reposo a 0.620 m/s en 21.0 ms. La masa total del tren es 875 g. (a) Encuentre la potencia mínima entregada al tren de transmisión eléctrica de los rieles de metal durante la aceleración. (b) ¿por qué la potencia es mínima?

17. Una lámpara con eficiencia energética, que toma 28.0 W de potencia, produce el mismo nivel de brillantez que una lámpara convencional que funciona a una potencia de 100 W. El tiempo de vida de la lámpara con eficiencia energética es 10 000 h y su precio de compra es 4.50 dólares, mientras que la lámpara convencional tiene un tiempo de vida de 750 h y cuesta 0.420 dólares por lámpara. Determine el ahorro total que se obtiene al usar una lámpara con eficiencia energética durante su tiempo de vida, en oposición a usar lámparas convencionales durante el mismo intervalo de tiempo. Suponga un costo de energía de 0.200 dólares por kilowatt hora.

18. Un modelo viejo de automóvil acelera de 0 a rapidez v en un intervalo de tiempo Δt . Un automóvil deportivo nuevo y más potente acelera de 0 a $2v$ en el mismo periodo. Suponiendo que la energía que proviene del motor aparece sólo como energía cinética de los autos, compare la potencia de los dos automóviles.

19. Haga la estimación de un orden de magnitud de la potencia que aporta el motor de un automóvil para acelerar el auto a rapidez de autopista. En su solución, establezca las cantidades físicas que toma como datos y los valores que mide o estima para ellas. La masa del vehículo se proporciona en el manual del propietario.

20. Hay la caminata 5K que tendrá lugar en su ciudad. Mientras habla con su abuela, que usa una motoneta eléctrica para moverse, ella le dice que le gustaría acompañarle con su motoneta mientras usted camina la distancia de 5.00 km. El manual que venía con su motoneta indica que con batería completamente cargada puede proporcionar 120 Wh de

energía antes de que se agote. Para prepararse para la carrera, usted va para una “unidad de prueba”: comenzando con una batería completamente cargada, su abuela va a su lado mientras camina 5.00 km en terreno plano. Al final de la caminata, el indicador de uso de la batería muestra que permanece 40.0% de la carga original en la batería. Usted también sabe que el peso combinado de la motoneta y su abuela es de 890 N. Unos días más tarde, lleno de confianza de que la batería tiene suficiente energía, usted y su abuela se dirigen hacia el evento 5K. Usted no sabe, que la ruta 5K no es en terreno plano, sino que es toda cuesta arriba, terminando en un punto más alto que la línea de salida. Un funcionario de la carrera le dice que la cantidad total de desplazamiento vertical en la ruta es de 150 m. ¿Podría acompañarle su abuela en la caminata, o se quedará varado cuando la batería se agote? Suponga que la única diferencia entre su prueba en la unidad y el evento real es el desplazamiento vertical.

21. Para ahorrar energía, andar en bicicleta y caminar son medios de transporte mucho más eficientes que viajar en automóvil. Por ejemplo, al pedalear a 10.0 mi/h, un ciclista utiliza la energía del alimento a un ritmo de alrededor de 400 kcal/h arriba de lo que usaría si simplemente estuviese sentado. (En fisiología del ejercicio, la potencia suele medirse en kcal/h en lugar de watts. Aquí 1 kcal = 1 caloría de nutrición = 4 186 J.) Caminar a 3.00 mi/h requiere unas 220 kcal/h. Es interesante comparar estos valores con el consumo de energía necesario para viajar en auto. La gasolina rinde aproximadamente 1.30×10^8 J/gal. Encuentre el combustible ahorrado en millas equivalentes por galón para (a) una persona caminando y (b) en bicicleta.

22. Por convención la energía se mide en calorías, así como en joules. Una caloría en nutrición es una kilocaloría, que se define como 1 kcal = 4 186 J. Metabolizar 1 g de grasa puede liberar 9.00 kcal. Un estudiante decide intentar perder peso mediante ejercicio. Planea subir y bajar corriendo las escaleras de un estadio de fútbol tan rápido como pueda y tantas veces como sea necesario. Para evaluar el programa, suponga que sube un tramo de 80 escalones, cada uno de 0.150 m de alto, en 65.0 s. Por simplicidad, desprecie la energía que usa al bajar (que es pequeña). Suponga que una eficiencia típica para músculos humanos es de 20.0%. Esta afirmación significa que, cuando su cuerpo convierte 100 J metabolizando grasa, 20 J realizan trabajo mecánico (en este caso, subir escaleras). El resto va a energía interna adicional. Suponga que la masa del estudiante es de 75.0 kg. (a) ¿Cuántas veces debe correr el tramo de escaleras para perder 1 kg de grasa? (b) ¿Cuál es su potencia desarrollada promedio, en watts y en caballos de fuerza, mientras sube corriendo las escaleras? (c) ¿Esta actividad en sí misma es una forma práctica para perder peso?

PROBLEMAS ADICIONALES

23. Un bloque de masa $m = 200$ g se libera desde el reposo en el punto A a lo largo del diámetro horizontal en el interior de un tazón hemisférico con radio $R = 30.0$ cm y la superficie del tazón es rugosa (figura P8.23). La rapidez del bloque en B es 1.50 m/s. (a) ¿Cuál es su energía cinética en C? (b) ¿Cuánta

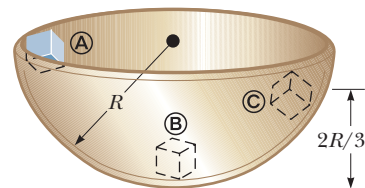


Figura P8.23

energía mecánica se transforma en energía interna a medida que el bloque se mueve de **A** a **B**? (c) ¿Es posible determinar el coeficiente de fricción a partir de estos resultados de alguna manera simple? Explique su respuesta al inciso (c).

BIO 24. Haga una estimación de orden de magnitud de su potencia de salida cuando sube las escaleras. En su solución, indique las cantidades físicas que quiere tomar como datos y los valores que mide o estima para ellos. ¿Considera su potencia máxima o su energía sostenible?

CE 25. Usted está trabajando con un equipo que está diseñando una nueva montaña rusa del parque de atracciones para un parque temático importante. Usted está presente en la prueba de la montaña, en la que se envía un vagón de 250 kg a lo largo de todo el trayecto. Cerca del final del juego, el vagón está casi en reposo en la parte superior de una pista de 110 m de altura. Luego, entra en una sección final, rodando por una ondulante colina a nivel del suelo. La longitud total de la pista para esta sección final de la parte superior a la tierra es de 250 m. En los primeros 230 m, actúa una fuerza de fricción constante de 50.0 N que actúa mediante unos frenos controlados por computadora. Para los últimos 20 m, que está horizontal a nivel del suelo, la computadora aumenta la fuerza de fricción a un valor requerido para que la rapidez se reduzca a cero justo cuando el carro llega al punto de la pista que es la salida de pasajeros. (a) Determine la fuerza de fricción constante requerida la de los últimos 20 m para el vagón de prueba vacío. (b) Encuentre la rapidez máxima alcanzada por el vagón durante la sección final de longitud de pista de 250 m. (c) Su supervisor del equipo le pide determinar las respuestas a los incisos (a) y (b) para un vagón completamente cargado con un límite superior de masa de 450 kilogramos por pasajero. Encuentre estos nuevos valores. (d) la fuerza de fricción requerida en el inciso (c) está bien dentro de los límites de diseño. Sin embargo, la rapidez máxima, está muy por debajo de la de los principales juegos actuales, por lo que le gustaría aumentar la rapidez máxima. No puede hacer la torre más alta sobre el suelo, por lo que decide incluir un rasgo donde parte de la pista va *bajo la tierra*. Determine la profundidad a la que debe estar la parte subterránea del trayecto para aumentar la rapidez máxima a 55.0 m/s. Suponga que la longitud total de la primera parte de la pista permanece a 230 m y que la longitud de la pista de la parte superior a la subterránea en el punto más bajo es 150 m. La misma fuerza de fricción de 50.0 N actúa en toda la sección de 230 m de la pista. (e) ¿Es factible la construcción del inciso (d)

CIC 26. **Problema de repaso.** Como se muestra en la figura P8.26, una cuerda ligera que no se estira cambia de horizontal a vertical a medida que pasa sobre el borde de una mesa. La cuerda conecta un bloque de masa m_1 de 3.50 kg, al principio en reposo sobre la mesa horizontal de una altura, $h = 1.20$ m arriba

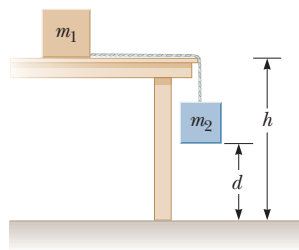


Figura P8.26

del suelo, un bloque que cuelga de masa m_2 de 1.90 kg, al principio a 0.900 m sobre el suelo. Ni la superficie de la mesa ni su borde ejercen una fuerza de fricción cinética. Los bloques comienzan a moverse a partir del reposo. El bloque deslizante de masa m_1 se proyecta horizontalmente después de alcanzar el borde de la mesa. El bloque que cuelga de masa m_2 se para sin rebotar cuando golpea el piso. Considere a los

dos bloques más la tierra como el sistema. (a) Encuentre la rapidez con la que m_1 deja el borde de la mesa. (b) Encuentre la rapidez de impacto de m_1 con el piso. (c) ¿Cuál es la longitud más corta de la cuerda que no está tensa mientras m_1 está en vuelo? (d) ¿Es la energía del sistema cuando se libera desde el reposo igual a la energía del sistema antes de que m_1 pegue en el suelo? (e) ¿Por qué o por qué no?

27. Considere el sistema bloque-resorte-superficie en la parte (B) del ejemplo 8.6. (a) Usando la aproximación de energía encuentre la posición x del bloque en el que rapidez es un máximo? (b) En la sección **¿Qué pasaría si?**, de dicho ejemplo, se exploraron los efectos de una fuerza de fricción aumentada de 10.0 N. ¿En qué posición del bloque se presenta su rapidez máxima en esta situación?

28. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Una lanzadora de softbol tiene una extraña técnica: comienza con su mano en reposo en el punto más alto que puede alcanzar y luego gira rápidamente su brazo hacia atrás para que la bola se mueva a través de una trayectoria semicircular. Libera la bola cuando la mano llega a la parte inferior de la trayectoria. La lanzadora mantiene un componente de la fuerza sobre la bola de 0.180 kg de magnitud constante 12.0 N en la dirección del movimiento alrededor de la trayectoria completa. Cuando la pelota llega a la parte inferior de la trayectoria, deja su mano con una rapidez de 25.0 m/s.

AMT 29. Jonathan anda en bicicleta y se encuentra con una colina de 7.30 m de altura. En la base de la colina, está viajando a 6.00 m/s. Cuando llega a la cima de la colina, está viajando a 1.00 m/s. Jonathan y su bicicleta juntos tienen una masa de 85.0 kg. Desprecie la fricción en el mecanismo de la bicicleta y entre los neumáticos de la bicicleta y la carretera. (a) ¿Cuál es el trabajo externo total hecho sobre el sistema de Jonathan y la bicicleta entre el tiempo que empieza a subir la colina y el tiempo que llega a la cima? (b) ¿Cuál es el cambio en energía potencial almacenada en el cuerpo de Jonathan durante este proceso? (c) ¿Cuánto trabajo hace Jonathan al pedalear la bicicleta dentro del sistema Jonathan-bicicleta-Tierra durante este proceso?

S 30. Jonathan anda en bicicleta y se encuentra con una colina de altura h . En la base de la colina, está viajando con una rapidez v_i . Cuando llega a la cima de la colina, está viajando con una rapidez v_f . Jonathan y su bicicleta juntos tienen una masa m . Desprecie la fricción en el mecanismo de la bicicleta y entre los neumáticos de la bicicleta y la carretera. (a) ¿Cuál es el trabajo externo total hecho sobre el sistema de Jonathan y la bicicleta entre el tiempo que empieza a subir la colina y el tiempo que llega a la cima? (b) ¿Cuál es el cambio en energía potencial almacenada en el cuerpo de Jonathan durante este proceso? (c) ¿Cuánto trabajo hace Jonathan al pedalear la bicicleta dentro del sistema Jonathan-bicicleta-Tierra durante este proceso?

CIC 31. Conforme el conductor pisa el pedal del acelerador, un automóvil de 1 160 kg de masa se acelera desde el reposo. Durante los primeros segundos de movimiento, el automóvil aumenta su aceleración con el tiempo de acuerdo con la expresión

$$a = 1.16t - 0.210t^2 + 0.240t^3$$

donde t está en segundos y a está en m/s^2 . (a) ¿Cuál es el cambio en la energía cinética del vehículo durante el intervalo de $t = 0$ a $t = 2.50$ s? (b) ¿Cuál es la potencia promedio mínima del motor en este intervalo de tiempo? (c) ¿Por qué el valor del inciso (b) se describe como el valor *mínimo*?

CIC **S** 32. Mientras limpia un estacionamiento, un quitanieve empuja una pila cada vez más grande de nieve enfrente de él. Suponga que un automóvil que se mueve a través del aire se modela

como un cilindro que empuja una pila creciente de aire enfrente de él. El aire originalmente estacionario se pone en movimiento a la rapidez constante v del cilindro, como se muestra en la figura P8.32. En un intervalo de tiempo Δt , un nuevo disco de aire de masa Δm se debe mover una distancia $v\Delta t$ y

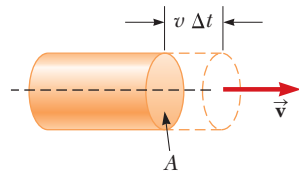


Figura P8.32

por tanto se le debe dar una energía cinética $\frac{1}{2}(\Delta m)v^2$. Con el uso de este modelo, muestre que la pérdida de potencia del automóvil debida a resistencia del aire es $\frac{1}{2}\rho Av^3$, y que la fuerza resistiva que actúa en el automóvil es $\frac{1}{2}\rho Av^2$, donde ρ es la densidad del aire. Compare este resultado con la expresión empírica $\frac{1}{2}D\rho Av^2$ para la fuerza resistiva.

33. Haciendo caso omiso del peligro, un niño salta sobre una pila de colchones viejos para usarlos como un trampolín. Su movimiento entre dos puntos concretos se describe por la ecuación de conservación de energía

$$\frac{1}{2}(46.0 \text{ kg})(2.40 \text{ m/s})^2 + (46.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(2.80 \text{ m} + x) = \frac{1}{2}(1.94 \times 10^4 \text{ N/m})x^2$$

(a) Resuelva la ecuación para x . (b) Redacte el enunciado de un problema, incluyendo los datos para que esta ecuación de la solución. (c) Agregue los dos valores de x obtenidos en el inciso (a) y divida entre 2. (d) ¿Cuál es el significado del valor resultante en el inciso (c)?

34. **Problema de repaso.** ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Una nueva montaña rusa de alta rapidez se afirma que es tan segura que los pasajeros no necesitan llevar cinturones de seguridad o cualquier otro dispositivo de restricción. La montaña está diseñada con una sección circular vertical sobre el cual la montaña viaja en el interior del círculo para que los pasajeros estén boca abajo durante un corto intervalo de tiempo. El radio de la sección circular es 12.0 m y la montaña rusa entra en la parte inferior de la sección circular con una rapidez de 22.0 m/s. Suponga que el carro se mueve sin fricción en la pista y modele al carro como una partícula.

35. Un resorte horizontal unido a una pared tiene una constante elástica $k = 850 \text{ N/m}$. Un bloque de masa $m = 1.00 \text{ kg}$ se une al resorte y descansa sobre una superficie horizontal sin fricción como en la figura P8.35. (a) El bloque se jala a una posición $x_i = 6.00 \text{ cm}$ desde la posición de equilibrio y se suelta. Encuentre la energía potencial elástica almacenada en el resorte cuando el bloque está 6.00 cm de la posición de equilibrio y cuando el bloque pasa por la posición de equilibrio. (b) Encuentre la rapidez del bloque cuando pasa por el punto de equilibrio. (c) ¿Cuál es la rapidez del bloque cuando está en una posición $x_f/2 = 3.00 \text{ cm}$? (d) ¿Por qué no es la respuesta al inciso (c) la mitad de la respuesta del inciso (b).

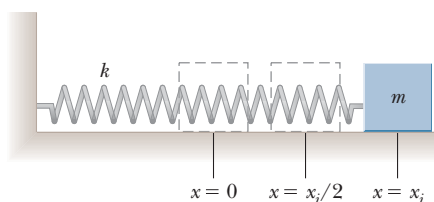


Figura P8.35

36. Hace más de 2 300 años el maestro griego Aristóteles escribió el primer libro llamado *Física*. Puesto en terminología más precisa, este pasaje es del final de su sección Eta:

Sea P la potencia de un agente que causa movimiento; w , la carga movida; d , la distancia cubierta; y Δt , el intervalo de tiempo requerido. Entonces (1) una potencia igual a P en un intervalo de tiempo igual a Δt moverá $w/2$ una distancia $2d$, o (2) moverá $w/2$ la distancia dada d en el intervalo de tiempo $\Delta t/2$. Además, si (3) la potencia conocida P mueve la carga dada w una distancia $d/2$ en el intervalo de tiempo $\Delta t/2$, por tanto (4) $P/2$ moverá $w/2$ la distancia dada d en el intervalo de tiempo dado Δt .

(a) Demuestre que las proporciones de Aristóteles se incluyen en la ecuación $P\Delta t = bwd$, donde b es una constante de proporcionalidad. (b) Demuestre que la teoría de movimiento del libro incluye esta parte de la teoría de Aristóteles como un caso especial. En particular, describa una situación en la que sea verdadera, deduzca la ecuación que represente las proporciones de Aristóteles y determine la constante de proporcionalidad.

37. **Problema de repaso.** Como una broma, alguien equilibró una calabaza en el punto más alto de un gran silo. El silo tiene como remate un casco semiesférico que no tiene fricción cuando está mojado. La línea desde el centro de curvatura del casco hacia la calabaza forma un ángulo $\theta_i = 0^\circ$ con la vertical. En una noche lluviosa, mientras está de pie en las cercanías, un soplo de viento hace que la calabaza se comience a deslizar hacia abajo desde el reposo. La calabaza pierde contacto con el casco cuando la línea desde el centro del hemisferio hacia la calabaza forma cierto ángulo con la vertical. ¿Cuál es este ángulo?

38. **Problema de repaso.** ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Una atleta pone a prueba la fortaleza de sus manos al tener un asistente que cuelga pesos de su cinturón cuando se cuelga con sus manos de una barra horizontal. Cuando los pesos que cuelgan de su cinturón han aumentado hasta el 80% de su peso corporal, sus manos ya no pueden apoyarla y cae al piso. Frustrada por no cumplir su

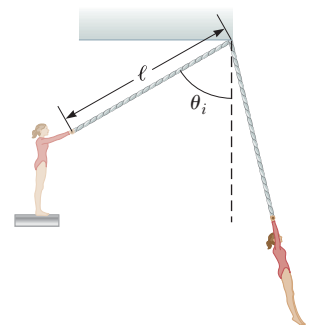


Figura P8.38

meta de fuerza en las manos, decide oscilar en un trapecio. El trapecio consiste en una barra suspendida por dos cuerdas paralelas, cada una de longitud ℓ , permitiendo a los artistas oscilar en un arco circular vertical (figura P8.38). La atleta sostiene la barra y sale de una plataforma elevada, comenzando a partir del reposo con las cuerdas en un ángulo $\theta_i = 60.0^\circ$ con respecto a la vertical. Cuando se balancea hacia adelante y hacia atrás varias veces en un arco circular, olvida su frustración relacionada con la prueba de fuerza en las manos. Suponga que el tamaño del cuerpo de la artista es pequeño en comparación con la longitud ℓ y que la resistencia del aire es despreciable.

39. Un avión de $1.50 \times 10^4 \text{ kg}$ de masa hace un vuelo a nivel, moviéndose inicialmente a 60.0 m/s. La fuerza resistiva ejercida por el aire en el avión tiene una magnitud de $4.0 \times 10^4 \text{ N}$. Por la tercera ley de Newton, si los motores ejercen una fuerza en los gases de escape para expulsarlos de la parte posterior del motor, los gases de escape ejercen una fuerza en los motores en la dirección de desplazamiento del avión. Esta fuerza se denomina empuje, y el valor del empuje en esta situación es $7.50 \times 10^4 \text{ N}$. (a) ¿Es el trabajo realizado por los gases de escape en el avión durante un intervalo de tiempo igual al cambio en la energía cinética del avión? Explique. (b) Encuentre la rapidez del avión después de que ha viajado $5.0 \times 10^2 \text{ m}$.

40. Un péndulo, que consta de una cuerda ligera de longitud L y una esfera pequeña, se balancean en el plano vertical. La cuerda golpea una clavija ubicada a una distancia d bajo el punto de suspensión (figura P8.40). (a) Demuestre que, si la esfera se libera desde una altura por abajo de la clavija, regresará a esta altura después de que la cuerda golpee la clavija. (b) Demuestre que, si el péndulo se libera desde la posición horizontal ($\theta = 90^\circ$) y se balancea en un círculo completo con centro en la clavija, el valor mínimo de d debe ser $3L/5$.

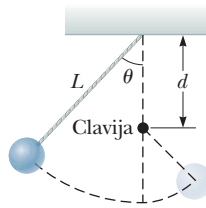


Figura P8.40

41. Una bola gira alrededor de un círculo vertical en el extremo de una cuerda. El otro extremo de la cuerda está fijo en el centro del círculo. Suponiendo que la energía total del sistema bola-Tierra permanece constante, demuestre que la tensión en la cuerda en la parte baja es mayor que la tensión en la alta por seis veces el peso de la bola.

42. Usted está trabajando en el centro de distribución de un gran sitio de compras en línea. Se están haciendo esfuerzos por aumentar el número de paquetes por unidad de tiempo que se están cargando en una banda transportadora para transportarse en camiones en espera, pero el motor impulsor de la banda transportadora tiene dificultad para mantener las crecientes demandas. Su supervisor le ha pedido determinar los requisitos para que un motor nuevo pueda proporcionar la energía suficiente para mantener la cinta transportadora en movimiento continuo sometido a la creciente rapidez de carga. Se le da la información siguiente: la meta del diseño es tener 50.0 kg de paquetes cargados en la banda en diferentes posiciones en una cantidad promedio de 5.00 paquetes por segundo. La banda se mueve con una rapidez horizontal de 1.35 m/s. Personas en diferentes lugares a lo largo de la banda colocan el paquete en la banda de modo que está inicialmente en reposo con respecto al suelo de la construcción justo antes de que caiga de una altura insignificante en la banda. Su tarea es determinar la potencia mínima que debe tener el motor impulsor para acelerar estos paquetes y mantener la banda moviéndose con rapidez constante.

43. Considere la colisión bloque-resorte analizada en el ejemplo 8.8. (a) En el inciso (B), para la situación en que la superficie ejerce una fuerza de fricción en el bloque, demuestre que el bloque nunca llega de regreso a $x = 0$. (b) ¿Cuál es el valor máximo del coeficiente de fricción que permitiría al bloque regresar a $x = 0$?

PROBLEMAS DE DESAFÍO

44. Desde el reposo, una persona de 64.0 kg salta en bungee desde un globo de aire caliente a 65.0 m sobre el suelo. La cuerda bungee tiene masa despreciable y longitud sin estirar de 25.8 m. Un extremo se amarra a la canasta del globo aerostático

y el otro extremo a un arnés alrededor del cuerpo de la persona. La cuerda se modela como un resorte que obedece la ley de Hooke con una constante elástica de 81.0 N/m, y el cuerpo de la persona se modela como partícula. El globo no se mueve. (a) Exprese la energía potencial gravitacional del sistema persona-Tierra como función de la altura variable y de la persona sobre el suelo. (b) Exprese la energía potencial elástica de la cuerda como función de y . (c) Exprese la energía potencial total del sistema persona-cuerda-Tierra como función de y . (d) Trace una gráfica de energías gravitacional, elástica y potencial total como funciones de y . (e) Suponga que la resistencia del aire es despreciable. Determine la altura mínima de la persona sobre el suelo durante su caída. (f) ¿La gráfica de energía potencial muestra alguna posición de equilibrio? Si es así, ¿a qué elevaciones? ¿Son estables o inestables? (g) Determine la rapidez máxima del saltador.

45. Problema de repaso. Un tablero uniforme de longitud L se desliza a lo largo de un plano horizontal uniforme (sin fricción), como se muestra en la figura P8.45a. Después el tablero se desliza a través de la frontera con una superficie horizontal rugosa. El coeficiente de fricción cinética entre el tablero y la segunda superficie es μ_k . (a) Encuentre la aceleración del tablero cuando su extremo frontal recorre una distancia x más allá de la frontera. (b) El tablero se detiene en el momento en que su extremo posterior llega a la frontera, como se muestra en la figura P8.45b. Encuentre la rapidez inicial v del tablero.

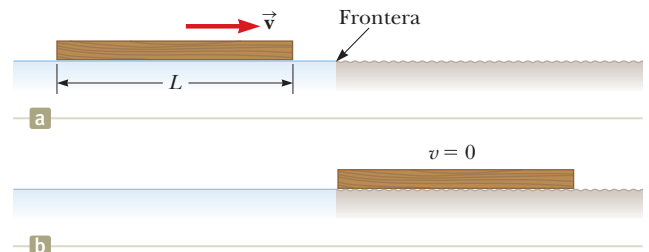


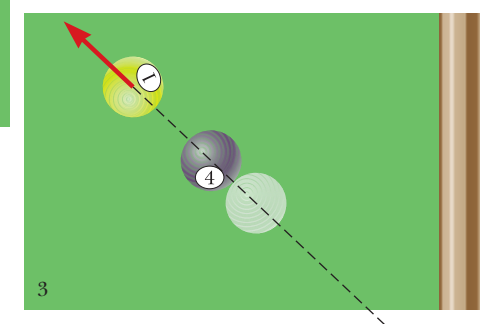
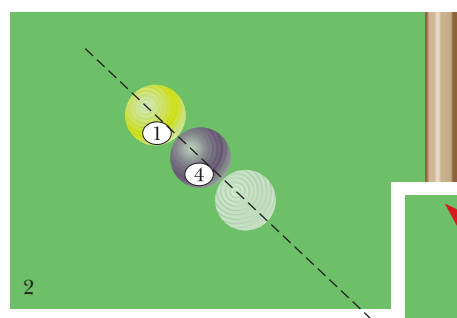
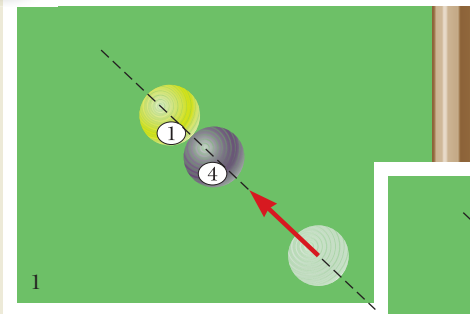
Figura P8.45

46. Una cadena uniforme de 8.00 m de longitud inicialmente yace estirada sobre una mesa horizontal. (a) Suponiendo que el coeficiente de fricción estática entre la cadena y la mesa es 0.600, demuestre que la cadena comenzará a deslizarse de la mesa si al menos 3.00 m de ella cuelgan sobre el borde de la mesa. (b) Determine la rapidez de la cadena cuando su último eslabón deja la mesa, teniendo en cuenta que el coeficiente de fricción cinética entre la cadena y la mesa es 0.400.
47. **¿Qué pasaría si?** Considere la montaña rusa que se describe en el problema 34. Debido a que hay algo de fricción entre el carro y la pista, el carro entra en la sección circular con una rapidez de 15.0 m/s en lugar de los 22.0 m/s del problema 34. ¿Esta situación es *más* o *menos* peligrosa para los pasajeros que la del problema 34? Suponga que la sección circular aún está sin fricción.



9

Cantidad de movimiento lineal y colisiones



Su entusiasmo por ganar un juego de billar es superado por la física de un tiro interesante hecho por su amigo. La bola púrpura de en medio nunca se mueve durante el proceso. ▶

- 9.1 Cantidad de movimiento lineal
- 9.2 Modelo de análisis: Sistema aislado (cantidad de movimiento)
- 9.3 Modelo de análisis: Sistema no aislado (cantidad de movimiento)
- 9.4 Colisiones en una dimensión
- 9.5 Colisiones en dos dimensiones
- 9.6 El centro de masa
- 9.7 Sistemas de muchas partículas
- 9.8 Sistemas deformables
- 9.9 Propulsión de cohetes

IMAGINE Usted decide jugar billar en el centro estudiantil de la

Universidad. Usted y su amigo están en medio de un juego cuando un disparo hecho por su amigo le fascina y comienza su mente a pensar de nuevo. En el diagrama #1 de la figura anterior se muestra la situación inicial. Dos bolas, amarilla y púrpura, están en reposo y tocándose. Su amigo dispara la bola blanca a lo largo de una línea trazada a través de los centros de las tres bolas, y la bola blanca hace un golpe directo, por lo que los centros de las tres bolas se alinean momentáneamente, como en el diagrama #2. La bola blanca se detiene y sólo la bola amarilla se aleja de la colisión, como se muestra en el diagrama #3. La bola púrpura que está en medio permanece inmóvil durante toda la interacción. Usted piensa: "¡Espera un minuto!, ¿por qué pasó eso? La energía del sistema de tres bolas se debe conservar. ¿Por qué no podrían *las dos* pelotas en reposo moverse después de la colisión con rapidezces más pequeñas para que sus energías cinéticas sumen la de la bola blanca?". Su amigo le pide que continúe el juego, pero su mente está en otra parte, analizando esta interesante situación.

CONEXIONES Mientras que el planteamiento de energía estudiado en los capítulos anteriores es de gran alcance, aún hay algunos problemas que no podemos resolver de una manera fácil con la física que hemos estudiado hasta ahora. En este capítulo, encontramos que hay otra cantidad que se conserva además de la energía. Mientras que esta nueva cantidad es una combinación de masa y velocidad, similar a la energía cinética, está es un vector, muy diferente de la energía. Encontramos que el nuevo principio de conservación de esta cantidad, *cantidad de movimiento*, nos permite resolver incluso más nuevos tipos de problemas, como el del "Imagine". Este principio de conservación es particularmente útil en el análisis de colisiones entre dos o más objetos. Como con la energía, el análisis de sistemas es importante; generaremos principios de la cantidad de movimiento para sistemas aislados y no aislados. Además, nuestro estudio de la cantidad de movimiento en los sistemas conducirá al concepto importante de *centro de masa* de un sistema de partículas. Los principios asociados con la cantidad de movimiento se unirán a los asociados con la energía en varios capítulos futuros lo que nos permitirá entender muchas situaciones físicas.

9.1 Cantidad de movimiento lineal

En el capítulo 8 se estudiaron situaciones que son difíciles de analizar con las leyes de Newton. Fue posible resolver problemas que involucran estas situaciones al identificar un sistema y aplicar un principio de conservación, el de conservación de energía. Considere ahora otra situación y vea si es posible resolverla con los modelos ya estudiados:

Un arquero de 60 kg está de pie, en reposo, sobre hielo sin fricción y dispara una flecha de 0.030 kg horizontalmente a 85 m/s. ¿Qué velocidad tiene el arquero, sobre el hielo, después de disparar la flecha?

A partir de la tercera ley de Newton, se sabe que la fuerza que el arco ejerce en la flecha se combina con una fuerza en la dirección opuesta en el arco (y el arquero). Esta fuerza hace que el arquero se deslice hacia atrás sobre el hielo con la rapidez pedida en el problema. No es posible determinar esta rapidez si se emplean los modelos de movimiento como el de partícula bajo aceleración constante porque no se tiene información sobre la aceleración del arquero. No se pueden utilizar modelos de fuerza como el de partícula bajo una fuerza neta porque no se conocen las fuerzas involucradas en esta situación. Los modelos de energía no son de ayuda porque se ignora el trabajo realizado al estirar la cuerda del arco o la energía potencial elástica en el sistema relacionada con la tensión en la cuerda del arco.

A pesar de la incapacidad para resolver el problema del arquero mediante las técnicas aprendidas hasta el momento, este problema es muy simple de solucionar si se introduce una nueva cantidad que describa el movimiento, la *cantidad de movimiento lineal*. Para generar esta nueva cantidad, considere un sistema aislado de dos partículas (figura 9.1) con masas m_1 y m_2 que se mueven con velocidades \vec{v}_1 y \vec{v}_2 en un instante de tiempo. Como el sistema está aislado, la única fuerza en una partícula es a causa de la otra partícula. Si una fuerza proveniente de la partícula 1 (por ejemplo, una fuerza gravitacional) actúa en la partícula 2, debe haber una segunda fuerza, igual en magnitud pero opuesta en dirección, que la partícula 2 ejerce en la partícula 1. Es decir, las fuerzas en las partículas forman un par acción-reacción de la tercera ley de Newton, y $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Esta condición se expresa como

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$$

Desde el punto de vista del sistema, esta ecuación expresa que al sumar las fuerzas en las partículas en un sistema aislado, la suma es cero.

Analicemos más esta situación al incorporar la segunda ley de Newton. En el instante que se muestra en la figura 9.1, las partículas en interacción en el sistema tienen aceleraciones de acuerdo con las fuerzas sobre ellas. Por tanto, al sustituir la fuerza sobre cada partícula con $m\vec{a}$ para la partícula se obtiene

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = 0$$

Ahora sustituya cada aceleración con su definición de la ecuación 4.5:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = 0$$

Si las masas m_1 y m_2 son constantes, se les puede colocar adentro de la operación derivada, lo cual da

$$\frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\vec{v}_2)}{dt} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = 0 \quad (9.1)$$

Observe que la derivada de la suma $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ respecto del tiempo es cero. En consecuencia, esta suma debe ser constante en un intervalo de tiempo arbitrario. En el capítulo 8 vimos

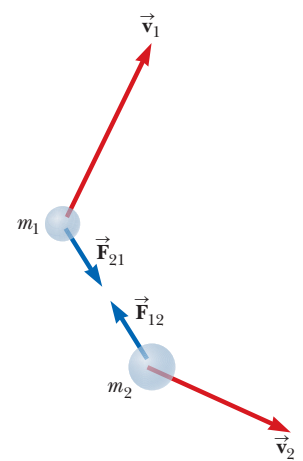


Figura 9.1 Dos partículas interactúan mutuamente. De acuerdo con la tercera ley de Newton, se debe tener $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.



que la energía total de un sistema aislado es constante en un intervalo de tiempo, porque la energía se conserva. Definimos a esta cantidad como *cantidad de movimiento lineal*:

Definición de cantidad de movimiento lineal de una partícula ▶

La **cantidad de movimiento lineal** \vec{p} de una partícula o un objeto que se modela como una partícula de masa m que se mueve con una velocidad \vec{v} se define como el producto de la masa y la velocidad de la partícula:

$$\vec{p} \equiv m\vec{v} \quad (9.2)$$

La cantidad de movimiento lineal es una cantidad vectorial porque es igual al producto de una cantidad escalar m y una cantidad vectorial \vec{v} . Su dirección está a lo largo de \vec{v} , tiene dimensiones ML/T y su unidad del SI es $\text{kg} \times \text{m/s}$.

Si una partícula se está moviendo en una dirección arbitraria, \vec{p} tiene tres componentes y la ecuación 9.2 es equivalente a las ecuaciones por componentes

$$p_x = mv_x \quad p_y = mv_y \quad p_z = mv_z$$

Como se observa a partir de su definición, el concepto de cantidad de movimiento¹ proporciona una distinción cuantitativa entre partículas pesadas y ligeras que se mueven con la misma velocidad. Por ejemplo, la cantidad de movimiento de una bola de boliche es mucho mayor que el de una bola de tenis que se mueve con la misma rapidez. Newton llamó al producto $m\vec{v}$ *cantidad de movimiento*; tal vez hoy en día este término es una descripción más gráfica que la palabra *momentum*, que viene del latín y significa movimiento.

Se ha visto otra cantidad, energía cinética, que es una combinación de masa y rapidez. Es legítimo preguntar por qué se necesita otra cantidad, cantidad de movimiento, relacionada con masa y velocidad. Existen claras diferencias entre la energía cinética y la cantidad de movimiento. Primero, la energía cinética es un escalar, mientras que la cantidad de movimiento es un vector. Considere un sistema de dos partículas de igual masa que se mueven a lo largo de una línea recta, una hacia la otra, con la misma rapidez. El sistema tiene energía cinética porque sus integrantes están en movimiento. Sin embargo, debido a la naturaleza vectorial de la cantidad de movimiento, éste es cero para todo el sistema. Una segunda mayor diferencia es que la energía cinética se puede transformar en otros tipos de energía, como energía potencial o energía interna. Sólo existe un tipo de cantidad de movimiento lineal, así que no se observan estas transformaciones cuando en un problema se utiliza el método de cantidad de movimiento. Estas diferencias son suficientes para elaborar modelos apoyados en la cantidad de movimiento y separados de aquellos sustentados en la energía, así se tiene una herramienta independiente utilizable en la solución de problemas.

Al usar la segunda ley de movimiento de Newton, se puede relacionar la cantidad de movimiento lineal de una partícula con la fuerza resultante que actúa en ella. Se inicia con la segunda ley de Newton y se sustituye la definición de aceleración:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

En la segunda ley de Newton, la masa m se supone constante. Por tanto, se puede llevar m dentro de la operación derivada para dar

$$\sum \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (9.3)$$

Segunda ley de Newton para una partícula ▶

Esta ecuación muestra que **la relación de cambio con el tiempo de la cantidad de movimiento lineal de una partícula es igual a la fuerza neta que actúa sobre la partícula**. En el capítulo 5, a la fuerza se le identificó con aquello que causa un cambio en el movimiento de un objeto (sección 5.2). En la segunda ley de Newton (ecuación 5.2), se utilizó la aceleración \vec{a} para representar el cambio en el movimiento. Ahora, con la ecuación 9.3, se observa que puede emplearse la derivada de la cantidad de movimiento \vec{p} con respecto al tiempo para representar el cambio en el movimiento.

¹En este capítulo, los términos *cantidad de movimiento* y *cantidad de movimiento lineal* tienen el mismo significado. Más adelante, en el capítulo 11, se usará el término *cantidad de movimiento angular* para una cantidad diferente cuando se trate con movimiento rotacional.



Esta forma alternativa de la segunda ley de Newton es la manera en que Newton presentó la ley, y de hecho es más general que la expresión que se introdujo en el capítulo 5. Además de las situaciones en las que el vector velocidad varía con el tiempo, la ecuación 9.3 se puede emplear para estudiar fenómenos en los que cambia la masa. Por ejemplo, la masa de un cohete es variable conforme se quema el combustible y es expulsado del cohete. No se puede usar $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ para analizar la propulsión de cohetes; se debe aplicar el método de la cantidad de movimiento, como se mostrará en la sección 9.9

E XAMEN RÁPIDO 9.1 Dos objetos tienen iguales energías cinéticas. ¿De qué modo se comparan las magnitudes de sus cantidades de movimiento? (a) $p_1 < p_2$, (b) $p_1 = p_2$, (c) $p_1 > p_2$ y (d) No hay suficiente información para decidir.

E XAMEN RÁPIDO 9.2 Su profesor de educación física le lanza una pelota de beisbol con cierta rapidez y usted la atrapa. Luego el profesor le lanza una pelota grande y pesada usada para gimnasia cuya masa es diez veces la masa de la pelota de beisbol. Usted tiene las siguientes opciones: la pelota grande y pesada se le puede lanzar con (a) la misma rapidez que la bola de beisbol, (b) la misma cantidad de movimiento o (c) la misma energía cinética. Clasifique estas opciones de la más fácil a la más difícil de atrapar.

9.2 Análisis de modelo: Sistema aislado (cantidad de movimiento)

Al usar la definición de cantidad de movimiento, la ecuación 9.1 se puede reescribir

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$

Ya que la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento total $\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ es *ceró*, se concluye que la cantidad de movimiento *total* del sistema aislado de las dos partículas en la figura 9.1 debe permanecer constante:

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \text{constante} \quad (9.4)$$

o, de manera equivalente, durante un intervalo de tiempo,

$$\Delta \vec{p}_{\text{tot}} = 0 \quad (9.5)$$

La ecuación 9.5 se puede escribir para un sistema de dos partículas como

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}$$

donde \vec{p}_{1i} y \vec{p}_{2i} son los valores iniciales y \vec{p}_{1f} y \vec{p}_{2f} son los valores finales de las cantidades de movimiento para las dos partículas en el intervalo de tiempo en que las partículas interactúan. Esta ecuación en forma de componentes demuestra que las cantidades de movimiento totales en las direcciones x , y y z se conservan todas de manera independiente:

$$p_{1ix} + p_{2ix} = p_{1fx} + p_{2fx} \quad p_{1iy} + p_{2iy} = p_{1fy} + p_{2fy} \quad p_{1iz} + p_{2iz} = p_{1fz} + p_{2fz}$$

La ecuación 9.5 es el enunciado matemático de un nuevo modelo de análisis, el **sistema aislado (cantidad de movimiento)**. Se puede extender a cualquier número de partículas en un sistema aislado, como se muestra en la sección 9.7. En el capítulo 8 se estudió, para un sistema aislado, la versión de la energía ($\Delta E_{\text{sistema}} = 0$) y ahora se tiene una versión en cantidad de movimiento. En general, la ecuación 9.5 se puede establecer como sigue:

Siempre que interactúan dos o más partículas en un sistema aislado, la cantidad de movimiento total del sistema permanece constante.

Este enunciado dice que la cantidad de movimiento total de un sistema aislado en todo momento es igual a su cantidad de movimiento inicial.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 9.1

La cantidad de movimiento de un sistema aislado se conserva Aunque la cantidad de movimiento de un sistema aislado se conserva, la cantidad de movimiento de una *partícula* dentro de un sistema aislado no necesariamente se conserva porque es posible que otras partículas interactúen con ella. Evite aplicar la conservación de cantidad de movimiento a una sola partícula.

◀ Versión de la cantidad de movimiento del modelo de sistema aislado



Advierta que no se hizo afirmación alguna en cuanto al tipo de fuerzas que actúan en las partículas del sistema. Además, no se especificó si las fuerzas son conservativas o no conservativas. El único requisito es que las fuerzas deben ser *internas* al sistema. Este único requisito debería darle una idea del poder de este nuevo modelo.

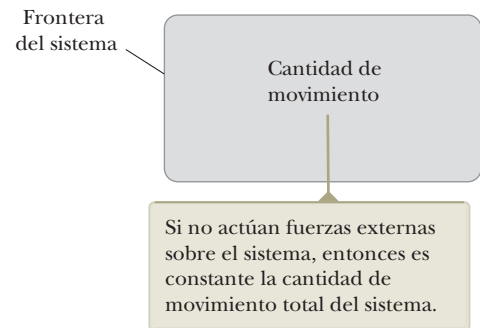
ANÁLISIS DE MODELO Sistema aislado (cantidad de movimiento)

Imagine que identificó un sistema para analizarlo y que ha definido su frontera. Si no existen fuerzas externas sobre el sistema, éste está *aislado*. En ese caso, la cantidad de movimiento total del sistema, que es la suma vectorial de las cantidades de movimiento de todos los integrantes del sistema, se conserva:

$$\Delta \vec{p}_{\text{tot}} = 0 \quad (9.5)$$

Ejemplos:

- una bola blanca golpea a otra en una mesa de billar
- una nave espacial enciende sus cohetes y se mueve más rápido a través del espacio
- las moléculas en un gas a una temperatura específica se mueven y chocan entre sí (capítulo 20)
- una partícula que entra y golpea a un núcleo, crea un nuevo núcleo y una distinta partícula saliente (capítulo 43)
- un electrón y un positrón se aniquilan para formar dos fotones saliente (capítulo 44)



Ejemplo 9.1 El arquero

Considere la situación propuesta al inicio de la sección 9.1. Un arquero de 60 kg está de pie, en reposo, sobre hielo sin fricción y dispara una flecha de 0.030 kg horizontalmente a 85 m/s (figura 9.2). ¿Con qué velocidad se mueve el arquero sobre el hielo después de disparar la flecha?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Es posible que usted ya haya pensado en este problema al inicio de la sección 9.1. Imagine que la flecha se dispara de una forma y el arquero retrocede en la dirección opuesta.

Categorizar Como se discutió en la sección 9.1, este problema no se puede resolver mediante modelos apoyados en movimiento, fuerza o energía. Sin duda, este problema *puede* resolverse muy fácilmente con un método que involucre a la cantidad de movimiento.

Considere el sistema constituido por el arquero (incluido el arco) y la flecha. El sistema no está aislado porque la fuerza gravitacional y la fuerza normal del hielo actúan en el sistema. Sin embargo, dichas fuerzas son verticales y perpendiculares al movimiento del sistema. No hay fuerzas externas en la dirección horizontal, así que puede aplicarse el modelo de *sistema aislado (cantidad de movimiento)* en términos de las componentes de la cantidad de movimiento en esta dirección.

Analizar La cantidad de movimiento horizontal total del sistema antes de disparar la flecha es cero, porque nada en el sistema se mueve. Por tanto, la cantidad de movimiento horizontal total del sistema después de disparar la flecha también debe ser cero. Se elige la dirección de disparo de la flecha como la dirección x positiva. Al identificar al arquero como la partícula 1 y la flecha como la partícula 2, se tiene $m_1 = 60 \text{ kg}$, $m_2 = 0.030 \text{ kg}$ y $\vec{v}_{2f} = 85 \hat{i} \text{ m/s}$.

Utilice el modelo de sistema aislado (cantidad de movimiento), iniciando con la ecuación 9.5:

$$\Delta \vec{p} = 0 \quad \text{S} \quad \vec{p}_f - \vec{p}_i = 0 \quad \text{S} \quad \vec{p}_f = \vec{p}_i \quad \text{S} \quad m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} = 0$$

En esta ecuación despeje \vec{v}_{1f} y sustituya valores numéricos:

$$\vec{v}_{1f} = -\frac{m_2}{m_1} \vec{v}_{2f} = -\left(\frac{0.030 \text{ kg}}{60 \text{ kg}}\right)(85 \hat{i} \text{ m/s}) = -0.042 \hat{i} \text{ m/s}$$

Finalizar El signo negativo para \vec{v}_{1f} indica que el arquero, después de disparar la flecha, se mueve hacia la izquierda en la figura 9.2, en la dirección opuesta a la dirección de movimiento de la flecha, en concordancia con la tercera ley de Newton. Como el

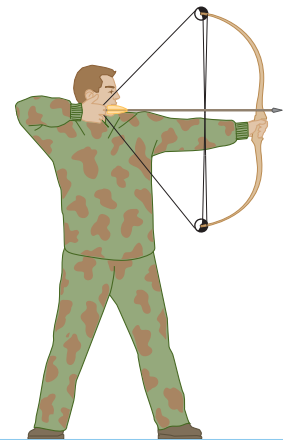


Figura 9.2 (Ejemplo 9.1) Un arquero dispara una flecha horizontalmente hacia la derecha. Como él está de pie sobre hielo sin fricción, comenzará a deslizar hacia la izquierda sobre el hielo.



9.1 continuación

arquero tiene mucho más masa que la flecha, su aceleración y en consecuencia su velocidad son mucho más pequeñas que la aceleración y velocidad de la flecha. Note que este problema parece muy simple, pero no se puede resolver con los modelos sustentados en movimiento, fuerza o energía. Sin embargo, nuestro nuevo modelo de cantidad de movimiento muestra que el problema no solo *parece* simple, ¡es simple!

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si la flecha se dispara en una dirección que forma un ángulo θ con la horizontal? ¿Cómo cambiará la velocidad de retroceso del arquero?

Respuesta La velocidad de retroceso disminuirá en magnitud porque sólo una componente de la velocidad de la flecha está en la dirección x . La conservación de la cantidad de movimiento en la dirección x da

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \cos \theta = 0$$

lo que conduce a

$$v_{1f} = -\frac{m_2}{m_1} v_{2f} \cos \theta$$

Para $\theta = 0$, $\cos \theta = 1$, y la velocidad final del arquero se reduce al valor que tenía cuando la flecha se dispara horizontalmente. Para valores de θ distintos de cero, la función coseno es menor que 1 y la velocidad de retroceso es menor que el valor calculado para $\theta = 0$. Si $\theta = 90^\circ$, entonces $\cos \theta = 0$ y $v_{1f} = 0$, de modo que no hay velocidad de retroceso. En este caso, al disparar la flecha el arquero es empujado más fuerte contra el hielo.

Ejemplo 9.2 ¿En realidad se puede ignorar la energía cinética de la Tierra?

En la sección 7.6 se afirmó que se puede ignorar la energía cinética de la Tierra cuando se considera la energía de un sistema que consiste de la Tierra y una bola que se deja caer. Verifique esta afirmación.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que deja caer una bola en la superficie de la Tierra. Desde su punto de vista, la bola cae mientras la Tierra permanece fija. Sin embargo, por la tercera ley de Newton, la Tierra experimenta una fuerza hacia arriba y debido a eso una aceleración hacia arriba mientras la bola cae. En el cálculo que sigue, se demostrará que este movimiento se puede ignorar porque es extremadamente pequeño.

Categorizar El sistema se identifica como la bola y la Tierra. Suponga que sobre el sistema no existen fuerzas provenientes del espacio exterior, así el sistema es aislado. Utilice la versión en *cantidad de movimiento* del modelo de *sistema aislado*.

Analizar Establezca una relación entre las energías cinéticas de la Tierra y de la bola. Identifique v_E y v_b como la rapidez de la Tierra y la bola, respectivamente, después de que la bola cae una cierta distancia.

Use la definición de energía cinética para establecer esta proporción:

$$(1) \frac{K_E}{K_b} = \frac{\frac{1}{2} m_E v_E^2}{\frac{1}{2} m_b v_b^2} = \left(\frac{m_E}{m_b} \right) \left(\frac{v_E}{v_b} \right)^2$$

Aplique el modelo de sistema aislado (cantidad de movimiento), notando que la cantidad de movimiento inicial del sistema es cero:

$$\Delta \vec{p} = 0 \rightarrow p_i = p_f \rightarrow 0 = m_b v_b + m_E v_E$$

Resuelva la ecuación para la relación de componentes de rapidez:

$$\frac{v_E}{v_b} = -\frac{m_b}{m_E}$$

Sustituya esta expresión para v_E/v_b en la ecuación (1):

$$\frac{K_E}{K_b} = \left(\frac{m_E}{m_b} \right) \left(\frac{m_b}{m_E} \right)^2 = \frac{m_b}{m_E}$$

Sustituya los números de orden de magnitud para las masas:

$$\frac{K_E}{K_b} = \frac{m_b}{m_E} \sim \frac{1 \text{ kg}}{10^{25} \text{ kg}} \sim 10^{-25}$$

Finalizar La energía cinética de la Tierra es una fracción muy pequeña de la energía cinética de la bola, así que está justificado ignorarla en la energía cinética del sistema.

9.3 Modelo de análisis: Sistema no aislado (cantidad de movimiento)

En la sección anterior, encontramos que la cantidad de movimiento de un sistema se conserva si no hay fuerzas externas en el sistema. De acuerdo con la ecuación 9.3, la cantidad de movimiento de una partícula cambia si una fuerza neta actúa en la partícula. Lo mismo



puede decirse de una fuerza neta aplicada a un sistema, como se verá explícitamente en la sección 9.7: la cantidad de movimiento de un sistema cambia si una fuerza neta del entorno actúa en el sistema. Esto puede parecer similar a la discusión de energía del capítulo 8: la energía de un sistema cambia si la energía cruza las fronteras del sistema hacia o desde el entorno. En esta sección, se considera un *sistema no aislado*. Para consideraciones de energía, un sistema es no aislado si la energía cruza su frontera por cualquiera de los medios indicados en la sección 8.1. Para consideraciones de cantidad de movimiento, un sistema es no aislado si una fuerza neta actúa en el sistema durante un intervalo de tiempo. En este caso, puede considerarse que desde el entorno se transfiere cantidad de movimiento al sistema mediante una fuerza neta. Al resolver algunos tipos de problemas es útil conocer el cambio en la cantidad de movimiento causado por una fuerza. Para construir una mejor comprensión de este importante concepto, suponga que una fuerza neta $\sum \vec{F}$ actúa en una partícula y que esta fuerza puede variar con el tiempo. De acuerdo con la segunda ley de Newton, expresada en la forma de la ecuación 9.3, $\sum \vec{F} = d\vec{p}/dt$, se puede escribir

$$d\vec{p} = \sum \vec{F} dt \quad (9.7)$$

Es posible integrar² esta expresión para encontrar el cambio en la cantidad de movimiento de una partícula cuando la fuerza actúa durante algún intervalo de tiempo. Si la cantidad de movimiento de la partícula cambia de \vec{p}_i en el tiempo t_i a \vec{p}_f en el tiempo t_f la integración de la ecuación 9.7 da

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F} dt \quad (9.8)$$

Para evaluar la integral, es necesario conocer cómo varía con el tiempo la fuerza neta. La cantidad en el lado derecho de esta ecuación es un vector llamado **impulso** de la fuerza neta $\sum \vec{F}$ que actúa en una partícula durante el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$:

Impulso de una fuerza ►

$$\vec{I} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F} dt \quad (9.9)$$

A partir de esta definición, se ve que el impulso \vec{I} es una cantidad vectorial que tiene una magnitud igual al área bajo la curva fuerza-tiempo, como se describe en la figura 9.3a. Se supone que la fuerza varía en el tiempo en la forma general mostrada en la figura y es distinta de cero en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$. La dirección del vector impulso es la misma que la dirección del cambio en la cantidad de movimiento. El impulso tiene las dimensiones de cantidad de movimiento, esto es, ML/T. El impulso *no* es una propiedad de una partícula; en vez de ello, es una medida del grado al cual una fuerza externa cambia la cantidad de movimiento de la partícula.

Ya que la fuerza neta que imparte un impulso a una partícula por lo general puede variar en el tiempo, es conveniente definir una fuerza neta promediada en el tiempo:

$$(\sum \vec{F})_{\text{prom}} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F} dt \quad (9.10)$$

donde $\Delta t = t_f - t_i$. (Esta ecuación es una aplicación del teorema del valor medio del cálculo.) Entonces, la ecuación 9.9 se puede expresar como

$$\vec{I} = (\sum \vec{F})_{\text{prom}} \Delta t \quad (9.11)$$

Esta fuerza promediada en el tiempo, que se muestra en la figura 9.3b, puede ser interpretada como la fuerza constante que daría a la partícula, en el intervalo de tiempo Δt , el mismo impulso que la fuerza variable en el tiempo da durante este mismo intervalo.

²Aquí se integra la fuerza con respecto al tiempo. Compare esta estrategia con los esfuerzos del capítulo 7, donde se integró la fuerza con respecto a la posición para encontrar el trabajo realizado por la fuerza.

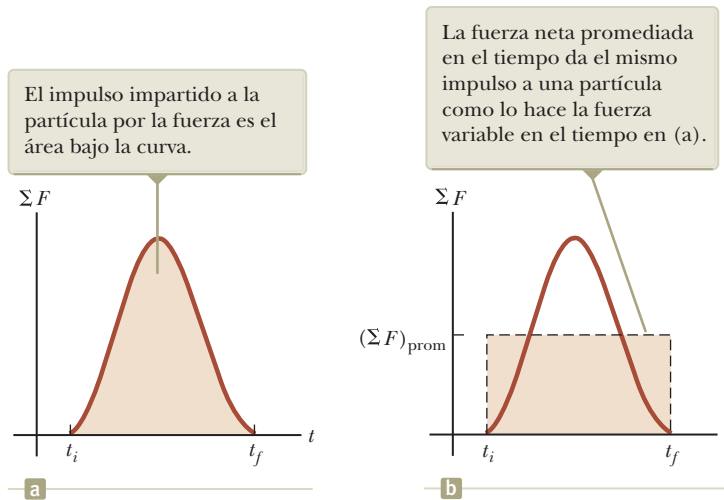


Figura 9.3 (a) Una fuerza neta que actúa en una partícula puede variar en el tiempo. (b) El valor de la fuerza constante $(\Sigma F)_{\text{prom}}$ (línea discontinua horizontal) se selecciona tal que el área $(\Sigma F)_{\text{prom}} \Delta t$ del rectángulo sea la misma área que bajo la curva en (a).

En principio, si $\Sigma \vec{F}$ se conoce como una función del tiempo, el impulso puede calcularse con la ecuación 9.9. El cálculo se vuelve especialmente simple si la fuerza que actúa en la partícula es constante. En este caso $(\Sigma \vec{F})_{\text{prom}} = \Sigma \vec{F}$, donde $\Sigma \vec{F}$ es la fuerza neta constante, y la ecuación 9.11 se convierte en

$$\vec{I} = \Sigma \vec{F} \Delta t \quad (\text{fuerza neta constante}) \quad (9.12)$$

Al combinar las ecuaciones 9.8 y 9.9 resulta un importante enunciado conocido como **teorema impulso-cantidad de movimiento**:

El cambio en la cantidad de movimiento de una partícula es igual al impulso de la fuerza neta que actúa en la partícula:

$$\Delta \vec{p} = \vec{I} \quad (9.13)$$

◀ Teorema impulso-cantidad de movimiento para una partícula

Este enunciado es equivalente a la segunda ley de Newton. Cuando se dice que a una partícula se le da un impulso, significa que la cantidad de movimiento se transfiere de un agente externo a dicha partícula. La ecuación 9.13 es idéntica en forma a la ecuación de conservación de energía, la ecuación 8.1, y su desarrollo completo, ecuación 8.2. La ecuación 9.13 es el enunciado más general del principio de **conservación de la cantidad de movimiento** y se conoce como la **ecuación de conservación de la cantidad de movimiento**. En el caso de un método con cantidad de movimiento, en diversos problemas los sistemas aislados aparecen con mayor frecuencia que los sistemas no aislados, así en la práctica, la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento con frecuencia se identifica como el caso especial de la ecuación 9.5.

El lado izquierdo de la ecuación 9.13 representa el cambio en la cantidad de movimiento del sistema, que en este caso es una sola partícula. El lado derecho es una medida de cuánta cantidad de movimiento cruza la frontera del sistema debido a la fuerza neta aplicada al sistema. La ecuación 9.13 es el enunciado matemático de un nuevo análisis de modelo, el modelo de **sistema no aislado (cantidad de movimiento)**. No obstante que esta ecuación es similar en forma a la ecuación 8.2, existen varias diferencias en su aplicación a los problemas. Primero, la ecuación 9.13 es una ecuación vectorial, mientras que la ecuación 8.2 es una ecuación escalar. Por tanto, las direcciones son importantes para la ecuación 9.13. Segundo, sólo hay un tipo de cantidad de movimiento y entonces sólo una manera de almacenar cantidad de movimiento en un sistema. En cambio, como se vio en la ecuación 8.2, existen tres formas de almacenar energía en un sistema: cinética, potencial e interna. Tercero, sólo hay una manera de transferir cantidad de movimiento al sistema: por aplicación de una fuerza en el sistema durante un intervalo de tiempo. La ecuación 8.2 muestra seis formas de transferir energía al sistema. Por tanto, no existe expansión de la ecuación 9.13 análoga a la ecuación 8.2. Como un ejemplo de la ecuación 9.13 en el mundo real, considere el maniquí de prueba de choque en la figura 9.4 (página



fStop Images - Caspar Benson/
Brand X Pictures/Getty Images

Figura 9.4 Un maniquí de prueba de choque alcanza el reposo con una bolsa de aire en una colisión de prueba. La bolsa de aire aumenta el intervalo de tiempo durante el cual el maniquí alcanza el reposo, disminuyendo así la fuerza sobre el maniquí. Las bolsas de aire en los automóviles han salvado muchas vidas en los accidentes.

218), que representa a un conductor humano en un accidente. Conforme el auto alcanza el reposo desde su rapidez inicial, el maniquí experimenta un cambio dado en la cantidad de movimiento. Ahora considere el impulso en el lado derecho de la ecuación 9.13, expresada con la ecuación 9.11. El mismo impulso puede ocurrir con una fuerza promedio grande en un intervalo del tiempo corto o una fuerza promedio pequeña en un intervalo del tiempo largo. En ausencia de una bolsa de aire, el maniquí alcanza el reposo con la colisión repentina de su cabeza con el volante o con el tablero. Este es un ejemplo de la primera posibilidad, y la fuerza promedio grande podría dar lugar a una fuerte lesión en un conductor humano. Sin embargo, si hay una bolsa de aire, el maniquí puede alcanzar el reposo gradualmente durante un intervalo de tiempo más largo, dando como resultado una fuerza promedio más pequeña. Como resultado, existe la posibilidad de evitar lesiones en un conductor humano.

En muchas situaciones físicas, se usará lo que se llama la **aproximación del impulso**, en la que se supone que una de las fuerzas ejercida en una partícula actúa durante un tiempo breve, pero es mucho mayor que cualquiera otra fuerza presente. En este caso, la fuerza neta $\Sigma \vec{F}$ en la ecuación 9.9 se sustituye con una sola fuerza \vec{F} para encontrar el impulso en la partícula. Esta aproximación es especialmente útil al tratar colisiones en las cuales la duración de la colisión es muy breve. Cuando se hace esta aproximación, la única fuerza se conoce como *fuerza impulsiva*. Por ejemplo, cuando un bat golpea una pelota de beisbol, el tiempo de la colisión es aproximadamente 0.01 s y la fuerza promedio que el bat ejerce en la pelota en este tiempo usualmente es de muchos miles de newtons. Ya que esta fuerza de contacto es mucho más grande que la magnitud de la fuerza gravitacional, la aproximación del impulso justifica el despreciar las fuerzas gravitacionales ejercidas en la pelota y el bat durante la colisión. Cuando se utiliza esta aproximación, es importante recordar que \vec{p}_i y \vec{p}_f representan las cantidades de movimiento *inmediatamente* antes y después de la colisión, respectivamente. Por tanto, en cualquier situación en la que es adecuado usar la aproximación del impulso, la partícula se mueve muy poco durante la colisión.

E XAMEN RÁPIDO 9.3 Dos objetos están en reposo sobre una superficie sin fricción.

- El objeto 1 tiene una masa mayor que el objeto 2. (i) Cuando se aplica una fuerza constante al objeto 1, acelera a través de una distancia d en una línea recta. Se retira la fuerza del objeto 1 y se aplica al objeto 2. En el momento cuando el objeto 2 aceleró a través de la misma distancia d , ¿qué enunciados son verdaderos? (a) $p_1 < p_2$, (b) $p_1 = p_2$, (c) $p_1 > p_2$, (d) $K_1 < K_2$, (e) $K_1 = K_2$, (f) $K_1 > K_2$.
- (ii) Cuando se aplica una fuerza al objeto 1, éste acelera durante un intervalo de tiempo Δt . Se retira la fuerza del objeto 1 y se aplica al objeto 2. De la misma lista de opciones, ¿cuáles enunciados son verdaderos después de que el objeto 2 acelera durante el mismo intervalo de tiempo Δt ?

E XAMEN RÁPIDO 9.4 Clasifique el tablero, el cinturón de seguridad y la bolsa de aire de un automóvil, cada objeto empleado por separado en colisiones con la misma rapidez, en términos de (a) el impulso y (b) la fuerza promedio que cada uno entrega a un pasajero en el asiento delantero, de mayor a menor.

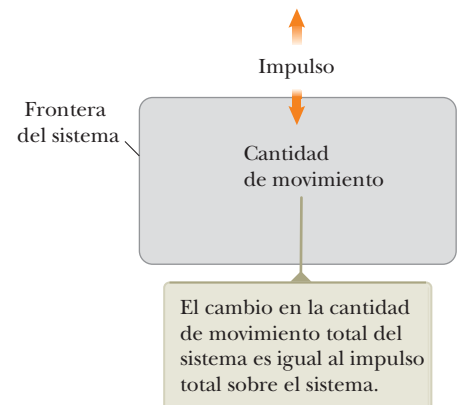
ANÁLISIS DE MODELO Sistema no aislado (cantidad de movimiento)

Imagine que ha identificado un sistema para ser analizado y que ha definido la frontera del sistema. Si se aplican fuerzas externas al sistema, éste es *no aislado*. En ese caso, el cambio en la cantidad de movimiento total del sistema es igual al impulso sobre él, un enunciado que se conoce como el **teorema impulso-cantidad de movimiento**:

$$\Delta \vec{p} = \vec{I} \quad (9.13)$$

Ejemplos

- una pelota de beisbol es golpeada por un bat
- un carrito colocado sobre una mesa es jalado por una cuerda (ejemplo 10.14 del capítulo 10)
- en un gas, una molécula golpea la pared del recipiente que contiene al gas (capítulo 20)
- fotones golpean una superficie absorbente y ejercen presión sobre ella (capítulo 33)



Ejemplo 9.3 ¿Qué tan útiles son las defensas?

En una prueba de choque, un automóvil de 1 500 kg de masa colisiona con una pared, como se muestra en la figura 9.5. Las velocidades inicial y final del auto son $\vec{v}_i = -15.0\hat{i}$ m/s y $\vec{v}_f = 2.60\hat{i}$ m/s, respectivamente. Si la colisión dura 0.150 s, encuentre el impulso causado por la colisión y la fuerza neta promedio ejercida en el automóvil.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Es breve el tiempo de colisión, así que puede imaginarse que el automóvil se lleva al reposo muy rápidamente y después se mueve de regreso en la dirección opuesta con una rapidez reducida.

Categorizar Suponga que la fuerza neta ejercida por la pared y la fricción del suelo en el automóvil es grande comparada con otras fuerzas sobre el auto (como la resistencia del aire). Además, la fuerza gravitacional y la fuerza normal ejercida por el camino sobre el automóvil son perpendiculares al movimiento y por tanto no afectan la cantidad de movimiento horizontal. Entonces, el problema se clasifica como uno en el que se puede aplicar la aproximación del impulso en la dirección horizontal. También se observa que la cantidad de movimiento del automóvil cambia debido a un impulso proveniente del entorno. En consecuencia, puede aplicarse el modelo de *sistema no aislado* (cantidad de movimiento) para modelar el sistema del automóvil.

Analizar

Utilice la ecuación 9.13 para encontrar el impulso del automóvil:

$$\begin{aligned}\vec{I} &= \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i) \\ &= (1\,500\text{ kg})[2.60\hat{i}\text{ m/s} - (-15.0\hat{i}\text{ m/s})] = 2.64 \times 10^4\hat{i}\text{ kg} \cdot \text{m/s}\end{aligned}$$

Aplique la ecuación 9.11 para evaluar la fuerza neta promedio ejercida en el auto:

$$\left(\sum \vec{F}\right)_{\text{avg}} = \frac{\vec{I}}{\Delta t} = \frac{2.64 \times 10^4\hat{i}\text{ kg} \cdot \text{m/s}}{0.150\text{ s}} = 1.76 \times 10^5\hat{i}\text{ N}$$

Finalizar La fuerza neta obtenida es una combinación de la fuerza normal sobre el automóvil ejercida por la pared y de la fuerza de fricción entre las llantas y el suelo conforme se destruye el frente del auto. Si los frenos no funcionan durante el choque y el metal deformado no interfiere con la libre rotación de las llantas, esta fuerza de fricción sería relativamente pequeña debida a las ruedas que giran libremente. Note que los signos de las velocidades en este ejemplo indican la inversión de direcciones. ¿Qué sería lo que las matemáticas describen si las velocidades inicial y final tienen el mismo signo?

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si el automóvil no rebota de la pared? Suponga que la velocidad final del auto es cero y que el intervalo de tiempo de la colisión permanece en 0.150 s. ¿Esto representaría una fuerza neta mayor o menor ejercida en el automóvil?

Respuesta En la situación original en la que el auto rebota, la fuerza neta en el auto hace dos cosas durante el intervalo de tiempo: 1) detiene el automóvil y 2) hace que el auto se aleje de la pared a 2.60 m/s después de la colisión. Si el automóvil no rebota, la fuerza neta sólo hace el primero de estos pasos, parar el auto, lo cual requiere una fuerza *más pequeña*.

En términos matemáticos, en el caso del auto que no rebota, el impulso es

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = 0 - (1\,500\text{ kg})(-15.0\hat{i}\text{ m/s}) = 2.25 \times 10^4\hat{i}\text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

La fuerza neta promedio ejercida en el automóvil es

$$\left(\sum \vec{F}\right)_{\text{prom}} = \frac{\vec{I}}{\Delta t} = \frac{2.25 \times 10^4\hat{i}\text{ kg} \cdot \text{m/s}}{0.150\text{ s}} = 1.50 \times 10^5\hat{i}\text{ N}$$

que de hecho es más pequeña que el valor previamente calculado, como se argumentó conceptualmente.

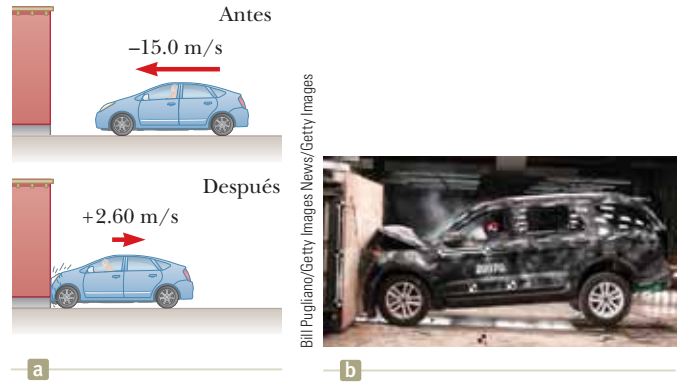


Figura 9.5 (Ejemplo 9.3) (a) La cantidad de movimiento del automóvil cambia como resultado de su colisión con la pared. (b) En una prueba de choque, mucha de la energía cinética inicial del automóvil se transforma en energía asociada con el daño al auto.

9.4 Colisiones en una dimensión

En esta sección, se emplea el modelo de sistema aislado (cantidad de movimiento) para describir lo que ocurre cuando colisionan dos partículas. El término **colisión** representa un evento durante el cual dos partículas se acercan entre sí e interactúan mediante fuer-

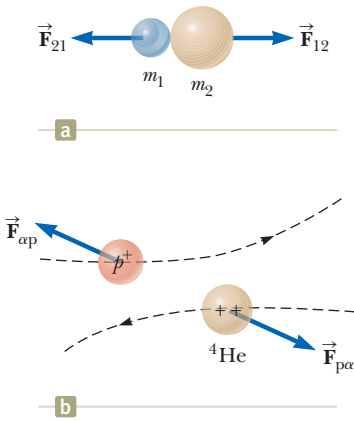
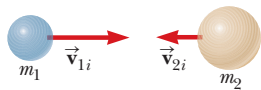


Figura 9.6 (a) Colisión entre dos objetos como resultado de contacto directo. (b) “Colisión” entre dos partículas con carga.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 9.2

Colisiones inelásticas Por lo general, las colisiones inelásticas son difíciles de analizar sin información adicional. La falta de esta información aparece en la representación matemática con más incógnitas que ecuaciones.

Antes de la colisión, las partículas se mueven por separado.



Después de la colisión, las partículas se mueven juntas.

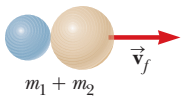


Figura 9.7 Representación esquemática de una colisión frontal perfectamente inelástica entre dos partículas.

zas. Se supone que las fuerzas de interacción son mucho mayores que cualesquiera otras fuerzas externas presentes, así puede utilizar la aproximación del impulso.

Una colisión puede involucrar contacto físico entre dos objetos macroscópicos, como se describe en la figura 9.6a, pero la idea de lo que significa una colisión se debe ampliar porque “contacto físico” en una escala submicroscópica está mal definido y por tanto carece de significado. Para comprender este concepto, considere una colisión a escala atómica (figura 9.6b) como la colisión de un protón con una partícula alfa (el núcleo de un átomo de helio). Ya que las partículas tienen carga positiva, se repelen mutuamente debido a la intensa fuerza electrostática entre ellas en separaciones cercanas y nunca entran en “contacto físico”.

Cuando dos partículas de masas m_1 y m_2 colisionan como se muestra en la figura 9.6, las fuerzas impulsivas pueden variar en el tiempo en formas complicadas, como las que se indican en la figura 9.3. Sin embargo, sin importar la complejidad del comportamiento temporal de la fuerza impulsiva, esta fuerza es interna al sistema de dos partículas. Por tanto, las dos partículas forman un sistema aislado y la cantidad de movimiento del sistema se debe conservar en *cualquier* colisión.

En cambio, la energía cinética total del sistema de partículas puede o no conservarse, dependiendo del tipo de colisión. En efecto, las colisiones se categorizan como *elásticas* o *inelásticas*, en función de si la energía cinética se conserva o no.

Una **colisión elástica** entre dos objetos es aquella en donde la energía cinética total (así como la cantidad de movimiento total) del sistema es la misma antes y después de la colisión. Las colisiones entre ciertos objetos en el mundo macroscópico, como las bolas de billar, sólo son *aproximadamente* elásticas porque tiene lugar alguna deformación y pérdida de energía cinética. Por ejemplo, usted puede escuchar la colisión de una bola de billar, de modo que usted sabe que parte de la energía se transfiere del sistema mediante sonido. ¡Una colisión elástica debe ser perfectamente silenciosa! Las colisiones *verdaderamente* elásticas se presentan entre partículas atómicas y subatómicas. Esas colisiones se describen mediante el modelo de sistema aislado tanto para energía como para la cantidad de movimiento.

En una **colisión inelástica** la energía cinética total del sistema no es la misma antes y después de la colisión (aun cuando la cantidad de movimiento del sistema se conserve). Las colisiones inelásticas son de dos tipos. Cuando los objetos se unen después de chocar, como ocurre cuando un meteorito colisiona con la Tierra, la colisión se llama **perfectamente inelástica**. Cuando los objetos en colisión no se unen, pero parte de la energía cinética se transforma o se transfiere, como en el caso de una bola de hule que choca con una superficie dura, la colisión se llama **inelástica** (sin adverbio modificador). La colisión de una bola de caucho que rebota en una superficie dura es inelástica, pero no perfectamente inelástica, porque la bola no se queda pegada a la superficie. No es elástica porque algo de la energía cinética inicial de la bola se ha transformado en energía interna de la bola y la superficie cuando la bola se deforma durante el intervalo del tiempo de contacto.

En el resto de esta sección, investigamos los detalles matemáticos de las colisiones en una dimensión y consideramos los dos casos extremos, colisiones perfectamente inelástica y elástica.

Colisiones perfectamente inelásticas

Considere dos partículas de masas m_1 y m_2 que se mueven con velocidades iniciales \vec{v}_{1i} y \vec{v}_{2i} a lo largo de la misma línea recta, como se muestra en la figura 9.7. Las dos partículas colisionan de frente, quedan unidas, y luego se mueven con alguna velocidad común \vec{v}_f después de la colisión. Ya que la cantidad de movimiento de un sistema aislado se conserva en *cualquier* colisión, se puede decir que la cantidad de movimiento total antes de la colisión es igual a la cantidad de movimiento total del sistema compuesto después de la colisión:

$$\Delta \vec{p} = 0 \rightarrow \vec{p}_i = \vec{p}_f \rightarrow m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2) \vec{v}_f \quad (9.14)$$

Al despejar la velocidad final se obtiene

$$\vec{v}_f = \frac{m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i}}{m_1 + m_2} \quad (9.15)$$

Colisiones elásticas

Considere dos partículas de masas m_1 y m_2 que se mueven con velocidades iniciales \vec{v}_{1i} y \vec{v}_{2i} a lo largo de la misma línea recta, como se muestra en la figura 9.8. Las dos partículas chocan frontalmente y luego dejan el sitio de colisión con diferentes velocidades \vec{v}_{1f} y \vec{v}_{2f} . En una colisión elástica, tanto la cantidad de movimiento como la energía cinética del sistema se conservan. Por tanto, al considerar velocidades a lo largo de la dirección horizontal en la figura 9.8, se tiene

$$p_i = p_f \quad \text{S} \quad m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (9.16)$$

$$K_i = K_f \quad \text{S} \quad \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (9.17)$$

Ya que todas las velocidades en la figura 9.8 son hacia la izquierda o hacia la derecha, se pueden representar mediante las correspondientes magnitudes de velocidad junto con los signos algebraicos que indican dirección. Se indicará v como positiva si una partícula se mueve hacia la derecha y negativa si se mueve hacia la izquierda.

En un problema típico que incluye colisiones elásticas, existen dos cantidades desconocidas, y las ecuaciones 9.16 y 9.17 se pueden resolver simultáneamente para encontrarlas. Sin embargo, un método alternativo, uno que involucra un poco de manipulación matemática de la ecuación 9.17, con frecuencia simplifica este proceso. Para ver cómo, elimine el factor $\frac{1}{2}$ en la ecuación 9.17 y rescribala agrupando a la izquierda los términos con subíndice 1 y a la derecha los que tengan subíndice 2:

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

La factorización de ambos lados de esta ecuación da

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i}) \quad (9.18)$$

Luego se separan los términos que contienen a m_1 y m_2 en la ecuación 9.16 para obtener

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \quad (9.19)$$

Para obtener el resultado final, se divide la ecuación 9.18 entre la ecuación 9.19

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

Ahora se arreglan los términos colocando las cantidades iniciales a la izquierda y las finales a la derecha:

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}) \quad (9.20)$$

Esta ecuación, en combinación con la ecuación 9.16, se emplea para resolver problemas que traten con colisiones elásticas. Este par de ecuaciones (ecuaciones 9.16 y 9.20) es más fácil de manejar que el par de ecuaciones 9.16 y 9.17 porque no hay términos cuadráticos como en la ecuación 9.17. De acuerdo con la ecuación 9.20, la velocidad *relativa* de las dos partículas antes de la colisión, $v_{1i} - v_{2i}$, es igual al negativo de su velocidad relativa después de la colisión, $-(v_{1f} - v_{2f})$.

Suponga que se conocen las masas y velocidades iniciales de ambas partículas. Las ecuaciones 9.16 y 9.20 se pueden resolver para las velocidades finales en términos de las velocidades iniciales porque existen dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \quad (9.21)$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \quad (9.22)$$

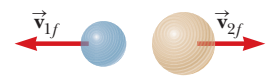
Es importante utilizar los signos apropiados para v_{1i} y v_{2i} en las ecuaciones 9.21 y 9.22.

Antes de la colisión, las partículas se mueven por separado.



a

Después de la colisión, las partículas continúan moviéndose por separado con nuevas velocidades.



b

Figura 9.8 Representación esquemática de una colisión frontal elástica entre dos partículas.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 9.3

No es una ecuación general La ecuación 9.20 sólo se puede usar en una situación muy *específica*, una colisión elástica unidimensional entre dos objetos. El concepto *general* es la conservación de la cantidad de movimiento (y la conservación de la energía cinética si la colisión es elástica) para un sistema aislado.



Considere algunos casos especiales. Si $m_1 = m_2$, las ecuaciones 9.21 y 9.22 muestran que $v_{1f} = v_{2i}$ y $v_{2f} = v_{1i}$, lo cual significa que las partículas intercambian velocidades si tienen masas iguales. Esto es aproximadamente lo que uno observa en las colisiones frontales de las bolas de billar: la bola blanca se detiene y la bola golpeada se aleja de la colisión con la misma velocidad que tenía la bola blanca.

Si la partícula 2 está inicialmente en reposo, entonces $v_{2i} = 0$, y las ecuaciones 9.21 y 9.22 se convierten en

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \quad (9.21)$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \quad (9.22)$$

Colisión elástica: partícula 2 inicialmente en reposo ▶

Si m_1 es mucho mayor que m_2 y $v_{2i} = 0$, se ve de las ecuaciones 9.23 y 9.24 que $v_{1f} \approx v_{1i}$ y $v_{2f} \approx v_{1i}$. Es decir, cuando una partícula muy pesada colisiona frontalmente con una muy ligera que inicialmente está en reposo, la partícula pesada continúa su movimiento sin alterarse después de la colisión y la partícula ligera rebota con una rapidez igual a casi el doble de la rapidez inicial de la partícula pesada. Un ejemplo de tal colisión es la de un átomo pesado en movimiento, como el uranio, que golpea un átomo ligero, como el hidrógeno.

Si m_2 es mucho mayor que m_1 y la partícula 2 inicialmente está en reposo, entonces $v_{1f} \approx -v_{1i}$ y $v_{2f} \approx 0$. Es decir, cuando una partícula muy ligera colisiona frontalmente con una partícula muy pesada que inicialmente está en reposo, la partícula ligera invierte su velocidad y la pesada permanece prácticamente en reposo. Por ejemplo, piense qué ocurre cuando se lanza una pelota de ping pong contra una bola de boliche como en el examen rápido 9.6.

E XAMEN RÁPIDO 9.5 En una colisión en una dimensión perfectamente inelástica entre dos objetos en movimiento, ¿qué condición única es necesaria de modo que la energía cinética final del sistema sea cero después de la colisión? (a) Los objetos deben tener cantidades de movimiento iniciales con la misma magnitud pero direcciones opuestas. (b) Los objetos deben tener la misma masa. (c) Los objetos deben tener la misma velocidad inicial. (d) Los objetos deben tener la misma rapidez inicial, con vectores velocidad en direcciones opuestas.

E XAMEN RÁPIDO 9.6 Una pelota de ping pong se lanza hacia una bola de boliche fija. La bola de ping pong hace una colisión elástica unidimensional y rebota de regreso a lo largo de la misma línea. En comparación con la bola de boliche después de la colisión, ¿la pelota de ping pong tiene (a) una magnitud mayor de cantidad de movimiento y más energía cinética, (b) una magnitud menor de cantidad de movimiento y más energía cinética, (c) una magnitud mayor de cantidad de movimiento y menos energía cinética, (d) una magnitud menor de cantidad de movimiento y menos energía cinética o (e) la misma magnitud de cantidad de movimiento y la misma energía cinética?

ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Colisiones en una dimensión

Debe aplicar el planteamiento siguiente cuando resuelva problemas de colisiones en una dimensión:

- 1. Conceptualizar.** Imagine que la colisión ocurre en su mente. Dibuje diagramas simples de las partículas antes y después de la colisión e incluya vectores velocidad apropiados. Al principio, es posible que deba sugerir las direcciones de los vectores velocidad finales.
- 2. Categorizar.** ¿El sistema de partículas es aislado? Si es así, utilice el modelo de sistema aislado (cantidad de movimiento). Clasifique la colisión como elástica, inelástica o perfectamente inelástica.
- 3. Analizar.** Establezca la representación matemática adecuada para el problema. Si la colisión es perfectamente inelástica, use la ecuación 9.15. Si la colisión es elástica, aplique las ecuaciones 9.16 y 9.20. Si la colisión es inelástica, utilice la ecuación 9.16. Para encontrar las velocidades finales en este caso, necesitará alguna información adicional.
- 4. Finalizar.** Una vez que determine su resultado, compruebe si sus respuestas son congruentes con las representaciones mental y gráfica, y que sus resultados sean realistas.

Ejemplo 9.4 Liberador de estrés para ejecutivos

En la figura 9.9a se muestra un ingenioso dispositivo que ilustra la conservación de la cantidad de movimiento y la energía cinética. Consiste de cinco bolas duras idénticas sostenidas por cuerdas de iguales longitudes. Cuando la bola 1 se retira y se libera, después de la colisión casi elástica entre ella y la bola 2, la bola 1 se detiene y la bola 5 se mueve hacia afuera, como se muestra en la figura 9.9b. Si las bolas 1 y 2 se retiran y liberan, se detienen después de la colisión y las bolas 4 y 5 se balancean hacia afuera, y así sucesivamente. ¿Alguna vez es posible que, cuando se libere la bola 1, se detenga después de la colisión y las bolas 4 y 5 se balanceen en el lado opuesto y viajen con la mitad de la rapidez de la bola 1, como en la figura 9.9c?

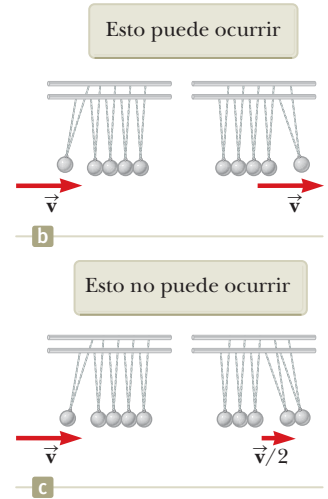


Figura 9.9 (Ejemplo 9.4) (a) Un liberador de estrés para ejecutivos. (b) Si una bola se impulsa a la izquierda, se ve que una bola se aleja en el otro extremo. (c) ¿Es posible que una bola se impulse a la izquierda y dos bolas dejen el otro extremo con la mitad de la rapidez de la primera bola? En (b) y (c), los vectores de velocidad que se muestran representan los de las bolas inmediatamente antes y después de la colisión.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Con la ayuda de la figura 9.9c, imagine que una bola llega desde la izquierda y dos bolas salen de la colisión a la derecha. Este es el fenómeno que se quiere probar para ver si podría ocurrir alguna vez.

Categorizar Debido al intervalo de tiempo muy breve entre la llegada de la bola desde la izquierda y la partida de las bolas de la derecha, se puede usar la aproximación de impulso para ignorar las fuerzas gravitacionales sobre las bolas y modelar las cinco bolas como un *sistema aislado* en términos de cantidad de movimiento y energía. Como las bolas son duras, las colisiones entre ellas se clasifican como elásticas para propósitos de cálculo.

Analizar Considere la situación que se muestra en la figura 9.9c. La cantidad de movimiento del sistema antes de la colisión es mv , donde m es la masa de la bola 1 y v es su rapidez inmediatamente antes de la colisión. Después de la colisión, se supone que la bola 1 se detiene y las bolas 4 y 5 se alejan, cada una con rapidez $v/2$. La cantidad de movimiento total del sistema después de la colisión sería $m(v/2) + m(v/2) = mv$. Por

Finalizar El análisis muestra que no es posible que las bolas 4 y 5 se balanceen cuando sólo se libera la bola 1. La única forma de conservar tanto la cantidad de movimiento como la energía cinética del sistema es que una bola se mueva cuando una bola se libera, dos bolas se muevan cuando dos se liberan, y así sucesivamente. Se puede aplicar un análisis similar a la colisión de la bola de billar en el “Imagine”. En ese caso, hay

¿QUÉ PASARÍA SI? Considere lo que ocurriría si las bolas 4 y 5 se unen con pegamento. ¿Qué ocurre ahora cuando la bola 1 se aleja y se libera?

Respuesta En esta situación, las bolas 4 y 5 *deben* moverse juntas como un solo objeto después de la colisión. Se argumentó que, en este caso, la cantidad de movimiento y energía del sistema no se pueden conservar. Sin embargo, se supone que la bola 1 se detiene después de golpear la bola 2. ¿Y si no se hace esta suposición? Considere las ecuaciones de conservación con la suposición de que la bola 1 se mueve después de la colisión. Por conservación de cantidad de movimiento

$$\begin{aligned} p_i &= p_f \\ mv_{1i} &= mv_{1f} + 2mv_{4,5} \end{aligned}$$

donde $v_{4,5}$ se refiere a la rapidez final de la combinación bola 4-bola 5. La conservación de la energía cinética da

$$\begin{aligned} K_i &= K_f \\ \frac{1}{2}mv_{1i}^2 &= \frac{1}{2}mv_{1f}^2 + \frac{1}{2}(2m)v_{4,5}^2 \end{aligned}$$

continúa

9.4 continuación

Al combinar estas ecuaciones se obtiene

$$v_{4,5} = \frac{2}{3}v_{1i} \quad v_{1f} = -\frac{1}{3}v_{1i}$$

Por tanto, las bolas 4 y 5 se mueven juntas como un objeto después de la colisión mientras que la bola 1 rebota en la colisión con un tercio de su rapidez original.

Ejemplo 9.5 ¡Lleve seguro contra choques!

A un automóvil de 1 800 kg detenido en un semáforo lo golpea por la parte trasera un automóvil de 900 kg. Los dos autos quedan unidos y se mueven a lo largo de la misma trayectoria que la del automóvil en movimiento. Si el auto más pequeño se movía a 20.0 m/s antes de la colisión, ¿cuál es la velocidad de los automóviles unidos después de la colisión?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Este tipo de colisión se visualiza con facilidad, y se puede predecir que, después de la colisión, ambos automóviles se moverán en la misma dirección que la del auto en movimiento. Como el automóvil en movimiento sólo tiene la mitad de masa que el auto fijo, se espera que la velocidad final de los automóviles sea relativamente pequeña.

Categorizar Identifique a los dos autos como un *sistema aislado* en términos de la *cantidad de movimiento* en la dirección horizontal y aplique la aproximación del impulso durante el breve intervalo de tiempo de la colisión. La frase “quedan unidos” pide clasificar la colisión como perfectamente inelástica.

Analizar La magnitud de la cantidad de movimiento total del sistema antes de la colisión es igual a la del automóvil más pequeño porque el auto más grande inicialmente está en reposo.

Utilice el modelo de sistema aislado para la cantidad de movimiento:

$$\Delta \vec{p} = 0 \rightarrow p_i = p_f \rightarrow m_1 v_i = (m_1 + m_2) v_f$$

Despeje v_f y sustituya valores numéricos:

$$v_f = \frac{m_1 v_i}{m_1 + m_2} = \frac{(900 \text{ kg})(20.0 \text{ m/s})}{900 \text{ kg} + 1\,800 \text{ kg}} = 6.67 \text{ m/s}$$

Finalizar Ya que la velocidad final es positiva, la dirección de la velocidad final de la combinación es la misma que la velocidad del automóvil en movimiento, como se predijo. La rapidez de la combinación también es mucho menor que la rapidez inicial del auto en movimiento.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que se invierten las masas de los automóviles. ¿Y si un auto de 1 800 kg en movimiento golpea a un automóvil fijo de 900 kg? ¿La rapidez final es la misma que antes?

Respuesta Por intuición, se supone que la rapidez final de la combinación es mayor que 6.67 m/s si el automóvil en movimiento es el auto más grande. Matemáticamente, ese debe ser el caso porque el sistema tiene una cantidad de movimiento más grande si el automóvil en movimiento es el más masivo. Al resolver para la nueva velocidad final, se encuentra

$$v_f = \frac{m_1 v_i}{m_1 + m_2} = \frac{(1\,800 \text{ kg})(20.0 \text{ m/s})}{1\,800 \text{ kg} + 900 \text{ kg}} = 13.3 \text{ m/s}$$

que es dos veces más grande que la velocidad final previa.

Ejemplo 9.6 El péndulo balístico

El péndulo balístico (figura 9.10) es un aparato que se emplea para medir la rapidez de un proyectil que se mueve rápidamente, como una bala. Un proyectil de masa m_1 se dispara hacia un gran bloque de madera de masa m_2 suspendido de unos alambres ligeros. El proyectil se incrusta en el bloque y todo el sistema se balancea hasta una altura h . ¿Cómo se determina la rapidez del proyectil a partir de una medición de h ?

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 9.10a ayuda a conceptualizar la situación. Corra la animación en su mente: el proyectil entra al péndulo, que se balancea a cierta altura en la cual está momentáneamente en reposo.



9.6 continuación

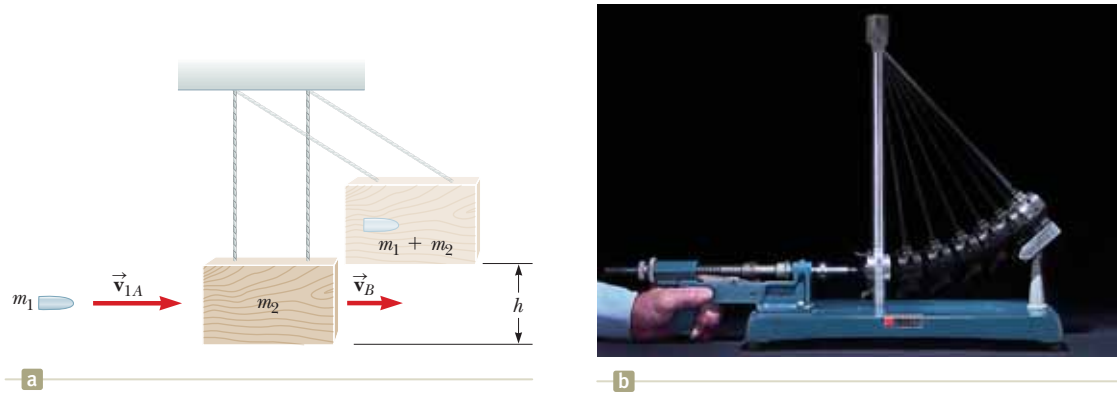


Figura 9.10 (Ejemplo 9.6) (a) Diagrama de un péndulo balístico. Note que \vec{v}_{1A} es la velocidad del proyectil inmediatamente antes de la colisión y \vec{v}_B es la velocidad del sistema proyectil-bloque inmediatamente después de la colisión perfectamente inelástica. (b) Fotografía estroboscópica de un péndulo balístico empleado en el laboratorio.

Categorizar El proyectil y el bloque forman un *sistema aislado* en términos de la cantidad de movimiento si se identifica la configuración A como inmediatamente antes de la colisión y la configuración B como inmediatamente después de la colisión. Ya que el proyectil se incrusta en el bloque, la colisión entre ellos se considera como perfectamente inelástica.

Analizar Para analizar la colisión, utilice la ecuación 9.15, que da la rapidez del sistema inmediatamente después de la colisión cuando se considera la aproximación del impulso.

Advierta que $v_{2A} = 0$, resuelva la ecuación 9.15 para v_B :

$$(1) \quad v_B = \frac{m_1 v_{1A}}{m_1 + m_2}$$

Categorizar Para el proceso donde la combinación proyectil-bloque se balancea hacia arriba a una altura h (y termina en la configuración C), considere un sistema *diferente*, el del proyectil, el bloque y la Tierra. Esta parte del problema se clasifica como un *sistema aislado* para *energía* sin fuerzas no conservativas actuando.

Analizar Escriba una expresión para la energía cinética total del sistema inmediatamente después de la colisión:

$$(2) \quad K_B = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_B^2$$

Sustituya el valor de v_B de la ecuación (1) en la ecuación (2):

$$K_B = \frac{m_1^2 v_{1A}^2}{2(m_1 + m_2)}$$

Esta energía cinética del sistema inmediatamente después de la colisión es *menor* que la energía cinética inicial del proyectil, como se esperaba en una colisión inelástica.

La energía potencial gravitacional del sistema se define como cero para la configuración B. Por tanto, $U_B = 0$, mientras que $U_C = (m_1 + m_2)gh$.

Aplique el modelo de sistema aislado para energía (ecuación 8.2) al sistema:

$$\Delta K + \Delta U = 0 \rightarrow (K_C - K_B) + (U_C - U_B) = 0$$

Sustituya las energías:

$$\left[0 - \frac{m_1^2 v_{1A}^2}{2(m_1 + m_2)} \right] + [(m_1 + m_2)gh - 0] = 0$$

Despeje v_{1A} :

$$v_{1A} = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right) \sqrt{2gh}$$

Finalizar Este problema tuvo que resolverse en dos etapas. Cada etapa involucró un sistema diferente y un distinto modelo de análisis: sistema aislado (cantidad de movimiento) para la primera etapa y sistema aislado (energía) para la segunda. Ya que la colisión se considera perfectamente inelástica, algo de la energía mecánica se transformó en energía interna durante la colisión. Así, hubiera sido *incorrecto* aplicar el modelo de sistema aislado (energía) a todo el proceso al igualar la energía cinética inicial del proyectil que entra con la energía potencial gravitacional final de la combinación proyectil-bloque-Tierra.



Ejemplo 9.7 Una colisión de dos cuerpos con un resorte

Un bloque de masa $m_1 = 1.60$ kg inicialmente móvil hacia la derecha con una rapidez de 4.00 m/s sobre una pista horizontal sin fricción, choca con un resorte unido a un segundo bloque de masa $m_2 = 2.10$ kg que inicialmente se mueve hacia la izquierda con una rapidez de 2.50 m/s, como se muestra en la figura 9.11a. La constante elástica es 600 N/m.

(A) Encuentre las velocidades de los dos bloques cuando se muevan una vez más por separado, después de la colisión.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Con ayuda de la figura 9.11a, imagine una animación de la colisión. La figura 9.11b muestra un instante durante la colisión, cuando se comprime el resorte. Eventualmente, el bloque 1 y el resorte se separarán de nuevo, así el sistema se parecerá otra vez a la figura 9.11a, pero con diferentes vectores velocidad para los dos bloques.

Categorizar Ya que la fuerza del resorte es conservativa, la energía cinética en el sistema de dos bloques y el resorte no se transforma en energía interna durante la compresión del resorte. Si ignora cualquier sonido generado cuando el bloque golpea el resorte, clasifique la colisión como elástica con los dos bloques y el resorte como un *sistema aislado* para la *energía* y para la *cantidad de movimiento*.

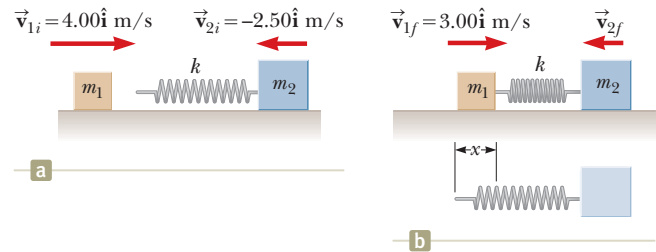


Figura 9.11 (Ejemplo 9.7) Un bloque en movimiento se aproxima a un segundo bloque en movimiento que está unido a un resorte.

Analizar Como la cantidad de movimiento del sistema se conserva, aplique la ecuación 9.16:

$$(1) \quad m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Puesto que la colisión es elástica, aplique la ecuación 9.20:

$$(2) \quad v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$$

Multiplique la ecuación (2) por m_1 :

$$(3) \quad m_1 v_{1i} - m_1 v_{2i} = -m_1 v_{1f} + m_1 v_{2f}$$

Suma las ecuaciones (1) y (3):

$$2m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1) v_{2i} = (m_1 + m_2) v_{2f}$$

Despeje v_{2f} :

$$v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1) v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

Sustituya valores numéricos:

$$v_{2f} = \frac{2(1.60 \text{ kg})(4.00 \text{ m/s}) + (2.10 \text{ kg} - 1.60 \text{ kg})(-2.50 \text{ m/s})}{1.60 \text{ kg} + 2.10 \text{ kg}} = 3.12 \text{ m/s}$$

Resuelva la ecuación (2) para v_{1f} y sustituya valores numéricos:

$$v_{1f} = v_{2f} - v_{1i} + v_{2i} = 3.12 \text{ m/s} - 4.00 \text{ m/s} + (-2.50 \text{ m/s}) = -3.38 \text{ m/s}$$

Finalizar Observe que ambos bloques han invertido la dirección debido a la colisión. También observen que no necesitábamos saber algo sobre el resorte para encontrar la respuesta en esta parte del problema. El resorte es sólo otro mecanismo de los dos bloques para ejercer fuerzas de igual magnitud y dirección opuesta entre sí, al igual que aquellos entre los objetos y las partículas se muestra en la figura 9.6.

(B) Determine la velocidad del bloque 2 durante la colisión, en el instante en que el bloque 1 se mueve hacia la derecha con una velocidad de $+3.00$ m/s, como en la figura 9.11b.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Concentre su atención en la figura 9.11b, que representa la configuración final del sistema al término del intervalo de tiempo de interés.

Categorizar La cantidad de movimiento y la energía mecánica del *sistema aislado* de dos bloques y el resorte se conservan durante la colisión, entonces ésta se clasifica como elástica para *cualquier* instante de tiempo final. Ahora elija el instante final cuando el bloque 1 se mueve con una velocidad de $+3.00$ m/s.



9.7 continuación

Analizar Aplique la ecuación 9.16:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

Despeje v_{2f} :

$$v_{2f} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} - m_1 v_{1f}}{m_2}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\begin{aligned} v_{2f} &= \frac{(1.60 \text{ kg})(4.00 \text{ m/s}) + (2.10 \text{ kg})(-2.50 \text{ m/s}) - (1.60 \text{ kg})(3.00 \text{ m/s})}{2.10 \text{ kg}} \\ &= -1.74 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Finalizar El valor negativo para v_{2f} significa que el bloque 2 todavía se mueve hacia la izquierda en el instante bajo consideración.

(C) Determine la distancia que se comprime el resorte en dicho instante.

SOLUCIÓN

Conceptualizar De nuevo, centre su atención en la configuración del sistema que se muestra en la figura 9.11b.

Categorizar Para el sistema del resorte y dos bloques, ni fricción ni otras fuerzas no conservativas actúan dentro del sistema. Por tanto, el sistema se clasifica como *sistema aislado* en términos de *energía* sin fuerzas no conservativas en acción. El sistema también permanece como *sistema aislado* en términos de *cantidad de movimiento*.

Analizar Elija la configuración inicial del sistema como la existente inmediatamente antes de que el bloque 1 golpee el resorte y la configuración final cuando el bloque 1 se mueve hacia la derecha a 3.00 m/s.

Escriba la apropiada reducción de la ecuación 8.2:

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

Evalúe las energías, notando que dos objetos en el sistema tienen energía cinética y que la energía potencial es elástica:

$$\left[\left(\frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2\right) - \left(\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2\right)\right] + \left(\frac{1}{2}kx^2 - 0\right) = 0$$

Despeje x^2 :

$$x^2 = \frac{1}{k} [m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) + m_2 (v_{2i}^2 - v_{2f}^2)]$$

Sustituya valores numéricos:

$$\begin{aligned} x^2 &= \left(\frac{1}{600 \text{ N/m}}\right) \{(1.60 \text{ kg})[(4.00 \text{ m/s})^2 - (3.00 \text{ m/s})^2] + (2.10 \text{ kg})[(2.50 \text{ m/s})^2 - (1.74 \text{ m/s})^2]\} \\ \rightarrow x &= 0.173 \text{ m} \end{aligned}$$

Finalizar Esta respuesta no es la compresión máxima del resorte ya que los dos bloques aún se mueven uno hacia el otro en el instante que se muestra en la figura 9.11b. ¿Se puede determinar la compresión máxima del resorte?

9.5 Colisiones en dos dimensiones

En la sección 9.2 se mostró que la cantidad de movimiento de un sistema de dos partículas se conserva cuando el sistema está aislado. Para cualquier colisión de dos partículas, este resultado implica que la cantidad de movimiento en cada una de las direcciones x , y y z se conserva. Un importante subconjunto de colisiones tiene lugar en un plano. El juego de billar es un ejemplo familiar que involucra múltiples colisiones de objetos que se mueven en una superficie en dos dimensiones. Para tales colisiones en dos dimensiones, se obtienen dos ecuaciones componentes para conservación de cantidad de movimiento.

$$m_1 v_{1ix} + m_2 v_{2ix} = m_1 v_{1fx} + m_2 v_{2fx}$$

$$m_1 v_{1iy} + m_2 v_{2iy} = m_1 v_{1fy} + m_2 v_{2fy}$$

donde los tres subíndices en las componentes de velocidad en estas ecuaciones representan, respectivamente, la identificación del objeto (1, 2), los valores inicial y final (i , f) y la componente de velocidad (x , y).



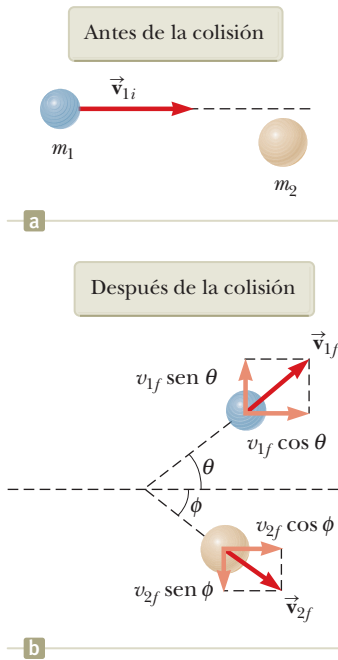


Figura 9.12 Una colisión elástica con ángulo entre dos partículas.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 9.4

No use la ecuación 9.20 La ecuación 9.20, que relaciona las velocidades relativas inicial y final de dos objetos que colisionan, sólo es válida para colisiones elásticas en una dimensión. No utilice esta ecuación cuando estudie colisiones en dos dimensiones.

Considere un problema en dos dimensiones específico en donde la partícula 1 de masa m_1 colisiona con la partícula 2 de masa m_2 inicialmente en reposo, como en la figura 9.12a. Después de la colisión (figura 9.12b), la partícula 1 se mueve en un ángulo θ respecto a la horizontal y la partícula 2 se desplaza en un ángulo ϕ respecto a la horizontal. Este evento se llama colisión *oblicua*. Al aplicar la ley de conservación de la cantidad de movimiento en forma de componentes y notar que la componente y inicial de la cantidad de movimiento del sistema de dos partículas es cero, se obtiene

$$\Delta p_x = 0 \rightarrow p_{ix} = p_{fx} \rightarrow m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta + m_2 v_{2f} \cos \phi \quad (9.25)$$

$$\Delta p_y = 0 \rightarrow p_{iy} = p_{fy} \rightarrow 0 = m_1 v_{1f} \sin \theta - m_2 v_{2f} \sin \phi \quad (9.26)$$

donde el signo menos en la ecuación 9.26 se incluye porque, después de la colisión, la partícula 2 tiene una componente y de velocidad que es hacia abajo. (Los símbolos v en estas ecuaciones particulares son magnitudes de velocidad, no componentes de velocidad. La dirección del vector componente se indica explícitamente con los signos más o menos.) Ahora se tienen dos ecuaciones independientes. Ya que no más de dos de las siete cantidades en las ecuaciones 9.25 y 9.26 son incógnitas, se puede resolver este problema.

Si la colisión es elástica, también se puede usar la ecuación 9.27 (conservación de energía cinética) con $v_{2i} = 0$:

$$K_i = K_f \rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (9.27)$$

Al conocer la rapidez inicial de la partícula 1 y ambas masas, quedan cuatro incógnitas (v_{1f} , v_{2f} , θ y ϕ). Como sólo se tienen tres ecuaciones, entonces se debe proporcionar una de las cuatro cantidades restantes para determinar el movimiento, después de la colisión elástica, a partir sólo de principios de conservación.

Si la colisión es inelástica, la energía cinética *no* se conserva y la ecuación 9.27 *no* se aplica. ¡Entonces tenemos cuatro incógnitas y sólo dos ecuaciones!

ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Colisiones en dos dimensiones

Se recomienda el procedimiento siguiente cuando trate con problemas que involucran colisiones entre dos partículas en dos dimensiones.

1. Conceptualizar. Imagine las colisiones en proceso para predecir las direcciones aproximadas en las que se moverán las partículas después de la colisión. Establezca un sistema coordenado y defina sus velocidades en términos de dicho sistema. Es conveniente que el eje x coincida con una de las velocidades iniciales. Trace el sistema coordenado, dibuje y etiquete todos los vectores velocidad e incluya toda la información dada.

2. Categorizar. ¿El sistema de partículas verdaderamente está aislado? Si es así, clasifique la colisión como elástica, inelástica o perfectamente inelástica.

3. Analizar. Escriba expresiones para las componentes x y y de la cantidad de movimiento de cada objeto antes y después de la colisión. Recuerde incluir los signos apropiados para las componentes de los vectores velocidad y ponga mucha atención a los signos durante el cálculo.

Aplique el modelo de sistema aislado para la cantidad de movimiento $\Delta \vec{p} = 0$. Cuando se aplica en cada dirección, en general esta ecuación se reducirá a $p_{ix} = p_{fx}$ y $p_{iy} = p_{fy}$, donde cada uno de esos términos se refiere a la suma de las cantidades de movimiento de todos los objetos en el sistema. Escriba expresiones para la cantidad de movimiento *total* en la dirección x *antes* y *después* de la colisión, e iguale las dos. Repita este procedimiento para la cantidad de movimiento total en la dirección y .

Proceda a resolver las ecuaciones de cantidad de movimiento para las cantidades desconocidas. Si la colisión es inelástica, la energía cinética no se conserva y es posible que se requiera información adicional. Si la colisión es perfectamente inelástica, las velocidades finales de los dos objetos son iguales.

Si la colisión es elástica, la energía cinética se conserva y se puede igualar la energía cinética total del sistema antes de la colisión con la energía cinética total después de la colisión, lo que proporciona una relación adicional entre las magnitudes de velocidad.

4. Finalizar. Una vez que haya determinado su resultado, compruebe para ver si sus respuestas son consistentes con las representaciones mental y gráfica, y que sus resultados sean realistas.

Ejemplo 9.8 Colisión en un cruce

Un automóvil de 1 500 kg, que viaja al este con una rapidez de 25.0 m/s, colisiona en un cruce con una camioneta de 2 500 kg que viaja al norte con una rapidez de 20.0 m/s, como se muestra en la figura 9.13. Encuentre la dirección y magnitud de la velocidad de los restos después de la colisión, y suponga que los vehículos quedan unidos después del choque.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 9.13 debe ayudarlo a conceptualizar de la situación antes y después de la colisión. Elija el este a lo largo de la dirección x positiva y el norte a lo largo de la dirección y positiva.

Categorizar Se consideran las cantidades de movimiento inmediatamente antes y después de la colisión definen nuestro intervalo de tiempo, ignore el pequeño efecto que la fricción tendría en las llantas de los vehículos y el sistema de dos autos se modela como *aislado* en términos de *cantidad de movimiento*. También se ignoran los tamaños de los automóviles y se les modela como partículas. La colisión es perfectamente inelástica porque los dos autos quedan unidos después de la colisión.

Analizar Antes de la colisión, el único objeto que tiene cantidad de movimiento en la dirección x es el automóvil. Por tanto, la magnitud de la cantidad de movimiento inicial total del sistema (auto más camioneta) en la dirección x sólo es la del automóvil. Similarmente, la cantidad de movimiento inicial total del sistema en la dirección y corresponde a la camioneta. Después de la colisión, suponga que los restos se mueven a un ángulo θ respecto al eje x y con rapidez v_f .

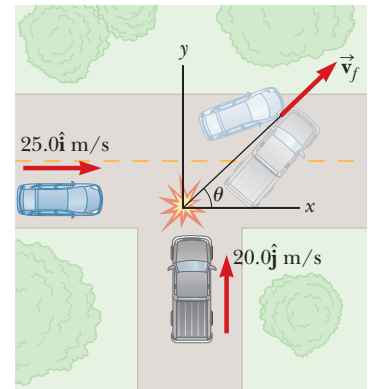


Figura 9.13 (Ejemplo 9.8) Un automóvil que viaja hacia el este choca con una camioneta que viaja hacia el norte.

Aplique el modelo de sistema aislado para la cantidad de movimiento en la dirección x :

$$\Delta p_x = 0 \rightarrow \sum p_{xi} = \sum p_{xf} \rightarrow (1) \quad m_1 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_f \cos \theta$$

Aplique el modelo de sistema aislado para la cantidad de movimiento en la dirección y :

$$\Delta p_y = 0 \rightarrow \sum p_{yi} = \sum p_{yf} \rightarrow (2) \quad m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f \sin \theta$$

Divida la ecuación (2) entre la ecuación (1):

$$\frac{m_2 v_{2i}}{m_1 v_{1i}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

Despeje θ y sustituya valores numéricos:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{m_2 v_{2i}}{m_1 v_{1i}} \right) = \tan^{-1} \left[\frac{(2\,500 \text{ kg})(20.0 \text{ m/s})}{(1\,500 \text{ kg})(25.0 \text{ m/s})} \right] = 53.1^\circ$$

Utilice la ecuación (2) para encontrar el valor de v_f y sustituya valores numéricos:

$$v_f = \frac{m_2 v_{2i}}{(m_1 + m_2) \sin \theta} = \frac{(2\,500 \text{ kg})(20.0 \text{ m/s})}{(1\,500 \text{ kg} + 2\,500 \text{ kg}) \sin 53.1^\circ} = 15.6 \text{ m/s}$$

Finalizar Note que el ángulo θ está cualitativamente de acuerdo con la figura 9.12. También observe que la rapidez final de la combinación es menor que las magnitudes de velocidades iniciales de ambos autos. Este resultado es consistente con la energía cinética del sistema se reduce en una colisión inelástica. Puede ser útil dibujar los vectores cantidad de movimiento de cada vehículo antes de la colisión y de los dos vehículos juntos después de la colisión.

Ejemplo 9.9 Colisión protón-protón

Un protón choca elásticamente con otro protón que inicialmente está en reposo. El protón incidente tiene una rapidez inicial de 3.50×10^5 m/s y hace una colisión oblicua con el segundo protón, como en la figura 9.12. (En separaciones cercanas, los protones ejercen una fuerza electrostática repulsiva mutua.) Después de la colisión, un protón se aleja en un ángulo de 37.0° hacia la dirección de movimiento original y el segundo se desvía a un ángulo ϕ con el mismo eje. Encuentre las magnitudes de velocidad finales de los dos protones y el ángulo ϕ .

SOLUCIÓN

Conceptualizar Esta colisión es similar a la mostrada en la figura 9.12, la cual le ayudará a formar ideas del comportamiento del sistema. El eje x se define a lo largo de la dirección del vector velocidad del protón inicialmente en movimiento.

Categorizar El par de protones forma un *sistema aislado*. Tanto la cantidad de movimiento como la energía cinética del sistema se conservan en esta colisión elástica oblicua.

continúa

9.9 continuación

Analizar Utilice el modelo de sistema aislado para cantidad de movimiento y para energía de una colisión elástica en una dimensión, establezca la representación matemática mediante las ecuaciones 9.25 a la 9.27:

$$\begin{aligned}(1) \quad v_{1i} &= v_{1f} \cos \theta + v_{2f} \cos \phi \\(2) \quad 0 &= v_{1f} \sin \theta - v_{2f} \sin \phi \\(3) \quad v_{1i}^2 &= v_{1f}^2 + v_{2f}^2\end{aligned}$$

Reordene las ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{aligned}v_{2f} \cos \phi &= v_{1i} - v_{1f} \cos \theta \\v_{2f} \sin \phi &= v_{1f} \sin \theta\end{aligned}$$

Eleve al cuadrado estas dos ecuaciones y súmelas:

$$\begin{aligned}v_{2f}^2 \cos^2 \phi + v_{2f}^2 \sin^2 \phi &= \\v_{1i}^2 - 2v_{1i}v_{1f} \cos \theta + v_{1f}^2 \cos^2 \theta + v_{1f}^2 \sin^2 \theta &= \end{aligned}$$

Aplique que la suma de los cuadrados del seno y del coseno de cualquier ángulo es igual a 1:

$$(4) \quad v_{2f}^2 = v_{1i}^2 - 2v_{1i}v_{1f} \cos \theta + v_{1f}^2$$

Sustituya la ecuación (4) en la ecuación (3):

$$\begin{aligned}v_{1f}^2 + (v_{1i}^2 - 2v_{1i}v_{1f} \cos \theta + v_{1f}^2) &= v_{1i}^2 \\(5) \quad v_{1f}^2 - v_{1i}v_{1f} \cos \theta &= 0\end{aligned}$$

Una posible solución de la ecuación (5) es $v_{1f} = 0$, que corresponde a una colisión frontal en donde el primer protón se detiene y el segundo continúa con la misma rapidez en la misma dirección. Esta no es la solución que se quiere.

Divida ambos lados de la ecuación (5) entre v_{1f} y despeje el restante factor de v_{1f} :

$$v_{1f} = v_{1i} \cos \theta = (3.50 \times 10^5 \text{ m/s}) \cos 37.0^\circ = 2.80 \times 10^5 \text{ m/s}$$

Use la ecuación (3) para encontrar v_{2f} :

$$\begin{aligned}v_{2f} &= \sqrt{v_{1i}^2 - v_{1f}^2} = \sqrt{(3.50 \times 10^5 \text{ m/s})^2 - (2.80 \times 10^5 \text{ m/s})^2} \\&= 2.11 \times 10^5 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Aplique la ecuación (2) para encontrar ϕ :

$$\begin{aligned}(2) \quad \phi &= \sin^{-1} \left(\frac{v_{1f} \sin \theta}{v_{2f}} \right) = \sin^{-1} \left[\frac{(2.80 \times 10^5 \text{ m/s}) \sin 37.0^\circ}{(2.11 \times 10^5 \text{ m/s})} \right] \\&= 53.0^\circ\end{aligned}$$

Finalizar Es interesante que $\theta + \phi = 90^\circ$. Este resultado *no* es accidental. Siempre que dos objetos de igual masa choquen elásticamente en una colisión oblicua y uno de ellos inicialmente en reposo, sus velocidades finales son mutuamente perpendiculares.

9.6 El centro de masa

En esta sección se describe el movimiento global de un sistema en términos de un punto especial llamado el **centro de masa** del sistema. El sistema puede ser un pequeño número de partículas o un objeto extendido continuo, como una gimnasta que salta en el aire. Se verá que el movimiento traslacional del centro de masa del sistema es el mismo como si toda la masa del sistema estuviera concentrada en dicho punto. Es decir, el sistema se mueve como si la fuerza neta externa se aplicara a una sola partícula ubicada en el centro de masa. Este modelo, el *modelo de partícula*, se introdujo en el capítulo 2. Este comportamiento es independiente de otro movimiento, como la rotación o la vibración del sistema, o la deformación del sistema (por ejemplo, cuando la gimnasta dobla su cuerpo).

Considere un sistema que consiste de un par de partículas que tienen diferentes masas y se conectan mediante una barra rígida ligera (figura 9.14). La posición del centro de masa del sistema se describe como la *posición promedio* de la masa del sistema. El centro de masa del sistema se ubica en algún lugar en la recta que une las dos partículas y está más cerca de la partícula que tiene la masa más grande. Si se aplica una sola fuerza a un punto en la barra arriba del centro de masa, el sistema gira en sentido de las agujas del reloj (vea la figura 9.14a). Si la fuerza se aplica en un punto en la barra por abajo del centro de masa, el sistema rota contra las agujas del reloj (vea la figura 9.14b). Si la fuerza se aplica en el



centro de masa, el sistema se mueve en la dirección de la fuerza sin girar (vea la figura 9.14c). El centro de masa de un objeto puede ubicarse mediante este procedimiento.

El centro de masa del par de partículas descritas en la figura 9.15 se localiza sobre el eje x y yace en algún lugar entre las partículas. Su coordenada x está dada por

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (9.28)$$

Por ejemplo, si $x_1 = 0$, $x_2 = d$ y $m_2 = 2m_1$, se encuentra que $x_{CM} = \frac{2}{3}d$. Es decir, el centro de masa se localiza más cerca de la partícula más masiva. Si las dos masas son iguales, el centro de masa se ubica a la mitad entre las partículas.

Se puede extender este concepto a un sistema de muchas partículas con masas m_i en tres dimensiones. La coordenada x del centro de masa de n partículas se define como

$$x_{CM} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i \quad (9.29)$$

donde x_i es la coordenada x de la i -ésima partícula y la masa total es $M \equiv \sum_i m_i$, con la suma incluyendo a las n partículas. Las coordenadas y y z del centro de masa se definen de manera similar mediante las ecuaciones

$$y_{CM} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i \quad y \quad z_{CM} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i \quad (9.29)$$

El centro de masa se puede ubicar en tres dimensiones mediante su vector de posición \vec{r}_{CM} . Las componentes de este vector son x_{CM} , y_{CM} y z_{CM} , definidas en las ecuaciones 9.29 y 9.30. Por tanto,

$$\begin{aligned} \vec{r}_{CM} &= x_{CM} \hat{i} + y_{CM} \hat{j} + z_{CM} \hat{k} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i \hat{i} + \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i \hat{j} + \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i \hat{k} \\ \vec{r}_{CM} &\equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \end{aligned} \quad (9.31)$$

donde \vec{r}_i es el vector de posición de la i -ésima partícula, definido por

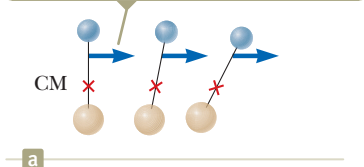
$$\vec{r}_i \equiv x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$$

Aunque localizar el centro de masa para un objeto extendido es algo más problemático que ubicar el centro de masa de un pequeño número de partículas, las ideas básicas discutidas aún se aplican. Piense en un objeto extendido como un sistema que contiene un gran número de pequeños elementos de masa, como el cubo en la figura 9.15. Ya que la separación entre elementos es muy pequeña, se considera que el objeto tiene una distribución de masa continua. Al dividir el objeto en elementos de masa Δm_i con coordenadas x_i , y_i , z_i se ve que la coordenada x del centro de masa es aproximadamente

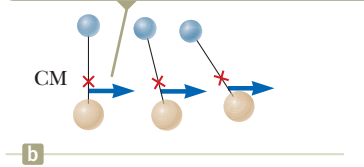
$$x_{CM} \approx \frac{1}{M} \sum_i x_i \Delta m_i$$

con expresiones similares para y_{CM} y z_{CM} . Si se hace que el número n de elementos tienda a infinito, el tamaño de cada elemento tiende a cero y x_{CM} se conoce con precisión. En este límite, se sustituye la suma por una integral y Δm_i por el elemento diferencial dm :

El sistema gira en sentido de las manecillas del reloj cuando una fuerza se aplica arriba del centro de masa.



El sistema rota contra las manecillas del reloj cuando una fuerza se aplica por abajo del centro de masa.



El sistema se mueve en la dirección de la fuerza sin girar cuando una fuerza se aplica en el centro de masa.

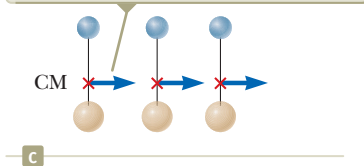


Figura 9.14 Se aplica una fuerza a un sistema de dos partículas de distintas masas unidas por una barra rígida ligera.

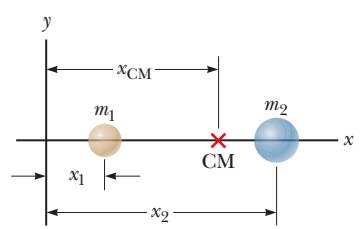


Figura 9.15 El centro de masa de dos partículas de masa distinta sobre el eje x se ubica en x_{CM} , un punto entre las partículas, más cerca de la que tiene la mayor masa.



Un objeto extendido se considera como una distribución de pequeños elementos de masa Δm_i .

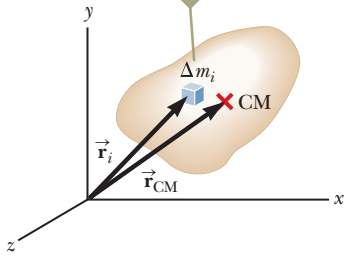


Figura 9.16 El centro de masa se ubica en la posición vectorial \vec{r}_{CM} , que tiene coordenadas x_{CM} , y_{CM} y z_{CM} .

$$x_{CM} = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{1}{M} \sum_i x_i \Delta m_i = \frac{1}{M} \int x \, dm \tag{9.32}$$

Del mismo modo, para y_{CM} y z_{CM} se obtiene

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \int y \, dm \quad y \quad z_{CM} = \frac{1}{M} \int z \, dm \tag{9.33}$$

La posición vectorial del centro de masa de un objeto extendido se expresa en la forma

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \, dm \tag{9.34}$$

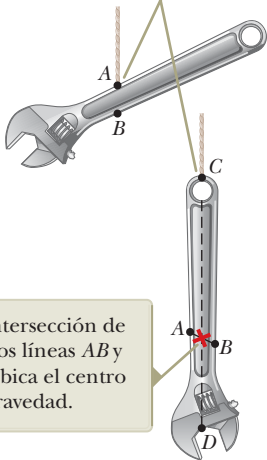
que es equivalente a las tres expresiones dadas por las ecuaciones 9.32 y 9.33.

El centro de masa de cualquier objeto simétrico de densidad uniforme se encuentra sobre un eje de simetría y sobre cualquier plano de simetría. Por ejemplo, el centro de masa de una barra uniforme se localiza a la mitad de entre sus extremos. El centro de masa de una esfera o de un cubo se encuentra en su centro geométrico.

Como un objeto extendido es una distribución continua de masa, entonces sobre cada pequeño elemento de masa actúa una fuerza gravitacional. El efecto neto de todas esas fuerzas es equivalente al efecto de una sola fuerza $M\vec{g}$ actuando en un punto especial, llamado **centro de gravedad**. Si \vec{g} es constante en la distribución de masa, el centro de gravedad coincide con el centro de masa. Si un objeto extendido se articula en su centro de gravedad, entonces se equilibra en cualquier orientación.

El centro de gravedad de un objeto con forma irregular, como una llave de tuerca, se determina al suspender el objeto, primero de un punto y luego de otro. En la figura 9.17, una llave de tuerca cuelga del punto A y se dibuja una línea vertical AB (que se puede establecer con una plomada) cuando la llave de tuerca deja de balancearse. Luego la llave de tuerca se cuelga del punto C, y se dibuja una segunda línea vertical CD. El centro de gravedad está a la mitad a través del grosor de la llave de tuerca, bajo la intersección de estas dos rectas. En general, si la llave de tuerca cuelga libremente de cualquier punto, la recta a través de este punto debe pasar por el centro de gravedad.

La llave de tuerca cuelga libremente, primero del punto A y luego del punto C.



La intersección de las dos líneas AB y CD ubica el centro de gravedad.

Figura 9.17 Una técnica experimental para determinar el centro de gravedad de una llave de tuerca.

E XAMEN RÁPIDO 9.7 Un bat de beisbol de densidad uniforme se corta en la ubicación de su centro de masa, como se muestra en la figura 9.18. ¿Cuál pieza tiene la menor masa? (a) la de la derecha, (b) la de la izquierda, (c) ambas piezas tienen la misma masa, (d) imposible de determinar.

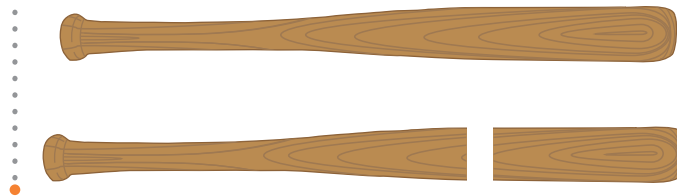


Figura 9.18 (Examen rápido 9.7) Un bat de beisbol cortado en la ubicación de su centro de masa.

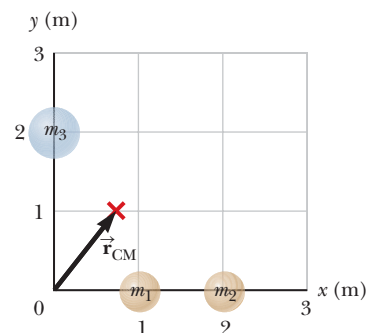
Ejemplo 9.10 El centro de masa de tres partículas

Un sistema consiste de tres partículas ubicadas como se muestra en la figura 9.19. Encuentre el centro de masa del sistema. Las masas de las partículas son $m_1 = m_2 = 1.0$ kg y $m_3 = 2.0$ kg.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 9.19 muestra las tres masas. Su intuición debe decirle que el centro de masa se ubica en alguna parte en la región entre la partícula azul y el par de partículas cafés, como se indica en la figura.

Figura 9.19 (Ejemplo 9.10) Dos partículas están localizadas sobre el eje x, y una sola partícula está colocada sobre el eje y, como se muestra. El vector indica la ubicación del centro de masa del sistema.



9.10 continuación

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución porque se usarán las ecuaciones para el centro de masa desarrolladas en esta sección.

Use las ecuaciones que definen las coordenadas del centro de masa y advierta que $z_{\text{CM}} = 0$:

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{(1.0 \text{ kg})(1.0 \text{ m}) + (1.0 \text{ kg})(2.0 \text{ m}) + (2.0 \text{ kg})(0)}{1.0 \text{ kg} + 1.0 \text{ kg} + 2.0 \text{ kg}} = \frac{3.0 \text{ kg} \cdot \text{m}}{4.0 \text{ kg}} = 0.75 \text{ m}$$

$$y_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{(1.0 \text{ kg})(0) + (1.0 \text{ kg})(0) + (2.0 \text{ kg})(2.0 \text{ m})}{4.0 \text{ kg}} = \frac{4.0 \text{ kg} \cdot \text{m}}{4.0 \text{ kg}} = 1.0 \text{ m}$$

Escriba el vector de posición del centro de masa: $\vec{r}_{\text{CM}} \equiv x_{\text{CM}} \hat{i} + y_{\text{CM}} \hat{j} = (0.75 \hat{i} + 1.0 \hat{j}) \text{ m}$

Ejemplo 9.11 El centro de masa de una barra

(A) Demuestre que el centro de masa de una barra de masa M y longitud L se encuentra equidistante de sus extremos, si supone que la barra tiene una masa uniforme por unidad de longitud.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La barra se muestra alineada a lo largo del eje x en la figura 9.20, así que $y_{\text{CM}} = z_{\text{CM}} = 0$. ¿Cuál es su predicción del valor de x_{CM} ?

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de análisis, porque es necesario dividir la barra en pequeños elementos de masa para efectuar la integración en la ecuación 9.32.

Analizar La masa por unidad de longitud (esta cantidad se llama *densidad de masa lineal*) se puede escribir como $\lambda = M/L$ para la barra uniforme. Si la barra se divide en elementos de longitud dx , la masa de cada elemento es $dm = \lambda dx$.

Con la ecuación 9.32 encuentre una expresión para x_{CM} :

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx = \frac{\lambda}{M} \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^L = \frac{\lambda L^2}{2M}$$

Sustituya $\lambda = M/L$:

$$x_{\text{CM}} = \frac{L^2}{2M} \left(\frac{M}{L} \right) = \frac{1}{2} L$$

También es posible utilizar argumentos de simetría para obtener el mismo resultado.

(B) Suponga que una barra *no es uniforme*, tal que su masa por unidad de longitud varía linealmente con x de acuerdo con la expresión $\lambda = \alpha x$, donde α es una constante. Encuentre la coordenada x del centro de masa como una fracción de L .

SOLUCIÓN

Conceptualizar Como la masa por unidad de longitud no es constante sino proporcional a x , los elementos de la barra a la derecha son más masivos que los elementos cercanos al extremo izquierdo de la barra.

Categorizar Este problema se clasifica de manera similar al inciso (A), con el sesgo añadido de que la densidad de masa lineal no es constante.

Analizar En este caso, sustituya dm en la ecuación 9.32 por λdx , donde $\lambda = \alpha x$.

Use la ecuación 9.32 para encontrar una expresión para x_{CM} :

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int x dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx = \frac{1}{M} \int_0^L x \alpha x dx$$

$$= \frac{\alpha}{M} \int_0^L x^2 dx = \frac{\alpha L^3}{3M}$$

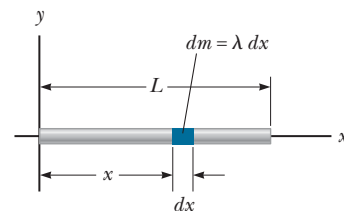


Figura 9.20 (Ejemplo 9.11) Geometría utilizada para encontrar el centro de masa de una barra uniforme.

continúa

9.11 continuación

Encuentre la masa total de la barra:
$$M = \int dm = \int_0^L \lambda dx = \int_0^L \alpha x dx = \frac{\alpha L^2}{2}$$

Sustituya M en la expresión para x_{CM} :
$$x_{CM} = \frac{\alpha L^3}{3\alpha L^2/2} = \frac{2}{3}L$$

Finalizar Note que el centro de masa en el inciso (B) está más lejos hacia la derecha que en el inciso (A). Este resultado es razonable porque los elementos de la barra se vuelven más masivos conforme uno se mueve hacia la derecha a lo largo de la barra en el inciso (B).

9.7 Sistemas de muchas partículas

Considere un sistema de dos o más partículas para el cual se ha identificado el centro de masa. Comenzará a entender el significado físico y la utilidad del concepto de centro de masa si toma la derivada temporal del vector de posición para el centro de masa dado por la ecuación 9.31. De la sección 4.1 se sabe que la derivada respecto al tiempo de un vector de posición es, por definición, el vector velocidad. Si supone que M permanece constante para un sistema de partículas, es decir, ninguna partícula entra o sale del sistema, se obtiene la siguiente expresión para la **velocidad del centro de masa** del sistema:

Velocidad del centro de masa de un sistema de partículas ▶

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i \quad (9.35)$$

donde \vec{v}_i es la velocidad de la i -ésima partícula. Al reordenar la ecuación 9.35 resulta

Cantidad de movimiento total de un sistema de partículas ▶

$$M\vec{v}_{CM} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_{tot} \quad (9.36)$$

Por tanto, la cantidad de movimiento lineal total del sistema es igual a la masa total multiplicada por la velocidad del centro de masa. En otras palabras, la cantidad de movimiento lineal total del sistema es igual a la de una sola partícula de masa M que se mueve con una velocidad \vec{v}_{CM} .

Al derivar la ecuación 9.35 respecto del tiempo, se obtiene la **aceleración del centro de masa** del sistema:

Acercación del centro de masa de un sistema de partículas ▶

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{a}_i \quad (9.37)$$

Al reordenar esta expresión y emplear la segunda ley de Newton se obtiene

$$M\vec{a}_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i \quad (9.38)$$

donde \vec{F}_i es la fuerza neta sobre la partícula i .

Las fuerzas sobre cualquier partícula en el sistema pueden incluir tanto fuerzas externas (desde afuera del sistema) y fuerzas internas (desde dentro del sistema). Sin embargo, por la tercera ley de Newton, la fuerza interna que ejerce la partícula 1 en la partícula 2, por ejemplo, es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza interna que ejerce la partícula 2 en la partícula 1. Por tanto, cuando en la ecuación 9.38 se suman todas las fuerzas internas, se eliminan en pares y se encuentra que la fuerza neta sobre el sistema la causan *solamente* las fuerzas externas. En tal caso se escribe la ecuación 9.38 en la forma

Segunda ley de Newton para un sistema de partículas ▶

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM} \quad (9.38)$$

Es decir, la fuerza externa neta sobre un sistema de partículas es igual a la masa total del sistema multiplicada por la aceleración del centro de masa. Al comparar la ecuación 9.39



con la segunda ley de Newton para una sola partícula, se ve que el modelo de partícula empleado en varios capítulos se puede describir en términos del centro de masa:

El centro de masa de un sistema de partículas que tiene masa combinada M se mueve como una partícula equivalente de masa M que se movería bajo la influencia de la fuerza externa neta en el sistema.

Se integra la ecuación 9.39 en un intervalo de tiempo finito:

$$\int \sum \vec{F}_{\text{ext}} dt = \int M \vec{a}_{\text{CM}} dt = \int M \frac{d\vec{v}_{\text{CM}}}{dt} dt = M \int d\vec{v}_{\text{CM}} = M \Delta \vec{v}_{\text{CM}}$$

Observe que esta ecuación se puede escribir como

$$\Delta \vec{p}_{\text{tot}} = \vec{I} \quad (9.40)$$

◀ Teorema impulso-cantidad de movimiento para un sistema de partículas

donde \vec{I} es el impulso que las fuerzas externas imparten al sistema y \vec{p}_{tot} es la cantidad de movimiento del sistema. La ecuación 9.40 es la generalización del teorema impulso-cantidad de movimiento para una partícula (ecuación 9.13) a un sistema de muchas partículas, y también es la representación matemática del modelo de sistema no aislado (cantidad de movimiento) para un sistema de múltiples partículas.

Por último, si la fuerza externa neta sobre un sistema es cero, el sistema es aislado, de la ecuación 9.39 se tiene que

$$M \vec{a}_{\text{CM}} = M \frac{d\vec{v}_{\text{CM}}}{dt} = 0$$

Por tanto, el modelo de sistema aislado para cantidad de movimiento de un sistema de muchas partículas queda descrito por

$$\Delta \vec{p}_{\text{tot}} = 0 \quad (9.41)$$

que puede escribirse como

$$M \vec{v}_{\text{CM}} = \vec{p}_{\text{tot}} = \text{constante} \quad (\text{cuando } \sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0) \quad (9.42)$$

Es decir, la cantidad de movimiento lineal total de un sistema de partículas se conserva si no hay fuerza neta externa que actúe en el sistema. Se deduce que, para un sistema aislado de partículas, tanto la cantidad de movimiento total como la velocidad del centro de masa son constantes en el tiempo. Este enunciado es una generalización del modelo de sistema aislado (cantidad de movimiento) para un sistema de muchas partículas.

Suponga que está en reposo el centro de masa de un sistema aislado que consta de dos o más integrantes. El centro de masa del sistema permanece en reposo si no existe fuerza neta en el sistema. Por ejemplo, considere un sistema de un nadador que está de pie sobre una balsa, con el sistema inicialmente en reposo. Cuando el nadador se clava horizontalmente desde la balsa, ésta se mueve en la dirección opuesta a la del nadador y el centro de masa del sistema permanece en reposo (si se desprecia la fricción entre la balsa y el agua). Además, la cantidad de movimiento lineal del nadador es igual en magnitud a la de la balsa, pero opuesta en dirección.

E XAMEN RÁPIDO 9.8 Un crucero se mueve con rapidez constante a través del agua.

- Los vacacionistas en el barco están ansiosos por llegar a su siguiente destino. Deciden
- acelerar el crucero reuniéndose en la proa (el frente) y correr hacia la popa (la parte
- trasera) de la nave. (i) Mientras corren hacia la popa, ¿la rapidez de la nave es (a)
- mayor que antes, (b) invariable, (c) menor que antes, o (d) imposible de determinar?
- (ii) Los vacacionistas dejan de correr cuando llegan a la popa del barco. Después de
- que todos dejan de correr, ¿la rapidez del barco es (a) mayor de la que era antes de
- que comenzaran a correr, (b) invariable de la que era antes de que comenzaran a
- correr, (c) menor de la que era antes de que comenzaran a correr, o (d) imposible de
- determinar?



Ejemplo conceptual 9.12 Explosión de un proyectil

Un proyectil disparado al aire súbitamente explota en varios fragmentos (figura 9.21).

(A) ¿Qué se puede decir sobre el movimiento del centro de masa del sistema conformado por todos los fragmentos después de la explosión?

SOLUCIÓN

Si desprecia la resistencia del aire, la única fuerza externa sobre el proyectil es la fuerza gravitacional. Por tanto, si el proyectil no explota, continuará moviéndose a lo largo de la trayectoria parabólica indicada por la línea discontinua en la figura 9.21. Ya que las fuerzas causadas por la explosión son internas, no afectan el movimiento del centro de masa del sistema (los fragmentos). En consecuencia, después de la explosión, el centro de masa de los fragmentos sigue la misma trayectoria parabólica que el proyectil habría seguido si no hubiese ocurrido la explosión.

(B) Si el proyectil no explota, aterrizará a una distancia R desde su punto de lanzamiento. Suponga que el proyectil explota y se rompe en dos piezas de igual masa. Una pieza aterriza a una distancia $2R$ a la derecha del punto de lanzamiento. ¿Dónde aterriza la otra pieza?

SOLUCIÓN

Como se discutió en el inciso (A), el centro de masa del sistema de dos piezas aterriza a una distancia R desde el punto de lanzamiento. Una de las piezas aterriza a una distancia más allá de R desde el punto de aterrizaje (o a una distancia $2R$ desde el punto de lanzamiento), a la derecha en la figura 9.21. Ya que las dos piezas tienen la misma masa, la otra pieza debe aterrizar a una distancia R a la izquierda del punto de aterrizaje en la figura 9.21, ¡lo que coloca a esta pieza justo de regreso al punto de lanzamiento!

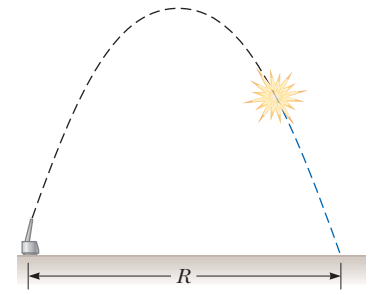


Figura 9.21 (Ejemplo conceptual 9.12) Cuando un proyectil explota en varios fragmentos, el centro de masa del sistema conformado por todos los fragmentos sigue la misma trayectoria parabólica que el proyectil habría tomado si no hubiese explotado.

Ejemplo 9.13 El cohete que explota

Un cohete se dispara verticalmente hacia arriba. En el instante en que llega a una altura de 1 000 m y una rapidez de $v_i = 300$ m/s, explota en tres fragmentos que tienen igual masa. Un fragmento se mueve hacia arriba con una rapidez de $v_1 = 450$ m/s después de la explosión. El segundo fragmento tiene una rapidez de $v_2 = 240$ m/s y se mueve al este justo después de la explosión. ¿Cuál es la velocidad del tercer fragmento inmediatamente después de la explosión?

SOLUCIÓN

Conceptualizar En su mente dibuje la explosión, con una pieza yendo hacia arriba y una segunda pieza moviéndose horizontalmente hacia el este. ¿Tiene usted algún sentimiento intuitivo sobre la dirección en la que se mueve la tercera pieza?

Categorizar Este ejemplo es un problema en dos dimensiones porque tiene dos fragmentos móviles en direcciones perpendiculares después de la explosión, así como un tercer fragmento que se mueve en una dirección desconocida en el plano definido por los vectores velocidad de los otros dos fragmentos. Se supone que el intervalo de tiempo de la explosión es muy breve, así que se usa la aproximación del impulso en la que se ignora la fuerza gravitacional y la resistencia del aire.

Debido al intervalo del tiempo corto y despreciar las fuerzas externas, el centro de masa del sistema permanece fijo en el espacio durante la explosión. Por tanto, el cohete es un *sistema aislado* en términos de *cantidad de movimiento*. La ecuación 9.41 describe la situación y la cantidad de movimiento total \vec{P}_i del cohete inmediatamente antes de la explosión debe ser igual a la cantidad de movimiento total \vec{P}_f de los fragmentos inmediatamente después de la explosión.

Analizar Ya que los tres fragmentos tienen igual masa, la masa de cada fragmento es $M/3$, donde M es la masa total del cohete. Sea \vec{v}_3 que representa la velocidad desconocida del tercer fragmento.

Utilice el modelo de sistema aislado (cantidad de movimiento) para igualar la cantidad de movimiento inicial con la final del sistema y exprese las cantidades de movimiento en términos de masas y velocidades:

Despeje \vec{v}_3 :

Sustituya los valores numéricos:

$$\Delta \vec{p} = 0 \rightarrow \vec{p}_i = \vec{p}_f \rightarrow M \vec{v}_i = \frac{M}{3} \vec{v}_1 + \frac{M}{3} \vec{v}_2 + \frac{M}{3} \vec{v}_3$$

$$\vec{v}_3 = 3\vec{v}_i - \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_3 = 3(300\hat{j} \text{ m/s}) - (450\hat{j} \text{ m/s}) - (240\hat{i} \text{ m/s}) = (-240\hat{i} + 450\hat{j}) \text{ m/s}$$



9.13 continuación

Finalizar Observe que este evento es el inverso de una colisión perfectamente inelástica. Hay un objeto antes de la colisión y tres objetos después. Imagine correr hacia atrás una película del evento: los tres objetos se juntarían y se convertirían en un solo objeto. En una colisión perfectamente inelástica, la energía cinética del sistema disminuye. Si calcula la energía cinética antes y después del evento en este ejemplo, encontrará que la energía cinética del sistema aumenta. (¡Inténtelo!) Este aumento de la energía cinética proviene de la energía potencial almacenada en cualquier combustible que explote para causar el rompimiento del cohete.

9.8 Sistemas deformables

Hasta el momento, en esta exposición de mecánica, se analizó el movimiento de partículas o sistemas no deformables que se modelan como partículas. La discusión en la sección 9.7 se puede aplicar a un análisis del movimiento de sistemas deformables. Por ejemplo, suponga que está de pie sobre una patineta y se empuja de una pared, con lo que se pone en movimiento alejándose de la pared. Su cuerpo se ha deformado durante este evento: sus brazos se doblaron antes del evento, y se estiraron mientras se empujaba de la pared. ¿Cómo describiría este evento?

La fuerza a causa de la pared sobre sus manos se mueve hasta el final sin desplazamiento; la fuerza siempre se localiza en la interfaz entre la pared y sus manos. Por tanto, la fuerza no hace trabajo sobre el sistema, formado por usted y la patineta. Sin embargo, empujarse de la pared en efecto da como resultado un cambio en la energía cinética del sistema. Si intenta usar el teorema trabajo-energía cinética, $W = \Delta K$, para describir este evento, notará que el lado izquierdo de la ecuación es cero, pero el lado derecho es distinto de cero. El teorema trabajo-energía cinética no es válido para este evento y con frecuencia no es válido para sistemas que son deformables.

Para analizar el movimiento de sistemas deformables, se recurre a la ecuación 8.2, la ecuación de conservación de la energía, y a la ecuación 9.40, el teorema impulso-cantidad de movimiento. Para el ejemplo de usted empujándose de la pared sobre su patineta, la ecuación 8.2 da

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

donde ΔK es el cambio en energía cinética debida al aumento de rapidez del sistema, y ΔU es la disminución en energía potencial almacenada en el cuerpo resultante de las comidas previas. Esta ecuación dice que el sistema transformó energía potencial en energía cinética mediante el empleo de fuerza muscular necesaria para empujarse de la pared. Observe que el sistema está aislado en términos de energía pero no está aislado en términos de la cantidad de movimiento.

Al aplicar la ecuación 9.40 al sistema en esta situación, se obtiene

$$\Delta \vec{p}_{\text{tot}} = \vec{I} \rightarrow m \Delta \vec{v} = \int \vec{F}_{\text{pared}} dt$$

donde \vec{F}_{pared} es la fuerza ejercida por la pared sobre sus manos, m es la masa de usted y la patineta, y $\Delta \vec{v}$ es el cambio en la velocidad del sistema durante el evento. Para evaluar el lado derecho de esta ecuación, se necesitaría conocer cómo varía en el tiempo la fuerza a causa de la pared. En general, este proceso podría ser complicado. Sin embargo, en el caso de fuerzas constantes, o fuerzas bien comportadas, se puede evaluar la integral del lado derecho de la ecuación.

Los sistemas deformables ocurren a menudo en situaciones comunes. Cada vez que corre o salta, su cuerpo es un sistema deformable. Un gimnasta o un buzo en la plataforma realizando una rutina es un sistema deformable. En el ejemplo 9.14 (página 238), investigamos un sistema deformable con dos bloques y un resorte. A partir del capítulo 18, vamos a observar sistemas deformables muy importantes: muestras de gas que cambian de tamaño conforme se someten a procesos termodinámicos.



Ejemplo 9.14 Empujar en un resorte³

Como se muestra en la figura 9.22a, dos bloques están en reposo sobre una mesa a nivel sin fricción. Ambos bloques tienen la misma masa m y están conectados mediante un resorte de masa despreciable. La distancia de separación de los bloques cuando el resorte está relajado es L . Durante un intervalo de tiempo Δt , se aplica horizontalmente una fuerza constante F al bloque izquierdo y lo mueve una distancia x_1 , como se muestra en la figura 9.22b. Durante este intervalo de tiempo, el bloque derecho se mueve una distancia x_2 . Al final de este intervalo de tiempo, se retira la fuerza F .

(A) Encuentre la rapidez resultante \vec{v}_{CM} del centro de masa del sistema.

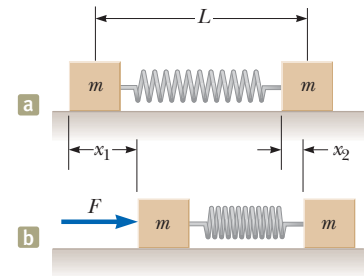


Figura 9.22 (Ejemplo 9.14) (a) Dos bloques de igual masa se conectan mediante un resorte. (b) El bloque izquierdo se empuja con una fuerza constante de magnitud F y se mueve una distancia x_1 durante cierto intervalo de tiempo. Durante este mismo intervalo de tiempo, el bloque derecho se mueve una distancia x_2 .

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine lo que sucede mientras empuja en el bloque izquierdo. Empieza a moverse hacia la derecha en la figura 9.22, y el resorte empieza a comprimirse. Como resultado, el resorte empuja hacia la derecha el bloque derecho, que comienza a moverse hacia la derecha. En cualquier momento dado, por lo general los bloques se mueven con diferentes velocidades. A medida que el centro de masa del sistema se mueve hacia la derecha con rapidez constante después de eliminar la fuerza, ambos bloques oscilan de ida y vuelta respecto al centro de masa.

Categorizar En este problema se aplican tres modelos de análisis: el sistema deformable de dos bloques y un resorte se modela como un *sistema no aislado* en términos de *energía* porque la fuerza aplicada realiza trabajo en él. También es modelado como un *sistema no aislado* en términos de *cantidad de movimiento* debido a la fuerza que actúa en el sistema durante un intervalo de tiempo. Como la fuerza aplicada sobre el sistema es constante, entonces la aceleración de su centro de masa es constante y así el centro de masa se modela como una *partícula bajo aceleración constante*.

Analizar Utilice el modelo de sistema no aislado (cantidad de movimiento), aplique el teorema impulso-cantidad de movimiento al sistema de dos bloques, y observe que la fuerza F es constante durante el intervalo de tiempo Δt mientras se aplica la fuerza.

Escriba la ecuación 9.40 para el sistema:

$$\Delta p_x = I_x \rightarrow (2m)(v_{\text{CM}} - 0) = F \Delta t$$

$$(1) \quad 2mv_{\text{CM}} = F \Delta t$$

Durante el intervalo de tiempo Δt , el centro de masa del sistema se mueve una distancia $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. Use este hecho para expresar el intervalo de tiempo en términos de $v_{\text{CM,prom}}$:

$$\Delta t = \frac{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)}{v_{\text{CM,avg}}}$$

Ya que el centro de masa se modela como una partícula bajo aceleración constante, la velocidad promedio del centro de masa es el promedio de la velocidad inicial, que es cero, y la velocidad final v_{CM} :

$$\Delta t = \frac{\frac{1}{2}(x_1 + x_2)}{\frac{1}{2}(0 + v_{\text{CM}})} = \frac{(x_1 + x_2)}{v_{\text{CM}}}$$

Sustituya esta expresión en la ecuación (1):

$$2mv_{\text{CM}} = F \frac{(x_1 + x_2)}{v_{\text{CM}}}$$

Despeje v_{CM} :

$$v_{\text{CM}} = \sqrt{F \frac{(x_1 + x_2)}{2m}}$$

(B) Encuentre la energía total del sistema asociada con la vibración relativa a su centro de masa después de que se retira la fuerza F .

SOLUCIÓN

Analizar La energía de vibración es toda la energía del sistema, distinta de la energía cinética asociada con el movimiento traslacional del centro de masa. Para encontrar la energía vibratoria, se aplica la ecuación de conservación de la energía. La energía cinética del sistema se puede expresar como $K = K_{\text{CM}} + K_{\text{vib}}$, donde K_{vib} es la energía cinética de los bloques relativa al centro de masa debida a su vibración. La energía potencial del sistema es U_{vib} , que es la energía potencial almacenada en el resorte cuando la separación de los bloques es algún valor distinto de L .

³El ejemplo 9.14 fue inspirado en parte por C.E. Mungan, "A primer on work-energy relationships for introductory physics", *The Physics Teacher* 43: 10, 2005

9.14 continuación

A partir del modelo de sistema no aislado (energía), exprese la ecuación 8.2 para este sistema:

$$(2) \quad \Delta K_{CM} + \Delta K_{vib} + \Delta U_{vib} = W$$

Expresé la ecuación (2) en una forma alternativa y note que $K_{vib} + U_{vib} = E_{vib}$:

$$\Delta K_{CM} + \Delta E_{vib} = W$$

Sustituya cada uno de los términos en esta ecuación:

$$(K_{CM} - 0) + (E_{vib} - 0) = Fx_1 \rightarrow E_{vib} = Fx_1 - K_{CM}$$

Use los resultados del inciso (A):

$$E_{vib} = Fx_1 - \frac{1}{2}(2m)v_{CM}^2 = Fx_1 - \frac{1}{2}(2m) \left[F \frac{(x_1 + x_2)}{2m} \right]^2 = F \frac{(x_1 - x_2)}{2}$$

Finalizar Ninguna de las dos respuestas en este ejemplo depende de la longitud del resorte, la constante del resorte o el intervalo de tiempo. Note también que la magnitud x_1 del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza aplicada es diferente de la magnitud $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ del desplazamiento del centro de masa del sistema. Esta diferencia recuerda que el desplazamiento en la definición del trabajo (ecuación 7.1) es la del punto de aplicación de la fuerza.

9.9 Propulsión de cohetes

Cuando los vehículos ordinarios como los automóviles se impulsan, la fuerza impulsora para el movimiento es la fricción. En el caso del auto, la fuerza impulsora es la fuerza que ejerce el camino en el auto. El automóvil se puede modelar como un sistema no aislado en términos de cantidad de movimiento. El camino aplica un impulso al auto, y el resultado es un cambio en la cantidad de movimiento del automóvil, como se describe con la ecuación 9.40.

Sin embargo, un cohete que se mueve en el espacio no tiene camino contra el cual empujar. El cohete es un sistema aislado en términos de cantidad de movimiento. Por tanto, la fuente de la propulsión de un cohete debe ser algo distinto de una fuerza externa. La operación de un cohete depende de la ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal como se aplica a un sistema aislado, donde el sistema es el cohete más su combustible expulsado.

La propulsión de cohetes es comprensible al considerar primero al arquero que está de pie sobre hielo sin fricción, en el ejemplo 9.1. Imagine que el arquero dispara varias flechas horizontalmente. Por cada flecha disparada, el arquero recibe una cantidad de movimiento compensatoria en la dirección opuesta. Mientras dispare más flechas, el arquero se mueve cada vez más rápido a través del hielo. Además de este análisis en términos de cantidad de movimiento, este fenómeno también se puede entender en términos de la segunda y tercera leyes de Newton. Cada vez que el arco lanza una flecha, ésta empuja al arco (y al arquero) hacia atrás, y estas fuerzas originan la aceleración del arquero. En la figura 9.23 se muestra este mecanismo utilizado para manejar a un astronauta en el espacio. En lugar de disparar flechas como el arquero, el astronauta dispara ráfagas cortas de gas nitrógeno.

En forma similar, conforme un cohete se mueve en el espacio libre, su cantidad de movimiento lineal cambia cuando una parte de su masa se expulsa en la forma de gases de escape. Ya que a los gases se les da cantidad de movimiento cuando se expulsan del motor, el cohete recibe una cantidad de movimiento compensatoria en la dirección opuesta. Por tanto, el cohete se acelera como resultado del “empujón”, o empuje, de los gases de escape. En el espacio libre, el centro de masa del sistema (cohete más gases expulsados) se mueve uniformemente, independiente del proceso de propulsión.⁴

Suponga que en algún tiempo t la magnitud de la cantidad de movimiento de un cohete más su combustible es Mv , donde v es la rapidez del cohete en relación con la Tierra (figura 9.23b). En un intervalo de tiempo breve Δt , el cohete expulsa combustible de masa Δm . Al final de este intervalo, la masa del cohete es $M - \Delta m$ y su rapidez es $v + \Delta v$,

⁴El cohete y el arquero representan casos del inverso de una colisión perfectamente inelástica: la cantidad de movimiento se conserva, pero la energía cinética del sistema cohete-gas expulsado aumenta (a costa de la energía potencial química en el combustible), como lo hace la energía cinética del sistema arquero-flecha (a costa de energía potencial de los alimentos previos del arquero cuando estira la cuerda del arco).

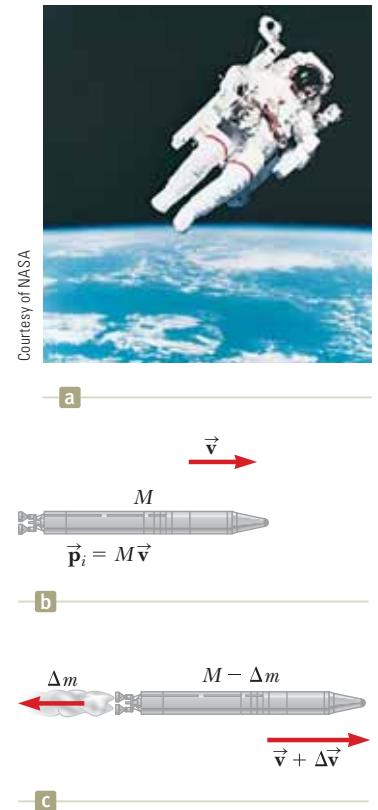


Figura 9.23 Propulsión del cohete (a) La fuerza del dispositivo manual impulsado por nitrógeno permite a un astronauta moverse libremente en el espacio sin correas restrictivas, con el uso de la fuerza de empuje proveniente del nitrógeno expulsado. (b) La masa inicial de un cohete más todo su combustible es M al tiempo t , y su velocidad es v . (c) Al tiempo $t + \Delta t$, la masa del cohete se ha reducido a $M - \Delta m$ y se ha expulsado una cantidad de combustible Δm . La rapidez del cohete aumenta en una cantidad Δv .

donde Δv es el cambio en rapidez del cohete (figura 9.23c). Si el combustible se expulsa con una rapidez v_e en relación con el cohete (el subíndice e representa *escape*, y v_e usualmente se llama *rapidez de escape*), la velocidad del combustible relativa a la Tierra es $v - v_e$. Como el sistema del cohete y el combustible expulsado es aislado, entonces se aplica el modelo de sistema aislado para la cantidad de movimiento y se obtiene

$$\Delta p = 0 \rightarrow p_i = p_f \rightarrow Mv = (M - \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_e)$$

Al simplificar esta expresión resulta

$$M\Delta v - \Delta m\Delta v = v_e \Delta m \quad (9.43)$$

Al despejar para el cambio en la rapidez, se encuentra

$$\Delta v = \frac{v_e \Delta m}{M - \Delta m} \quad (9.44)$$

Esta ecuación es válida para una eyección de una sola vez de la masa del cohete. También es válida para cualquier situación en la que un objeto expulsa la masa, causando que el objeto se mueva en la dirección opuesta. La ecuación se puede aplicar al problema del arquero en el ejemplo 9.1, reconociendo que la masa inicial del sistema era la del arquero y la flecha, $M = 60.030$ kg.

Si ahora se toma el límite cuando Δt tiende a cero, se tiene $\Delta v \rightarrow dv$ y $\Delta m \rightarrow dm$ en la ecuación 9.43. Además, despreciamos el término $dm dv$ ya que este es el producto de dos cantidades infinitesimales es mucho más pequeño que los otros términos en la ecuación. Además el aumento en la masa de escape dm corresponde a una igual disminución en la masa del cohete, así $dm = -dM$. Al usar este hecho se obtiene

$$M dv = v_e dm = -v_e dM \quad (9.45)$$

Ahora divida la ecuación entre M e integre, tomando la masa inicial del cohete más combustible como M_i , y la masa final del cohete más su combustible restante como M_f . El resultado es

$$\int_{v_i}^{v_f} \frac{dv}{M} = -v_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

$$v_f - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right) \quad (9.46)$$

Expresión para propulsión de cohetes ▶

que es la expresión básica para la propulsión de cohetes. Primero, la ecuación 9.44 indica que el aumento en la rapidez del cohete es proporcional a la rapidez de escape v_e de los gases expulsados. Por tanto, la rapidez de escape debe ser muy alta. Segundo, el aumento en la rapidez del cohete es proporcional al logaritmo natural de la proporción M_i/M_f . En consecuencia, esta proporción debe ser tan grande como sea posible, es decir, la masa del cohete sin combustible debe ser tan pequeña como se pueda y el cohete debe llevar bastante combustible.

El **empuje** en el cohete es la fuerza que sobre él ejercen los gases de escape expulsados. A partir de la segunda ley de Newton y de la ecuación 9.45 se obtiene la siguiente expresión para el empuje:

$$\text{Empuje} = M \frac{dv}{dt} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right| \quad (9.47)$$

Esta relación muestra que el empuje aumenta conforme crece la rapidez de escape y al incrementar la proporción de cambio de masa (llamada *rapidez de consumo*).

Ejemplo 9.15 Un cohete en el espacio

Un cohete que se mueve en el espacio, lejos de todos los otros objetos, tiene una rapidez de 3.0×10^3 m/s en relación con la Tierra. Sus motores se encienden y el combustible se expulsa en una dirección opuesta al movimiento del cohete con una rapidez de 5.0×10^3 m/s relativa al cohete.

(A) ¿Cuál es la rapidez del cohete respecto a la Tierra una vez que la masa del cohete se reduce a la mitad de su masa antes de la ignición?

9.15 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 9.23 muestra la situación en este problema. A partir de la discusión en esta sección y las escenas de las películas de ciencia ficción, uno puede imaginar fácilmente el cohete acelerando a una mayor rapidez conforme el motor funciona.

Categorizar Este es un problema de sustitución en el cual se utilizan los valores dados en las ecuaciones deducidas en esta sección.

Resuelva la ecuación 9.46 para la velocidad final y sustituya los valores conocidos:

$$\begin{aligned} v_f &= v_i + v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right) \\ &= 3.0 \times 10^3 \text{ m/s} + (5.0 \times 10^3 \text{ m/s}) \ln\left(\frac{M_i}{0.50M_i}\right) \\ &= 6.5 \times 10^3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

(B) ¿Cuál es el empuje sobre el cohete si quema combustible a proporción de 50 kg/s?

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 9.47, observando que $dM/dt = 50 \text{ kg/s}$:

$$\text{Empuje} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right| = (5.0 \times 10^3 \text{ m/s})(50 \text{ kg/s}) = 2.5 \times 10^5 \text{ N}$$

Ejemplo 9.16 Combate de incendios

Dos bomberos deben aplicar una fuerza total de 600 N para estabilizar una manguera que descarga agua a una proporción de 3 600 L/min. Estime la rapidez del agua conforme sale de la boquilla.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Conforme el agua sale de la boquilla, actúa de manera similar a los gases que se expulsan del motor de un cohete. Como resultado, una fuerza (empuje) actúa en los bomberos en una dirección opuesta a la dirección de movimiento del agua. En este caso se quiere que el extremo de la manguera sea una partícula en equilibrio, en lugar de que acelere como en el caso del cohete. En consecuencia, los bomberos deben aplicar una fuerza de magnitud igual al empuje en la dirección opuesta para mantener fijo el extremo de la manguera.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución en donde se emplean valores dados en una ecuación deducida en esta sección. El agua sale a 3 600 L/min, que es 60 L/s. Al saber que 1 L de agua tiene una masa de 1 kg, se estima que aproximadamente 60 kg de agua salen de la boquilla cada segundo.

Use la ecuación 9.47 para el empuje:

$$\text{Empuje} = \left| v_e \frac{dM}{dt} \right|$$

Despeje la rapidez de escape:

$$v_e = \frac{\text{Empuje}}{|dM/dt|}$$

Sustituya valores numéricos:

$$v_e = \frac{600 \text{ N}}{60 \text{ kg/s}} = 10 \text{ m/s}$$

Resumen

► Definiciones

La **cantidad de movimiento lineal** \vec{p} de una partícula de masa m que se mueve con una velocidad \vec{v} es

$$\vec{p} \equiv m\vec{v} \quad (9.2)$$

El **impulso** que se imparte a una partícula mediante una fuerza neta $\Sigma \vec{F}$ es igual a la integral en el tiempo de la fuerza:

$$\vec{I} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \Sigma \vec{F} dt \quad (9.9)$$

continúa



En una **colisión inelástica** no se conserva la energía cinética total del sistema de partículas en colisión. En una **colisión perfectamente inelástica** las partículas que colisionan quedan unidas después de la colisión. En una **colisión elástica** se conserva la energía cinética del sistema.

El vector de posición del **centro de masa** de un sistema de partículas se define como

$$\vec{r}_{\text{CM}} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \quad (9.31)$$

donde $M = \sum_i m_i$ es la masa total del sistema y \vec{r}_i es el vector de posición de la i -ésima partícula.

Conceptos y principios

El vector de posición del centro de masa de un objeto extendido se obtiene a partir de la expresión integral

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \, dm \quad (9.34)$$

La velocidad del centro de masa para un sistema de partículas es

$$\vec{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{v}_i \quad (9.35)$$

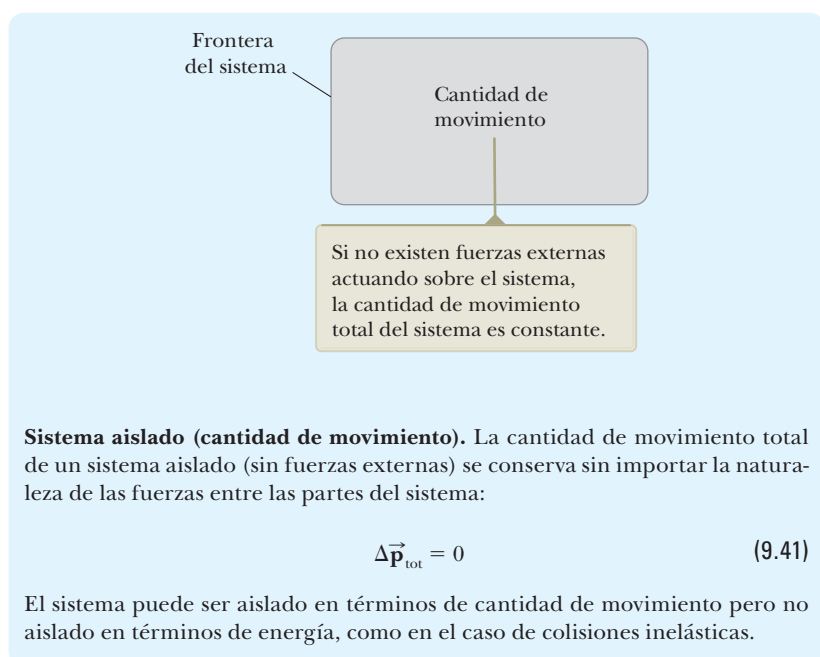
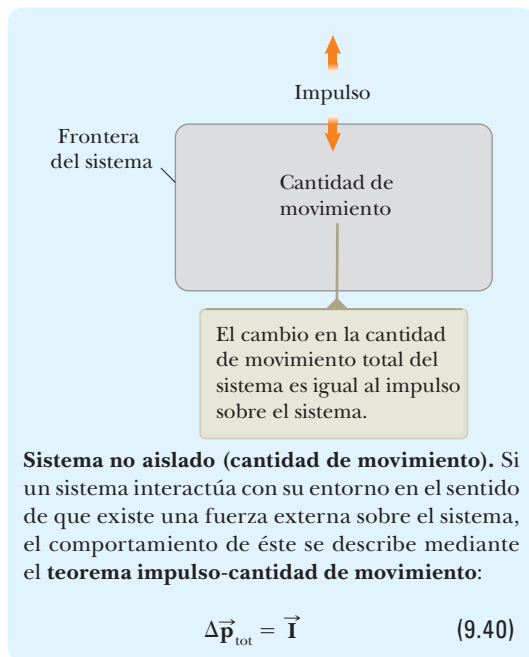
La cantidad de movimiento total de un sistema de partículas es igual a la masa total multiplicada por la velocidad del centro de masa.

La segunda ley de Newton aplicada a un sistema de partículas es

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M \vec{a}_{\text{CM}} \quad (9.39)$$

donde \vec{a}_{CM} es la aceleración del centro de masa y la suma es sobre todas las fuerzas externas. El centro de masa se mueve como una partícula imaginaria de masa M bajo la influencia de la fuerza externa resultante en el sistema.

Análisis de modelo para resolver problemas



Piense, dialogue y comparta

Consulte el prefacio para una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para obtener más artículos de evaluación para esta sección, visite **WEBASSIGN** From Cengage

- Usted es un jugador de fútbol en el equipo de su escuela. En la práctica, patea un balón de 0.400 kg del suelo en la yarda 20 de un campo de fútbol que está exactamente a lo largo de una recta norte-sur. El vector de velocidad inicial de la pelota está dirigido a 30.0° arriba de la horizontal, hacia el norte, y tiene una magnitud de 27.0 m/s. Usted ve la pelota cuando se levanta en el aire. Cuando la bola alcanza su punto más alto en su trayectoria parabólica, un águila de 4.18 kg volando hacia el sur y a lo largo de una recta horizontal choca con

la bola. Suponga que la bola muy inflada hace una colisión elástica con el pico duro del pájaro, y que la pelota rebota por la colisión con un vector de velocidad que es horizontal y hacia el sur. La bola aterriza de nuevo en el punto exacto en el suelo en que fue pateada. (a) ¿Qué tan rápido volaba el águila? (desprecie la resistencia del aire.) (b) ¿Qué tan rápido y en qué dirección se mueve el águila justo después de la colisión? (suponga que ¡aún no ha ocurrido el aleteo!) (c) En realidad, la colisión no será elástica: algo de energía cinética se convertirá en otra forma de energía. Suponiendo que algo de la energía cinética se pierde en una colisión inelástica, ¿la velocidad requerida del águila será más grande o más pequeña que en el inciso (a)?

- ACTIVIDAD** Dibuje cuidadosamente un triángulo rectángulo sobre un trozo de cartón, tal que uno de sus catetos sea 30-40 cm de longitud y el otro cateto es mucho más corto. Mida el punto medio exacto de cada uno de los tres lados del triángulo y marque estos tres puntos. Trace una recta a través del triángulo, desde un vértice del triángulo al punto en la parte opuesta. Repita para las otras dos esquinas. Las tres rectas se intersecan en el centro de masa del triángulo. Dibuje una cuarta recta perpendicular al cateto más largo, que pase a través del centro de masa, y termine cuando

cruza la hipotenusa del triángulo. Perfore un agujero en el cartón justo dentro del borde del triángulo donde la cuarta recta cruza la hipotenusa. Corte con cuidado el triángulo de la cartulina. Ate una cuerda a través del agujero y cuelgue el triángulo de la cuerda. El lado más largo del triángulo debe estar paralelo a la mesa. ¿Por qué debe ser cierto esto? Ahora mida la distancia a lo largo del largo del cateto desde el ángulo más pequeño a la cuarta recta. ¿qué fracción de todo el cateto más largo es esta distancia?

Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage

SECCIÓN 9.1 Cantidad de movimiento lineal

- Una partícula de masa m se mueve con cantidad de movimiento de magnitud p . (a) Demuestre que la energía cinética de la partícula es $K = p^2/2m$. (b) Expresar la magnitud de la cantidad de movimiento de la partícula en términos de su energía cinética y masa.
- Una partícula de 3.00 kg tiene una velocidad de $(3.00\hat{i} - 4.00\hat{j})$ m/s. (a) Encuentre las componentes x y y de su cantidad de movimiento. (b) Encuentre la magnitud y dirección de su cantidad de movimiento.
- Una pelota de béisbol se aproxima a la placa de home con una rapidez de 45.0 m/s, moviéndose horizontalmente justo antes de ser golpeada por un bat. El jugador batea la pelota dándole una rapidez de 55.0 m/s. La pelota tiene una masa de 145 g y está en contacto con el bat durante 2.00 ms. ¿Cuál es el vector fuerza promedio que la bola ejerce sobre el bat durante su interacción.

SECCIÓN 9.2 Modelo de análisis: Sistema aislado (cantidad de movimiento)

- Un niño de 65.0 kg y su hermana de 40.0 kg, ambos con patines, están frente a frente en reposo. La niña empuja duro al niño y lo envía hacia atrás con velocidad de 2.90 m/s hacia el oeste. Ignore la fricción. (a) Describa el movimiento posterior de la niña. (b) ¿Cuánta energía potencial del cuerpo de la niña se convierte en energía mecánica del sistema niño-niña? (c) ¿Se conserva la cantidad de movimiento del sistema niño-niña en el proceso de empujar? Si así es, explique cómo ello es posible considerando (d) que hay fuerzas grandes en acción y (e) que no existe movimiento anticipado y con mucho movimiento posterior.
- Dos bloques de masas m y $3m$ se colocan sobre una superficie horizontal sin fricción. Un resorte ligero se une al bloque más masivo, y los bloques se juntan con el resorte entre ellos (figura P9.5). Una cuerda que inicialmente mantiene a los bloques juntos se quema; después de esto, el bloque de masa $3m$ se mueve hacia la derecha con una rapidez de 2.00 m/s. (a) ¿Cuál es la velocidad del bloque de masa m ? (b) Encuentre la energía

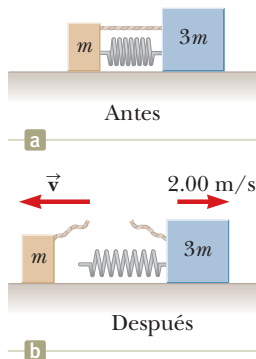


Figura P9.5

- potencial elástica original del sistema, empleando $m = 0.350$ kg. (c) ¿La energía original está en el resorte o en la cuerda? (d) Explique su respuesta al inciso (c). (e) ¿La cantidad de movimiento del sistema se conserva en el proceso de rompimiento? Explique cómo eso es posible considerando (f) que hay fuerzas grandes en acción y (g) sin movimiento anticipado y mucho movimiento posterior?
- Cuando usted salta recto hacia arriba tan alto como puede, ¿cuál es el orden de magnitud de la máxima rapidez de retroceso que le da a la Tierra? Modele la Tierra como un objeto perfectamente sólido. En su solución, establezca las cantidades físicas que toma como datos y los valores que mide o estima para ellos.

SECCIÓN 9.3 Modelo de análisis: Sistema no aislado (cantidad de movimiento)

- Un deslizador de masa m es libre de deslizarse a lo largo de una pista de aire horizontal. Se empuja contra un lanzador en un extremo de la pista. Modele el lanzador como un resorte ligero con constante elástica k comprimido una distancia x . El deslizador se libera desde el reposo. (a) Muestre que el deslizador logra una rapidez de $v = x(k/m)^{1/2}$. (b) Pruebe que la magnitud del impulso impartido al deslizador está dado por la expresión $I = x(km)^{1/2}$. (c) ¿Se realiza más trabajo sobre un carrito con masa más grande o una más pequeña?
- Usted y su hermano discuten a menudo acerca de cómo sostener con seguridad a un niño en un auto en movimiento. Usted insiste en que los asientos especiales para niños son importantes para aumentar las posibilidades de que un niño sobreviva un accidente. Su hermano dice que, siempre y cuando su esposa se siente al lado de él con un cinturón de seguridad mientras conduce, puede sostener a su niño en su regazo en un accidente. Usted decide realizar un cálculo para tratar de convencer a su hermano. Considere una colisión hipotética en la que el niño de 12 kg y sus padres van en un auto que viaja a 60 mi/h en relación con el suelo. El auto golpea una pared, un árbol, u otro auto, y se detiene en 0.10 s. Usted le quiere mostrar a su hermano la magnitud de la fuerza necesaria para que su esposa sostenga a su hijo durante la colisión.
- El frente de 1.20 m de un auto de 1 400 kg está diseñado como una "zona de deformación" que colapsa para absorber el impacto de una colisión. Si un auto que viaja a 25.0 m/s se detiene uniformemente en 1.20 m, (a) ¿qué tanto dura la colisión?, (b) ¿cuál es la magnitud de la fuerza promedio en el auto, y (c) ¿cuál es la aceleración del auto? Expresar la aceleración como un múltiplo de la aceleración debida a la gravedad.
- La magnitud de la fuerza neta que se ejerce en la dirección x en una partícula de 2.50 kg varía en el tiempo como se muestra en la figura P9.10 (página 244). Encuentre: (a) el impulso

de la fuerza en el intervalo de tiempo entre 0 y 5.00 s, (b) la velocidad final que logra la partícula si originalmente está en reposo, (c) su velocidad final si su velocidad original es $-2.00\hat{i}$ m/s, y (d) la fuerza promedio ejercida en la partícula durante el intervalo de tiempo entre 0 y 5.00 s.

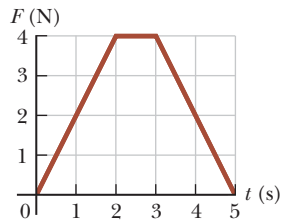


Figura P9.10

11. Cae agua sin salpicar con una rapidez de 0.250 L/s desde una altura de 2.60 m en una cubeta de 0.750 kg sobre una báscula. Si la cubeta originalmente está vacía, ¿qué lee la báscula 3.00 s después de que el agua comienza a acumularse en ella?

SECCIÓN 9.4 Colisiones en una dimensión

12. Un auto de 1 200 kg viaja inicialmente a $v_{Ci} = 25.0$ m/s hacia el este y choca en la parte trasera de un camión de 9 000 kg que se mueve en la misma dirección a $v_{Ti} = 20.0$ m/s (figura P9.12). La velocidad del auto inmediatamente después de la colisión es $v_{Cf} = 18.0$ m/s hacia el este. (a) ¿Cuál es la velocidad del camión inmediatamente después de la colisión? (b) ¿Cuál es el cambio en la energía mecánica del sistema auto-camión en la colisión? (c) Explique este cambio en energía mecánica.

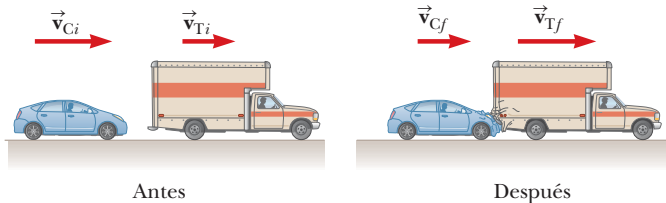


Figura P9.12

13. Un vagón de ferrocarril de 2.50×10^4 kg de masa se mueve con una rapidez de 4.00 m/s. Choca y se une con otros tres vagones acoplados, cada uno de la misma masa que el vagón solo y se mueven en la misma dirección con una rapidez inicial de 2.00 m/s. (a) ¿Cuál es la rapidez de los cuatro vagones después de la colisión? (b) ¿Cuánta energía mecánica se pierde en la colisión?
14. Cuatro vagones, cada uno de 2.50×10^4 kg de masa, se acoplan y avanzan a lo largo de pistas horizontales con rapidez v_i hacia el sur. Un actor de cine muy fuerte, que viaja en el segundo vagón, desacopla el vagón frontal y le da un gran empujón, lo que aumenta su rapidez a 4.00 m/s hacia el sur. Los tres vagones restantes continúan moviéndose hacia el sur, ahora a 2.00 m/s. (a) Encuentre la rapidez inicial de los cuatro vagones. (b) ¿Qué tanto cambió la energía potencial en el cuerpo del actor? (c) Establezca la relación entre el proceso aquí descrito y el proceso del problema 13.
15. Un automóvil de masa m que se mueve con rapidez v_1 colisiona y se acopla con la parte trasera de un camión de masa $2m$ que inicialmente viaja en la misma dirección que el automóvil, pero a una menor rapidez v_2 . (a) ¿Cuál es la rapidez v_f de los dos vehículos inmediatamente después de la colisión? (b) ¿Cuál es el cambio en energía cinética del sistema automóvil-camión en la colisión?
16. Una bala de 7.00 g, cuando se dispara desde un arma en un bloque de madera de 1.00 kg sostenido en un tornillo de banco, penetra el bloque a una profundidad de 8.00 cm. Este bloque de madera se coloca sobre una superficie horizontal sin fricción, y una segunda bala de 7.00 g se dispara desde el arma en el bloque. En este caso, ¿a qué profundidad penetra la bala en el bloque?
17. Una pelota de tenis de 57.0 g de masa se sostiene justo arriba de un balón de basquetbol de 590 g de masa. Con sus cen-

tros verticalmente alineados, ambos se liberan desde el reposo en el mismo momento, para caer una distancia de 1.20 m, como se muestra en la figura P9.17. (a) Encuentre la magnitud de la velocidad hacia abajo con la que el balón llega al suelo. (b) Suponga que una colisión elástica con el suelo instantáneamente invierte la velocidad del balón mientras la pelota de tenis aún se mueve hacia abajo.

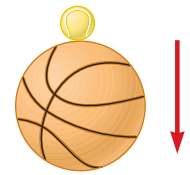


Figura P9.17

Luego las dos bolas se encuentran en una colisión elástica. ¿A qué altura rebota la pelota de tenis?

18. (a) Tres carros de masas $m_1 = 4.00$ kg, $m_2 = 10.0$ kg y $m_3 = 3.00$ kg se mueven sobre una pista horizontal sin fricción con magnitudes de velocidad de $v_1 = 5.00$ m/s hacia la derecha, $v_2 = 3.00$ m/s hacia la derecha y $v_3 = 4.00$ m/s hacia la izquierda, como se muestra en la figura P9.18. Acopladores de velcro hacen que los carros queden unidos después de chocar. Encuentre la velocidad final del tren de tres carros. (b) ¿Qué pasaría si? ¿Su respuesta requiere que todos los carros choquen y se unan en el mismo momento? ¿Qué sucedería si chocan en diferente orden?

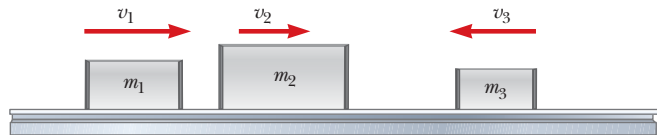


Figura P9.18

SECCIÓN 9.5 Colisiones en dos dimensiones

19. Usted ha sido contratado como un testigo experto por un abogado para un juicio que involucró un accidente de tráfico. El cliente del abogado, el demandante en este caso, viajaba hacia el este hacia una intersección a 13.0 m/s como se mide justo antes del accidente por un medidor de velocidad de carretera, y como lo ve un testigo digno de confianza. Cuando el demandante entró en la intersección, su auto fue golpeado por un conductor en dirección norte, el acusado en este caso conducía un auto con masa idéntica a la del demandante. Los vehículos pegados juntos después de la colisión y la izquierda paralela dejaron marcas de la patinada en un ángulo de $\theta = 55.08^\circ$ al norte del este, medido por investigadores de accidentes. El acusado afirma que el viajaba dentro del límite de velocidad de 35-mi/h. ¿Qué le aconseja usted al abogado?
20. Dos discos de juego de tejo, de igual masa, uno anaranjado y el otro amarillo, están involucrados en una colisión oblicua elástica. El disco amarillo inicialmente está en reposo y es golpeado por el disco anaranjado que se mueve con una rapidez de 5.00 m/s. Después de la colisión, el disco anaranjado se mueve a lo largo de una dirección que forma un ángulo de 37.0° con su dirección de movimiento inicial. Las velocidades de los dos discos son perpendiculares después de la colisión. Determine la rapidez final de cada disco.
21. Dos discos de juego de tejo, de igual masa, uno anaranjado y el otro amarillo, están involucrados en una colisión oblicua elástica. El disco amarillo inicialmente está en reposo y es golpeado por el disco anaranjado que se mueve con rapidez v_i . Después de la colisión, el disco anaranjado se mueve a lo largo de una dirección que forma un ángulo θ con su dirección de movimiento inicial. Las velocidades de los dos discos son perpendiculares después de la colisión. Determine la rapidez final de cada disco.
22. En un juego de fútbol americano, un corredor de 90.0 kg que se mueve al este con una rapidez de 5.00 m/s es detenido por un oponente de 95.0 kg que corre al norte con una

rapidez de 3.00 m/s. (a) Explique por qué la tacleada exitosa constituye una colisión perfectamente inelástica. (b) Calcule la velocidad de los jugadores inmediatamente después de la tacleada. (c) Determine la energía mecánica que disminuye como resultado de la colisión. Explique la energía perdida.

- 23.** Un protón, que se mueve con una velocidad de $v_i \hat{i}$, colisiona elásticamente con otro protón que inicialmente está en reposo. Suponiendo que los protones tienen la misma rapidez después de la colisión, encuentre (a) la rapidez de cada protón después de la colisión en términos de v_i y (b) la dirección de los vectores velocidad después de la colisión.

SECCIÓN 9.6 El centro de masa

- 24.** A una pieza uniforme de una hoja metálica se le da la forma como se muestra en la figura P9.24. Calcule las coordenadas x y y del centro de masa de la pieza.

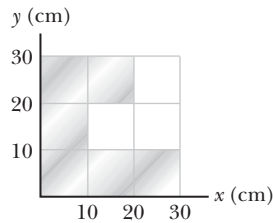


Figura P9.24

- 25.** En la selva, los exploradores encuentran un antiguo monumento en forma de triángulo isósceles, como se muestra en la figura P9.25. El monumento está hecho de decenas de miles de pequeños bloques de piedra de densidad $3\,800\text{ kg/m}^3$. La altura del monumento es de 15.7 m y un ancho de 64.8 m en su base y un grosor de 3.60 m desde el frente hasta la parte trasera. Antes de construir el monumento, todos los bloques de piedra yacían en el suelo. ¿Cuánto trabajo hicieron los constructores sobre los bloques para colocarlos en posición durante la edificación del monumento? *Nota:* La energía potencial gravitacional de un sistema objeto-Tierra está dada por $U_g = Mgy_{\text{CM}}$, donde M es la masa total del objeto y y_{CM} es la elevación de su centro de masa sobre el nivel de referencia seleccionado.

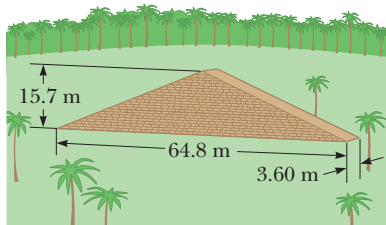


Figura P9.25

- 26.** Una barra de 30.0 cm de longitud tiene densidad lineal (masa por longitud) dada por $\lambda = 50.0 + 20.0x$ donde x es la distancia desde un extremo, medida en metros, y λ está en gramos/metro. (a) ¿Cuál es la masa de la barra? (b) ¿A qué distancia del extremo $x = 0$ está su centro de masa?

SECCIÓN 9.7 Sistemas de muchas partículas

- 27.** Considere un sistema de dos partículas en el plano xy : $m_1 = 2.00\text{ kg}$ está en la ubicación $\vec{r}_1 = (1.00\hat{i} + 2.00\hat{j})\text{ m}$ y tiene una velocidad de $(3.00\hat{i} + 0.500\hat{j})\text{ m/s}$; $m_2 = 3.00\text{ kg}$ está en $\vec{r}_2 = (-4.00\hat{i} - 3.00\hat{j})\text{ m}$ y tiene velocidad $(3.00\hat{i} - 2.00\hat{j})\text{ m/s}$. (a) Grafique a esas partículas en hoja cuadrículada. Dibuje sus vectores de posición y muestre sus velocidades. (b) Encuentre la posición del centro de masa del sistema y márkuelo en la cuadrícula. (c) Determine la velocidad del centro de masa y también indíquelo en el diagrama. (d) ¿Cuál es la cantidad de movimiento lineal total del sistema?
- 28.** El vector de posición de una partícula de 3.50 g que se mueve en el plano xy varía en el tiempo de acuerdo a

$\vec{r}_1 = (3\hat{i} + 3\hat{j})t + 2\hat{j}t^2$, donde t está en segundos y \vec{r} está en centímetros. Al mismo tiempo, el vector de posición de una partícula de 5.50 g varía como $\vec{r}_2 = 3\hat{i} - 2\hat{i}t^2 - 6\hat{j}t$. En $t = 2.50\text{ s}$, determine (a) el vector de posición del centro de masa, (b) la cantidad de movimiento lineal del sistema, (c) la velocidad del centro de masa, (d) la aceleración del centro de masa y (e) la fuerza neta que se ejerce en el sistema de dos partículas.

- 29.** Usted ha sido contratado como testigo experto en una investigación de un incidente de un drone con cuatro soportes. El incidente ocurrió durante una lluvia de meteoritos muy rara durante la cual varios trozos inusualmente masivos de material meteórico pasaron a través de la atmósfera y golpearon el suelo. El drone no tripulado estaba rondando en reposo en el centro de una casa en llamas, y acababa de caer retardante de fuego, cuando pareció explotar espontáneamente en cuatro grandes trozos. Las ubicaciones de las cuatro piezas en el suelo se midieron como sigue, en relación con el centro de la casa sobre la que el drone estaba rondando:

Pieza #	Masa (kg)	Distancia desde el centro de la casa (m)	Dirección desde la casa
1	80.0	150	Hacia el oeste
2	120	75.0	Hacia el norte
3	50.0	90.0	20.0° al oeste del sur
4	150	50.0	20.0° al norte del este

El Departamento de bomberos está sugiriendo que el drone estaba defectuoso y explotó mientras estaba en uso. El fabricante del drone sugiere que el drone fue golpeado por un meteorito, causando la explosión. Realice un cálculo que muestre la evidencia que sugiera un acuerdo con una de estas posiciones.

SECCIÓN 9.8 Sistemas deformables

- 30.** Para un proyecto de tecnología, un estudiante construyó un vehículo, de 6.00 kg de masa total, que se mueve por sí solo. Como se muestra en la figura P9.30, corre sobre dos orugas ligeras que pasan alrededor de cuatro ruedas ligeras. Un carrete se acopla a uno de los ejes, y una cuerda originalmente enrollada sobre el carrete pasa sobre una polea unida al vehículo para soportar una carga elevada. Después de que el vehículo se libera desde el reposo, la carga descende lentamente, desenrolla la cuerda para girar el eje y hace que el vehículo se mueva hacia adelante (a la izquierda en la figura P9.30). La fricción es despreciable en la polea y los cojinetes del eje. La oruga no se desliza sobre las ruedas o el suelo. El carrete tiene una forma cónica de modo que la carga descende a una rapidez baja constante mientras el vehículo se mueve horizontalmente a través del suelo con aceleración constante, y alcanza una velocidad final de $3.00\hat{i}\text{ m/s}$. (a) ¿El suelo imparte impulso al vehículo? Si es así, ¿cuánto? (b) ¿El suelo realiza trabajo sobre el vehículo? Si así es, ¿cuánto? (c) ¿Tiene sentido decir que la cantidad de movimiento final del vehículo viene del suelo? Si no, ¿de dónde proviene? (d) ¿Tiene sentido decir que la energía cinética final del vehículo viene del suelo? Si no, ¿de dónde proviene? (e) ¿Se puede decir que una fuerza particular causa la aceleración hacia adelante del vehículo? ¿Qué la ocasiona?

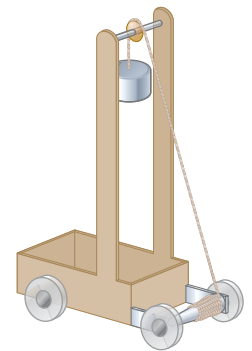


Figura P9.30



31. Una persona de 60.0 kg dobla sus rodillas y luego salta recto hacia arriba. Después de que sus pies dejan el suelo, su movimiento no es afectado por la resistencia del aire y su centro de masa se eleva un máximo de 15.0 cm. Modele el suelo como completamente sólido y sin movimiento. (a) ¿El suelo imparte impulso a la persona? (b) ¿El suelo realiza trabajo sobre la persona? (c) ¿Con qué cantidad de movimiento deja el suelo la persona? (d) ¿Tiene sentido decir que esta cantidad de movimiento viene del suelo? Explique. (e) ¿Con qué energía cinética deja el suelo la persona? (f) ¿Tiene sentido decir que esta energía proviene del suelo? Explique.

SECCIÓN 9.9 Propulsión de cohetes

32. Una manguera se sostiene como se muestra en la figura P9.32. Originalmente la manguera está llena con agua en reposo. ¿Qué fuerza adicional es necesaria para mantener fija la boquilla después de iniciar el flujo del agua si se descarga a una cantidad de 0.600 kg/s con una rapidez de 25.0 m/s?



Figura P9.32

33. Un cohete en el espacio profundo será capaz de impulsar una carga total (carga más armazón del cohete y motor) de 3.00 toneladas métricas a una rapidez de 10 000 m/s. (a) Tiene un motor y combustible diseñados para producir una rapidez de escape de 2 000 m/s. ¿Cuánto combustible más oxidante se requiere? (b) Si un combustible y diseño de motor dieran una rapidez de escape de 5 000 m/s, ¿qué cantidad de combustible y oxidante se requeriría para la misma tarea? (c) Note que la rapidez de escape en el inciso (b) es 2.50 veces mayor que la del inciso (a), explique por qué la masa de combustible requerida no es más pequeña por un factor de 2.50.

34. Un cohete tiene masa total $M_i = 360$ kg, incluidos $M_f = 330$ kg de combustible y oxidante. En el espacio interestelar, parte del reposo en la posición $x = 0$, enciende su motor en el tiempo $t = 0$ y pone empuje con rapidez relativa $v_e = 1\,500$ m/s en proporción constante $k = 2.50$ kg/s. El combustible durará un tiempo de quema dado por $T_b = M_f/k = 330$ kg/(2.5 kg/s) = 132 s. (a) Demuestre que, durante la quema, la velocidad del cohete como función del tiempo está dada por

$$v(t) = -v_e \ln\left(1 - \frac{kt}{M_i}\right)$$

- (b) Haga una gráfica de la velocidad del cohete como función del tiempo para tiempos que van de 0 a 132 s. (c) Demuestre que la aceleración del cohete es

$$a(t) = \frac{kv_e}{M_i - kt}$$

- (d) Grafique la aceleración como función del tiempo. (e) Demuestre que la posición del cohete es

$$x(t) = v_e \left(\frac{M_i}{k} - t\right) \ln\left(1 - \frac{kt}{M_i}\right) + v_e t$$

- (f) Grafique la posición durante la quema como función del tiempo.

PROBLEMAS ADICIONALES

35. Una patinadora amateur de masa M está atrapada a la mitad de una pista de hielo y le es imposible retornar al extremo sin hielo. Ella resbala en cada movimiento que efectúa y

permanece en el mismo sitio. Decide intentar regresar a la seguridad mediante el lanzamiento de sus guantes de masa m en dirección opuesta al lado seguro. (a) Lanza sus guantes lo más fuerte que puede, los cuales abandonan su mano con una velocidad horizontal \vec{v}_{guantes} . Explique si ella se mueve. Si lo hace, calcule su velocidad $\vec{v}_{\text{patinadora}}$ respecto a la Tierra después de lanzar los guantes. (b) Discuta su movimiento desde el punto de vista de la patinadora las fuerzas que actúan en ella.

36. (a) La figura P9.36 exhibe tres etapas en la operación del péndulo balístico discutido en el ejemplo 9.6 (y que se muestra en la figura 9.10b). En la figura P9.36a el proyectil se aproxima al péndulo. La figura P9.36b indica la situación justo después de que el proyectil es capturado por el péndulo. En la figura P9.36c, el brazo del péndulo se ha levantado y llega al reposo a una altura h sobre su posición inicial. Demuestre que la cantidad de la energía cinética del sistema proyectil-péndulo inmediatamente después de la colisión a la energía cinética inmediatamente antes es $m_1/(m_1 + m_2)$. (b) ¿Cuál es la relación de la cantidad de movimiento del sistema inmediatamente después de la colisión a la cantidad de movimiento inmediatamente antes? (c) Un estudiante opina que esta fuerte disminución en la energía mecánica debe estar acompañada de al menos una disminución en la cantidad de movimiento. ¿Qué puede decir usted sobre esta opinión del estudiante?

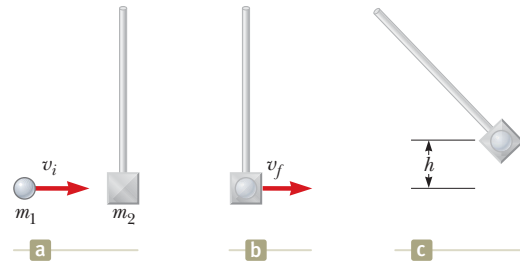


Figura P9.36 Problemas 36 y 43. (a) Una bola de metal se mueve hacia el péndulo. (b) La bola es capturada por el péndulo. (c) La combinación bola-péndulo oscila hasta una altura h antes de llegar al reposo.

37. **Problema de reposo.** Una persona de 60.0 kg corre con una rapidez inicial de 4.00 m/s y salta a un carro de 120 kg inicialmente en reposo (figura P9.37). La persona desliza sobre la superficie superior del carro y finalmente llega al reposo respecto al carro. El coeficiente de fricción cinética entre la persona y el carro es 0.400. Puede ignorarse la fricción entre el carro y el suelo. (a) Encuentre la velocidad final de la persona y del carro relativas al suelo. (b) Obtenga la fuerza de fricción que actúa sobre la persona mientras desliza sobre la parte superior del carro. (c) ¿Durante qué distancia actúa la fuerza de fricción sobre la persona? (d) Encuentre el cambio en la cantidad de movimiento de la persona y el cambio en la cantidad de movimiento del carro. (e) Determine el des-

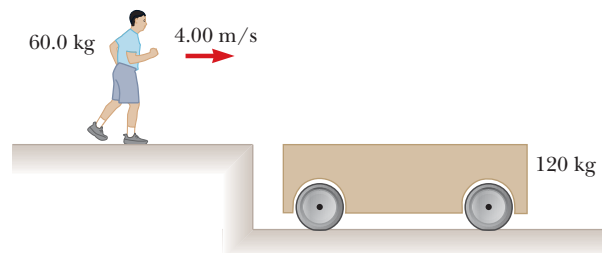


Figura P9.37

plazamiento de la persona respecto al suelo mientras resbala sobre el carro. (f) Obtenga el desplazamiento del carro relativo al suelo mientras la persona desliza. (g) Encuentre el cambio en energía cinética de la persona. (h) Encuentre el cambio en energía cinética del carro. (i) Explique por qué difieren las respuestas a (g) y (h). (¿Qué tipo de colisión es esta y qué explica la pérdida de energía mecánica?)

38. Un cañón está rigidamente instalado en una plataforma, la cual se puede mover en rieles horizontales pero está conectada a un poste mediante un largo resorte, inicialmente no deformado y con una constante elástica $k = 2.00 \times 10^4$

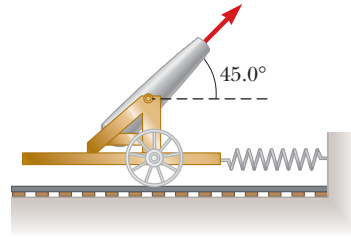


Figura P9.38

N/m, como se muestra en la figura P9.38. El cañón dispara un proyectil de 200 kg a una velocidad de 125 m/s a 45° sobre la horizontal. (a) Suponga que la masa del cañón y su plataforma es 5 000 kg, entonces encuentre la rapidez de retroceso del cañón. (b) Determine la máxima extensión del resorte. (c) Obtenga la fuerza máxima que el resorte ejerce sobre la plataforma. (d) Considere el sistema integrado por el cañón, la plataforma y el proyectil. ¿Se conserva la cantidad de movimiento de este sistema durante el disparo? ¿Por qué sí o por qué no?

39. Un bloque de madera de 1.25 kg está sobre una mesa que

CIC

tiene un hoyo como se ilustra en la figura P9.39. Una bala de 5.00 g es disparada con una velocidad inicial v_i hacia arriba en el fondo del hoyo y permanece en éste después de la colisión. El bloque y la bala se levantan una altura máxima de 22.0 cm. (a) Describa cómo encontraría la velocidad inicial de la bala empleando ideas que ha aprendido en este capítulo. (b) Calcule la velocidad inicial de la bala a partir de la información dada.

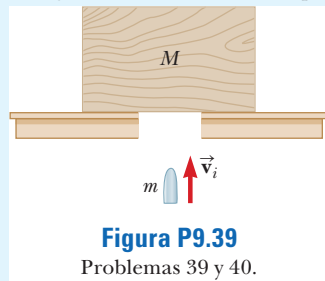


Figura P9.39

Problemas 39 y 40.

40. Un bloque de madera de masa M está sobre una mesa que

CIC

S

tiene un hoyo como se muestra en la figura P9.39. Una bala de masa m es disparada con una velocidad v_i hacia arriba en el fondo del hoyo y permanece en éste después de la colisión. El bloque y la bala se levantan una altura máxima h . (a) Describa cómo encontraría la velocidad inicial de la bala utilizando ideas que aprendió en este capítulo. (b) Encuentre una expresión para la velocidad de la bala.

41. Dos deslizadores se ponen en movimiento sobre un riel de

S

aire. Un resorte con constante elástica k se une al extremo posterior del segundo deslizador. Como se muestra en la figura P9.41, el primer deslizador de masa m_1 se mueve hacia la derecha con rapidez v_1 , y el segundo deslizador de masa m_2 se desplaza más despacio hacia la derecha con rapidez v_2 . Cuando m_1 choca con el resorte unido a m_2 , el resorte se comprime una distancia $x_{\text{máx}}$, y entonces los deslizadores se sepa-

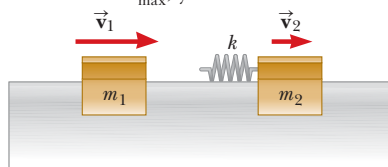


Figura P9.41

ran nuevamente. En términos de v_1 , v_2 , m_1 , m_2 y k , encuentre (a) la rapidez v a máxima compresión, (b) la compresión máxima $x_{\text{máx}}$ y (c) la velocidad de cada deslizador después de que m_1 pierde contacto con el resorte.

42. Perseguido por lobos feroces, usted está en un trineo sin caballos, y se desliza sin fricción a través de un lago cubierto de hielo. Usted toma una acción descrita por las ecuaciones

$$(270 \text{ kg})(7.50 \text{ m/s})\hat{i} = (15.0 \text{ kg})(-v_{1f}\hat{i}) + (255 \text{ kg})(v_{2f}\hat{i})$$

$$v_{1f} + v_{2f} = 8.00 \text{ m/s}$$

(a) Complete el enunciado del problema, proporcione los datos e identifique las incógnitas. (b) Encuentre los valores de v_{1f} y v_{2f} . (c) Obtenga la cantidad de energía que se transformó de energía potencial almacenada en su cuerpo a energía cinética del sistema.

43. **Problema de repaso.** Una estudiante efectúa un experimento con el péndulo balístico empleando un aparato similar al discutido en el ejemplo 9.6 y que se muestra en la figura P9.36.

S

Ella obtiene los siguientes datos promedio: $h = 8.68 \text{ cm}$, masa del proyectil $m_1 = 68.8 \text{ g}$ y masa del péndulo $m_2 = 263 \text{ g}$. (a) Determine la rapidez inicial v_{1A} del proyectil. (b) La segunda parte de su experimento es obtener v_{1A} disparando el mismo proyectil horizontalmente (con el péndulo retirado de la trayectoria) y medir su posición horizontal final x y distancia de caída y (figura P9.43). ¿Qué valor numérico obtiene ella si utiliza los valores medidos $x = 257 \text{ cm}$ y $y = 85.3 \text{ cm}$? (c) ¿Qué factores podrían explicar la diferencia en este valor comparado con el obtenido en el inciso (a)?

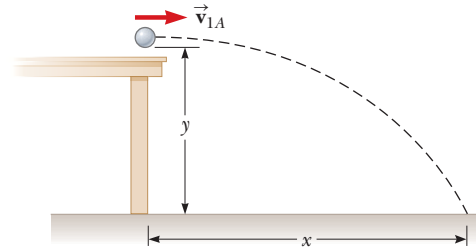


Figura P9.43

44. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Un astronauta,

junto con el equipo que lleva, tiene una masa de 150 kg. Él está realizando una caminata espacial afuera de su nave, la cual se mueve a velocidad constante. De manera accidental, el astronauta empuja la nave y comienza a retirarse a 20.00 m/s respecto a la nave, sin correa de sujeción. Para retornar, él toma equipo de su mochila y lo lanza en la dirección de alejamiento de la nave. Debido a su voluminoso traje espacial, puede lanzar equipo con rapidez máxima de 5.00 m/s respecto a sí mismo. Después de lanzar suficiente equipo, comienza a moverse de regreso a la nave y se puede agarrar a ella y entrar en la nave.

45. **Problema de repaso.** Una bala de masa $m = 8.00 \text{ g}$ se dispara

T

contra un bloque de masa $M = 250 \text{ g}$ que inicialmente está en reposo en el borde de una mesa de altura $h = 1.00 \text{ m}$ (figura P9.45). La bala permanece en el bloque, y después del

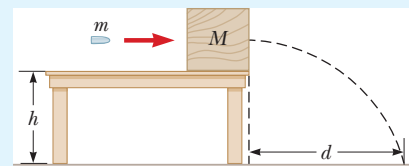


Figura P9.45

Problemas 45 y 46

impacto el bloque aterriza $d = 2.00$ m del extremo de la mesa. Determine la rapidez inicial de la bala.

46. Problema de repaso. Una bala de masa m se dispara contra un bloque de masa M que inicialmente está en reposo en el borde de una mesa sin fricción de altura h (figura P9.45). La bala permanece en el bloque, y después del impacto el bloque aterriza a una distancia d del extremo de la mesa. Determine la rapidez inicial de la bala.

47. Una esfera de 0.500 kg se mueve con una velocidad dada por $(2.00\hat{i} - 3.00\hat{j} + 1.00\hat{k})$ m/s, golpea a otra esfera de masa 1.50 kg que se desplaza con una velocidad inicial de $(-1.00\hat{i} + 2.00\hat{j} - 3.00\hat{k})$ m/s. (a) La velocidad de la esfera de 0.500 kg después de la colisión es $(-1.00\hat{i} + 3.00\hat{j} - 8.00\hat{k})$ m/s. Encuentre la velocidad final de la esfera de 1.50 kg e identifique el tipo de colisión (elástica, inelástica o perfectamente inelástica). (b) Ahora suponga que la velocidad de la esfera de 0.500 kg después de la colisión es $(-0.250\hat{i} + 0.750\hat{j} - 2.00\hat{k})$ m/s. Encuentre la velocidad final de la esfera de 1.50 kg e identifique el tipo de colisión. (c) ¿Qué pasaría si? Tome la velocidad de la esfera de 0.500 kg después de la colisión como $(-1.00\hat{i} + 3.00\hat{j} + a\hat{k})$ m/s. Encuentre el valor de a y la velocidad de la esfera de 1.50 kg después de una colisión elástica.

48. Problema de repaso. Una bala de cañón de masa m está cerca de un árbol en el filo de un acantilado de 36.0 m sobre la superficie del océano. En un esfuerzo por golpear a la bola hacia el acantilado, algunos niños amarran un extremo de una cuerda alrededor de una piedra de masa 80.0 kg y el otro extremo a una rama del árbol justo arriba de la bala de cañón. Ellos aprietan la cuerda para que la piedra justo toque el suelo y cuelgue cerca de la bala. Los niños mueven la piedra de retorno hasta que esté en reposo a 1.80 m sobre el suelo. Después liberan la piedra, que abanica hacia abajo y hace una colisión elástica frontal con la bala, proyectándola horizontalmente por el acantilado. La bala de cañón aterriza en el océano a una distancia horizontal R de su posición inicial. (a) Encuentre la componente horizontal R del desplazamiento de la bala y cómo depende de m . (b) ¿Cuál es el máximo valor posible para R ? (c) ¿a qué valor de m corresponde? (d) ¿Se conserva la energía mecánica para el sistema piedra-bala de cañón-Tierra durante este proceso? ¿Este principio es suficiente para resolver completamente el problema? Explique. (e) ¿Qué pasaría si? Demuestre que R no depende del valor de la aceleración gravitacional. ¿Es notable este resultado? Explique cómo esto podría tener sentido.

49. Problema de repaso. Un resorte ligero, con constante elástica 3.85 N/m, se comprime 8.00 cm y se mantiene entre un bloque de 0.250 kg a la izquierda y un bloque de 0.500 kg a la derecha. Ambos bloques están en reposo sobre una superficie horizontal. Los bloques se liberan simultáneamente de modo que el resorte tiende a separarlos. Encuentre la velocidad máxima que logra cada bloque si el coeficiente de fricción cinética entre cada bloque y la superficie es (a) 0 , (b) 0.100 y (c) 0.462 . Suponga que el coeficiente de fricción estática es mayor que el coeficiente de fricción cinética en cada caso.

50. Considere como un sistema al Sol con la Tierra en una órbita circular alrededor de aquél. Encuentre la magnitud del cambio en la velocidad del Sol en relación con el centro de masa del sistema durante un periodo de seis meses. Ignore la influencia de otros objetos del espacio. Puede obtener los datos astronómicos necesarios al final del libro.

51. Problema de repaso. Existen (podría decirse) tres teorías recíprocas del movimiento: la segunda ley de Newton, que afirma que la fuerza total sobre una partícula causa su aceleración; el teorema trabajo-energía cinética, que afirma que el trabajo total sobre una partícula causa su cambio en energía cinética; y el teorema impulso-cantidad de movimiento,

que establece que el impulso total sobre una partícula causa su cambio en cantidad de movimiento. En este problema, compare predicciones de las tres teorías en un caso particular. Un objeto de 3.00 kg tiene una velocidad $7.00\hat{j}$ m/s. Después, una fuerza total de $12.0\hat{i}$ N actúa en el objeto durante 5.00 s. (a) Calcule la velocidad final del objeto, con el teorema impulso-cantidad de movimiento. (b) Calcule su aceleración a partir de $\vec{a} = (\vec{v}_f - \vec{v}_i)/\Delta t$. (c) Calcule su aceleración a partir de $\vec{a} = \Sigma \vec{F}/m$. (d) Encuentre el desplazamiento vectorial del objeto a partir de $\Delta \vec{r} = \vec{v}_i t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$. (e) Obtenga el trabajo realizado en el objeto a partir de $W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$. (f) Encuentre la energía cinética final a partir de $\frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} m \vec{v}_f \cdot \vec{v}_f$. (g) Encuentre la energía cinética final a partir de $\frac{1}{2} m v_i^2 + W$. (h) Establezca el resultado de comparar las respuestas de los incisos (b) y (c), y las respuestas a los incisos (f) y (g).

PROBLEMAS DE DESAFÍO

52. C/C Sobre una banda transportadora cae arena desde una tolva fija una cantidad de 5.00 kg/s, como se muestra en la figura P9.52. La banda transportadora está sostenida por rodillos sin fricción. Se mueve con una rapidez constante de 0.750 m/s bajo la acción de una fuerza horizontal externa constante \vec{F}_{ext} que proporciona el motor que impulsa la banda. Encuentre: (a) la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento de la arena en la dirección horizontal, (b) la fuerza de fricción ejercida por la banda sobre la arena, (c) la fuerza externa \vec{F}_{ext} , (d) el trabajo hecho por \vec{F}_{ext} en 1 s y (e) la energía cinética adquirida por la arena que cae cada segundo debido al cambio en su movimiento horizontal. (f) ¿Por qué son diferentes las respuestas en (d) y (e)?

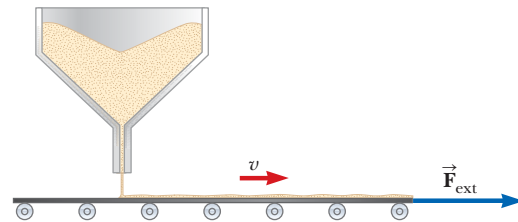


Figura P9.52

53. Dos partículas con masas m y $3m$ se mueven una hacia la otra a lo largo del eje x con la misma rapidez inicial v_i . La partícula con masa m viaja hacia la izquierda, y la partícula con masa $3m$ se desplaza hacia la derecha. Ellas chocan frontalmente, de manera elástica, y cada una rebota sobre la misma recta por la que se acercaron. (a) Encuentre la rapidez final de cada partícula en términos de v_i . (b) ¿Cuál es el ángulo θ al que se dispersó la partícula $3m$?

54. S Sobre una pista de aire horizontal, un deslizador de masa m lleva un poste con forma de Γ . El poste soporta una pequeña esfera densa, también de masa m , que cuelga justo arriba de lo alto del deslizador en una cuerda de longitud L . El deslizador y la esfera inicialmente están en reposo con la cuerda vertical. Una fuerza horizontal constante, de magnitud F , se aplica al deslizador, y lo mueve un desplazamiento x_1 ; después se quita la fuerza. Durante el intervalo de tiempo cuando la fuerza se aplica, la esfera se mueve a través de un desplazamiento con componente horizontal x_2 . (a) Encuentre la componente horizontal de la velocidad del centro de masa del sistema deslizador-esfera cuando la fuerza se retira. (b) Después de quitar la fuerza, el deslizador continúa moviéndose sobre la pista y la esfera se balancea atrás y adelante, ambos sin fricción. Encuentre una expresión para el mayor ángulo que la cuerda forma con la vertical.

Un perno oxidado resiste los esfuerzos para girarlo con una llave. ¿Cómo puede aflojar el perno? (Scott Richardson / Shutterstock)

Rotación de un objeto rígido en torno a un eje fijo

IMAGINE Ha vuelto a casa después del juego de billar en el capítulo anterior.

Vuelve a su cochera para trabajar en otro proyecto. Para esto, necesita algunas piezas de metal de un proyecto anterior. Las piezas de metal se han unido durante años con tuercas y tornillos, que ahora están bastante oxidados. Usando una llave inglesa, intenta aflojar un tornillo. No puede hacer esto por el óxido. Instintivamente, busca un tubo hueco que es más largo que el mango de la llave y la desliza sobre el mango. Empujando en el otro extremo del tubo, ahora puede aflojar el tornillo. Se dice a sí mismo, “¡espera un momento! ¿Cómo sé usar un tubo largo? ¿Por qué el tubo largo me permitió aflojar el tornillo oxidado?”. Su proyecto permanece inactivo mientras reflexiona sobre este nuevo desarrollo. Entonces sus pensamientos progresan más. Aplicó una fuerza en el tubo, como las fuerzas estudiadas en el capítulo 5, pero no logró algo de aceleración a través del espacio como en los objetos del capítulo 5. Algo giró: el tornillo. Esto es nuevo: la fuerza causa la rotación. Tiene más en qué pensar. Su proyecto queda inactivo por el resto del día.

CONEXIONES Hasta ahora, hemos centrado nuestra atención en las partículas en movimiento *traslacional*. Cuando analizamos el movimiento de objetos con un tamaño en los capítulos anteriores, ignoramos cualquier movimiento giratorio del objeto. Ahora es el momento de *no* ignorar este movimiento giratorio. En este capítulo, nos centramos en el movimiento de rotación de un objeto. Seguiremos el esquema de los capítulos anteriores para este nuevo tipo de movimiento; encontraremos análogos de rotación para posición, velocidad, aceleración, masa, fuerza y energía. Muchos objetos exhiben movimiento traslacional y rotacional al mismo tiempo. Investigaremos cómo reducir el movimiento aparentemente complicado de dicho objeto a una combinación de los dos tipos de movimiento. Al tratar con un objeto giratorio, el análisis se simplifica

- 10.1 Posición, velocidad y aceleración angular
- 10.2 Modelo de análisis: Objeto rígido bajo aceleración angular constante
- 10.3 Cantidades angulares y traslacionales
- 10.4 Momento de torsión
- 10.5 Modelo de análisis: Objeto rígido bajo un momento de torsión neto
- 10.6 Cálculo de momentos de inercia
- 10.7 Energía cinética rotacional
- 10.8 Consideraciones energéticas en el movimiento rotacional
- 10.9 Movimiento de rodamiento de un objeto rígido



enormemente suponiendo que el objeto es rígido. Un **objeto rígido** es uno que no es deformable; es decir, las ubicaciones relativas de todas las partículas, de las que se compone el objeto, permanecen constantes. Todos los objetos reales son deformables hasta cierto punto; sin embargo, nuestro modelo de objeto rígido, es útil en muchas situaciones donde la deformación es insignificante. Hemos desarrollado modelos analíticos basados en partículas y sistemas. En este capítulo, presentamos otra clase de modelos analíticos basados en un modelo simplificado de un objeto rígido. En capítulos futuros, veremos, por ejemplo, objetos rotativos para los cuales necesitamos estos modelos: la Tierra girando en el capítulo 13, la armadura de un motor en el capítulo 30 y la molécula de HCl en el capítulo 42.

10.1 Posición, velocidad y aceleración angular

Como lo mencionamos en la introducción, desarrollaremos nuestra comprensión del movimiento de rotación de una manera paralela a la utilizada para el movimiento de traslación en los capítulos anteriores. En el capítulo 2 comenzamos definiendo las variables cinemáticas: posición, velocidad y aceleración. Hacemos lo mismo aquí para el movimiento de rotación.

La figura 10.1 ilustra una vista desde arriba de un disco Blu-ray, en rotación. El disco da vueltas en torno a un eje fijo perpendicular al plano de la figura que pasa a través del centro del disco en O . Un pequeño elemento del disco modelado como partícula en P está a una distancia fija r desde el origen y gira en torno a él en un círculo de radio r . (De hecho, cada partícula en el disco experimenta movimiento circular en torno a O .) Es conveniente representar la posición de P con sus coordenadas polares (r, θ) , donde r es la distancia desde el origen a P y θ se mide *contra las manecillas del reloj* desde cierta línea de referencia fija en el espacio, como se muestra en la figura 10.1a. En esta representación, el ángulo θ cambia en el tiempo mientras r permanece constante. A medida que la partícula se mueve a lo largo del círculo desde la línea de referencia, que está a un ángulo $\theta = 0$, se mueve a través de una longitud de arco s , como en la figura 10.1b. Podemos definir el ángulo θ como la relación de la longitud del arco s al radio r :

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (10.1a)$$

Ya que θ es la razón de una longitud de arco al radio del círculo, es un número puro. Sin embargo, por lo general, a θ se le da la unidad artificial **radián** (rad), donde un radián es el ángulo subtendido por una longitud de arco igual al radio del arco. Ya que la circunferencia de un círculo es $2\pi r$, se sigue de la ecuación 10.1b que 360° corresponde a un ángulo de $(2\pi r/r)$ rad = 2π rad. Por tanto, $1 \text{ rad} = 360^\circ/2\pi \approx 57.3^\circ$. Para convertir un ángulo en grados a un ángulo en radianes, se usa $\pi \text{ rad} = 180^\circ$, de modo que

$$\theta(\text{rad}) = \frac{\pi}{180^\circ} \theta(\text{grad})$$

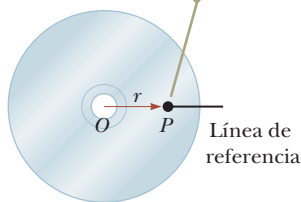
Por ejemplo, 60° es igual a $\pi/3$ rad y 45° es igual a $\pi/4$ rad.

De acuerdo con la definición del ángulo θ en la ecuación 10.1a, podemos expresar la longitud del arco s a través del cual la partícula en P se mueve en la figura 10.1b como

$$s = r\theta \quad (10.1b)$$

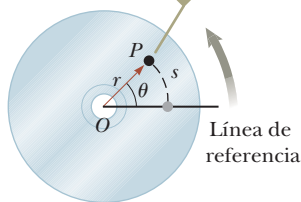
Ya que el disco en la figura 10.1 es un objeto rígido, a medida que la partícula se mueve a través de un ángulo θ desde la línea de referencia, cualquier otra partícula sobre el objeto da vueltas a través del mismo ángulo θ . En consecuencia, se puede asociar el ángulo θ con todo el objeto rígido así como con una partícula individual, que permite definir la *posición angular* de un objeto rígido en su movimiento rotacional. Se elige una línea de referencia sobre el objeto, como una línea que conecte a O con una partícula elegida sobre el objeto. La **posición angular** del objeto rígido es el ángulo θ entre esta línea de referencia sobre el objeto y la línea de referencia fija en el espacio, que con frecuencia se elige como el eje x .

Para definir la posición angular del disco, se elige una línea de referencia fija. Una partícula en P se encuentra a una distancia r del eje de rotación a través de O .



a

Mientras el disco gira, una partícula en P se mueve a través de una longitud de arco de una trayectoria circular de radio r . La posición angular de P es θ .



b

Figura 10.1 Disco Blu-ray que gira en torno a un eje fijo a través de O perpendicular al plano de la figura.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 10.1

Recuerde el radián En las ecuaciones rotacionales, *debe* usar ángulos expresados en radianes. No caiga en la trampa de usar ángulos medidos en grados en las ecuaciones rotacionales.



Tal identificación es similar a la forma en que se define la posición de un objeto en movimiento traslacional como la distancia x entre el objeto y la posición de referencia, que es el origen, $x = 0$. Por tanto, el ángulo θ desempeña el mismo papel en el movimiento de rotación que la posición x hace en movimiento traslacional.

Conforme la partícula en cuestión sobre el objeto rígido viaja de la posición \textcircled{A} a la posición \textcircled{B} en un intervalo de tiempo Δt , como en la figura 10.2, la línea de referencia fija al objeto cubre un ángulo $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$. Esta cantidad $\Delta\theta$ se define como el **desplazamiento angular** del objeto rígido:

$$\Delta\theta \equiv \theta_f - \theta_i$$

La rapidez a la que se presenta este desplazamiento angular puede variar. Si el objeto rígido gira rápidamente, este desplazamiento puede ocurrir en un intervalo breve de tiempo. Si da vueltas lentamente, este desplazamiento se presenta en un intervalo de tiempo más largo. Estas diferentes razones de rotación se cuantifican al definir la **rapidez angular promedio** ω_{prom} (letra griega omega) como la razón del desplazamiento angular de un objeto rígido al intervalo de tiempo Δt durante el que se presenta el desplazamiento:

$$\omega_{\text{prom}} \equiv \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{10.2}$$

En analogía con la rapidez lineal, la **rapidez angular instantánea** ω se define como el límite de la rapidez angular promedio conforme Δt tiende a cero:

$$\omega \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \tag{10.3}$$

La rapidez angular tiene unidades de radianes por segundo (rad/s), que se pueden escribir como s^{-1} porque los radianes son adimensionales. ω se considera positiva cuando θ aumenta (movimiento contra las manecillas del reloj en la figura 10.2) y negativa cuando θ disminuye (en sentido de las manecillas del reloj en la figura 10.2).

E XAMEN RÁPIDO 10.1 Un objeto rígido da vueltas en un sentido contrario a las manecillas del reloj en torno a un eje fijo. Cada uno de los siguientes pares de cantidades representa una posición angular inicial y una posición angular final del objeto rígido. (i) ¿Cuál de los conjuntos *sólo* puede ocurrir si el objeto rígido da vueltas a través de más de 180° ? (a) 3 rad, 6 rad, (b) -1 rad, 1 rad, (c) 1 rad, 5 rad. (ii) Suponga que el cambio en posición angular para cada uno de estos pares de valores se presenta en 1 s. ¿Cuál opción representa la rapidez angular promedio más baja?

Si la rapidez angular instantánea de un objeto cambia de ω_i a ω_f en el intervalo de tiempo Δt , el objeto tiene una aceleración angular. La **aceleración angular promedio** α_{prom} (letra griega alfa) de un objeto rígido en rotación se define como la razón de cambio de la rapidez angular respecto al intervalo de tiempo Δt durante el que se presenta el cambio en la rapidez angular:

$$\alpha_{\text{prom}} \equiv \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} \tag{10.4}$$

En analogía con la aceleración lineal, la **aceleración angular instantánea** se define como el límite de la aceleración angular promedio conforme Δt tiende a cero:

$$\alpha \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \tag{10.5}$$

La aceleración angular tiene unidades de radianes por segundo al cuadrado (rad/s^2), o simplemente s^{-2} . Observe que α es positivo cuando un objeto rígido que gira contra las manecillas del reloj aumenta su rapidez o cuando un objeto rígido que gira en sentido de las manecillas del reloj disminuye su rapidez durante cierto intervalo de tiempo.

Cuando un objeto rígido en rotación respecto a un eje *fijo*, cada partícula sobre el objeto da vueltas a través del mismo ángulo en un intervalo de tiempo determinado y

◀ Desplazamiento angular (Compare con la ecuación 2.1)

◀ Rapidez angular promedio (Compare con la ecuación 2.2)

◀ Rapidez angular instantánea (Compare con la ecuación 2.5)

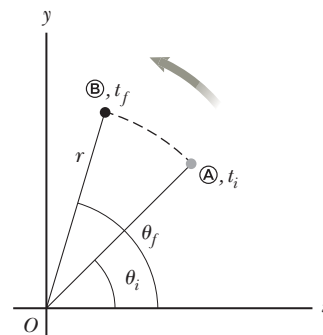


Figura 10.2 Una partícula sobre un objeto rígido en rotación se mueve de \textcircled{A} a \textcircled{B} a lo largo de un arco de una circunferencia. En el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$, la línea radial de longitud r se mueve a través de un desplazamiento angular $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$.

◀ Aceleración angular promedio (Compare con la ecuación 2.9)

◀ Aceleración angular instantánea (Compare con la ecuación 2.10)

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 10.2

Especifique su eje Al resolver problemas de rotación, debe especificar un eje de rotación. Esta nueva característica no existe en el estudio del movimiento traslacional. La elección es arbitraria, pero una vez que la hace, debe mantener dicha elección consistentemente en todo el problema. En algunos problemas, la situación física sugiere un eje natural, como el centro de la rueda de un automóvil. En otros problemas, puede no haber una opción obvia, y debe ejercer su juicio.

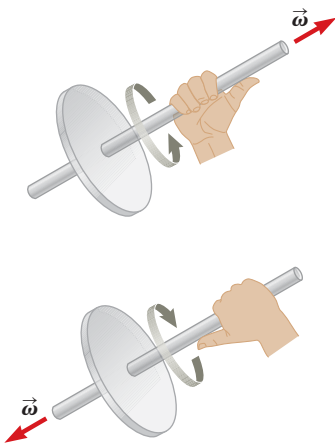


Figura 10.3 Regla de la mano derecha para determinar la dirección del vector velocidad angular.

Ecuaciones cinemáticas ▶
rotacionales

tiene la misma rapidez angular y la misma aceleración angular. Es decir, como la posición angular θ , las cantidades ω y α caracterizan el movimiento rotacional de todo el objeto rígido así como las partículas individuales todo el objeto.

La posición angular (θ), la rapidez angular (ω) y la aceleración angular (α) son análogas a la posición traslacional (x), la rapidez traslacional (v) y la aceleración traslacional (a). Las variables θ , ω y α difieren dimensionalmente de las variables x , v y a sólo por un factor que tiene la unidad de longitud. (Vea la sección 10.3.)

No se especificó dirección alguna para la rapidez angular y la aceleración angular. Estrictamente hablando, ω y α son las magnitudes de los vectores velocidad angular y aceleración angular¹ $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$, respectivamente, y siempre deben ser positivos. No obstante, ya que se considera rotación respecto a un eje fijo, se puede usar notación no vectorial e indicar las direcciones de los vectores al asignar un signo positivo o negativo a ω y α como se explicó anteriormente respecto de las ecuaciones 10.3 y 10.5. Para rotación respecto a un eje fijo, la única dirección que especifica el movimiento rotacional es la dirección a lo largo del eje de rotación. Por tanto, las direcciones de $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ son a lo largo de este eje. Si una partícula da vueltas en el plano xy como en la figura 10.2, la dirección de $\vec{\omega}$ para la partícula es afuera del plano del diagrama cuando la rotación es contraria a las manecillas del reloj y hacia el plano del diagrama cuando la rotación es en sentido de las manecillas del reloj. Para ilustrar esta convención, es adecuado usar la *regla de la mano derecha* que se muestra en la figura 10.3. Cuando los cuatro dedos de la mano derecha se enrollan en la dirección de rotación, el pulgar derecho extendido apunta en la dirección de $\vec{\omega}$. La dirección de $\vec{\alpha}$ se sigue de su definición $\vec{\alpha} \equiv d\vec{\omega}/dt$. Está en la misma dirección de $\vec{\omega}$ si la rapidez angular aumenta en el tiempo, y es antiparalela a $\vec{\omega}$ si la rapidez angular disminuye en el tiempo.

10.2 Modelo de análisis: Objeto rígido bajo aceleración angular constante

En nuestro estudio del movimiento traslacional, después de introducir las variables cinemáticas, consideramos el caso especial de una partícula bajo aceleración constante. Ahora seguimos el mismo procedimiento para un objeto rígido bajo aceleración angular constante.

Imagine que un objeto rígido como el disco en la figura 10.1 gira sobre un eje fijo y tiene una aceleración angular constante. En paralelo con nuestro análisis de modelo de la partícula bajo aceleración constante, generamos un nuevo análisis de modelo para el movimiento rotacional llamado el **objeto rígido bajo aceleración angular constante**. En esta sección desarrollamos las relaciones cinemáticas para este modelo. Al escribir la ecuación 10.5 en la forma $d\omega = \alpha dt$ e integrando desde $t_i = 0$ hasta $t_f = t$ se obtiene

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \quad (\text{para } \alpha \text{ constante}) \quad (10.6)$$

donde ω_i es la rapidez angular del objeto rígido en el tiempo $t = 0$. La ecuación 10.6 permite encontrar la rapidez angular ω_f del objeto en cualquier tiempo posterior t . Al sustituir la ecuación 10.6 en la ecuación 10.3 e integrar una vez más, se obtiene

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (\text{para } \alpha \text{ constante}) \quad (10.7)$$

donde θ_i es la posición angular del objeto rígido en el tiempo $t = 0$. La ecuación 10.7 permite encontrar la posición angular θ_f del objeto en cualquier tiempo posterior t . Al eliminar t de las ecuaciones 10.6 y 10.7 se obtiene

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \quad (\text{para } \alpha \text{ constante}) \quad (10.8)$$

¹Aunque no se verificó en este caso, la velocidad angular instantánea y la aceleración angular instantánea son cantidades vectoriales, pero los correspondientes valores promedio no lo son porque los desplazamientos no se suman como cantidades vectoriales para rotaciones finitas.

Esta ecuación permite encontrar la rapidez angular ω_f del objeto rígido para cualquier valor de su posición angular θ_f . Si se elimina α entre las ecuaciones 10.6 y 10.7, se obtiene

$$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t \quad (\text{para } \alpha \text{ constante}) \quad (10.9)$$

Advierta que estas expresiones cinemáticas para el objeto rígido bajo aceleración angular constante tienen la misma forma matemática que para una partícula bajo aceleración constante (vea la tabla 10.1). Se generan a partir de las ecuaciones para movimiento traslacional al hacer las sustituciones $x \rightarrow \theta$, $v \rightarrow \omega$, y $a \rightarrow \alpha$. La tabla 10.1 compara las ecuaciones cinemáticas de los modelos para el objeto rígido bajo aceleración constante y las de la partícula bajo aceleración constante.

E XAMEN RÁPIDO 10.2 Considere de nuevo los pares de posiciones angulares para el objeto rígido del examen rápido 10.1. Si el objeto parte del reposo en la posición angular inicial, se mueve contra las manecillas del reloj con aceleración angular constante y llega a la posición angular final con la misma rapidez angular en los tres casos, ¿para cuál opción la aceleración angular es la más alta?

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 10.3

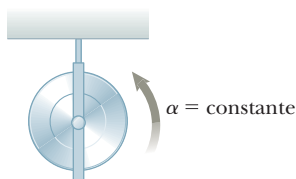
¿Como la traslación? Las ecuaciones 10.6 a la 10.9 y la tabla 10.1 sugieren que la cinemática rotacional es como la cinemática traslacional. Esto es casi cierto, con dos diferencias clave. (1) En la cinemática rotacional, debe especificar un eje de rotación (vea Prevención de riesgos ocultos 10.2). (2) En el movimiento rotacional, el objeto regresa a su orientación original; por tanto, se le puede preguntar el número de revoluciones hecho por un objeto rígido. Este concepto no tiene significado en el movimiento traslacional.

TABLA 10.1 Ecuaciones cinemáticas para movimiento rotacional y traslacional

Objeto rígido bajo aceleración constante	Partícula bajo aceleración constante
$\omega_f = \omega_i + \alpha t$ (10.6)	$v_f = v_i + at$ (2.13)
$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ (10.7)	$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$ (2.16)
$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$ (10.8)	$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$ (2.17)
$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$ (10.9)	$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_i + v_f)t$ (2.15)

MODELO DE ANÁLISIS Objeto rígido bajo aceleración angular constante

Imagine un objeto que se somete a un movimiento de giro tal que su aceleración angular es constante. Las ecuaciones que describen su posición angular y rapidez angular son análogas a las de la partícula bajo el modelo de aceleración constante:



$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \quad (10.6)$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (10.7)$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \quad (10.8)$$

$$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t \quad (10.9)$$

Ejemplos:

- durante su ciclo de centrifugado, la tina de la lavadora comienza a partir del reposo y acelera hasta su rapidez de centrifugado final
- se apaga una molienda de taller y alcanza el reposo bajo la acción de una fuerza de fricción constante en los cojinetes de la rueda
- se enciende un giroscopio y alcanza su rapidez de funcionamiento (capítulo 11)
- el cigüeñal de un motor diesel cambia a una rapidez angular más alta (capítulo 21)

Ejemplo 10.1 Rueda en rotación

Una rueda da vueltas con una aceleración angular constante de 3.50 rad/s^2 .

(A) Si la rapidez angular de la rueda es 2.00 rad/s en $t_i = 0$, ¿a través de qué desplazamiento angular da vueltas la rueda en 2.00 s ?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Observe de nuevo la figura 10.1. Imagine que el disco se mueve con su rapidez angular que crece con una razón constante. El cronómetro se inicia cuando el disco está girando a 2.00 rad/s . Esta imagen mental es un modelo para el movimiento de la rueda en este ejemplo.

continúa

10.1 continuación

Categorizar La frase “con aceleración angular constante” dice que se use el modelo de *objeto rígido bajo aceleración constante* a la rueda.

Analizar Del modelo de objeto rígido bajo aceleración angular constante, elija y ordene la ecuación 10.7 de modo que exprese el desplazamiento angular de la rueda:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Sustituya los valores conocidos para encontrar el desplazamiento angular en $t = 2.00$ s:

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= (2.00 \text{ rad/s})(2.00 \text{ s}) + \frac{1}{2}(3.50 \text{ rad/s}^2)(2.00 \text{ s})^2 \\ &= 11.0 \text{ rad} = (11.0 \text{ rad})(180^\circ/\pi \text{ rad}) = 630^\circ\end{aligned}$$

(B) ¿Cuántas revoluciones dio la rueda durante este intervalo de tiempo?

SOLUCIÓN

Multiplique el desplazamiento que encontró en la parte (A) por un factor de conversión para encontrar el número de revoluciones:

$$\Delta\theta = 630^\circ \left(\frac{1 \text{ rev}}{360^\circ} \right) = 1.75 \text{ rev}$$

(C) ¿Cuál es la rapidez angular de la rueda en $t = 2.00$ s?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 10.6 de un objeto rígido con aceleración angular constante para encontrar la rapidez angular en $t = 2.00$ s:

$$\begin{aligned}\omega_f &= \omega_i + \alpha t = 2.00 \text{ rad/s} + (3.50 \text{ rad/s}^2)(2.00 \text{ s}) \\ &= 9.00 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

Finalizar También se podría obtener este resultado con la ecuación 10.8 y los resultados de la parte (A). (¡Inténtelo!)

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con una aceleración constante de 3.50 m/s^2 . Si la velocidad de la partícula es 2.00 m/s en $t_i = 0$, ¿a través de qué desplazamiento se mueve la partícula en 2.00 s? ¿Cuál es la velocidad de la partícula en $t = 2.00$ s?

Respuesta Advierta que estas preguntas son análogos traslacionales a las partes (A) y (C) del problema original. La solución matemática sigue exactamente la misma forma. Para el desplazamiento del modelo de partícula bajo aceleración constante,

$$\begin{aligned}\Delta x &= x_f - x_i = v_i t + \frac{1}{2}at^2 \\ &= (2.00 \text{ m/s})(2.00 \text{ s}) + \frac{1}{2}(3.50 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ s})^2 = 11.0 \text{ m}\end{aligned}$$

y para la velocidad

$$v_f = v_i + at = 2.00 \text{ m/s} + (3.50 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ s}) = 9.00 \text{ m/s}$$

No hay análogo traslacional a la parte (B) porque el movimiento traslacional bajo aceleración constante no es repetitivo.

10.3 Cantidades angulares y traslacionales

En esta sección se deducen algunas relaciones útiles entre la rapidez y la aceleración angulares de un objeto rígido en rotación y la rapidez y la aceleración traslacionales de un punto en el objeto. Para hacerlo, debe tener en mente que, cuando un objeto rígido da vueltas respecto a un eje fijo, cada partícula del objeto se mueve en un círculo cuyo centro está en el eje de rotación. Vemos un objeto plano y circular en la figura 10.1. Vamos a generalizar a un objeto tridimensional arbitrario, como en la figura 10.4. Se selecciona un eje de referencia fijo en el espacio —el eje x en la figura 10.4— y observamos el movimiento de un punto P contenido dentro del objeto.



Ya que el punto P en la figura 10.4 se mueve en un círculo, el vector velocidad traslacional \vec{v} siempre es tangente a la trayectoria circular y por ende se llama *velocidad tangencial*. La magnitud de la velocidad tangencial del punto P es por definición la rapidez tangencial $v = ds/dt$, donde s es la distancia que recorre este punto medida a lo largo de la trayectoria circular. Al recordar que $s = r\theta$ (ecuación 10.1b) y notar que r es constante, se obtiene

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$$

Ya que $d\theta/dt = \omega$ (vea la ecuación 10.3), se sigue que

$$v = r\omega \tag{10.10}$$

Como vimos en la ecuación 4.24, la rapidez tangencial de un punto sobre un objeto rígido en rotación es igual a la distancia perpendicular de dicho punto desde el eje de rotación, multiplicada por la *rapidez angular*. En consecuencia, aunque cada punto sobre el objeto rígido tiene la misma rapidez angular, no todo punto tiene la misma rapidez *tangencial* porque r no es el mismo para todos los puntos sobre el objeto. La ecuación 10.10 muestra que la rapidez tangencial de un punto sobre el objeto en rotación aumenta a medida que uno se mueve alejándose del centro de rotación, como se esperaría por intuición. Por ejemplo, el extremo exterior de un palo de golf que se balancea se mueve mucho más rápido que un punto cercano al mango.

Podemos relacionar a la aceleración angular del objeto rígido en rotación con la aceleración tangencial del punto P al tomar la derivada en el tiempo de v en la ecuación 10.10:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$$

$$a_t = r\alpha \tag{10.11}$$

Es decir, la componente tangencial de la aceleración traslacional de un punto sobre un objeto rígido en rotación es igual a la distancia perpendicular del punto desde el eje de rotación, multiplicada por la aceleración angular.

En la sección 4.4 se encontró que un punto que se mueve en una trayectoria circular experimenta una aceleración radial a_r dirigida hacia el centro de rotación y cuya magnitud es la de la aceleración centrípeta v^2/r (figura 10.5). Ya que $v = r\omega$ para un punto P en un objeto en rotación, la aceleración centrípeta en dicho punto se puede expresar en términos de rapidez angular como hicimos en la ecuación 4.25:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \tag{10.12}$$

El vector aceleración total en el punto es $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$, donde la magnitud de \vec{a}_r es la aceleración centrípeta a_c . Ya que \vec{a} es un vector que tiene una componente radial y una componente tangencial, la magnitud de \vec{a} en el punto P sobre el objeto rígido en rotación es

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2\alpha^2 + r^2\omega^4} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \tag{10.13}$$

E XAMEN RÁPIDO 10.3 Ethan y Rebeca viajan en un carrusel. Ethan viaja en un caballo en el borde exterior de la plataforma circular, al doble de distancia del centro de la plataforma circular que Rebeca, quien viaja en un caballo interior. (i) Cuando el carrusel está en rotación a una rapidez angular constante, ¿cuál es la rapidez angular de Ethan? (a) el doble de la de Rebeca, (b) la misma que la de Rebeca, (c) la mitad de la de Rebeca, (d) imposible de determinar. (ii) Cuando el carrusel está en rotación con una rapidez angular constante, describa la rapidez tangencial de Ethan con la misma lista de opciones.

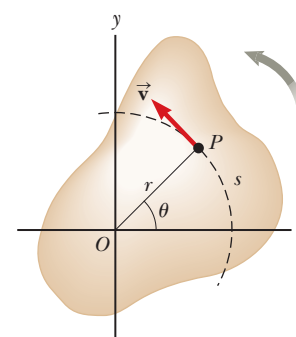


Figura 10.4 A medida que un objeto rígido da vueltas en torno al eje fijo a través de O , el punto P tiene una velocidad tangencial \vec{v} que siempre es tangente a la trayectoria circular de radio r .

◀ Relación entre la aceleración tangencial y angular

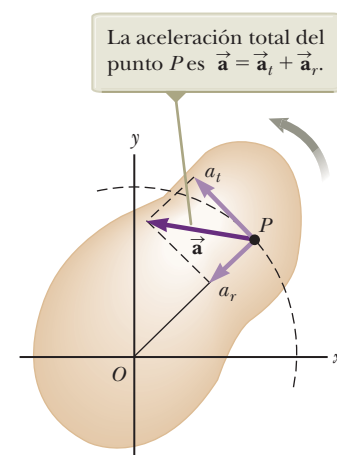


Figura 10.5 A medida que un objeto rígido gira respecto a un eje fijo a través de O , el punto P experimenta una componente tangencial de aceleración traslacional a_t y una componente radial de aceleración traslacional a_r .



Ejemplo 10.2 Reproductor de CD

A pesar de la disponibilidad de la música en forma digital, el disco compacto o CD sigue siendo un formato popular para música y datos. En un disco compacto (figura 10.6), la información de audio se almacena digitalmente en una serie de depresiones (pits) y áreas planas en la superficie del disco. Las alternaciones entre depresiones y áreas planas sobre la superficie representan unos y ceros binarios a leer por el reproductor de CD y convertir de regreso en ondas sonoras. Las depresiones y áreas planas se detectan mediante un sistema que consiste de un láser y lentes. La longitud de una cadena de unos y ceros que representa una porción de información es la misma en cualquier parte del disco, ya sea que la información esté cerca del centro del disco o cerca de su borde exterior. De modo que, para que esta longitud de unos y ceros siempre pase por el sistema láser-lente en el mismo intervalo de tiempo, la rapidez tangencial de la superficie del disco en la posición del lente debe ser constante. De acuerdo con la ecuación 10.10, la rapidez angular debe variar a medida que el sistema láser-lente se mueve radialmente a lo largo del disco. En un reproductor de CD común, la rapidez constante de la superficie en el punto del sistema láser-lente es 1.3 m/s.

(A) Encuentre la rapidez angular del disco en revoluciones por minuto cuando la información se lee desde la primera pista más interna ($r = 23 \text{ mm}$) y la pista final más externa ($r = 58 \text{ mm}$).

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 10.6 muestra una fotografía de un disco compacto. Recorra con su dedo el círculo marcado “23 mm” y mentalmente calcule el intervalo de tiempo para ir una vez alrededor del círculo. Ahora trace con su dedo alrededor del círculo marcado “58 mm”, moviendo el dedo por toda la superficie de la página a la misma rapidez que como lo hizo cuando seguía el círculo más pequeño. Advierta cuán rápido se mueve su dedo en relación con la página alrededor del círculo más grande. Si su dedo representa el láser que lee el disco, se mueve sobre la superficie del disco mucho más rápido en el círculo exterior que en el círculo interior. Por tanto, el disco debe girar más lentamente cuando el láser está leyendo la información de esta parte del disco.

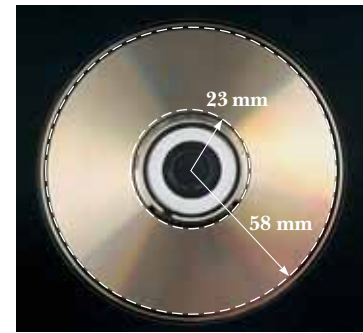


Figura 10.6 (Ejemplo 10.2) Disco compacto.

Categorizar Esta parte del ejemplo se clasifica como un simple problema de sustitución. En partes posteriores, se necesitará para identificar análisis de modelos.

Aplique la ecuación 10.10 para encontrar la rapidez angular que da la rapidez tangencial requerida en la posición de la pista interna:

$$\begin{aligned}\omega_i &= \frac{v}{r_i} = \frac{1.3 \text{ m/s}}{2.3 \times 10^{-2} \text{ m}} = 57 \text{ rad/s} \\ &= (57 \text{ rad/s}) \left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} \right) \left(\frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \right) = 5.4 \times 10^2 \text{ rev/min}\end{aligned}$$

Haga lo mismo para la pista exterior:

$$\omega_f = \frac{v}{r_f} = \frac{1.3 \text{ m/s}}{5.8 \times 10^{-2} \text{ m}} = 22 \text{ rad/s} = 2.1 \times 10^2 \text{ rev/min}$$

El reproductor de CD ajusta la rapidez angular ω del disco dentro de este rango de modo que la información se mueve por el lente objetivo a una razón constante.

(B) El máximo tiempo de reproducción de un disco de música estándar es 74 min y 33 s. ¿Cuántas revoluciones realiza el disco durante dicho tiempo?

SOLUCIÓN

Categorizar De la parte (A), la rapidez angular disminuye a medida que el disco se reproduce. Suponga que disminuye de manera estable, con α constante. Por tanto se puede aplicar el modelo de *objeto rígido bajo aceleración angular constante* al disco.

Analizar Si $t = 0$ es el instante cuando el disco comienza su rotación, con rapidez angular de 57 rad/s, el valor final del tiempo t es $(74 \text{ min})(60 \text{ s/min}) + 33 \text{ s} = 4\,473 \text{ s}$. Se busca el desplazamiento angular $\Delta\theta$ durante este intervalo de tiempo.

Aplique la ecuación 10.9 para encontrar el desplazamiento angular del disco en $t = 4\,473 \text{ s}$:

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= \theta_f - \theta_i = \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t \\ &= \frac{1}{2}(57 \text{ rad/s} + 22 \text{ rad/s})(4\,473 \text{ s}) = 1.8 \times 10^5 \text{ rad}\end{aligned}$$

Convierta este desplazamiento angular a revoluciones:

$$\Delta\theta = (1.8 \times 10^5 \text{ rad}) \left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}} \right) = 2.8 \times 10^4 \text{ rev}$$

(C) ¿Cuál es la aceleración angular del disco compacto sobre el intervalo de tiempo de 4 473 s?

SOLUCIÓN

Categorizar De nuevo modele el disco como un *objeto rígido bajo aceleración angular constante*. En este caso, la ecuación 10.6 da el valor de la aceleración angular constante. Otro método es usar la ecuación 10.4 para encontrar la aceleración angular promedio.

10.2 continuación

En este caso, no se supone que la aceleración angular sea constante. La respuesta es la misma de ambas ecuaciones; sólo la interpretación del resultado es diferente.

Analizar Use la ecuación 10.6 para encontrar la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{22 \text{ rad/s} - 57 \text{ rad/s}}{4.473 \text{ s}} = -7.6 \times 10^{-3} \text{ rad/s}^2$$

Finalizar El disco experimenta una disminución muy gradual en su rapidez de rotación, como se espera del largo intervalo de tiempo requerido para que la rapidez angular cambie del valor inicial al valor final. En realidad, la aceleración angular del disco no es constante. El problema 46 le permite explorar el comportamiento del tiempo real de la aceleración angular.

10.4 Momento de torsión

En nuestro estudio del movimiento traslacional, después de haber investigado la descripción del movimiento en los capítulos 2-4, se estudió la causa de los cambios en el movimiento: la fuerza. Aquí seguiremos el mismo plan: ¿Cuál es la causa de los cambios en el movimiento de rotación?

Cuando se ejerce una fuerza en un objeto rígido que se pivotea en torno a un eje, el objeto tiende a dar vuelta en torno a dicho eje. Imagine que intenta dar vuelta a una puerta y aplica una fuerza de magnitud F , perpendicular a la superficie de la puerta cerca de las bisagras y luego en diferentes distancias desde las bisagras. Usted logrará una mayor rapidez de rotación para la puerta al aplicar la fuerza cerca de la perilla que al aplicarla cerca de las bisagras. Obtendrá un índice de rotación más rápido para la puerta aplicando fuerza cerca de la perilla de la puerta que aplicándolo cerca de las bisagras. Debido a que se aplicó la *misma* fuerza en diferentes posiciones en la puerta, este experimento indica que la causa de los cambios en el movimiento de rotación también debe depender de la *ubicación* de la fuerza aplicada.

La causa de los cambios en el movimiento de rotación de un objeto en torno a cierto eje se mide mediante una cantidad llamada **momento de torsión** $\vec{\tau}$ (letra griega tau). El momento de torsión es un vector, pero aquí sólo se considerará su magnitud y en el capítulo 11 se explorará su naturaleza vectorial.

Considere la llave y el tornillo de la semblanza de apertura de este capítulo. En la figura 10.7 se muestran estos objetos con alguna geometría adicional. Se quiere dar vuelta en torno a un eje perpendicular a la página y a través del centro del tornillo. La fuerza aplicada \vec{F} actúa a un ángulo ϕ con la horizontal. Se define la magnitud del momento de torsión asociada con la fuerza \vec{F} alrededor del eje que pasa por O mediante la expresión

$$\tau \equiv rF \sin \phi = Fd \quad (10.14)$$

donde r es la distancia entre el eje de rotación y el punto de aplicación de \vec{F} , y d es la distancia perpendicular desde el eje de rotación hasta la línea de acción de \vec{F} . (La *línea de acción* de una fuerza es una línea imaginaria que se extiende hacia ambos extremos del vector que representa la fuerza. La línea discontinua que se extiende desde la cola de \vec{F} en la figura 10.7 es parte de la línea de acción de \vec{F} .) A partir del triángulo rectángulo de la figura 10.7 que tiene la llave como su hipotenusa, se ve que $d = r \sin \phi$. La cantidad d se llama **brazo de momento** (o *brazo de palanca*) de \vec{F} .

En la figura 10.7, la única componente de \vec{F} que tiende a causar rotación de la llave en torno a un eje a través de O es $F \sin \phi$, la componente perpendicular a la línea dibujada desde el eje de rotación hacia el punto de aplicación de la fuerza. La componente horizontal $F \cos \phi$, dado que su línea de acción pasa a través de O , no tiene tendencia a producir rotación en torno a un eje que pase a través de O . De la definición de momento de torsión en la ecuación 10.14, la causa de los cambios en el movimiento de rotación aumenta a medida que F aumenta y a medida que d aumenta, lo que explica por qué es más fácil dar vuelta a una puerta si se empuja por la perilla en lugar de hacerlo en un punto cerca de las bisagras. También podemos aplicar un empujón casi perpendicular a la puerta, tanto como sea posible, de modo que ϕ esté cerca de 90° . Empujar de manera lateral en la perilla de la puerta ($\phi = 0$) no causará que ésta dé vuelta.

La ecuación 10.14 nos permite comprender el uso del tubo para hacer girar la llave inglesa en la semblanza de apertura. La fuerza máxima que puede aplicar a la llave inglesa

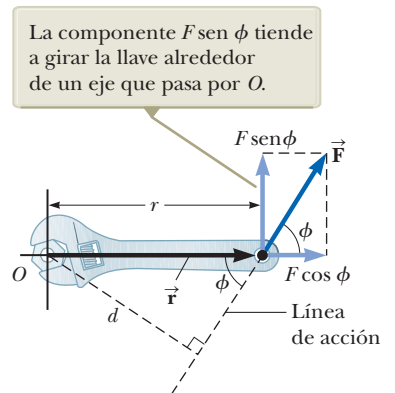


Figura 10.7 La fuerza \vec{F} tiene una mayor tendencia a girar alrededor de un eje que pasa por O conforme F aumenta y a medida que aumenta el brazo de momento d .

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 10.4

El momento de torsión depende de su elección del eje No existe un único valor único para el momento de torsión en un objeto. Su valor depende de la elección del eje de rotación.

◀ Brazo de momento

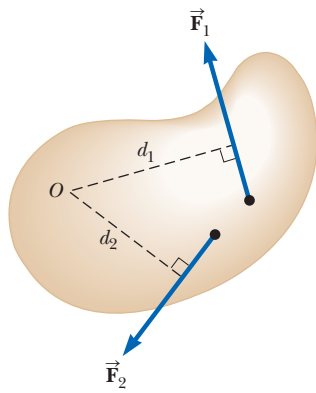


Figura 10.8 La fuerza \vec{F}_1 tiende a dar vuelta el objeto contra las manecillas del reloj en torno a un eje a través de O , y \vec{F}_2 tiende a dar vuelta en sentido de las manecillas del reloj.

no es suficiente para girar el tornillo. No puede aplicar más fuerza \vec{F} , pero puede aumentar el momento de torsión sobre el tornillo colocando el tubo sobre el mango de la llave. Esto le permite aplicar la misma fuerza a una distancia mayor d del eje de rotación. Ha aumentado el brazo de momento de la fuerza y, por tanto, ha aumentado el par aplicado por la misma fuerza.

Si dos o más fuerzas actúan sobre un objeto rígido, como en la figura 10.8, cada una tiende a producir rotación en torno al eje en O . En este ejemplo, \vec{F}_2 el objeto tiende a dar vuelta en sentido de las manecillas del reloj y \vec{F}_1 tiende a dar vuelta contra las manecillas del reloj. Se usa la convención de que el signo del momento de torsión que resulta de una fuerza es positivo si la tendencia a girar de la fuerza es contra las manecillas del reloj y negativo si la tendencia a girar es en sentido de las manecillas del reloj. Por ejemplo, en la figura 10.8, el momento de torsión resultante de \vec{F}_1 , que tiene un brazo de momento d_1 , es positivo e igual a $+F_1d_1$; el momento de torsión de \vec{F}_2 es negativo e igual a $-F_2d_2$. En consecuencia, el momento de torsión *neto* en torno a un eje a través de O es

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1d_1 - F_2d_2$$

No se debe confundir el momento de torsión con la fuerza. Las fuerzas pueden causar un cambio en el movimiento traslacional, como se describió mediante la segunda ley de Newton. Las fuerzas también pueden causar un cambio en el movimiento rotacional, pero la efectividad de las fuerzas en causar este cambio depende tanto de las magnitudes de las fuerzas como de los brazos de momento de las fuerzas, en la combinación que se llama *momento de torsión*. El momento de torsión tiene unidades de fuerza por longitud-newton metros ($\text{N} \cdot \text{m}$) en unidades del SI y se debe reportar en estas unidades. No confunda momento de torsión y trabajo (capítulo 7), que tiene las mismas unidades, pero son conceptos muy diferentes.

- EJEMPLO RÁPIDO 10.4** (i) Si usted intenta aflojar un obstinado tornillo de una pieza de madera con un destornillador y fracasa, ¿debe encontrar un destornillador con un mango (a) más largo, o (b) más gordo?

Ejemplo 10.3 El momento de torsión neto sobre un cilindro

A un cilindro de una pieza se le da la forma que se muestra en la figura 10.9, con una sección central que sobresale desde el cilindro más grande. El cilindro es libre de dar vuelta en torno al eje central que se muestra en el dibujo. Una cuerda enrollada en torno al tambor, que tiene radio R_1 , ejerce una fuerza \vec{T}_1 hacia la derecha sobre el cilindro. Una cuerda envuelta alrededor del núcleo, que tiene un radio R_2 , ejerce una fuerza \vec{T}_2 hacia abajo sobre el cilindro.

(A) ¿Cuál es el momento de torsión neto que actúa sobre el cilindro en torno al eje de rotación (que es el eje z en la figura 10.9)?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que el cilindro en la figura 10.9 es un eje en una máquina. La fuerza \vec{T}_1 podría aplicarse mediante una banda transportadora enrollada en torno al tambor. La fuerza \vec{T}_2 podría aplicarse mediante un freno de fricción a la superficie de la parte central.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución en el que se evalúa el momento de torsión neto con el uso de la ecuación 10.14.

El momento de torsión debido a \vec{T}_1 en torno al eje de rotación es $-R_1T_1$. (El signo es negativo porque el momento de torsión tiende a producir rotación en sentido de las manecillas del reloj.) El momento de torsión debido a \vec{T}_2 es $+R_2T_2$. (El signo es positivo porque el momento de torsión tiende a producir rotación contra las manecillas del reloj del cilindro.)

Evalúe el momento de torsión neto en torno al eje de rotación:
$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = R_2T_2 - R_1T_1$$

Como una verificación rápida, observe que si las dos fuerzas son de igual magnitud, el momento de torsión neto es negativo porque $R_1 > R_2$. Si parte del reposo con ambas fuerzas de igual magnitud actuando sobre él, el cilindro daría vuelta en sentido de las manecillas del reloj porque \vec{T}_1 sería más efectivo para girarlo de lo que sería \vec{T}_2 .

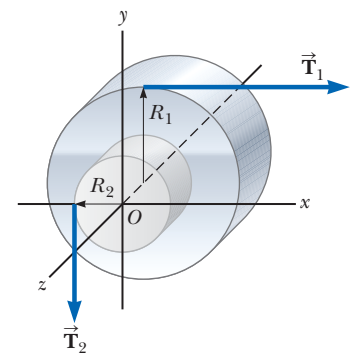


Figura 10.9 (Ejemplo 10.3) Un cilindro sólido pivotado en torno al eje z a través de O . El brazo de momento \vec{T}_1 es R_1 , y el brazo de momento de \vec{T}_2 es R_2 .

10.3 continuación

(B) Suponga $T_1 = 5.0 \text{ N}$, $R_1 = 1.0 \text{ m}$, $T_2 = 15.0 \text{ N}$ y $R_2 = 0.50 \text{ m}$. ¿Cuál es el momento de torsión neto en torno al eje de rotación, y de qué forma da vuelta el cilindro si parte desde el reposo?

SOLUCIÓN

Sustituya los valores conocidos:

$$\sum \tau = (0.50 \text{ m})(15 \text{ N}) - (1.0 \text{ m})(5.0 \text{ N}) = 2.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Ya que este momento de torsión neto es positivo, el cilindro comienza a dar vuelta en la dirección contraria a las manecillas del reloj.

10.5 Modelo de análisis: Objeto rígido bajo un momento de torsión neto

En el capítulo 5 aprendió que una fuerza neta sobre un objeto ocasiona una aceleración del objeto y que la aceleración es proporcional a la fuerza neta. Estos hechos son la base del modelo de partícula bajo una fuerza neta cuya representación matemática es la segunda ley de Newton. En esta sección se muestra el análogo rotacional de la segunda ley de Newton: la aceleración angular de un objeto rígido giratorio en torno a un eje fijo es proporcional al momento de torsión neto que actúa en torno a dicho eje. Sin embargo, antes de explicar el caso más complejo de rotación de un objeto rígido, es instructivo discutir primero el caso de una partícula que se mueve en una trayectoria circular en torno de algún punto fijo bajo la influencia de una fuerza externa.

Considere una partícula de masa m que gira en un círculo de radio r bajo la influencia de una fuerza neta tangencial $\sum \vec{F}_t$ y una fuerza neta radial $\sum \vec{F}_r$, como se muestra en la figura 10.10. La fuerza neta radial hace que la partícula se mueva en la trayectoria circular con una aceleración centrípeta. La fuerza tangencial proporciona una aceleración tangencial \vec{a}_t , y

$$\sum F_t = ma_t$$

La magnitud del momento de torsión neto debida a $\sum \vec{F}_t$ en la partícula en torno a un eje perpendicular a la página que pasa a través del centro del círculo es

$$\sum \tau = \sum F_t r = (ma_t)r$$

Ya que la aceleración tangencial se relaciona con la aceleración angular a través de la relación $a_t = r\alpha$ (ecuación 10.11), el momento de torsión neto se expresa como

$$\sum \tau = (mr\alpha)r = (mr^2)\alpha \tag{10.15}$$

Por el momento denotaremos a la cantidad mr^2 con el símbolo I . Diremos más acerca de esta cantidad un poco más adelante. Usando esta notación, la ecuación 10.15 se puede escribir como

$$\sum \tau = I\alpha \tag{10.16}$$

Es decir, el momento de torsión neto que actúa sobre la partícula es proporcional a su aceleración angular. Observe que $\sum \tau = I\alpha$ tiene la misma forma matemática que la segunda ley de movimiento de Newton, $\sum F = ma$.

Ahora la explicación se extenderá a un objeto rígido de forma arbitraria que gira en torno a un eje fijo que pasa por un punto O , como en la figura 10.11. El objeto puede considerarse como un conjunto de partículas de masa m_i . Si sobre el objeto se impone un sistema coordenado cartesiano, cada elemento de masa da vueltas en un círculo entorno al origen y cada uno tiene una aceleración tangencial a_i producida por una fuerza tangencial externa F_i . Para cualquier partícula dada, se sabe de la segunda ley de Newton que

$$F_i = m_i a_i$$

El momento de torsión externo $\vec{\tau}_i$ asociado con la fuerza \vec{F}_i actúa en torno al origen y su magnitud está dada por

$$\tau_i = r_i F_i = r_i m_i a_i$$

La fuerza tangencial sobre la partícula resulta en un momento de torsión sobre la partícula alrededor de un eje que atraviesa el centro del círculo.

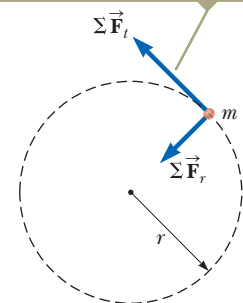


Figura 10.10 Una partícula que da vueltas en un círculo bajo la influencia de una fuerza tangencial neta $\sum \vec{F}_t$. También debe estar presente una fuerza neta $\sum \vec{F}_r$ en la dirección radial para mantener el movimiento circular.

La partícula de masa m_i del objeto rígido experimenta una torsión de la misma manera que la partícula de la figura 10.10.

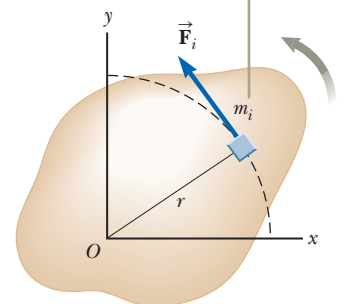


Figura 10.11 Un objeto rígido girando en torno a un eje a través de O . Cada elemento de masa m_i da vueltas en torno al eje con la misma aceleración angular α .



Ya que $a_i = r_i\alpha$, la expresión para τ_i se convierte en

$$\tau_i = m_i r_i^2 \alpha$$

Aunque cada partícula en el objeto rígido debe tener una diferente aceleración traslacional a_i , todas ellas tienen la *misma* aceleración angular α . Con esto en mente, se pueden sumar todos los momentos de torsión de la expresión anterior para obtener el momento de torsión neto en torno a un eje a través de O debido a las fuerzas externas:

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \sum \tau_i = \sum m_i r_i^2 \alpha = \left(\sum m_i r_i^2 \right) \alpha \quad (10.17)$$

donde α se puede sacar del operador suma porque es común a todas las partículas. Llamando la cantidad entre paréntesis I , la expresión para $\sum \tau_{\text{ext}}$ se convierte en

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha \quad (10.18)$$

El momento de torsión sobre un objeto rígido es proporcional a la aceleración angular

Esta ecuación para un objeto rígido es la misma que para una partícula moviéndose en una trayectoria circular (ecuación 10.16). El momento de torsión neto en torno al eje de rotación es proporcional a la aceleración angular del objeto, con un factor de proporcionalidad I , una cantidad que depende del eje de rotación y del tamaño y la forma del objeto. La ecuación 10.18 es la representación matemática del análisis de modelo de un **objeto rígido bajo un momento de torsión neto**, el análogo rotacional a la partícula bajo una fuerza neta.

Ahora trataremos a la cantidad I , que se define como sigue:

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (10.19)$$

Esta cantidad se llama **momento de inercia** del objeto y depende de las masas de las partículas que componen el objeto y de sus distancias desde el eje de rotación. Observe que la ecuación 10.19 se reduce a $I = mr^2$ para una sola partícula, consistente con nuestro uso de la notación I que hemos usado para ir de la ecuación 10.15 a la 10.16. Observe que el momento de inercia tiene unidades de $\text{kg} \times \text{m}^2$ en unidades SI.

La ecuación 10.18 tiene la misma forma que la segunda ley de Newton para un sistema de partículas, expresada en la ecuación 9.39:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{CM}}$$

En consecuencia, el momento de inercia I debe jugar el mismo papel en el movimiento de rotación que el que juega la masa en movimiento de traslación: el momento de inercia es la resistencia a los cambios en el movimiento de rotación. Esta resistencia depende no sólo de la masa del objeto, sino también en cómo se distribuye la masa alrededor del eje de rotación. La tabla 10.2 da los momentos de inercia² para varios objetos sobre ejes específicos. Los momentos de inercia de un objeto rígido con geometría simple (alta simetría) son relativamente fáciles de calcular siempre que el eje de rotación coincide con un eje de simetría, como se muestra en la siguiente sección.

- E XAMEN RÁPIDO 10.5** Apaga su taladro eléctrico y descubre que el intervalo de tiempo para que la broca giratoria llegue al reposo debido al momento de torsión de fricción en el taladro es Δt . Sustituye la broca con una más grande que resulta en la duplicación del momento de inercia de todo el mecanismo giratorio del taladro. Cuando esta broca más grande da vueltas a la misma rapidez angular que la primera y el taladro se apaga, el momento de torsión de fricción permanece igual que para la situación previa. ¿Cuál es el intervalo de tiempo para que esta segunda broca llegue al reposo? (a) $4\Delta t$, (b) $2\Delta t$, (c) Δt , (d) $0.5\Delta t$, (e) $0.25\Delta t$, (f) imposible de determinar.

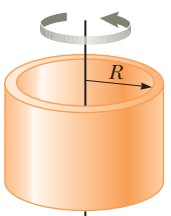
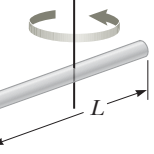
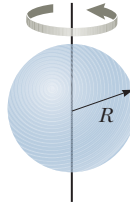
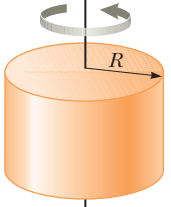
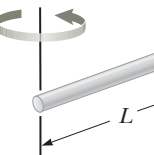
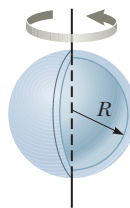
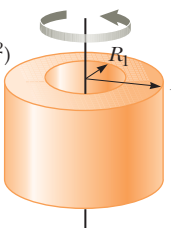
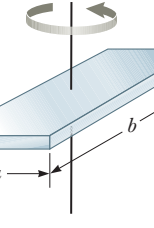
²Los ingenieros civiles usan el momento de inercia para caracterizar las propiedades elásticas (rigidez) de estructuras como las vigas de carga. En consecuencia, con frecuencia es útil incluso en un contexto no rotacional.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 10.5

No hay un solo momento de inercia Existe una gran diferencia entre masa y momento de inercia. La masa es una propiedad inherente de un objeto. El momento de inercia de un objeto depende de su elección del eje de rotación. Por tanto, no hay un solo valor del momento de inercia para un objeto. Existe un valor *mínimo* del momento de inercia, que es el calculado en torno a un eje que pasa por el centro de masa del objeto.



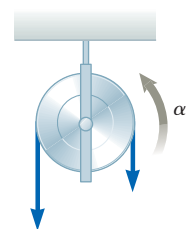
TABLA 10.2 Momentos de inercia de objetos rígidos homogéneos con diferentes geometrías

<p>Aro o cascarón cilíndrico delgado $I_{CM} = MR^2$</p>		<p>Barra larga delgada con eje de rotación a través del centro $I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2$</p>		<p>Esfera sólida $I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$</p>	
<p>Cilindro sólido o disco $I_{CM} = \frac{1}{2} MR^2$</p>		<p>Barra larga delgada con eje de rotación a través de un extremo $I = \frac{1}{3} ML^2$</p>		<p>Cascarón esférico delgado $I_{CM} = \frac{2}{3} MR^2$</p>	
<p>Cilindro hueco $I_{CM} = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$</p>		<p>Placa rectangular $I_{CM} = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$</p>			

MODELO DE ANÁLISIS: Objeto rígido bajo momento de torsión neto

Imagine que está analizando el movimiento de un objeto que es libre de girar con respecto un eje fijo. La causa de los cambios en el movimiento de rotación de este objeto es el momento de torsión aplicado al objeto y, en paralelo con la segunda ley de Newton para el movimiento de traslación, el momento de torsión es igual al producto del momento de inercia del objeto y de la aceleración angular:

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha \tag{10.18}$$



El momento de torsión, el momento de inercia y la aceleración angular se deben evaluar alrededor del mismo eje de rotación.

Ejemplos:

- una cadena alrededor de la rueda dentada de la bicicleta hace que gire la rueda trasera de la bicicleta
- un momento de dipolo eléctrico en un campo eléctrico gira debido a la fuerza eléctrica del campo (capítulo 22)
- un momento de dipolo magnético en un campo magnético gira debido a la fuerza magnética del campo (capítulo 28)
- la armadura de un motor gira debido al momento de torsión ejercido por un campo magnético circundante (capítulo 30)

Ejemplo 10.4 Barra giratoria

Una barra uniforme de longitud L y masa M unida en un extremo a un pivote sin fricción es libre de dar vueltas en torno al pivote en el plano vertical, como en la figura 10.12. La barra se libera desde el reposo en la posición horizontal. ¿Cuáles son la aceleración angular inicial de la barra y la aceleración traslacional inicial de su extremo rígido?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en lo que le sucede a la barra de la figura 10.12 cuando se libera. Da vueltas en sentido de las manecillas del reloj en torno al pivote en el extremo izquierdo. Cuando un objeto se pivota en un punto que no sea su centro de masa, la fuerza gravitacional, que se supone que actúa a través del centro de masa, proporciona un par de torsión alrededor del pivote.

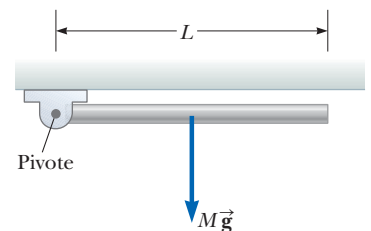


Figura 10.17 (Ejemplo 10.4) Una barra es libre de dar vuelta en torno a un pivote en el extremo izquierdo. La fuerza gravitacional sobre la barra actúa en su centro de masa.

continúa

10.4 continuación

Categorizar La barra se clasifica como un *objeto rígido bajo un momento de torsión neto*. El momento de torsión se debe sólo a la fuerza gravitacional sobre la barra si se elige que el eje de rotación pase a través del pivote en la figura 10.12. *No se puede* clasificar la barra como un objeto rígido bajo aceleración angular constante porque el momento de torsión ejercido sobre la barra y, por tanto, la aceleración angular de la barra, varían con su posición angular.

Analizar La única fuerza que contribuye al momento de torsión en torno a un eje a través del pivote es la fuerza gravitacional $M\vec{g}$ que se ejerce sobre la barra. (La fuerza que ejerce el pivote sobre la barra tiene momento de torsión cero en torno al pivote, porque su brazo de momento es cero.) Para calcular el momento de torsión sobre la barra, se supone que la fuerza gravitacional actúa en el centro de masa de la barra, como se muestra en la figura 10.12.

Escriba una expresión para la magnitud del momento de torsión externo neto debido a la fuerza gravitacional en torno a un eje a través del pivote:

$$\sum \tau_{\text{ext}} = Mg \left(\frac{L}{2} \right)$$

Aplique la ecuación 10.18 para obtener la aceleración angular de la barra, usando el momento de inercia de la barra de la tabla 10.2:

$$(1) \quad \alpha = \frac{\sum \tau_{\text{ext}}}{I} = \frac{Mg(L/2)}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

Use la ecuación 10.11 con $r = L$ para encontrar la aceleración traslacional inicial del extremo rígido de la barra:

$$a_t = L\alpha = \frac{3}{2}g$$

Finalizar Estos son los valores *iniciales* de las aceleraciones angular y traslacional. Una vez que la barra comienza a dar vuelta, la fuerza gravitacional ya no es perpendicular a la barra y los valores de las dos aceleraciones disminuyen y cambian a cero en el momento en que la barra pasa a través de la orientación vertical. Además, dado que el valor de a^t en un punto de la barra depende de la distancia de ese punto desde el pivote, cada punto a lo largo de la barra tendrá la *misma* aceleración angular pero una aceleración tangencial *diferente*.

Ejemplo conceptual 10.5 Chimeneas que caen y bloques tambaleantes

Cuando cae una chimenea alta, con frecuencia se rompe en alguna parte a lo largo de su longitud antes de golpear el suelo, como se muestra en la figura 10.13. ¿Por qué?

SOLUCIÓN

Cuando la chimenea da vuelta en torno a su base, cada porción más alta de la chimenea cae con una aceleración tangencial más grande que la porción debajo de ella, de acuerdo con la ecuación 10.11. La aceleración angular aumenta a medida que la chimenea se inclina más. Al final, las porciones más altas de la chimenea experimentan una aceleración mayor que la aceleración que podría resultar sólo de la gravedad; esta situación es similar a la que se describió en el ejemplo 10.4. Sólo puede ocurrir si dichas porciones se jalen hacia abajo por otra fuerza además de la fuerza gravitacional. La fuerza que lo ocasiona es la fuerza de corte de las porciones más bajas de la chimenea. Al final, la fuerza de corte que proporciona esta aceleración es mayor a lo que puede soportar la chimenea, y la chimenea se rompe. Lo mismo sucede con una torre alta de bloques de juguete de los niños. Pida prestados algunos bloques a un niño y construya tal torre. Empújela y observe cómo se separa en algún punto antes de golpear el suelo.



© Kevin Spreekmeester/AGE Fotostock

Figura 10.13 (Ejemplo conceptual 10.5) Una chimenea que cae se rompe en algún punto a lo largo de su longitud.

Ejemplo 10.6 Aceleración angular de una rueda

Una rueda de radio R , masa M y momento de inercia I se monta sobre un eje horizontal sin fricción, como en la figura 10.14. Una cuerda ligera enrollada alrededor de la rueda sostiene un objeto de masa m . Cuando la rueda se libera, el objeto acelera hacia abajo, la cuerda se desenrolla en la rueda y ésta gira con una aceleración angular. Encuentre una expresión para la aceleración angular de la rueda, la aceleración traslacional del objeto y la tensión en la cuerda.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que el objeto es una cubeta en un antiguo pozo de los deseos. Está amarrado a una cuerda que pasa alrededor de un cilindro equipado con una manivela para elevar la cubeta. Después de elevar la cubeta, el sistema se libera y la cubeta acelera hacia abajo mientras la cuerda se desenrolla del cilindro.



10.6 continuación

Categorizar Aquí se aplican dos análisis de modelos. El objeto se modela como una *partícula bajo una fuerza neta*. La rueda se modela como un *objeto rígido bajo un momento de torsión neto*.

Analizar La magnitud del momento de torsión que actúa sobre la rueda en torno a su eje de rotación es $\tau = TR$, donde T es la fuerza que ejerce la cuerda sobre el borde de la rueda. (La fuerza gravitacional que ejerce la Tierra sobre la rueda y la fuerza normal que ejerce el eje sobre la rueda, ambas, pasan a través del eje de rotación y no producen momento de torsión.)

Del modelo objeto rígido bajo un momento de torsión neto, escriba la ecuación 10.18:

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha$$

Resuelva para α y sustituya el momento de torsión neto:

$$(1) \quad \alpha = \frac{\sum \tau_{\text{ext}}}{I} = \frac{TR}{I}$$

Del modelo de partícula bajo una fuerza neta, aplique la segunda ley de Newton al movimiento del objeto, tomando la dirección hacia abajo como positiva:

$$\sum F_y = mg - T = ma$$

Resuelva para la aceleración a :

$$(2) \quad a = \frac{mg - T}{m}$$

Las ecuaciones (1) y (2) tienen tres incógnitas: α , a y T . Ya que el objeto y la rueda están conectados mediante una cuerda que no desliza, la aceleración traslacional del objeto suspendido es igual a la aceleración tangencial de un punto sobre el borde de la rueda. Debido a eso, la aceleración angular α de la rueda y la aceleración traslacional del objeto se relacionan mediante $a = R\alpha$ (ecuación 10.11).

Use este hecho junto con las ecuaciones (1) y (2):

$$(3) \quad a = R\alpha = \frac{TR^2}{I} = \frac{mg - T}{m}$$

Resuelva para la tensión T :

$$(4) \quad T = \frac{mg}{1 + (mR^2/I)}$$

Sustituya la ecuación (4) en la ecuación (2) y resuelva para a :

$$(5) \quad a = \frac{g}{1 + (I/mR^2)}$$

Use $a = R\alpha$ y la ecuación (5) para resolver para α :

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{g}{R + (I/mR)}$$

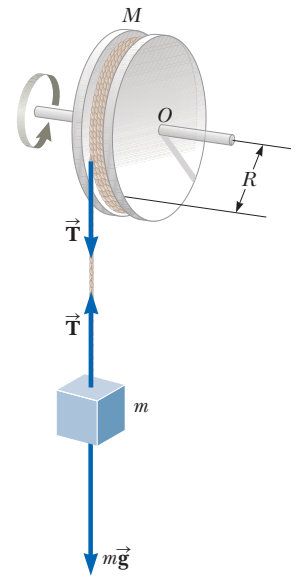


Figura 10.14 (Ejemplo 10.6) Un objeto cuelga de una cuerda enrollada alrededor de una rueda.

Finalizar Este problema se concluye al imaginar el comportamiento del sistema en algunos límites extremos.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si la rueda se volviese tan pesada que I se volviera muy grande? ¿Qué sucede con la aceleración a del objeto y la tensión T ?

Respuesta Si la rueda se vuelve infinitamente pesada, se puede imaginar que el objeto de masa m simplemente colgará de la cuerda sin causar el giro de la rueda.

Esto se puede demostrar matemáticamente al tomar el límite $I \rightarrow \infty$. Entonces la ecuación (5) se convierte en

$$a = \lim_{I \rightarrow \infty} \frac{g}{1 + (I/mR^2)} = 0$$

lo que coincide con la conclusión conceptual de que el objeto colgará en reposo. Además, la ecuación (4) se convierte en

$$T = \lim_{I \rightarrow \infty} \frac{mg}{1 + (mR^2/I)} = mg$$

que es consistente porque el objeto simplemente cuelga en reposo en equilibrio entre la fuerza gravitacional y la tensión en la cuerda.

10.6 Cálculo de momentos de inercia

El momento de inercia de un sistema de partículas discretas se puede calcular en forma directa con la ecuación 10.19. Se puede evaluar el momento de inercia de un objeto rígido continuo imaginándonos al objeto dividido en muchos elementos pequeños, cada uno



de los cuales tiene masa Δm_i . Se usa la definición $I = \sum_i r_i^2 \Delta m_i$ y se toma el límite de esta suma a medida que $\Delta m_i \rightarrow 0$. En este límite, la suma se convierte en una integral sobre el volumen del objeto:

Momento de inercia
de un objeto rígido ▶

$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm \quad (10.20)$$

Por lo común es más fácil calcular momentos de inercia en términos del volumen de los elementos en lugar de su masa, y es fácil hacer dicho cambio al usar la ecuación 1.1, $\rho \equiv m/V$, donde ρ es la densidad del objeto y V su volumen. De esta ecuación, la masa de un pequeño elemento es $dm = \rho dV$. Al sustituir este resultado en la ecuación 10.20 se obtiene

$$I = \int \rho r^2 dV \quad (10.21)$$

Si el objeto es homogéneo, ρ es constante y la integral se puede evaluar para una geometría conocida. Si ρ no es constante, se debe conocer su variación con la posición para completar la integración.

La densidad dada por $\rho = m/V$ a veces se conoce como *densidad de masa volumétrica* porque representa masa por unidad de volumen. Con frecuencia se usan otras formas de expresar la densidad. Por ejemplo, cuando se trata con una hoja de grosor uniforme t , se puede definir una *densidad de masa superficial* $\sigma = \rho t$, que representa *masa por unidad de área*. Por último, cuando la masa se distribuye a lo largo de una barra de área de sección transversal uniforme A , a veces se usa la *densidad de masas lineal* $\lambda = M/L = \rho A$, que es la *masa por unidad de longitud*.

Ejemplo 10.7 Barra rígida uniforme

Calcule el momento de inercia de una barra rígida uniforme de longitud L y masa M (figura 10.15) en torno a un eje perpendicular a la barra (el eje y') y que pasa a través de su centro de masa.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que con sus dedos hace girar la barra de la figura 10.15 en torno a su punto medio. Si tiene una regleta a la mano, úsela para simular el giro de una barra delgada y sienta la resistencia que ofrece de ser girada.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución, que usa la definición de momento de inercia en la ecuación 10.20. Como con cualquier problema de integración, la solución supone reducir el integrando a una sola variable.

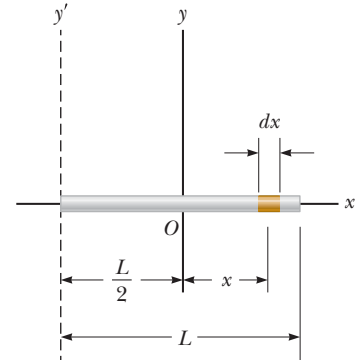
El elemento de longitud sombreado dx en la figura 10.15 tiene una masa dm igual a la masa por unidad de longitud λ multiplicada por dx .

Expresa dm en términos de dx :

Sustituya esta expresión en la ecuación 10.20 con $r^2 = x^2$

Compruebe este resultado en la tabla 10.2.

Figura 10.15 (Ejemplo 10.7) Una barra rígida uniforme de longitud L . El momento de inercia en torno al eje y es menor que en el eje y' . Este último eje se examina en el ejemplo 10.9.



Ejemplo 10.8 Cilindro sólido uniforme

Un cilindro sólido uniforme tiene un radio R , masa M y longitud L . Calcule su momento de inercia en torno a su eje central (el eje z en la figura 10.16).



10.8 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar Para simular esta situación, imagine que hace girar una lata de jugo congelado en torno a su eje central. No agite una lata congelada de sopa de verduras; No es un objeto rígido. El líquido se puede mover en relación con la lata de metal.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución, con el uso de la definición de momento de inercia. Como con el ejemplo 10.7, se debe reducir el integrando a una sola variable.

Es conveniente dividir el cilindro en muchos cascarones cilíndricos, cada uno con radio r , grosor dr y longitud L , como se muestra en la figura 10.16. La densidad del cilindro es ρ . El volumen dV de cada cascarón es su área de sección transversal multiplicada por su longitud: $dV = L dA = L(2\pi r) dr$.

Expresé dm en términos de dr :

$$dm = \rho dV = \rho L(2\pi r) dr$$

Sustituya esta expresión en la ecuación 10.20:

$$I_z = \int r^2 dm = \int r^2 [\rho L(2\pi r) dr] = 2\pi\rho L \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho LR^4$$

Use el volumen total $\pi R^2 L$ del cilindro para expresar su densidad:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 L}$$

Sustituya este valor en la expresión para I_z :

$$I_z = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{M}{\pi R^2 L} \right) LR^4 = \frac{1}{2}MR^2$$

Compruebe este resultado en la tabla 10.2.

¿QUÉ PASARÍA SI?

¿Qué pasa si la longitud del cilindro en la figura 10.16 aumenta a $2L$, mientras la masa M y el radio R se mantienen fijos? (La densidad se vuelve la mitad de grande). ¿Cómo cambia el momento de inercia del cilindro?

Respuesta Observe que el resultado para el momento de inercia de un cilindro no depende de L , la longitud del cilindro. Se aplica bien igualmente a un cilindro largo y a un disco plano que tengan las mismas masa M y radio R . Debido a eso, el momento de inercia del cilindro no sería afectado por cómo está distribuida la masa a lo largo de su longitud.

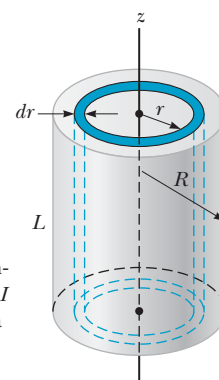


Figura 10.16 (Ejemplo 10.8) Cálculo de I en torno al eje z para un cilindro sólido uniforme.

El cálculo de momentos de inercia de un objeto en torno a un eje arbitrario puede ser complicado, incluso para un objeto considerablemente simétrico. Por ejemplo, imagine que trata de encontrar el momento de inercia del cilindro en la figura 10.16 alrededor de un eje paralelo al eje z , pero compensado por el radio R del cilindro, de modo que el eje simplemente roce a lo largo de la superficie exterior del cilindro. ¡No hay simetría alrededor de este eje! Por fortuna, el uso de un importante teorema, llamado **teorema de ejes paralelos**, con frecuencia simplifica el cálculo.

Para generar el teorema de ejes paralelos, suponga que un objeto da vueltas en torno al eje z , como se muestra en la figura 10.17a (página 266). El momento de inercia no depende de cómo se distribuye la masa a lo largo del eje z' ; como se encontró en el ejemplo 10.8, el momento de inercia de un cilindro es independiente de su longitud. Imagine colapsar el objeto tridimensional en un objeto plano como en la figura 10.17a en un objeto plano de la misma masa que en la figura 10.17b. En este proceso imaginario, toda la masa se mueve paralela al eje z hasta que se encuentra en el plano $x'y'$. Las coordenadas del centro de masa del objeto ahora son x'_{CM} , y'_{CM} y $z'_{CM} = 0$. Sea el elemento de masa dm que tiene coordenadas $(x, y, 0)$ como se muestra en la figura 10.17c visto hacia abajo desde el eje z' . Ya que este elemento está a una distancia $r' = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$ del eje z' , el momento de inercia en torno al eje z' es

$$I = \int (r')^2 dm = \int [(x')^2 + (y')^2] dm$$

Se pueden relacionar las coordenadas x', y' del elemento de masa dm a las coordenadas de este mismo elemento ubicadas en un sistema coordenado que tenga el centro de masa en su origen. Si las coordenadas del centro de masa son x'_{CM} y y'_{CM} en el sistema coordenado

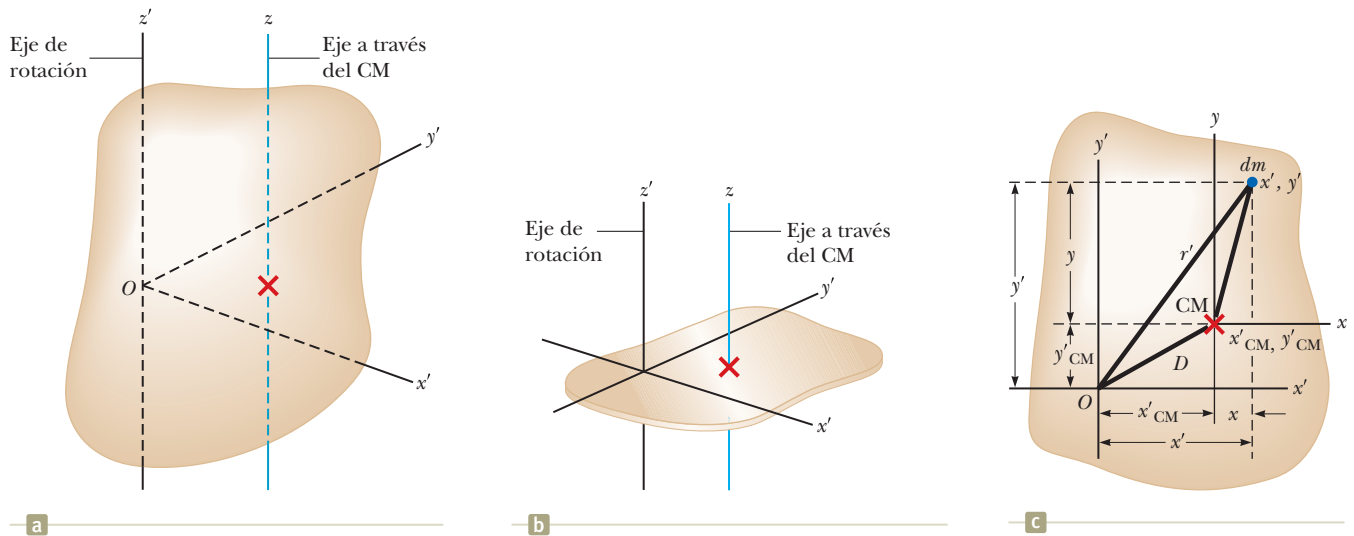


Figura 10.17 (a) Un objeto rígido de forma arbitraria. El origen del sistema de coordenadas no está en el centro de la masa del objeto. Imagine que el objeto gira alrededor del eje z' . (b) Todos los elementos de masa del objeto están colapsados de manera paralela al eje z' para formar un objeto plano. (c) Un elemento arbitrario masa dm indicado en azul en esta vista hacia abajo desde el eje z' . Se puede usar el teorema de los ejes paralelos con la geometría que se muestra para determinar el momento de inercia del objeto original en torno del eje z' .

original con centro en O , se ve en la figura 10.17c que las relaciones entre las coordenadas no primas y primas son $x = x' + x'_{CM}$, $y = y' + y'_{CM}$, $y z = z' = 0$. Por tanto

$$\begin{aligned}
 I &= \int [(x + x'_{CM})^2 + (y + y'_{CM})^2] dm \\
 &= \int (x^2 + y^2) dm + 2x'_{CM} \int x dm + 2y'_{CM} \int y dm + (x'_{CM}{}^2 + y'_{CM}{}^2) \int dm
 \end{aligned}$$

La primera integral es, por definición, el momento de inercia I_{CM} en torno a un eje que es paralelo al eje z y pasa a través del centro de masa. Las segundas dos integrales son cero porque, por definición del centro de masa, $\int x dm = \int y dm = 0$. La última integral es simplemente MD^2 porque $\int dm = M$ y $D^2 = x'_{CM}{}^2 + y'_{CM}{}^2$. En consecuencia, se concluye que

Teorema de ejes paralelos ►

$$I = I_{CM} + MD^2 \quad (10.22)$$

El teorema del eje paralelo nos permite evaluar el momento de inercia de un objeto de masa M sobre cualquier eje que es paralelo a su eje central como el momento de inercia alrededor del eje central más el término MD^2 , donde D es la distancia perpendicular entre los ejes.

Ejemplo 10.9 Aplicación del teorema de ejes paralelos

Considere una vez más la barra rígida uniforme de masa M y longitud L que se muestra en la figura 10.15. Encuentre el momento de inercia de la barra en torno a un eje perpendicular a la barra a través de un extremo (el eje y' en la figura 10.15).

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que hace girar la barra en torno al punto final en lugar de hacerlo en el punto medio. Si tiene una regleta a la mano, inténtelo y note el grado de dificultad al girarlo alrededor del extremo en comparación con girarlo alrededor del centro.

10.9 continuación

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución, que supone el teorema de ejes paralelos.

Por intuición, se espera que el momento de inercia sea mayor que el resultado $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$ del ejemplo 10.7 porque hay masa hasta una distancia L del eje de rotación, mientras que la distancia más lejana en el ejemplo 10.7 fue sólo $L/2$. La distancia entre el eje del centro de masa y el eje y es $D = L/2$.

Use el teorema de ejes paralelos:

$$I = I_{CM} + MD^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

Compruebe este resultado en la tabla 10.2. Como se predijo en el ejemplo 10.7, es más difícil girar la barra en un extremo que en el centro de masa.

10.7 Energía cinética rotacional

Después de investigar el papel de las fuerzas en nuestro estudio de movimiento traslacional, volvemos nuestra atención a los métodos que implican energía. Hacemos lo mismo en nuestro estudio actual del movimiento de rotación.

En el capítulo 7 se definió la energía cinética de un objeto como la energía asociada con su movimiento a través del espacio. Un objeto rotatorio en torno a un eje fijo permanece estacionario en el espacio, así que no hay energía cinética asociada con el movimiento traslacional. No obstante, las partículas individuales que conforman el objeto en rotación se mueven a través del espacio; siguen trayectorias circulares. En consecuencia, con el movimiento rotacional hay energía cinética asociada.

Considere un objeto como un conjunto de partículas y suponga que da vueltas en torno a un eje fijo z con una rapidez angular ω . La figura 10.18 muestra al objeto en rotación e identifica una partícula sobre el objeto ubicada a una distancia r_i del eje de rotación. Si la masa de la i -ésima partícula es m_i y su rapidez tangencial es v_i , su energía cinética es

$$K_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2$$

Para continuar, recuerde que aunque cada partícula en el objeto rígido tiene la misma rapidez angular ω , las magnitudes de velocidad tangenciales individuales dependen de la distancia r_i desde el eje de rotación de acuerdo con la ecuación 10.10. La energía cinética *total* del objeto rígido en rotación es la suma de las energías cinéticas de las partículas individuales:

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2$$

Esta expresión se puede escribir en la forma

$$K_R = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 \tag{10.23}$$

donde ω^2 se factorizó de la suma porque es común a toda partícula. Reconocemos a la cantidad entre paréntesis como el momento de inercia del objeto que se introdujo en la sección 10.5.

Por tanto, la ecuación 10.23 se puede escribir

$$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{10.24}$$

Compare la ecuación 10.24 con la ecuación 7.16 para la energía cinética de un objeto en movimiento traslacional. Nuevamente, como en el análisis que sigue a la ecuación 10.19, vemos que el momento de inercia I juega el mismo papel en el movimiento rotacional que la masa m en el movimiento traslacional. Aunque comúnmente la cantidad $\frac{1}{2}I\omega^2$ se refiere como **energía cinética rotacional**, no es una forma nueva de energía. Es energía cinética ordinaria porque se deduce de una suma de energías cinéticas individuales de las partículas contenidas en el objeto rígido. La forma matemática de la energía cinética dada por la ecuación 10.24 es conveniente cuando se trata con movimiento rotacional, siempre que se sepa cómo calcular I .

La partícula de la masa m_i del objeto rígido tiene la misma energía cinética que si se moviera a través del espacio con la misma velocidad.

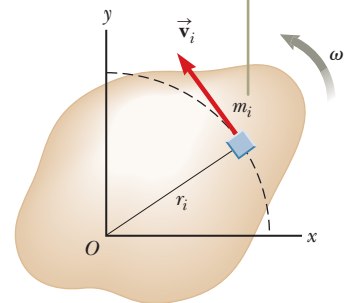


Figura 10.18 Un objeto rígido gira alrededor del eje z con velocidad angular ω . La energía cinética de las partículas de masa m_i es $\frac{1}{2}m_i v_i^2$. La energía cinética total del objeto se llama su energía cinética rotacional. La energía cinética total se llama energía cinética rotacional.

◀ Energía cinética rotacional (Compare con la ecuación 7.16)



- E XAMEN RÁPIDO 10.6** Una sección de tubería hueca y un cilindro sólido tienen el mismo radio, masa y longitud. Ambos giran sobre sus ejes largos con la misma rapidez angular. ¿Qué objeto tiene la mayor energía cinética rotacional? (a) El tubo hueco. (b) El cilindro sólido. (c) Tienen la misma energía cinética rotacional. (d) Es imposible de determinar.

Ejemplo 3.1 Un bastón inusual

Cuatro esferas pequeñas se amarran a los extremos de dos barras con masa despreciable que yacen en el plano xy para formar un inusual bastón (figura 10.19). Se supondrá que los radios de las esferas son pequeños en comparación con las dimensiones de las barras.

(A) Si el sistema da vueltas en torno al eje y (figura 10.19(a)) con una rapidez angular ω , encuentre el momento de inercia y la energía cinética rotacional del sistema en torno a este eje.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 10.19 es una representación gráfica que ayuda a formar ideas del sistema de esferas y cómo gira. Modele las esferas como partículas.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución porque es una aplicación directa de las definiciones analizadas en esta sección.

Aplique la ecuación 10.19 al sistema:

$$I_y = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 = 2Ma^2$$

Evalúe la energía cinética rotacional con la ecuación 10.24:

$$K_R = \frac{1}{2} I_y \omega^2 = \frac{1}{2} (2Ma^2) \omega^2 = Ma^2 \omega^2$$

Que las dos esferas de masa m no entren en este resultado tiene sentido, porque no tienen movimiento en torno al eje de rotación; por tanto, no tienen energía cinética rotacional. Por lógica similitud, se espera que el momento de inercia en torno al eje x sea $I_x = 2mb^2$ con una energía cinética rotacional en torno a dicho eje de $K_R = mb^2 \omega^2$.

(B) Suponga que el sistema da vueltas en el plano xy en torno a un eje (el eje z) a través del *centro del bastón* (figura 10.19b). Calcule el momento de inercia y la energía cinética rotacional en torno a este eje.

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 10.19 a este nuevo eje de rotación:

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 = 2Ma^2 + 2mb^2$$

Evalúe la energía cinética rotacional con la ecuación 10.24:

$$K_R = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} (2Ma^2 + 2mb^2) \omega^2 = (Ma^2 + mb^2) \omega^2$$

Al comparar los resultados de las partes (A) y (B), se concluye que el momento de inercia y, por tanto, la energía cinética rotacional asociada con una rapidez angular dada depende del eje de rotación. En la parte (B) se espera que el resultado incluya las cuatro esferas y distancias porque las cuatro esferas están girando en el plano xy . Apoyados en el teorema trabajo-energía cinética, el que la energía cinética rotacional de la parte (A) sea menor que la de la parte (B) indica que requeriría menos trabajo poner el sistema en rotación en torno al eje y que en torno al eje z .

¿QUÉ PASARÍA SI?

¿Y si la masa M es mucho mayor que m ? ¿Cómo se comparan las respuestas a las partes (A) y (B)?

Respuesta Si $M \gg m$, entonces m se puede despreciar y el momento de inercia y la energía cinética rotacional en la parte (B) se vuelven

$$I_z = 2Ma^2 \quad \text{y} \quad K_R = Ma^2 \omega^2$$

que son lo mismo que las respuestas en la parte (A). Si las masas m de las dos esferas anaranjadas en la figura 10.19 son despreciables, dichas esferas se pueden retirar de la figura y las rotaciones en torno a los ejes y y z son equivalentes.

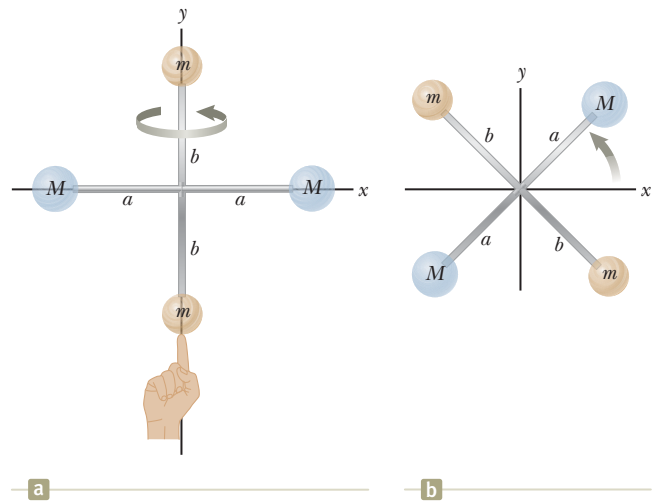


Figura 10.19 (Ejemplo 10.10) Cuatro esferas forman un bastón inusual. (a) El bastón rota en torno al eje y . (b) El bastón rota en torno al eje z .



10.8 Consideraciones energéticas en el movimiento rotacional

Después de haber introducido la energía cinética de rotación en la sección 10.7, veamos ahora cómo un enfoque de energía puede ser útil para resolver problemas rotacionales. Comience por considerar la relación entre el momento de torsión que actúa en un objeto rígido y su movimiento rotacional resultante a fin de generar expresiones para la potencia y un análogo rotacional del teorema trabajo-energía cinética. Observe el objeto rígido pivoteado en O en la figura 10.20. Suponga que una sola fuerza externa \vec{F} se aplica en P , donde \vec{F} yace en el plano de la página. El trabajo hecho sobre el objeto por \vec{F} a medida que su punto de aplicación da vueltas a través de una distancia infinitesimal $ds = r d\theta$ es

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (F \sin \phi) r d\theta$$

donde $F \sin \phi$ es la componente tangencial de \vec{F} o, en otras palabras, la componente de la fuerza a lo largo del desplazamiento. Note que el vector componente radial de \vec{F} no hace trabajo sobre el objeto porque es perpendicular al desplazamiento del punto de aplicación de \vec{F} .

Ya que la magnitud del momento de torsión debida a \vec{F} en torno a un eje a través de O es definida como $rF \sin \phi$, por la ecuación 10.14, el trabajo hecho por la rotación infinitesimal se puede escribir como

$$dW = \tau d\theta \quad (10.25)$$

La rapidez a la que \vec{F} realiza trabajo a medida que el objeto rota en torno al eje fijo a través del ángulo $d\theta$ en un intervalo de tiempo dt es

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$

Ya que dW/dt es la potencia instantánea P (vea la sección 8.5) entregada por la fuerza y $d\theta/dt = \omega$, esta expresión se reduce a

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \omega \quad (10.26)$$

Esta ecuación es análoga a $P = Fv$ (ecuación 8.18) en el caso del movimiento traslacional, y la ecuación 10.25 es análoga a $dW = F_x dx$.

Al estudiar el movimiento traslacional, los modelos de acuerdo con la aproximación energética pueden ser extremadamente útiles para describir el comportamiento de un sistema. De lo aprendido del movimiento traslacional, se espera que, cuando un objeto simétrico dé vueltas en torno a un eje fijo, el trabajo invertido por fuerzas externas sea igual al cambio en la energía rotacional del objeto.

Para probar este hecho, comience con el modelo objeto rígido bajo un momento de torsión neto, cuya representación matemática es $\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha$. Al usar la regla de la cadena del cálculo, es posible expresar el momento de torsión neto como

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \omega$$

Al reordenar esta expresión y notar que $\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha$ se obtiene

$$\sum \tau_{\text{ext}} d\theta = dW = I\omega d\omega$$

Al integrar la expresión, se obtiene el trabajo total W hecho por la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema en rotativo

$$W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega d\omega = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 \quad (10.27)$$

donde la rapidez angular cambia de ω_i a ω_f . La ecuación 10.27 es el **teorema trabajo-energía cinética para movimiento rotacional**. Similar al teorema trabajo-energía cinética en movimiento traslacional (sección 7.5). La ecuación 10.27 afirma que el trabajo neto hecho por fuerzas externas en un objeto rígido simétrico en rotación en torno a un eje fijo es igual al cambio en la energía rotacional del objeto.

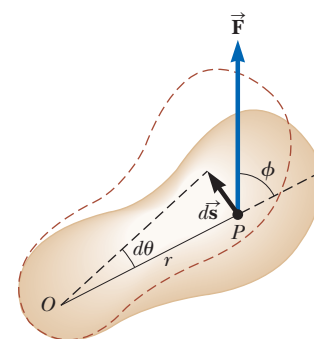


Figura 10.20 Un objeto rígido rota en torno a un eje a través de O bajo la acción de una fuerza externa \vec{F} aplicada a P .

◀ Potencia entregada a un objeto rígido en rotación

◀ Teorema trabajo-energía cinética para movimiento rotacional

TABLA 10.3 Ecuaciones útiles en movimiento rotacional y traslacional

Movimiento rotacional en torno a un eje fijo	Movimiento traslacional
Rapidez angular $\omega = d\theta/dt$	Rapidez traslacional $v = dx/dt$
Aceleración angular $\alpha = d\omega/dt$	Aceleración traslacional $a = dv/dt$
Fuerza neta $\Sigma\tau_{\text{ext}} = I\alpha$	Fuerza neta $\Sigma F = ma$
Si $\alpha = \text{constante}$ $\begin{cases} \omega_f = \omega_i + \alpha t \\ \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \end{cases}$	Si $a = \text{constante}$ $\begin{cases} v_f = v_i + at \\ x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{cases}$
Trabajo $W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$	Trabajo $W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$
Energía cinética rotacional $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$	Energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$
Potencia $P = \tau\omega$	Potencia $P = Fv$
Cantidad de movimiento angular $L = I\omega$	Cantidad de movimiento lineal $p = mv$
Fuerza neta $\Sigma\tau = dL/dt$	Fuerza neta $\Sigma F = dp/dt$

La ecuación 10.27 es una forma del modelo de sistema (energía) no aislado explicado en el capítulo 8. En el sistema del objeto rígido se hace trabajo, que representa una transferencia de energía a través de la frontera del sistema que aparece como un aumento en la energía cinética rotacional del objeto.

En general, es posible combinar la ecuación 10.27 con la forma traslacional del teorema trabajo-energía cinética del capítulo 7. Por tanto, el trabajo neto invertido por fuerzas externas sobre un objeto es el cambio en su energía cinética *total*, que es la suma de las energías cinética traslacional y rotacional. Por ejemplo, cuando un pitcher lanza una pelota de béisbol, el trabajo invertido por la mano del pitcher aparece como energía cinética asociada con la pelota móvil a través del espacio, así como energía cinética rotacional asociada con el giro de la bola.

Además del teorema trabajo-energía cinética, también se aplican otros principios de energía a situaciones rotacionales. Por ejemplo, si un sistema que involucra objetos rotativos se aísla y dentro del sistema no actúan fuerzas no conservativas, se pueden usar el modelo de sistema aislado y el principio de conservación de la energía mecánica para analizar el sistema como en el ejemplo 10.11 siguiente. En general, la ecuación 8.2, la ecuación de conservación de la energía, se aplica a situaciones de rotación, con el reconocimiento de que el cambio en la energía cinética ΔK incluirá cambios en energías cinéticas tanto traslacionales y rotacionales.

Por último, en algunas situaciones una aproximación energética no proporciona suficiente información para resolver el problema y se debe combinar con un planteamiento de cantidad de movimiento. Tal caso se ilustra en el ejemplo 10.14 de la sección 10.9.

La tabla 10.3 enlista las diversas ecuaciones que se han estudiado y la relación entre las expresiones del movimiento rotacional con las expresiones análogas para movimiento traslacional. Observe la similitud entre las formas matemáticas de las ecuaciones. Las últimas dos ecuaciones de la tabla 10.3, que involucran cantidad de movimiento angular L , se explican en el capítulo 11 y se incluyen aquí sólo por motivos complementarios.

Ejemplo 10.11 Un nuevo vistazo a la barra giratoria

Una barra uniforme de longitud L y masa M tiene libertad de dar vuelta sobre un pivote sin fricción que pasa a través de un extremo (figura 10.21). La barra se libera desde el reposo en la posición horizontal.

(A) ¿Cuál es su rapidez angular cuando la barra llega a su posición más baja?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Considere la figura 10.21 e imagine que la barra giratoria hacia abajo un cuarto de vuelta en torno al pivote en el extremo izquierdo. Regrese a ver el ejemplo 10.4 en el que la situación física es la misma.

10.11 continuación

Categorizar Como se mencionó en el ejemplo 10.4, la aceleración angular de la barra no es constante. Por tanto, las ecuaciones cinemáticas para rotación (sección 10.2) no se pueden usar para resolver este ejemplo. Categorizemos el sistema de la varilla y la Tierra como un *sistema aislado* en términos de *energía* sin fuerzas no conservativas actuando y se utiliza el principio de conservación de energía mecánica.

Analizar Elija la configuración en que la barra cuelga recta hacia abajo, como la configuración de referencia para energía potencial gravitacional y asigne un valor de cero para esta configuración. Cuando la barra está en la posición horizontal, no tiene energía cinética rotacional. La energía potencial del sistema en esta configuración respecto a la configuración de referencia es $MgL/2$ porque el centro de masa de la barra está a una altura $L/2$ más alto que su posición en la configuración de referencia. Cuando la barra llega a su posición más baja, la energía del sistema es enteramente energía rotacional $\frac{1}{2}I\omega^2$, donde I es el momento de inercia de la barra en torno a un eje que pasa a través del pivote.

Usando el modelo de sistema aislado (energía), escriba una reducción adecuada de la ecuación 8.2:

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

Sustituya para cada una de las energías:

$$\left(\frac{1}{2}I\omega^2 - 0\right) + \left(0 - \frac{1}{2}MgL\right) = 0$$

Resuelva para ω y use $I = \frac{1}{3}ML^2$ (vea la tabla 10.2) para la barra:

$$\omega = \sqrt{\frac{MgL}{I}} = \sqrt{\frac{MgL}{\frac{1}{3}ML^2}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

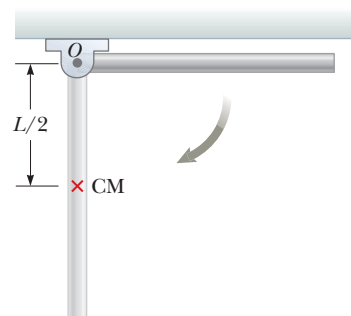


Figura 10.21 (Ejemplo 10.11) Una barra rígida uniforme con centro de giro en O da vueltas en un plano vertical bajo la acción de la fuerza gravitacional.

(B) Determine la rapidez tangencial del centro de masa y la rapidez tangencial del punto más bajo en la barra cuando esté en su posición vertical.

SOLUCIÓN

Use la ecuación 10.10 y el resultado de la parte (A):

$$v_{\text{CM}} = r\omega = \frac{L}{2}\omega = \frac{1}{2}\sqrt{3g/L}$$

Ya que r para el punto más bajo en la barra es el doble de lo que es para el centro de masa, el punto más bajo tiene el doble de rapidez tangencial que el centro de masa:

$$v = 2v_{\text{CM}} = \sqrt{3g/L}$$

Finalizar La configuración inicial en este ejemplo es la misma que en el ejemplo 10.4. Sin embargo, en el ejemplo 10.4, sólo se podría encontrar la aceleración angular inicial de la barra. Aplicar un método de energía en el ejemplo actual permite encontrar información adicional, la rapidez angular de la barra en otro instante de tiempo. Convéncese de que podría encontrar la rapidez angular de la barra en cualquier posición angular conociendo la ubicación del centro de masa en esta posición.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Qué pasa si queremos encontrar la rapidez angular de la barra cuando el ángulo que hace con la horizontal es 45.0° ? Ya que este ángulo es la mitad de 90.0° , para el cual hemos resuelto el problema anterior, ¿es la rapidez angular en esta configuración la mitad de la respuesta del cálculo anterior, es decir, $\frac{1}{2}\sqrt{3g/L}$?

Respuesta Imagine la barra de la figura 10.21 en la posición 45.0° . Utilice un lápiz o una regla para representar la barra en esta posición. Observe que el centro de masas ha caído de más de la mitad de la distancia $L/2$ en esta configuración. Por tanto, más de la mitad de la energía potencial gravitatoria inicial se ha transformado en energía cinética rotacional. Entonces, no deberíamos esperar que el valor de la rapidez angular sea tan simple como se propuso antes.

Observe que el centro de masa de la barra cae una distancia de $0.500L$ conforme la barra alcanza la configuración vertical. Cuando la barra está a 45.0° con la horizontal, podemos demostrar que el centro de masa de la barra cae a través de una distancia de $0.354L$. Continuando con el cálculo, se encuentra que la rapidez angular de la varilla en esta configuración es $\sqrt{3g/L}$, (no $\frac{1}{2}\sqrt{3g/L}$).

Ejemplo 10.11 Energía y la máquina de Atwood

Dos bloques de masas diferentes m_1 y m_2 están conectados por una cuerda que pasa sobre una polea como se muestra en la figura 10.22 (página 272). La polea tiene un radio R y momento de inercia I en torno a su eje de rotación. La cuerda no se desliza en la polea, y el sistema se libera a partir del reposo. Encuentre las rapidezces de traslación de los bloques después que el bloque 2 desciende a través de una distancia h y la rapidez angular de la polea en este momento.

continúa

10.12 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar Ya hemos visto el ejemplo 5.9 que involucra la máquina de Atwood, así que el movimiento de los objetos en la figura 10.22 debe ser fácil de visualizar.

Categorizar Ya que la cuerda no se desliza, la polea da vueltas en torno al eje. Se puede despreciar la fricción en el eje porque el radio del eje es pequeño en relación con el de la polea. Por tanto, el momento de torsión de fricción es mucho menor que el momento de torsión neto aplicado por los dos cilindros siempre que sus masas sean significativamente diferentes. En consecuencia, el sistema que consiste en los dos bloques, la polea y la Tierra es un *sistema aislado* en términos de *energía* sin fuerzas no conservativas actuando.

Analizar La configuración cero para energía potencial gravitacional se define como la que existe cuando el sistema se libera desde el reposo. De la figura 10.22 se ve que el descenso del bloque 2 se asocia con una disminución en la energía potencial del sistema y que la elevación del bloque 1 representa un aumento en energía potencial.

Usando el modelo de sistema aislado (energía), escriba una reducción adecuada de la ecuación de la conservación de la energía:

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

Sustituya para cada una de las energías:

$$\left[\left(\frac{1}{2}m_1v_f^2 + \frac{1}{2}m_2v_f^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2\right) - 0\right] + [(m_1gh - m_2gh) - 0] = 0$$

Los dos bloques, la cuerda y el borde exterior de la polea se mueven todos a la misma velocidad. Por tanto, use $v_f = R\omega_f$ para sustituir por ω_f :

$$\frac{1}{2}m_1v_f^2 + \frac{1}{2}m_2v_f^2 + \frac{1}{2}I\frac{v_f^2}{R^2} = m_2gh - m_1gh$$

$$\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)v_f^2 = (m_2 - m_1)gh$$

Resuelva para v_f :

$$(1) \quad v_f = \left[\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2 + I/R^2}\right]^{1/2}$$

Use $v_f = R\omega_f$ para despejar a ω_f

$$\omega_f = \frac{v_f}{R} = \frac{1}{R}\left[\frac{2(m_2 - m_1)gh}{m_1 + m_2 + I/R^2}\right]^{1/2}$$

Finalizar Cada uno de los bloques se modela como una *partícula bajo aceleración constante* porque experimenta una fuerza neta constante. Piense qué necesitaría hacer para usar la ecuación (1) para encontrar la aceleración de uno de los bloques. Después imagine que la polea no tiene masa y encuentre la aceleración de uno de los bloques. ¿Cómo se compara este resultado con el del ejemplo 5.9?

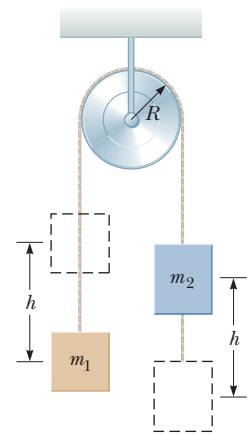


Figura 10.22 (Ejemplo 10.22) Una máquina de Atwood con una pulea pesada.

10.9 Movimiento de rodamiento de un objeto rígido

En esta sección se trata el movimiento de un objeto rígido que rueda a lo largo de una superficie plana. En general, tal movimiento es complejo. Por ejemplo, suponga que un cilindro rueda sobre una trayectoria recta tal que el eje de rotación permanece paralelo a su orientación inicial en el espacio. Como muestra la figura 10.23, un punto sobre el borde del cilindro se mueve en una trayectoria compleja llamada *cicloide*. Sin embargo, se pueden simplificar el tema al concentrarse en el centro de la masa en lugar de hacerlo en

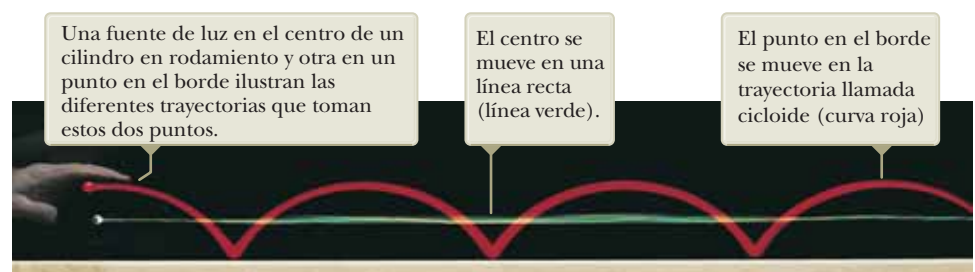


Figura 10.23 Dos puntos sobre un objeto que rueda toman caminos diferentes a través del espacio.

un punto en el borde del objeto rodante. Como se muestra en la figura 10.23, el centro de masa se mueve en línea recta. Si un objeto como un cilindro rueda sin deslizarse sobre la superficie (llamado *movimiento de rodamiento puro*), existe una relación simple entre sus movimientos rotacional y traslacional.

Considere un cilindro uniforme de radio R que rueda sin deslizarse sobre una superficie horizontal (figura 10.24). Conforme el cilindro da vueltas a través de un ángulo θ , su centro de masa se mueve una distancia lineal $s = R\theta$ (vea la ecuación 10.1b). Por tanto, la rapidez traslacional del centro de masa para movimiento de rodamiento puro está dado por

$$v_{CM} = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\theta}{dt} = R\omega \tag{10.28}$$

donde ω es la rapidez angular del cilindro. La ecuación 10.28 se cumple siempre que un cilindro o esfera rueda sin deslizarse y es la **condición para movimiento de rodamiento puro**. La magnitud de la aceleración lineal del centro de masa para movimiento de rodamiento puro es

$$a_{CM} = \frac{dv_{CM}}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha \tag{10.29}$$

donde α es la aceleración angular del cilindro.

Imagine que está moviéndose junto con un objeto que rueda con rapidez v_{CM} , y permanece en un marco de referencia en reposo respecto al centro de masa del objeto. Mientras observa el objeto, lo verá en rotación pura alrededor de su centro de masa. La figura 10.25a muestra las velocidades de puntos a la cabeza, en el centro y en la parte baja del objeto según se observa. Además de estas velocidades, cada punto sobre el objeto se mueve en la misma dirección con rapidez v_{CM} respecto a la superficie sobre la que rueda. La figura 10.25b muestra estas velocidades para un objeto que no gira. En el marco de referencia en reposo respecto de la superficie, la velocidad de un punto determinado sobre el objeto es la suma de las velocidades que se muestran en las figuras 10.25a y 10.25b. La figura 10.25c muestra los resultados de sumar estas velocidades.

Observe que el punto de contacto entre la superficie y el cilindro en la figura 10.25c tiene una rapidez traslacional cero. En este instante, el objeto que rueda es móvil en exactamente la misma forma que si la superficie se retirara y el objeto fuera pivoteado en el punto P y girara en torno a un eje que pasa a través de P . Podemos expresar la energía cinética total de este objeto que se piensa que está girando como

$$K = \frac{1}{2}I_P \omega^2 \tag{10.30}$$

donde I_P es el momento de inercia en torno a un eje de rotación a través de P .

Ya que el movimiento del objeto que se piensa que está girando es el mismo en este instante que el del verdadero objeto en rodamiento, la ecuación 10.30 también da la energía cinética del objeto en rodamiento. Al aplicar el teorema de ejes paralelos, se puede sustituir $I_P = I_{CM} + MR^2$ en la ecuación 10.30 para obtener

$$K = \frac{1}{2}I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2}MR^2 \omega^2$$

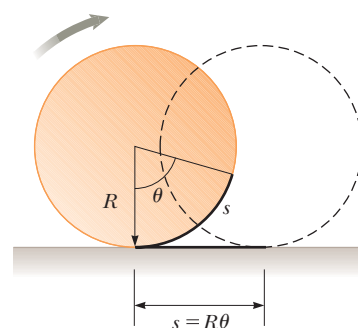
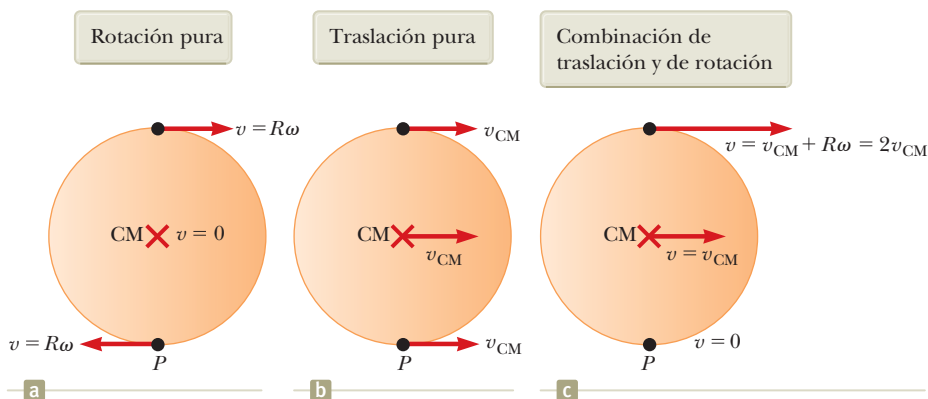


Figura 10.24 Para movimiento de rodamiento puro, a medida que el cilindro da vueltas a través de un ángulo θ , su centro se traslada una distancia lineal $s = R\theta$.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 10.6

La ecuación 10.28 parece familiar La ecuación 10.28 parece muy similar a la ecuación 10.10, así que asegúrese de ser claro con la diferencia. La ecuación 10.10 da la *rapidez tangencial* de un punto en un objeto *giratorio* ubicado a una distancia r de un eje de rotación fijo si el objeto está girando con rapidez angular ω . La ecuación 10.28 da la *rapidez traslacional* del centro de masa de un objeto en rodamiento de radio R rodando con rapidez angular ω .

Figura 10.25 El movimiento de un objeto rodando se puede modelar como una combinación de traslación pura y de rotación pura.

Energía cinética total de un objeto en rodamiento ▶

$$K = \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2 \quad (10.31)$$

El término $\frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2$ representa la energía cinética rotacional del cilindro en torno a su centro de masa, y el término $\frac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2$ representa la energía cinética que tendría el cilindro si sólo se trasladara a través del espacio sin girar. En consecuencia, la energía cinética total de un objeto en rodamiento es la suma de la energía cinética rotacional *en torno* al centro de masa y la energía cinética traslacional *del* centro de masa. Este enunciado es consistente con la situación que se ilustra en la figura 10.25, que muestra que la velocidad de un punto en el objeto es la suma de la velocidad del centro de masa y la velocidad tangencial en torno al centro de masa.

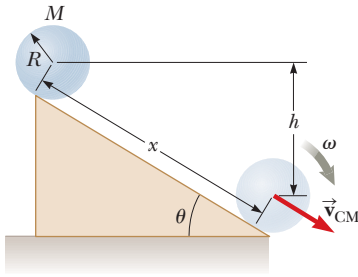


Figura 10.26 Una esfera rueda por un plano inclinado. La energía mecánica del sistema esfera-Tierra se conserva si no se presenta deslizamiento.

Se pueden usar métodos de energía para tratar una clase de problemas concernientes con el movimiento de rodamiento de un objeto sobre un plano inclinado rugoso. Por ejemplo, considere la figura 10.26, que muestra una esfera que rueda sin deslizarse después de liberarla desde el reposo en la parte superior del plano. El movimiento de rodamiento acelerado sólo es posible si una fuerza de fricción está presente entre la esfera y el plano para producir un momento de torsión neto en torno al centro de masa. A pesar de la presencia de fricción, no se presenta pérdida de energía mecánica, porque el punto de contacto está en reposo en relación con la superficie en cualquier instante. (Por otra parte, si la esfera se deslizara, la energía mecánica del sistema esfera-plano inclinado-Tierra se perdería debido a la fuerza no conservativa de la fricción cinética.)

En realidad, la *fricción de rodamiento* hace que la energía mecánica se transforme en energía interna. La fricción de rodamiento se debe a deformaciones de la superficie y el objeto que rueda. Por ejemplo, las llantas de los automóviles se flexionan conforme ruedan sobre una autopista, lo que representa una transformación de energía mecánica en energía interna. La autopista también se deforma una pequeña cantidad, lo que representa una fricción de rodamiento adicional. En los modelos de resolución de problemas se ignora la fricción de rodamiento a menos que se establezca de otro modo.

Al usar $v_{\text{CM}} = R\omega$ para movimiento de rodamiento puro, la ecuación 10.31 se puede expresar como

$$K = \frac{1}{2}I_{\text{CM}} \left(\frac{v_{\text{CM}}}{R} \right)^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2$$

$$K = \frac{1}{2} \left(\frac{I_{\text{CM}}}{R^2} + M \right) v_{\text{CM}}^2 \quad (10.32)$$

Para el sistema esfera-Tierra de la figura 10.26, la configuración cero de energía potencial gravitacional se define cuando la esfera está en la parte baja del plano inclinado. Por tanto, la ecuación 8.2 da

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

$$\left[\frac{1}{2} \left(\frac{I_{\text{CM}}}{R^2} + M \right) v_{\text{CM}}^2 - 0 \right] + (0 - Mgh) = 0$$

$$v_{\text{CM}} = \left[\frac{2gh}{1 + (I_{\text{CM}}/MR^2)} \right]^{1/2} \quad (10.33)$$

Si bien este cálculo se realizó para la esfera en la figura 10.26, la ecuación 10.33 es lo suficientemente general como para proporcionar la velocidad de *cualquier* objeto con una sección transversal circular que rueda desde el reposo hacia abajo una pendiente de altura h .

E XAMEN RÁPIDO 10.7 Una bola rueda sin deslizarse por un plano inclinado A, partiendo del reposo. Al mismo tiempo, una caja parte del reposo y se desliza por el plano inclinado B, que es idéntico al plano A excepto que no tiene fricción. ¿Cuál llega primero al fondo? (a) La bola. (b) La caja. (c) Ambas. (d) Imposible de determinar.



Ejemplo 10.13 Esfera que rueda hacia abajo por un plano inclinado

Para la esfera sólida que se muestra en la figura 10.26, calcule la rapidez traslacional del centro de masa en la parte baja del plano inclinado y la magnitud de la aceleración traslacional del centro de masa.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Ruede una pelota de golf o una canica por una rampa para visualizar el movimiento de la esfera.

Categorizar La esfera y la Tierra se modelan como un *sistema aislado* en términos de *energía*, sin que actúen fuerzas no conservativas. Este modelo es el que condujo a la ecuación 10.33, así que se puede usar dicho resultado. Para encontrar su aceleración, modelaremos la esfera como una *partícula bajo aceleración constante*.

Analizar Evalúe la rapidez del centro de masa de la esfera a partir de la ecuación 10.33, usando el momento de inercia de la tabla 10.2:

$$v_{\text{CM}} = \left[\frac{2gh}{1 + \left(\frac{2}{5}MR^2/MR^2\right)} \right]^{1/2} = \left(\frac{10}{7}gh\right)^{1/2}$$

Este resultado es menor que $\sqrt{2gh}$, que es la rapidez que tendría un objeto si simplemente se deslizara por el plano sin girar. (Elimine la rotación al hacer $I_{\text{CM}} = 0$ en la ecuación 10.33.)

Para calcular la aceleración traslacional del centro de masa, note que el desplazamiento vertical de la esfera se relaciona con la distancia x que se mueve a lo largo del plano inclinado mediante la relación $h = x \sin \theta$.

Aplique esta relación para reescribir la ecuación (1):

$$v_{\text{CM}}^2 = \frac{10}{7}gx \sin \theta$$

Escriba la ecuación 2.17 para un objeto que parte del reposo y se mueve una distancia x bajo aceleración constante:

$$v_{\text{CM}}^2 = 2a_{\text{CM}}x$$

Igualé las dos expresiones anteriores para encontrar a_{CM}

$$a_{\text{CM}} = \frac{5}{7}g \sin \theta$$

Finalizar Tanto la rapidez como la aceleración del centro de masa son *independientes* de la masa y el radio de la esfera. Es decir: todas las esferas homogéneas sólidas experimentan la misma rapidez y aceleración en un plano inclinado determinado. Intente verificar esta afirmación experimentalmente con bolas de diferentes tamaños, como una canica y una bola de croquet.

Si tuviera que repetir el cálculo de la aceleración para una esfera hueca, un cilindro sólido o un aro, obtendría resultados

similares que sólo diferirían en el factor enfrente de $g \sin \theta$. Los factores constantes que aparecen en las expresiones para v_{CM} y a_{CM} sólo dependen del momento de inercia en torno al centro de masa para el objeto específico. En todos los casos, la aceleración del centro de masa es *menor* que $g \sin \theta$, el valor que tendría la aceleración si el plano inclinado no tuviera fricción y no ocurriera rodamiento.

Ejemplo 10.14 Jalando sobre un carrito³

Un carrito simétrico de masa m y radio R está en reposo sobre una mesa horizontal con fricción (figura 10.27). Con su mano en una cuerda sin masa enrollada alrededor del eje de radio r , jala del carrito con una fuerza horizontal constante de magnitud T hacia la derecha. Como resultado, el carrito rueda sin deslizarse una distancia L a lo largo de la mesa sin fricción de rodamiento.

(A) Encuentre la rapidez traslacional final del centro de masa del carrito

SOLUCIÓN

Conceptualizar Use la figura 10.27 para visualizar el movimiento del carrito cuando jala la cuerda. Para que el carrito ruede una distancia L , note que su mano en la cuerda debe jalar una distancia *diferente* de L .

Categorizar El carrito es *un objeto rígido bajo un momento de torsión* neto, pero el momento de torsión incluye la fuerza de fricción, acerca de la que no sabe nada. Por tanto, un planteamiento en función del modelo de objeto rígido bajo momento de torsión neto será difícil. Su mano realiza trabajo en el carrito y la cuerda, que forman un sistema no aislado. Vea si un método respecto al modelo de *sistema no aislado (energía)* es fructífero.

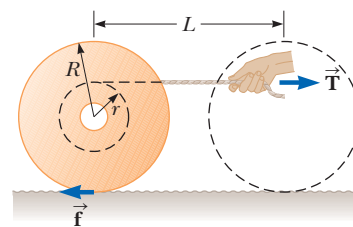


Figura 10.27 (Ejemplo 10.14)

Un carrito en reposo sobre una mesa horizontal. Una cuerda está enrollada alrededor del eje y una mano lo jala hacia la derecha.

continúa

³El ejemplo 10.14 lo inspiró en parte C. E. Mungan, "A primer on work-energy relationships for introductory physics", *The Physics Teacher*, **43**, p. 10, 2005.

10.14 continuación

Analizar El único tipo de energía que cambia en el sistema es la energía cinética del carrete. No hay fricción de rodamiento, de modo que no hay cambio en la energía interna. La única forma en que la energía cruza la frontera del sistema es mediante el trabajo realizado por su mano en la cuerda. La fuerza de fricción estática no invierte trabajo en la parte baja del carrete (a la izquierda en la figura 10.27) porque el punto de aplicación de la fuerza se mueve a través de ningún desplazamiento.

Escriba la reducción apropiada de la ecuación de conservación de la energía, ecuación 8.2:

$$(1) \quad W = \Delta K = \Delta K_{\text{trans}} + \Delta K_{\text{rot}}$$

En esta expresión, W es el trabajo invertido en la cuerda por su mano. Para hallar este trabajo, necesita encontrar el desplazamiento de su mano durante el proceso. Primero encuentre la longitud de la cuerda que se desenrolla del carrete. Si el carrete rueda una distancia L , el ángulo total que da vuelta es $\theta = L/R$. El eje también da vueltas a través de este ángulo.

Use la ecuación 10.1b para encontrar la longitud de arco total que gira el eje:

$$\ell = r\theta = \frac{r}{R}L$$

Este resultado también da la longitud de la cuerda que se jala del eje. Su mano se moverá esta distancia *más* la distancia L a través de la que se mueve el carrete. Por tanto, la magnitud del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza aplicada por su mano es $\ell + L = L(1 + r/R)$.

Evalúe el trabajo realizado por su mano sobre la cuerda:

$$(2) \quad W = TL \left(1 + \frac{r}{R} \right)$$

Sustituya la ecuación (2) en la ecuación (1):

$$TL \left(1 + \frac{r}{R} \right) = \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

donde I es el momento de inercia del carrete en torno a su centro de masa y v_{CM} y ω son los valores finales después de que la rueda recorre una distancia L .

Aplique la condición de rodamiento sin deslizamiento $\omega = v_{\text{CM}}/R$:

$$TL \left(1 + \frac{r}{R} \right) = \frac{1}{2}mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}I \frac{v_{\text{CM}}^2}{R^2}$$

Resuelva para v_{CM} :

$$(3) \quad v_{\text{CM}} = \sqrt{\frac{2TL(1 + r/R)}{m(1 + I/mR^2)}}$$

(B) Encuentre el valor de la fuerza de fricción f .

SOLUCIÓN

Categorizar Ya que la fuerza de fricción no realiza trabajo, no se le puede evaluar a partir de un método de energía. El carrete se modela como un *sistema no aislado*, pero esta vez en términos de *cantidad de movimiento*. La cuerda aplica una fuerza a través de la frontera del sistema, lo que resulta en un impulso en el sistema. Ya que las fuerzas en el carrete son constantes, el centro de masa del carrete se modela como una *partícula bajo aceleración constante*.

Analizar Escriba el teorema impulso-cantidad de movimiento (ecuación 9.40) para el carrete:

$$(4) \quad m(v_{\text{CM}} - 0) = (T - f)\Delta t$$

Para una partícula bajo aceleración constante que parte del reposo, la ecuación 2.14 dice que la velocidad promedio del centro de masa es la mitad de la velocidad final.

Use este hecho y la ecuación 2.2 para encontrar el intervalo de tiempo para el centro de masa del carrete para mover una distancia L desde el reposo a una rapidez final v_{CM} :

$$(5) \quad \Delta t = \frac{L}{v_{\text{CM,avg}}} = \frac{2L}{v_{\text{CM}}}$$

Sustituya la ecuación (5) en la ecuación (4):

$$mv_{\text{CM}} = (T - f) \frac{2L}{v_{\text{CM}}}$$

Resuelva para la fuerza de fricción f :

$$f = T - \frac{mv_{\text{CM}}^2}{2L}$$



10.14 continuación

Sustituya v_{CM} de la ecuación (3):

$$\begin{aligned} f &= T - \frac{m}{2L} \left[\frac{2TL(1+r/R)}{m(1+I/mR^2)} \right] \\ &= T - T \frac{(1+r/R)}{(1+I/mR^2)} = T \left[\frac{I-mrR}{I+mR^2} \right] \end{aligned}$$

Finalizar ¡Observe que podría usar el teorema impulso-cantidad de movimiento para el movimiento traslacional del carrito mientras ignora que el carrito está girando! Este hecho demuestra el poder de la creciente lista de métodos para resolver problemas. Para desafiarse a sí mismo, resuelva la parte (A) de nuevo, utilizando el objeto rígido bajo un

modelo de momento de torsión neto para el carrito y la partícula en el modelo de aceleración constante para el centro de masa del carrito, para deducir la ecuación (3). Calcule el momento de torsión y el momento de inercia alrededor de la base del carrito para eliminar la fuerza de fricción desconocida de la ecuación de momento de torsión.

Resumen

Definiciones

La **posición angular** de un objeto rígido se define como el ángulo θ entre una línea de referencia unida al objeto y una línea de referencia fija en el espacio. El **desplazamiento angular** de una partícula moviéndose en una trayectoria circular o un objeto rígido girando en torno a un eje fijo es $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$.

La **rapidez angular instantánea** de una partícula moviéndose en una trayectoria circular o de un objeto rígido girando en torno a un eje fijo es

$$\omega \equiv \frac{d\theta}{dt} \quad (10.3)$$

La **aceleración angular instantánea** de una partícula moviéndose en una trayectoria circular o de un objeto rígido girando en torno a un eje fijo es

$$\alpha \equiv \frac{d\omega}{dt} \quad (10.5)$$

Cuando un objeto rígido da vueltas en torno a un eje fijo, cada parte del objeto tiene la misma rapidez angular y la misma aceleración angular.

La magnitud del **momento de torsión** asociado con una fuerza \vec{F} que actúa sobre un objeto a una distancia r desde el eje de rotación es

$$\tau = rF \sin \phi = Fd \quad (10.14)$$

donde ϕ es el ángulo entre el vector de posición del punto de aplicación de la fuerza y el vector fuerza, y d es el brazo de momento de la fuerza, que es la distancia perpendicular desde el eje de rotación a la línea de acción de la fuerza.

El **momento de inercia de un sistema de partículas** se define como

$$I \equiv \sum_i m_i r_i^2 \quad (10.19)$$

donde m_i es la masa de la i -ésima partícula y r_i es su distancia desde el eje de rotación.

Conceptos y principios

Cuando un objeto rígido da vueltas en torno a un eje fijo, la posición angular, la rapidez angular y la aceleración angular se relacionan con la posición, la rapidez y la aceleración traslacional es mediante las relaciones

$$s = r\theta \quad (10.1b)$$

$$v = r\omega \quad (10.10)$$

$$a_t = r\alpha \quad (10.11)$$

Si un objeto rígido da vueltas en torno a un eje fijo con rapidez angular ω , su **energía cinética rotacional** se puede escribir

$$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (10.24)$$

donde I es el momento de inercia en torno al eje de rotación.

El **momento de inercia de un objeto rígido** es

$$I = \int r^2 dm \quad (10.20)$$

donde r es la distancia desde el elemento de masa dm al eje de rotación.

La rapidez con la que una fuerza externa realiza trabajo para girar un objeto rígido en torno a un eje fijo, o la **potencia** entregada, es

$$P = \tau\omega \quad (10.26)$$

Si sobre un objeto rígido se hace trabajo y el único resultado del trabajo es rotación en torno a un eje fijo, el trabajo neto hecho por las fuerzas externas para hacer girar el objeto es igual al cambio en la energía cinética rotacional del objeto:

$$W = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2 \quad (10.27)$$

continúa



La **energía cinética total** de un objeto rígido que rueda sobre una superficie rugosa sin deslizamiento es igual a la energía cinética rotacional en torno a su centro de masa más la energía cinética traslacional del centro de masa:

$$K = \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2 \quad (10.31)$$

Modelo de análisis para resolver problemas

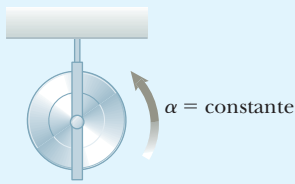
Objeto rígido bajo aceleración angular constante. Si un objeto rígido da vueltas en torno a un eje fijo bajo aceleración angular constante, uno puede aplicar las ecuaciones de la cinemática que son análogas a las del movimiento traslacional de una partícula bajo aceleración constante:

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \quad (10.6)$$

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (10.7)$$

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \quad (10.8)$$

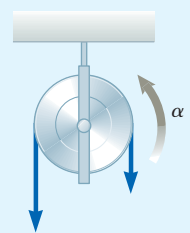
$$\theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t \quad (10.9)$$



Objeto rígido bajo momento de torsión neto. Si sobre un objeto rígido libre que da vueltas en torno a un eje fijo actúa un momento de torsión externo neto, el objeto experimenta una aceleración angular α , donde

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha \quad (10.18)$$

Esta ecuación es el análogo rotacional a la segunda ley de Newton en el modelo de partícula bajo una fuerza neta.



Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a WEBASSIGN.
From Cengage

1. Tiene una pasantía de verano, trabajando con otros pasantes en una excavación arqueológica. Su equipo de practicantes ha encontrado un objeto perfectamente cilíndrico de un material desconocido. El examen de la superficie visible muestra que la composición del objeto parece ser uniforme. El objeto tiene una masa de 15.7 kg y un radio de 5.00 cm. El arqueólogo principal quiere saber si el artefacto es hueco, pero la máquina de rayos X y otros equipos de escaneo se han roto, por lo que no hay forma de mirar dentro. A su equipo se le ocurre la idea de construir soportes en forma de U de madera y colocar el cilindro horizontalmente entre los soportes, como se muestra en la vista final en la figura TP10.1a. La madera puede lijarse y lubricarse para eliminar casi por completo la fricción. De esta forma, el artefacto cilíndrico puede rotar libremente alrededor de su eje horizontal largo. Envuelva varias veces un largo trozo de cordel alrededor

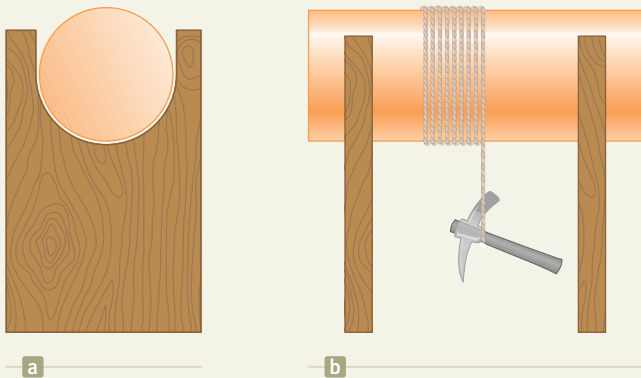


Figura TP10.1

del cilindro y coloca un pico de 2.00 kg en el extremo colgante libre del cordel, como se muestra en la vista lateral de la figura TP10.1b. Cuando el pico se libera del reposo, desciende y hace que el cilindro gire. (a) Mide la caída del pico y encuentra que cae 1.50 m en 1.45 s. ¿El cilindro está hueco? (b) Suponga que mide la caída del pico a través de la misma distancia y que tarda 1.13 s. ¿Qué puede concluir sobre el cilindro ahora?

2. Para ahorrar dinero en costos de construcción, se ha construido una pista de carrera circular con una carretera plana en lugar de una carretera con peralte, como la que se analiza en el ejemplo 6.4. Durante la prueba de la pista, varios autos de carrera comienzan, uno a la vez, al inicio de la pista y a la misma distancia radial desde el centro de la misma, y experimentan una aceleración traslacional constante de magnitud a . Todos los autos tienen neumáticos idénticos. Demuestre que todos los autos se deslizan hacia afuera de la pista en la misma posición angular alrededor de la pista, independientemente de su masa. Para resolver este problema, el obstinado propietario aún no quiere gastar el dinero en carreteras peraltadas, por lo que simplemente tiene una pista circular construida con el mismo material de la carretera pero con un radio mayor. ¿Qué sucede?
3. **ACTIVIDAD** (a) Coloque diez centavos en una regla graduada horizontal, con un centavo a 10 cm, 20 cm, 30 cm, etc., hasta 100 cm. Levante con cuidado la regla, manténgala horizontal, y haga que un miembro del grupo realice una grabación de video del siguiente evento, usando un teléfono inteligente u otro dispositivo. Mientras la grabación de video está en curso, suelte el extremo de 100 cm de la regla mientras que el extremo de 0 cm descansa en el dedo de alguien o en el borde de la mesa. Al pasar las imágenes de video o ver el video en cámara lenta, determine qué centavo primero pierde contacto con la regla mientras cae. (b) Haga una determinación teórica de qué centavos deberían primero perder contacto y compararlo con su resultado experimental.

Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage

SECCIÓN 10.1 Posición, rapidez y aceleración angular

1. (a) Encuentre la rapidez angular de rotación de la Tierra sobre su eje. (b) ¿Cómo afecta esta rotación la forma de la Tierra?
2. Una barra sobre una bisagra parte del reposo y da vueltas con una aceleración angular $\alpha = (10 + 6t)$ rad/s², donde t está en segundos. Determine el ángulo en radianes que recorre la barra en los primeros 4.00 s.

SECCIÓN 10.2 Análisis de modelo: Objeto rígido bajo aceleración angular constante

3. Una rueda parte del reposo y da vueltas con aceleración angular constante para alcanzar una rapidez angular de 12.0 rad/s en 3.00 s. Encuentre (a) la magnitud de la aceleración angular de la rueda y (b) el ángulo en radianes que da vueltas en este intervalo de tiempo.
4. Una pieza de una máquina gira a una rapidez angular de 0.060 rad/s; Luego se incrementa su rapidez a 2.2 rad/s con una aceleración angular de 0.70 rad/s². (a) Encuentre el ángulo a través del cual la pieza rota antes de alcanzar esta rapidez final. (b) Si tanto la rapidez angular inicial como la final se duplican y la aceleración angular sigue siendo la misma, ¿en qué factor cambia el desplazamiento angular? ¿Por qué?
5. El taladro de un dentista empieza a partir del reposo. Después de 3.20 s de aceleración angular constante, gira a razón de 2.51×10^4 rev/min. (a) Encuentre la aceleración angular de la broca. (b) Determine el ángulo (en radianes) a través del cual el taladro gira durante este período.
6. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Comenzando a partir del reposo, un disco gira alrededor de un eje fijo un ángulo de 50.0 rad en un intervalo de tiempo de 10.0 s. La aceleración angular del disco es constante durante todo el movimiento, y su rapidez angular final 8.00 rad/s.
7. **Problema de repaso.** Un edificio alto se ubica en el ecuador de la Tierra. Mientras la Tierra da vueltas, una persona en el piso superior del edificio se mueve más rápido que alguien en el suelo en relación con un marco de referencia inercial porque la última persona está más cerca del eje de la Tierra. En consecuencia, si un objeto se deja caer desde el piso superior al suelo, que está a una distancia h por abajo, aterriza al este del punto verticalmente abajo de donde se dejó caer. (a) ¿A qué distancia al este aterrizará el objeto? Expresé su respuesta en términos de h , g y la rapidez angular ω de la Tierra. Ignore la resistencia del aire y suponga que la aceleración en caída libre es constante en este intervalo de alturas. (b) Evalúe el desplazamiento hacia el este para $h = 50.0$ m. (c) A su juicio, ¿está justificado ignorar este aspecto del *efecto Coriolis* en el estudio previo de la caída libre? (d) Suponga que la velocidad angular de la Tierra disminuye debido a la fricción de las mareas con aceleración angular constante. ¿Aumentaría o disminuiría el desplazamiento hacia el este del objeto que cae en comparado con el resultado del inciso (b)?

SECCIÓN 10.3 Cantidades angulares y traslacionales

8. Haga una estimación de un orden de magnitud del número de revoluciones que da en un año la llanta de un automóvil común. Establezca las cantidades que mida o estime y sus valores.

9. Un lanzador de disco (figura P10.9) acelera un disco desde el reposo a una rapidez de 25.0 m/s al girarlo 1.25 rev. Suponga que el disco se mueve en un arco de circunferencia de 1.00 m de radio. (a) Calcule la rapidez angular final del disco. (b) Determine la magnitud de la aceleración angular del disco, si supone que es constante. (c) Calcule el intervalo de tiempo requerido para que el disco acelere desde el reposo a 25.0 m/s.



Figura P10.9

10. Una escalera recta se apoya contra la pared de una casa. La escalera tiene rieles de 4.90 m de largo, unidos mediante peldaños de 0.410 m de largo. Su extremo inferior está sobre suelo sólido, pero inclinado de modo que la parte superior de la escalera está 0.690 m a la izquierda de donde debe estar, y es inseguro ascender por la escalera. Usted quiere poner una roca bajo un pie de la escalera para compensar la pendiente del terreno. (a) ¿Cuál debe ser el grosor de la roca? (b) ¿Usar las ideas de este capítulo hace más fácil explicar la solución al inciso (a)? Explique su respuesta.
11. Un automóvil acelera uniformemente desde el reposo y alcanza una rapidez de 22.0 m/s en 9.00 s. Las llantas tienen 58.0 cm de diámetro y no se deslizan sobre el pavimento. (a) Encuentre el número de revoluciones que hace cada llanta durante este movimiento. (b) ¿Cuál es la rapidez angular final de una llanta en revoluciones por segundo?
12. **Problema de repaso.** Un objeto pequeño con 4.00 kg de masa se mueve contra las manecillas del reloj con rapidez angular constante de 1.50 rad/s en un círculo de 3.00 m de radio con centro en el origen. Comienza en el punto con vector de posición $3.00 \hat{i}$ m. Después se somete a un desplazamiento angular de 9.00 rad. (a) ¿Cuál es su vector de posición? Use notación de vector unitario para todas las respuestas vectoriales. (b) ¿En qué cuadrante se ubica la partícula y qué ángulo forma su vector de posición con el eje positivo x? (c) ¿Cuál es su velocidad? (d) ¿En qué dirección se mueve? (e) ¿Cuál es su aceleración? (f) Bosqueje sus vectores de posición, velocidad y aceleración. (g) ¿Qué fuerza total se ejerce sobre el objeto?
13. En un proceso de fabricación, se utiliza un rodillo grande, cilíndrico para aplanar el material alimentado debajo de éste. El diámetro del rodillo es de 1.00 m, y, cuando está en rotación alrededor de un eje fijo, su posición angular se expresa como

$$\theta = 2.50t^2 - 0.600t^3$$

donde θ está en radianes y t está en segundos. (a) Encuentre la rapidez angular máxima del rodillo. (b) ¿Cuál es la rapidez tangencial de un punto en el borde de la rueda? (c) ¿En qué momento debe la fuerza impulsora t quitar el rodillo para que el rodillo no invierta su sentido de rotación? (d) ¿Cuántas vueltas ha dado el rodillo entre $t = 0$ y el tiempo que encontró en el inciso (c)?



SECCIÓN 10.4 Momento de torsión

14. Encuentre el momento de torsión neto sobre la rueda de la figura P10.14 en torno al eje a través de O , considerando $a = 10.0$ cm y $b = 25.0$ cm.

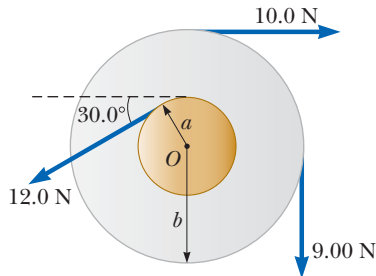


Figura P10.14

SECCIÓN 10.5 Análisis de modelo: Objeto rígido bajo un momento de torsión neto

15. Una rueda de molino tiene la forma de un disco sólido uniforme de 7.00 cm de radio y 2.00 kg de masa. Parte del reposo y acelera uniformemente bajo la acción del momento de torsión constante de $0.600 \text{ N} \cdot \text{m}$ que el motor ejerce sobre la rueda. (a) ¿Cuánto tarda la rueda en alcanzar su rapidez operativa final del 200 rev/min? (b) ¿Cuántas revoluciones da mientras acelera?
16. **Problema de repaso.** Un bloque de masa $m_1 = 2.00$ kg y un bloque de masa $m_2 = 6.00$ kg están conectados mediante una cuerda sin masa sobre una polea en la forma de un disco sólido que tiene radio $R = 0.250$ m y masa $M = 10.0$ kg. A estos bloques se les permite moverse sobre una cuña fija de ángulo $\theta = 30.0^\circ$, como se muestra en la figura P10.16. El coeficiente de fricción cinética es 0.360 para ambos bloques. (a) Dibuje diagramas de cuerpo libre de ambos bloques y de la polea. Determine (b) la aceleración de los dos bloques y (c) las tensiones en la cuerda en ambos lados de la polea.

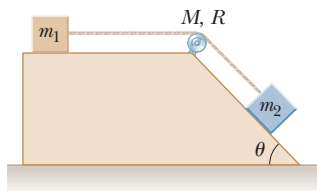


Figura P10.16

17. Un avión a escala con 0.750 kg de masa está amarrado con un alambre de modo que vuela en un círculo de 30.0 m de radio. El motor del avión proporciona un empuje neto de 0.800 N perpendicular al alambre de unión. (a) Encuentre el momento de torsión que produce el empuje neto en torno al centro del círculo. (b) Encuentre la aceleración angular del avión. (c) Encuentre la aceleración traslacional del avión tangente a su trayectoria de vuelo.
18. Un disco que tiene $100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ de momento de inercia es libre de dar vuelta sin fricción, partiendo del reposo, en torno a un eje fijo a través de su centro. Una fuerza tangencial cuya magnitud puede variar de $F = 0$ a $F = 50.0$ N se aplica a cualquier distancia que varíe de $R = 0$ a $R = 3.00$ m del eje de rotación. (a) Encuentre un par de valores de F y R que hagan que el disco complete 2.00 revoluciones en 10.0 s. (b) ¿Es su respuesta del inciso (a) una única respuesta? ¿Cuántas respuestas existen?

19. Su abuela disfruta creando cerámica como pasatiempo. Ella usa una rueda de alfarero, que es un disco de piedra de radio

$R = 0.500$ m y una masa $M =$ de 100 kg. En funcionamiento, la rueda gira a 50.0 rev / min. Mientras la rueda gira, su abuela trabaja la arcilla en el centro de la rueda con sus manos en un objeto en forma de olla con simetría circular. Cuando se alcanza la forma correcta, ella quiere detener la rueda en un intervalo de tiempo lo más corto posible, de modo que la forma de la olla no se distorsione aún más por la rotación. Empuja continuamente con un trapo mojado tan fuerte como puede radialmente hacia adentro en el borde de la rueda y la rueda se detiene en 6.00 s. (a) Le gustaría construir un freno para detener la rueda en un intervalo de tiempo más corto, pero debe determinar el coeficiente de fricción entre el trapo y la rueda para diseñar un mejor sistema. Usted determina que la fuerza máxima de presión que su abuela puede sostener durante 6.00 s es 70.0 N. (b) ¿Qué pasaría si? Si su abuela opta por presionar hacia abajo sobre la superficie superior de la rueda una distancia $r = 0.300$ m del eje de rotación, ¿cuál es la fuerza necesaria para detener la rueda en 6.00 s? Supongamos que el coeficiente de fricción cinética entre el trapo mojado y la rueda sigue siendo el mismo que antes.

20. En una mina local, un derrumbe ha atrapado a varios mineros. Usted y algunos compañeros de clase corren a la escena para ver cómo pueden ayudar. Los mineros atrapados han podido llegar a un punto de la mina en la parte inferior de un pozo vertical alto hacia la superficie, lo que les permite el acceso al aire fresco, pero necesitan desesperadamente agua fresca y vendajes por lesiones. Algunos rescatistas le piden que ayude a empacar un recipiente cilíndrico de plástico liviano con botellas de agua y vendajes. Simplemente al dejar caer el contenedor en el pozo se corre el riesgo de dañar el recipiente y el contenido y dañar a los mineros. Amarrar una cuerda al recipiente y bajarla en el extremo de la cuerda lleva mucho tiempo. Un método rápido y relativamente seguro es envolver una cuerda ligera alrededor del recipiente. Un extremo de la cuerda se asegurará y el recipiente se liberará en el eje vertical. El recipiente se desenrollará de la cuerda como un yo-yo cayendo. (a) Si se necesita acceso inmediato a los vendajes livianos debido a lesiones, para que el recipiente llegue al fondo del eje en el intervalo de tiempo más corto posible, debe empacar las botellas de agua pesadas en el centro del recipiente o cerca de los bordes exteriores? (b) Si la necesidad médica no es tan urgente y, por consideraciones de seguridad, desea que el recipiente llegue al fondo del eje con la velocidad más baja posible, debe empacar las botellas de agua pesadas en el centro del recipiente o cerca de los bordes externos? Suponga que el centro de masa del recipiente está en su centro.

21. Usted acaba de comprar una bicicleta nueva. En su primer viaje de paseo, parece que la bicicleta se detiene relativamente rápido después de que deja de pedalear y deja que la bicicleta se desplace sobre un terreno llano. Llama a la tienda donde compró la bicicleta y describe el problema. El técnico dice que reemplazarán los cojinetes en las ruedas o harán lo que sea necesario si puede probar que el momento de torsión de fricción en el eje de las ruedas es peor que $-0.02 \text{ N} \cdot \text{m}$. Al principio, se siente desalentado por el sonido técnico de lo que le han dicho y por la ausencia de cualquier herramienta para medir el momento de torsión en su cochera. ¡Pero luego recuerda que está tomando una clase de física! Lleva su bicicleta a la cochera, la pone boca abajo y comienza a girar la rueda mientras piensa cómo determinar el momento de torsión de fricción. El camino de entrada fuera de la cochera tiene un pequeño charco, por lo que observa que las gotas de agua salen volando tangencialmente del borde de un punto del neumático, incluidas las que se proyectan hacia arriba, como se muestra en la figura P10.21. ¡Ajá! ¡Aquí está

su método de medición del momento de torsión! Las gotas proyectadas hacia arriba dejan el borde de la rueda al mismo nivel que el eje. Mide la altura a la que se eleva una gota desde el nivel del eje: $h_1 = 54.0$ cm. La mancha húmeda en el neumático hace una revolución y otra baja se proyecta hacia arriba. Mide su punto más alto: $h_2 = 51.0$ cm. Mide el radio de la rueda: $r = 0.381$ m. Finalmente, quita la rueda de la bicicleta y encuentra su masa: $m = 0.850$ kg. Debido a que la mayor parte de la masa de la rueda está en el neumático, modela la rueda como un aro. ¿Qué le dice al técnico cuando lo vuelve a llamar?

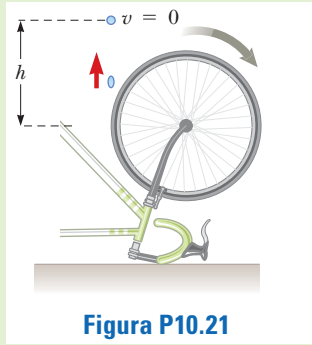


Figura P10.21

SECCIÓN 10.6 Cálculo de momentos de inercia

- 22. Imagine que se mantiene de pie y gira alrededor de un eje vertical a través de la parte superior de su cabeza y el punto a medio camino entre sus tobillos. Estime con un orden de magnitud para el momento de inercia de su cuerpo mientras está de pie y gira en torno a un eje vertical a través de lo alto de su cabeza y el punto a la mitad entre sus tobillos. En su solución, establezca las cantidades que mida o estime y sus valores.
- 23. Con el procedimiento del ejemplo 10.7, demuestre que el momento de inercia en torno al eje y' de la barra rígida en la figura 10.15 es $\frac{1}{3}ML^2$.
- 24. Dos bolas con masas M y m se conectan mediante una barra rígida de longitud L y masa despreciable, como se muestra en la figura P10.24. Para un eje perpendicular a la barra, (a) muestre que el sistema tiene el momento de inercia mínimo cuando el eje pasa a través del centro de masa. (b) Demuestre que este momento de inercia es $I = \mu L^2$, donde $\mu = mM/(m + M)$.

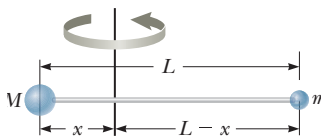


Figura P10.24

SECTION 10.7 Energía cinética rotacional

- 25. Barras rígidas de masa despreciable que yacen a lo largo del eje y conectan tres partículas (figura P10.25). El sistema da vueltas en torno al eje x con una rapidez angular de 2.00 rad/s. Encuentre (a) el momento de inercia en torno al eje x , (b) la energía cinética rotacional total evaluada a partir de $\frac{1}{2}I\omega^2$, y (c) la rapidez tangencial de cada partícula y (d) la energía cinética total evaluada a partir de $\sum \frac{1}{2}m_i v_i^2$. (e) Compare las respuestas para energía cinética en los incisos(a) y (b).
- 26. Una *war-wolf* o *trebuchet* (catapulta) es un dispositivo que se usó durante la edad media para lanzar rocas a los castillos, y ahora a veces se usa para arrojar grandes vegetales y pianos como deporte. En la figura P10.26 se muestra un *trebuchet*

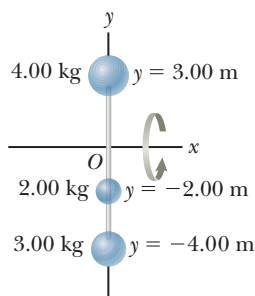


Figura TP10.25

simple. Modélelo como una barra rígida de masa despreciable de 3.00 m de largo que une partículas de masa $m_1 = 0.120$ kg y $m_2 = 60.0$ kg en sus extremos. Puede dar vuelta sobre un eje horizontal sin fricción perpendicular a la barra y a 14.0 cm de la partícula con mayor masa. La barra se libera desde el reposo en una orientación horizontal. (a) Encuentre la rapidez máxima que logra el objeto más pequeño. (b) Mientras que el objeto más pequeño gana rapidez, ¿se mueve con aceleración constante? (c) ¿Se mueve con aceleración tangencial constante? (d) ¿El *trebuchet* se mueve con aceleración angular constante? (e) ¿Tiene cantidad de movimiento constante? (f) ¿El sistema *trebuchet*-Tierra tiene energía mecánica constante?

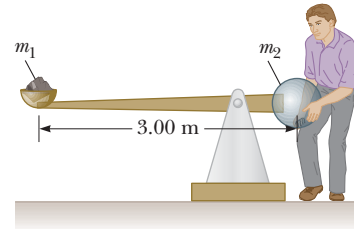


Figura P10.26

SECCIÓN 10.8 Consideraciones energéticas en el movimiento rotacional

- 27. El *Big Ben*, es el sobrenombre del reloj en la torre de Elizabeth (nombrada así en 2012) en Londres, tiene una manecilla horaria de 2.70 m de largo con una masa de 60.0 kg y un minutero de 4.50 m de largo con una masa de 100 kg (figura P10.27). Calcule la energía cinética rotacional total de las dos manecillas en torno al eje de rotación. (Puede modelar las manecillas como largas barras delgadas que giran en torno a un extremo. Suponga que la manecilla horaria y el minutero giran a una razón constante de una revolución por 12 horas y 60 minutos, respectivamente).



Figura P10.27 Problemas 27 y 40.

- 28. Considere dos objetos con $m_1 > m_2$ conectados por una cuerda ligera que pasa sobre una polea teniendo un momento de inercia de alrededor de su eje de rotación como se muestra en la figura P10.28. La cuerda no se desliza sobre la polea ni se estira. La polea gira sin fricción. Los dos objetos se liberan a partir del reposo separados por una distancia vertical $2h$. (a) Utilice el principio de conservación de la energía para encontrar las rapidez de traslación de los objetos cuando se pasa uno al otro. (b) Encuentre la rapidez angular de la polea en este momento.

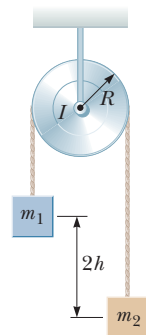


Figura P10.28

- 29. **Problema de repaso.** Un objeto con una masa de $m = 5.10$ kg se une al extremo libre de una cadena ligera enrollada alrededor de un carrete de radio $R = 0.250$ y masa $M = 3.00$ kg.

El carrete es un disco sólido, libre para girar en un plano vertical sobre el eje horizontal que pasa por su centro como se muestra en la figura P10.29. El objeto suspendido se suelta a partir del reposo a 6.00 m por encima del piso. Determine (a) la tensión en la cuerda, (b) la aceleración del objeto y (c) la rapidez con la cual el objeto llega al piso. (d) Compruebe su respuesta al inciso (c) utilizando el modelo de sistema aislado (energía).

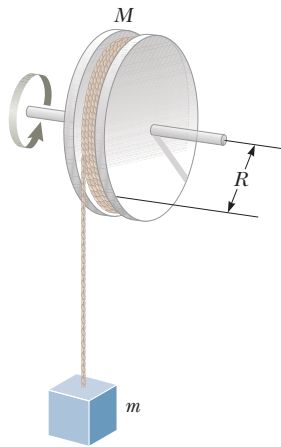


Figura P10.29

30. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? En una ciudad con un problema de contaminación de aire, un autobús no tiene motor de combustión. Corre con la energía que extrae de un gran volante que gira rápidamente bajo el suelo del autobús. En la terminal de autobuses, el volante se pone a girar a su máxima rapidez de rotación de 3 000 rev/min mediante un motor eléctrico. Cada vez que el autobús aumenta rapidez, el volante frena ligeramente. El autobús está equipado con frenos regenerativos de modo que el volante aumenta rapidez cuando el autobús frena. El volante es un cilindro sólido uniforme con 1 200 kg de masa y 0.500 m de radio. El cuerpo del autobús realiza trabajo contra la resistencia del aire y la resistencia de rodamiento a la relación promedio de 25.0 hp mientras viaja con una rapidez promedio de 35.0 km/h.

31. Un disco sólido uniforme de radio R y masa M es libre de dar vuelta sobre un pivote sin fricción a través de un punto sobre su borde (figura P10.31). Si el disco se libera desde el reposo en la posición que se muestra por el círculo azul, (a) ¿cuál es la rapidez de su centro de masa cuando el disco llega a la posición indicada por el círculo punteado? (b) ¿Cuál es la rapidez del punto más bajo en el disco en la posición punteada? (c) ¿Qué pasaría si? Repita el inciso (a) con un aro uniforme.

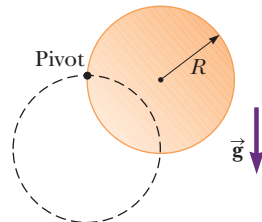


Figura P10.31

32. Este problema describe un método experimental para determinar el momento de inercia de un objeto con forma irregular como la carga para un satélite. La figura P10.32 muestra un contrapeso de masa m suspendido mediante una cuerda enrollada alrededor de un carrete de radio r , que forma parte de una tornamesa que sostiene al objeto. La tornamesa puede dar vuelta sin fricción. Cuando el contrapeso se libera desde el reposo, desciende una distancia h y adquiere una rapidez v . Demuestre que el momento de inercia I del aparato giratorio (incluida la tornamesa) es $mr^2(2gh/v^2 - 1)$.

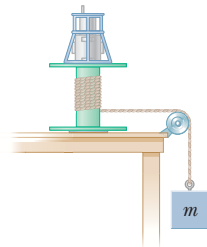


Figura P10.32

SECCIÓN 10.9 Movimiento de rodamiento de un objeto rígido

33. Una pelota de tenis es una esfera hueca con una pared delgada. Se pone a rodar sin deslizarse a 4.03 m/s sobre una sec-

ción horizontal de una pista, como se muestra en la figura P10.33. Rueda alrededor del interior de un bucle circular vertical $r = 45.0$ cm de diámetro y finalmente deja la pista en un punto $h = 20.0$ cm abajo de la sección horizontal. (a) Encuentre la rapidez de la pelota en lo alto del bucle. (b) Demuestre que la pelota no caerá de la pista en la parte superior del bucle. (c) Encuentre su rapidez mientras deja la pista en el fondo. (d) ¿Qué pasaría si? Suponga que la fricción estática entre la pelota y la pista es despreciable, de modo que la pelota se desliza en lugar de rodar. ¿Su rapidez por tanto sería mayor, menor o igual en lo alto del bucle? (e) Explique su respuesta en el inciso (d).

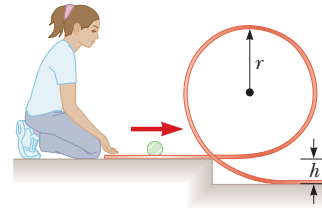


Figura P10.33

34. Un cubo uniforme de masa m y longitud de lado r se desliza con rapidez v sobre una superficie horizontal con fricción despreciable. Después el cubo se mueve sobre un plano inclinado uniforme que forma un ángulo θ con la horizontal. Un cilindro de masa m y radio r rueda sin deslizarse con su centro de masa móvil con rapidez v y encuentra un plano inclinado del mismo ángulo de inclinación, pero con suficiente fricción que el cilindro continúa rodando sin deslizarse. (a) ¿Cuál objeto recorrerá mayor distancia arriba del plano inclinado? (b) Encuentre la diferencia entre las distancias máximas que los objetos viajan por el plano inclinado. (c) ¿Cuál es la explicación para esta diferencia en las distancias recorridas?
35. Una lata metálica que contiene sopa de hongos condensada tiene 215 g de masa, 10.8 cm de alto y 6.38 cm de diámetro. Se coloca en reposo sobre su lado en lo alto de un plano inclinado de 3.00 m de largo que está a 25.0° con la horizontal y luego se libera para rodar recto hacia abajo. Llega a la parte baja del plano después de 1.50 s. (a) Si supone conservación de energía mecánica, calcule el momento de inercia de la lata. (b) ¿Qué parte de la información, si hay alguna, es innecesaria para calcular la solución? (c) ¿Por qué no puede el momento de inercia calcularse a partir de $I = \frac{1}{2}mr^2$ para la lata cilíndrica?

PROBLEMAS ADICIONALES

36. Usted ha sido contratado como testigo experto en el caso de que el dueño de una fábrica demande a una compañía de demolición. El caso particular involucra la chimenea de una fábrica que está siendo demolida. Para ahorrar dinero, el propietario de la fábrica quería mover la chimenea a una fábrica cercana que se estaba construyendo. La compañía de demolición garantizó entregar la chimenea intacta a la nueva fábrica al volcar la chimenea libremente sobre una plataforma acolchada enorme que yace en el suelo. La chimenea horizontal entonces se habría cargado en un camión de plataforma larga para el transporte a la nueva fábrica. Sin embargo, cuando la chimenea se derrumbó, se rompió en un punto a lo largo de su longitud. El dueño de la fábrica culpa a la compañía de demolición por la destrucción de su chimenea. La empresa de demolición afirma que hubo un defecto en la chimenea y esa es la razón de su destrucción. ¿Qué consejo le da al abogado que maneja el caso del lado del propietario de la fábrica?

37. Un eje gira a 65.0 rad/s en el tiempo $t = 0$. De ahí en adelante, su aceleración angular está dada por

$$\alpha = -10.0 - 5.00t$$

donde α está en rad/s^2 y t está en segundos. (a) Encuentre la rapidez angular del eje en $t = 3.00 \text{ s}$. (b) ¿Qué ángulo hace cuando ha girado entre $t = 0$ y $t = 3.00 \text{ s}$?

38. Un eje gira con una rapidez angular ω en el tiempo $t = 0$. De ahí en adelante, su aceleración angular está dada por

$$\alpha = A + Bt$$

(a) Encuentre la rapidez angular del eje al tiempo t . (b) ¿Qué ángulo hace cuando ha girado entre $t = 0$ y t ?

39. Un sistema de elevador en un edificio alto consiste en un carro de 800 kg y un contrapeso de 950 kg , unido mediante un cable que pasa sobre una polea de 280 kg de masa. La polea, llamada roldana, es un cilindro sólido de 0.700 m de radio que gira sobre un eje horizontal. El cable no se desliza sobre la roldana. Un número n de personas, cada una de 80.0 kg de masa, viajan en el carro del elevador móvil hacia arriba a 3.00 m/s y se aproximan al piso donde debe detenerse el carro. Como una medida de conservación de energía, una computadora desconecta el motor eléctrico del elevador justo en el momento correcto de modo que el sistema roldana-carro-contrapeso se desliza libremente sin fricción y llega al reposo en el piso deseado. Ahí es atrapado por un simple cerrojo, en lugar de un freno pesado. (a) Determine la distancia d que el carro se desliza hacia arriba como función de n . Evalúe la distancia para (b) $n = 2$, (c) $n = 12$ y (d) $n = 0$. e) ¿La expresión en el inciso (a) se aplica a todos los valores enteros de n ? (f) Explique su respuesta al inciso (e). (g) Si un número infinito de personas caben en el ascensor, ¿cuál es el valor de d ?

40. La manecilla horaria y el minutero del *Big Ben*, el reloj de la torre de Elizabeth en Londres, miden 2.70 m y 4.50 m de largo y tienen masas de 60.0 kg y 100 kg , respectivamente (vea la figura P10.27). (a) Determine el momento de torsión total debido al peso de estas manecillas en torno al eje de rotación cuando la hora es (i) 3:00, (ii) 5:15, (iii) 6:00, (iv) 8:20 y v) 9:45. (Modele las manecillas como largas barras delgadas uniformes.) (b) Determine todas las horas cuando el momento de torsión total en torno al eje de rotación sea cero. Determine las horas al segundo más cercano y resuelva numéricamente una ecuación trascendental.

41. **Problema de repaso.** Una cuerda se enrolla alrededor de un disco uniforme de radio R y masa M . El disco se libera desde el reposo con la cuerda vertical y su extremo superior amarrado a una barra fija (figura P10.41). Demuestre que (a) la tensión en la cuerda es un tercio del peso del disco, (b) la magnitud de la aceleración del centro de masa es $2g/3$ y (c) la rapidez del centro de masa es $(4gh/3)^{1/2}$ después de que el disco descendió una distancia h . (d) Verifique su respuesta al inciso (c) usando un método de energía.

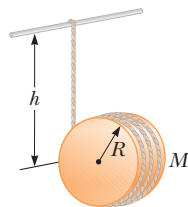


Figura P10.41

42. **Problema de repaso.** Un carrete de alambre de masa M y radio R se desenrolla bajo una fuerza constante \vec{F} (figura P10.42). Si supone que el carrete es un cilindro sólido uniforme que no se desliza, demuestre que (a) la aceleración del centro de masa es $4\vec{F}/3M$ y (b) la fuerza de fricción es hacia la derecha e igual en magnitud a $F/3$. (c) Si el cilindro parte del reposo y rueda sin deslizarse, ¿cuáles la rapidez de su centro de masa después de que rodó una distancia d ?

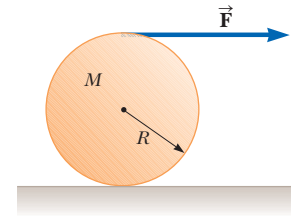


Figura P10.42

43. **Problema de repaso.** Un payaso equilibra una pequeña uva esférica en la parte superior de su cabeza calva, que también tiene la forma de una esfera. Después de ganar suficientes aplausos, la uva empieza a caer a partir del reposo y rueda sin deslizarse hacia abajo. La uva dejará de tener contacto con el cuero cabelludo del payaso cuando la línea radial que une al centro de curvatura haga un determinado ángulo con la vertical, ¿qué ángulo es?

PROBLEMAS DE DESAFÍO

44. Mientras funciona un motor de gasolina, un volante que da vuelta con el cigüeñal almacena energía después de cada explosión de combustible para proporcionar la energía requerida para comprimir la siguiente carga de combustible y aire. En el motor de cierto tractor de pasto, suponga que un volante debe tener no más de 18.0 cm de diámetro. Su grosor, medido a lo largo de su eje de rotación, no debe ser mayor a 8.00 cm . El volante debe liberar 60.0 J de energía cuando su rapidez angular cae de 800 rev/min a 600 rev/min . Diseñe un volante de acero robusto (densidad $7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$) para satisfacer estos requisitos con la masa más pequeña que pueda alcanzar razonablemente. Especifique la forma y masa del volante.

45. Un carrete de hilo consiste en un cilindro de radio R_1 con tapas laterales de radio R_2 , como se muestra en la vista lateral que se ilustra en la figura P10.45. La masa del carrete, incluido el hilo, es m , y su momento de inercia en torno a un eje a través de su centro es I . El carrete se coloca sobre una superficie horizontal rugosa de modo que rueda sin deslizarse cuando una fuerza \vec{T} que actúa hacia la derecha se aplica al extremo libre del hilo. (a) Demuestre que la magnitud de la fuerza de fricción que ejerce la superficie sobre el carrete está dada por

$$f = \left(\frac{I + mR_1R_2}{I + mR_2^2} \right) T$$

- (b) Determine la dirección de la fuerza de fricción.

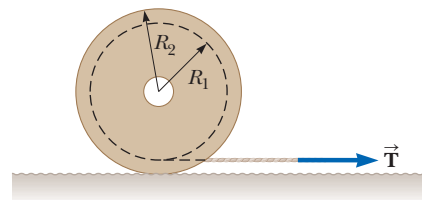


Figura P10.45

46. En la parte (B) del ejemplo 10.2, el disco compacto se modeló como un objeto rígido bajo aceleración angular constante para encontrar el desplazamiento angular total durante el tiempo de reproducción del disco. En realidad, la aceleración angular de un disco no es constante. En este problema, explore el tiempo real dependiente de la aceleración angular. (a) Suponga que la pista en el disco es una espiral tal que bucles adyacentes de la pista están separados por una distan-

cia pequeña h . Demuestre que el radio r de una porción conocida de la pista está dada por

$$r = r_i + \frac{h\theta}{2\pi}$$

donde r_i es el radio de la porción más interna de la pista y θ es el ángulo que el disco recorre para llegar a la posición de la pista de radio r . (b) Demuestre que la rapidez de cambio del ángulo θ está dado por

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r_i + (h\theta/2\pi)}$$

donde v es la rapidez constante con que la superficie del disco pasa el láser. (c) A partir del resultado del inciso (b), utilice integración para encontrar una expresión para el ángulo θ como función del tiempo. (d) A partir del resultado del inciso (c), derive para encontrar la aceleración angular del disco como función del tiempo.

- 47.** **S** Un carrete uniforme hueco tiene radio interior $R/2$, radio exterior R y masa M (figura P10.47). Está montado de modo que da vueltas sobre un eje horizontal fijo. Un contrapeso de masa m se conecta al extremo de una cuerda enrollada alrededor del carrete. El contrapeso cae desde el reposo en $t = 0$ a una posición y en el tiempo t . Demuestre que el momento detorsión debido a las fuerzas de fricción entre carrete y eje es

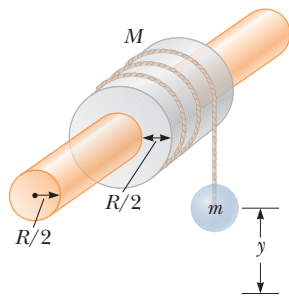


Figura P10.47

$$\tau_f = R \left[m \left(g - \frac{2y}{t^2} \right) - M \frac{5y}{4t^2} \right]$$

- 48.** **S** Un cordón se enrolla alrededor de una polea de masa m y radio r . El extremo libre del cordón está conectado a un bloque de masa M . El bloque parte del reposo y luego se desliza por un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal como se ve en la figura P10.48. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es μ . (a) Use métodos energéticos para mostrar que la rapidez del bloque como función de la posición d por el plano inclinado es

$$v = \sqrt{\frac{4Mgd(\sin \theta - \mu \cos \theta)}{m + 2M}}$$

- (b) Encuentre la magnitud de la aceleración del bloque en términos de μ , m , M , g y θ .

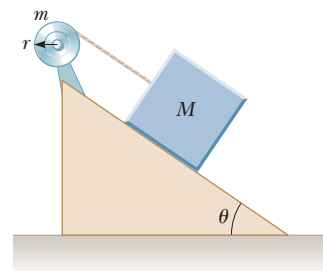


Figura P10.48



Cantidad de movimiento angular



Una clavadista olímpica hace una inmersión con un elegante giro. Cuando ella se pliega en la posición que se muestra, gira más rápido. ¿De dónde viene la energía cinética rotacional extra? (Paolo Bona/Shutterstock.com)

IMAGINE

Mientras se prepara para hacer su trabajo de física, usted está navegando entre varios videos de YouTube y tropieza con uno de los patinadores sobre hielo que giran. Observa que patina en un giro relativamente lento, tira de sus brazos y luego gira más y más rápido. Se pregunta de dónde viene la energía para hacerlo girar más rápido. A continuación, encontrará un video en cámara lenta de un clavadista olímpico que se está zambullendo en una piscina. Advierte que después de abandonar el trampolín, gira lentamente, pero luego se pliega y gira más rápido. Al igual que el patinador sobre hielo, ¿de dónde proviene la energía cinética rotacional adicional? En los videos sugeridos al costado de la página web, verá uno sobre un gato que cae. Mira ese video y se maravilla de cómo un gato boca abajo siempre puede darse la vuelta y aterrizar. Al igual que el patinador sobre hielo y el clavadista, existe una energía de rotación que aparentemente proviene de la nada. ¿Qué está pasando aquí? ¡El movimiento giratorio parece tener cualidades mágicas asociadas a él!

CONEXIONES El tema central de este capítulo es la *cantidad de movimiento angular*, una cantidad que desempeña un papel clave en la dinámica rotacional. En analogía con el principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal en el capítulo 9, también existe un principio de conservación de la cantidad de movimiento angular. La cantidad de movimiento angular de un sistema aislado es constante. Para la cantidad de movimiento angular, un sistema aislado es aquel para el cual no actúan torsiones externas en el sistema. Si un momento de torsión externo neto actúa en un sistema, no está aislado, la cantidad de movimiento angular del sistema cambia. Al igual que la ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal, la ley de conservación de la cantidad de movimiento angular es una ley fundamental de la física, igualmente válida para los sistemas relativistas y cuánticos. Este nuevo principio fundamental nos permite comprender más fenómenos, como los patinadores, los clavadistas y los gatos que giran en la semblanza de apertura. Además, aplicaremos este nuevo principio al movimiento de los planetas en un sistema solar en el capítulo 13, a los modelos atómicos en el capítulo 41 y a los espectros moleculares en el capítulo 42.

- 11.1 Producto vectorial y momento de torsión
- 11.2 Modelo de análisis: sistema no aislado (cantidad de movimiento angular)
- 11.3 Cantidad de movimiento angular de un objeto rígido rotatorio
- 11.4 Modelo de análisis: sistema aislado (cantidad de movimiento angular)
- 11.5 El movimiento de giroscopios y trompos

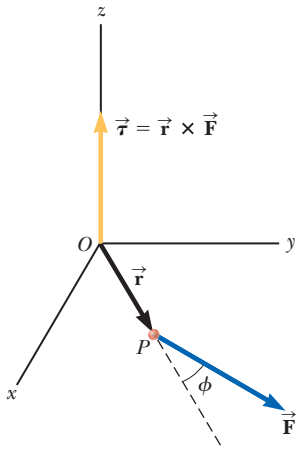


Figura 11.1 El vector momento de torsión $\vec{\tau}$ se encuentra en una dirección perpendicular al plano formado por el vector de posición \vec{r} y el vector fuerza aplicada \vec{F} . En la situación mostrada, \vec{r} y \vec{F} están en el plano xy , así el momento de torsión está a lo largo del eje z .

11.1 Producto vectorial y momento de torsión

Una importante consideración al definir la cantidad de movimiento angular es el proceso de multiplicar dos vectores mediante la operación llamada *producto vectorial*. El producto vectorial se introducirá al considerar la naturaleza vectorial del momento de torsión.

Considere una fuerza \vec{F} que actúa sobre una partícula ubicada en el punto P y descrita por el vector de posición \vec{r} . Como se vio en la sección 10.6, la *magnitud* del momento de torsión debido a esta fuerza en torno a un eje a través del origen es $rF \sin \phi$, donde ϕ es el ángulo entre \vec{r} y \vec{F} . El eje en torno al que \vec{F} tiende a producir rotación es perpendicular al plano formado por \vec{r} y \vec{F} .

El vector momento de torsión $\vec{\tau}$ se relaciona con los dos vectores \vec{r} y \vec{F} . Es posible establecer una relación matemática entre $\vec{\tau}$, \vec{r} , y \vec{F} al emplear una operación matemática llamada **producto vectorial**:

$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F} \tag{11.1}$$

Ahora se dará una definición formal del producto vectorial. Dados dos vectores cualesquiera \vec{A} y \vec{B} , el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ se define como un tercer vector \vec{C} , que tiene una magnitud de $AB \sin \theta$, donde θ es el ángulo entre \vec{A} y \vec{B} . Es decir, si \vec{C} está dado por

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \tag{11.2}$$

su magnitud es

$$C = AB \sin \theta \tag{11.3}$$

La cantidad $AB \sin \theta$ es igual al área del paralelogramo formado por \vec{A} y \vec{B} , como se muestra en la figura 11.2. La *dirección* de \vec{C} es perpendicular al plano formado por \vec{A} y \vec{B} , y la mejor forma de determinar esta dirección es aplicar la regla de la mano derecha, que se ilustra en la figura 11.2. Los cuatro dedos de la mano derecha apuntan a lo largo de \vec{A} y luego se “enrollan” en la dirección que giraría \vec{A} hacia \vec{B} a través del ángulo θ . La dirección del pulgar recto hacia arriba es la dirección de $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$. Debido a la notación, $\vec{A} \times \vec{B}$ con frecuencia se lee “ \vec{A} cruz \vec{B} ”, por esto el vector producto también se llama **producto cruz**.

Algunas propiedades del producto vectorial que se siguen de su definición son:

1. A diferencia del producto escalar, el producto vectorial *no* es conmutativo. En vez de ello, el orden en que los dos vectores se multiplican en un producto cruz es importante:

Propiedades del producto

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \tag{11.4}$$

Por tanto, si cambia el orden de los vectores en un producto cruz, debe cambiar el signo. Esta propiedad se verifica fácilmente con la regla de la mano derecha.

2. Si \vec{A} es paralelo a \vec{B} ($\theta = 0$ o 180°), entonces $\vec{A} \times \vec{B} = 0$; en consecuencia, se sigue que $\vec{A} \times \vec{A} = 0$.
3. Si \vec{A} es perpendicular a \vec{B} , entonces $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$.
4. El producto vectorial obedece la ley distributiva:

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C} \tag{11.5}$$

5. La derivada del producto cruz respecto de alguna variable como t es

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt} \tag{11.6}$$

donde es importante mantener el orden multiplicativo de los términos en el lado derecho en vista de la ecuación 11.4.

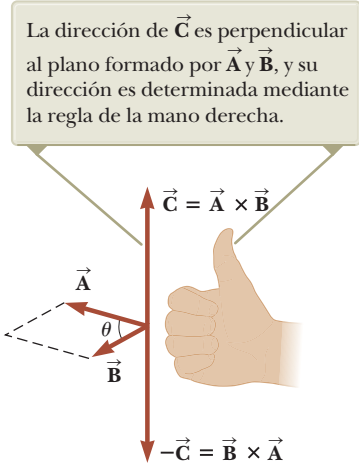


Figura 11.2 El producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ es un tercer vector \vec{C} que tiene una magnitud $AB \sin \theta$ igual al área del paralelogramo que se muestra.



Se deja como ejercicio (problema 4) demostrar a partir de las ecuaciones 11.3 y 11.4, y de la definición de vectores unitarios, que los productos cruz de los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, y $\hat{\mathbf{k}}$ obedecen las siguientes reglas:

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0 \quad (11.7a)$$

$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}} \quad (11.7b)$$

$$\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \quad (11.7c)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \quad (11.7d)$$

◀ Productos cruz de vectores unitarios

Los signos son intercambiables en los productos cruz. Por ejemplo, $\vec{\mathbf{A}} \times (-\vec{\mathbf{B}}) = -\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ y $\hat{\mathbf{i}} \times (-\hat{\mathbf{j}}) = -\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$.

El producto cruz de dos vectores cualesquiera $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se puede expresar en términos de determinantes:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} + \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} \hat{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \hat{\mathbf{k}}$$

Al expandir estos determinantes se obtiene el resultado:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{\mathbf{i}} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{\mathbf{j}} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{\mathbf{k}} \quad (11.8)$$

Dada la definición del producto cruz, ahora se puede asignar una dirección al vector momento de torsión. Si la fuerza se encuentra en el plano xy , como en la figura 11.1, el momento de torsión $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ se representa por un vector paralelo al eje z . La fuerza en la figura 11.1 crea un momento de torsión que tiende a girar a la partícula contra las manecillas del reloj en torno al eje z ; la dirección de $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ es hacia z creciente, y por tanto $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ está en la dirección z positiva. Si en la figura 11.1 se invierte la dirección de $\vec{\mathbf{F}}$, entonces $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ estaría en la dirección z negativa.

En la figura 11.1 y su análisis, investigamos el momento de torsión en una partícula. Imagine que la partícula es parte de un objeto rígido libre para rotar alrededor del eje z . Entonces, el momento de torsión que encontramos en la ecuación 11.1 es el momento de torsión aplicado a todo el objeto rígido debido a la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$.

- E XAMEN RÁPIDO 11.1** ¿Cuál de los siguientes enunciados sobre la relación entre la magnitud del producto cruz de dos vectores y el producto de las magnitudes de los vectores es verdadero? (a) $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}|$ es mayor que AB . (b) $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}|$ es menor que AB . (c) $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}|$ podría ser mayor o menor que AB , dependiendo del ángulo entre los vectores. (d) $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}|$ podría ser igual a AB .

Ejemplo 11.1 El producto vectorial

Dos vectores que se encuentran en el plano xy están dados por las ecuaciones $\vec{\mathbf{A}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$. Encuentre $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ y compruebe que $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Dadas las notaciones en vectores unitarios de los vectores, piense en qué direcciones apuntan los vectores en el espacio. Dibújelos en un papel e imagine el paralelogramo que se muestra en la figura 11.2 para estos vectores.

Categorizar Como se utiliza la definición del producto cruz explicada en esta sección, entonces este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 11.1

El producto cruz es un vector Recuerde que el resultado de tomar un producto cruz entre dos vectores es *un tercer vector*. La ecuación 11.3 sólo da la magnitud de este vector.



11.1 continuación

Escriba el producto cruz de los dos vectores:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}) \times (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}})$$

Realice la multiplicación, utilizando la propiedad distributiva:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = 2\hat{\mathbf{i}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) + 2\hat{\mathbf{i}} \times 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{j}} \times (-\hat{\mathbf{i}}) + 3\hat{\mathbf{j}} \times 2\hat{\mathbf{j}}$$

Aplique las ecuaciones de la 11.7a a la 11.7d para evaluar los diversos términos:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = 0 + 4\hat{\mathbf{k}} + 3\hat{\mathbf{k}} + 0 = 7\hat{\mathbf{k}}$$

Para comprobar que $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$, evalúe $\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$:

$$\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}} = (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}) \times (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})$$

Efectúe la multiplicación:

$$\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}} = (-\hat{\mathbf{i}}) \times 2\hat{\mathbf{i}} + (-\hat{\mathbf{i}}) \times 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{j}} \times 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} \times 3\hat{\mathbf{j}}$$

Aplique las ecuaciones de la 11.7a a la 11.7d para evaluar los diversos términos:

$$\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}} = 0 - 3\hat{\mathbf{k}} - 4\hat{\mathbf{k}} + 0 = -7\hat{\mathbf{k}}$$

Por tanto, $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$. Como un método alternativo para encontrar $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$, podría usar la ecuación 11.8. ¡Inténtelo!

Ejemplo 11.2 El vector momento de torsión

Una fuerza de $\vec{\mathbf{F}} = (2.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}})$ N se aplica a un objeto que está pivoteado a un eje fijo alineado a lo largo del eje coordenado z. La fuerza se aplica a un punto ubicado en $\vec{\mathbf{r}} = (4.00\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}})$ m. Encuentre el vector momento de torsión $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ aplicado al objeto.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Dadas las notaciones en vectores unitarios, piense en las direcciones de los vectores fuerza y de posición. Si esta fuerza se aplicara en esta posición, ¿en qué dirección giraría un objeto pivoteado en el origen?

Categorizar Ya que se utiliza la definición del producto cruz explicado en esta sección, entonces este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Configure el vector momento de torsión empleando la ecuación 11.1:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = [(4.00\hat{\mathbf{i}} + 5.00\hat{\mathbf{j}}) \text{ m}] \times [(2.00\hat{\mathbf{i}} + 3.00\hat{\mathbf{j}}) \text{ N}]$$

Realice la multiplicación usando la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{\tau}} &= [(4.00)(2.00)\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} + (4.00)(3.00)\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} \\ &\quad + (5.00)(2.00)\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} + (5.00)(3.00)\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}}] \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Use las ecuaciones de la 11.7a a la 11.7d para evaluar los diversos términos:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = [0 + 12.0\hat{\mathbf{k}} - 10.0\hat{\mathbf{k}} + 0] \text{ N} \cdot \text{m} = 2.0\hat{\mathbf{k}} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Note que tanto $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$ están en el plano xy. Como se esperaba, el vector momento de torsión es perpendicular a este plano, y tiene sólo una componente z. Si se siguen las reglas para cifras significativas explicadas en la sección 1.6, conducen a una respuesta con dos cifras significativas. Se perdió algo de precisión porque se terminó restando dos números muy cercanos entre sí.

11.2 Modelo de análisis: sistema no aislado (cantidad de movimiento angular)

Imagine un poste recto, rígido y vertical a través del hielo en un lago helado (figura 11.3). Una patinadora se desliza rápidamente hacia el poste, sin chocar con él. Conforme se acerca al poste, estira su mano y lo sujeta, una acción que la hace moverse en una trayec-



toria circular alrededor del poste. Así como la idea de la cantidad de movimiento lineal ayuda a estudiar el movimiento traslacional, un análogo rotacional, la *cantidad de movimiento angular*, auxilia a analizar el movimiento de esta patinadora y otros objetos que experimentan movimiento rotacional.

En el capítulo 9 se desarrolló la forma matemática de la cantidad de movimiento lineal y después se procedió a mostrar cómo esta nueva cantidad era valiosa en la resolución de problemas. Para la cantidad de movimiento angular se seguirá un procedimiento similar.

Considere una partícula de masa m ubicada en la posición vectorial \vec{r} y moviéndose con cantidad de movimiento lineal \vec{p} , como en la figura 11.4. Al describir el movimiento traslacional se encontró que la fuerza neta sobre la partícula es igual a la razón de cambio en el tiempo de su cantidad de movimiento lineal, $\Sigma \vec{F} = d\vec{p}/dt$ (vea la ecuación 9.3). Tome el producto cruz de cada lado de la ecuación 9.3 con \vec{r} , lo que da el momento de torsión neto sobre la partícula en el lado izquierdo de la ecuación:

$$\vec{r} \times \Sigma \vec{F} = \Sigma \vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (11.9)$$

Ahora, escriba la ecuación 11.6 con $\vec{A} = \vec{r}$ y $\vec{B} = \vec{p}$:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (11.10)$$

donde reconocemos que el producto cruz de $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ con $\vec{p} = m\vec{v}$ es cero porque \vec{v} y \vec{p} son paralelos. Debido a que los lados derechos de las ecuaciones 11.9 y 11.10 son iguales, equiparamos los lados izquierdos:

$$\Sigma \vec{\tau} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} \quad (11.11)$$

que es muy similar en forma a la ecuación 9.3, $\Sigma \vec{F} = d\vec{p}/dt$. El momento de torsión desempeña el mismo papel en el movimiento rotacional que la fuerza en el movimiento traslacional, este resultado sugiere que la combinación $\vec{r} \times \vec{p}$ debería desempeñar el mismo papel en el movimiento rotacional que \vec{p} en el movimiento traslacional. A esta combinación se le conoce como *cantidad de movimiento angular* de la partícula.

La **cantidad de movimiento angular instantánea** \vec{L} de una partícula relativa a un eje a través del origen O se define mediante el producto cruz del vector de posición instantáneo de la partícula \vec{r} y su cantidad de movimiento lineal instantánea \vec{p} :

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} \quad (11.12)$$

Ahora la ecuación 11.11 se puede escribir como

$$\Sigma \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (11.13)$$

que es el análogo rotacional de la segunda ley de Newton, $\Sigma \vec{F} = d\vec{p}/dt$. El momento de torsión hace que la cantidad de movimiento angular \vec{L} cambie, como la fuerza causa que cambie la cantidad de movimiento lineal \vec{p} .

Advierta que la ecuación 11.13 sólo es válida si $\Sigma \vec{\tau}$ y \vec{L} se miden en torno al mismo eje. Además, la expresión es válida para cualquier eje fijo en un marco inercial.

La unidad del SI de la cantidad de movimiento angular es $\text{kg} \times \text{m}^2/\text{s}$. Advierta también que tanto la magnitud como la dirección de \vec{L} dependen de la elección del eje. Al seguir la regla de la mano derecha, se ve que la dirección de \vec{L} es perpendicular al plano que for-

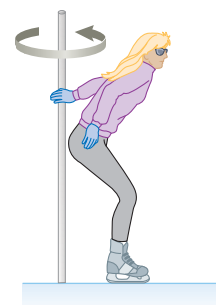


Figura 11.3 Mientras la patinadora pasa al lado del poste, se sujeta de él, lo que la hace girar rápidamente alrededor del poste en una trayectoria circular.

La cantidad de movimiento angular \vec{L} de una partícula respecto a un eje es un vector perpendicular a la posición de la partícula \vec{r} relativa al eje y también es ortogonal a su cantidad de movimiento \vec{p} .

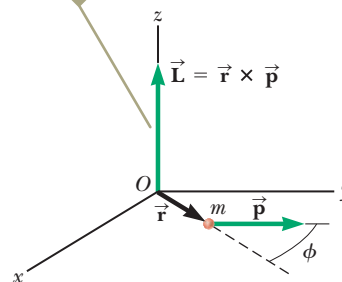


Figura 11.4 La cantidad de movimiento angular \vec{L} de una partícula es un vector dado por $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

◀ Cantidad de movimiento angular de una partícula



man \vec{r} y \vec{p} . En la figura 11.4, \vec{r} y \vec{p} están en el plano xy , así que \vec{L} apunta en la dirección z . Ya que $\vec{p} = m\vec{v}$, la magnitud de \vec{L} es

$$L = mvr \sin \phi \quad (11.4)$$

donde ϕ es el ángulo entre \vec{r} y \vec{p} . Se sigue que L es cero cuando \vec{r} es paralelo a \vec{p} ($\phi = 0$ o 180°). En otras palabras, cuando la velocidad traslacional de la partícula es a lo largo de una recta que pasa a través del eje, la partícula tiene cantidad de movimiento angular cero respecto al eje. Por otra parte, si \vec{r} es perpendicular a \vec{p} ($\phi = 90^\circ$), entonces $L = mvr$. En dicho instante, la partícula se mueve exactamente como si estuviera en el borde de una rueda giratoria en torno al eje en un plano definido por \vec{r} y \vec{p} .

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 11.2

¿La rotación es necesaria para la cantidad de movimiento angular? Se puede definir cantidad de movimiento angular incluso si la partícula no se mueve en una trayectoria circular. Una partícula moviéndose en una línea recta tiene cantidad de movimiento angular en torno a cualquier eje desplazado de la trayectoria de la partícula, como un eje a través del polo en la figura 11.3. Vea el ¿Qué pasaría si? en el ejemplo 11.3.

EJEMPLO RÁPIDO 10.2 Recuerde a la patinadora descrita al inicio de esta sección. Considere que su masa es m . (i) ¿Cuál sería su cantidad de movimiento angular respecto al poste en el instante en que está a una distancia d del poste si ella patinara directamente hacia él con rapidez v ? (a) cero, (b) $mv d$, (c) imposible de determinar. (ii) ¿Cuál sería su cantidad de movimiento angular respecto al poste en el instante en que está a una distancia perpendicular a del poste? (a) cero, (b) $mv d$, (c) mva , (d) imposible de determinar.

Ejemplo 11.3 Cantidad de movimiento angular de una partícula en movimiento circular

Una partícula se mueve en el plano xy en una trayectoria circular de radio r , como se muestra en la figura 11.5. Encuentre la magnitud y dirección de su cantidad de movimiento angular en relación con un eje a través de O cuando su velocidad es \vec{v} .

SOLUCIÓN

Conceptualizar La cantidad de movimiento lineal de la partícula siempre cambia en dirección (pero no en magnitud). Por tanto, puede estar tentado a concluir que la cantidad de movimiento angular de la partícula siempre cambia. Sin embargo, en esta situación, éste no es el caso. Vea por qué.

Categorizar Use la definición de la cantidad de movimiento angular de una partícula explicada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

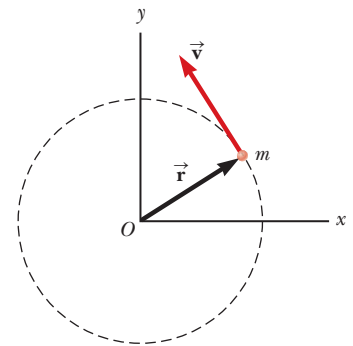
Aplique la ecuación 11.14 para evaluar la magnitud de \vec{L} : $L = mvr \sin 90^\circ = mvr$

Este valor de L es constante porque los tres factores a la derecha son constantes. La dirección de \vec{L} también es constante, aun cuando la dirección de $\vec{p} = m\vec{v}$ siga cambiando. Para comprobar esta afirmación, aplique la regla de la mano derecha para encontrar la dirección de $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$ en la figura 11.5. Su pulgar apunta hacia arriba y se aleja de la página, así que esta es la dirección de \vec{L} . En consecuencia, se puede escribir la expresión vectorial $\vec{L} = (mvr)\hat{k}$. Si la partícula se moviera en sentido de las manecillas del reloj, \vec{L} apuntaría hacia abajo y adentro de la página y $\vec{L} = -(mvr)\hat{k}$. Una partícula en movimiento circular uniforme tiene una cantidad de movimiento angular constante en torno a un eje que pasa a través del centro de su trayectoria.

¿QUÉ PASARÍA SI? La partícula en la figura 11.4 se mueve en línea recta a velocidad constante a lo largo de un camino paralelo al vector de momento lineal \vec{p} . ¿El momento angular de la partícula es constante en este caso?

Respuesta Sí. En la ecuación 11.14, m y v son constantes, mientras que r y ϕ varían en el tiempo. Sin embargo, el producto $r \sin \phi$ representa la distancia perpendicular entre el eje y y la ruta de la partícula. Esta distancia es constante. Por tanto, L en la ecuación 11.14 tiene un valor fijo a pesar de que la distancia entre la partícula y el origen cambia.

Figura 11.5 (Ejemplo 11.3) Una partícula moviéndose en un círculo de radio r tiene una cantidad de movimiento angular en torno a un eje a través de O que tiene magnitud mvr . El vector $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ apunta hacia afuera de la página.



Cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas

Empleando las técnicas de la sección 9.7, se puede demostrar que la segunda ley de Newton para un sistema de partículas es

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt}$$



Esta ecuación establece que la fuerza externa neta sobre un sistema de partículas es igual a la razón de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento lineal total del sistema. Vea si es posible hacer un enunciado similar para movimiento rotacional. La cantidad de movimiento angular total de un sistema de partículas en torno a algún eje se define como la suma vectorial de las cantidades de movimiento angulares de las partículas individuales:

$$\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = \vec{\mathbf{L}}_1 + \vec{\mathbf{L}}_2 + \cdots + \vec{\mathbf{L}}_n = \sum_i \vec{\mathbf{L}}_i$$

donde la suma vectorial es sobre las n partículas en el sistema.

La derivación de esta ecuación respecto al tiempo da

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{\mathbf{L}}_i}{dt} = \sum_i \vec{\boldsymbol{\tau}}_i$$

donde se usó la ecuación 11.15 para sustituir la rapidez de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento angular de cada partícula con el momento de torsión neto sobre la partícula.

Los momentos de torsión que actúan sobre las partículas del sistema son aquellos asociados con fuerzas internas entre las partículas y aquellos relacionados con fuerzas externas. Sin embargo, el momento de torsión neto asociado con todas las fuerzas internas es cero. Recuerde que la tercera ley de Newton dice que las fuerzas internas entre las partículas del sistema son iguales en magnitud y opuestas en dirección. Si supone que estas fuerzas se encuentran a lo largo de la línea de separación de cada par de partículas, el momento de torsión total alrededor de algún eje que pasa a través de un origen O debido a cada par de fuerza acción-reacción es cero (es decir, el brazo de momento d , desde O hasta la línea de acción de las fuerzas, es igual para ambas partículas y las fuerzas están en direcciones opuestas). Por tanto, en la suma el momento de torsión interno neto es cero. Se concluye que la cantidad de movimiento angular total de un sistema varía con el tiempo sólo si un momento de torsión externo neto actúa sobre el sistema:

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}}}{dt} \quad (11.15)$$

◀ El momento de torsión externo neto sobre un sistema es igual a la rapidez de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento angular del sistema.

Esta ecuación es de hecho el análogo de rotación de $\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = d\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}}/dt$ para un sistema de partículas. La ecuación 11.15 es la representación matemática del ángulo de impulso del modelo de sistema no aislado. Si un sistema no está aislado da la sensación de que hay un par externo neto en él, el par externo neto en el sistema es igual a la proporción de cambio de tiempo de la cantidad de movimiento angular del sistema.

Aunque no se prueba aquí, este enunciado es verdadero sin importar el movimiento del centro de masa. Incluso se aplica si el centro de masa acelera, siempre que el momento de torsión y la cantidad de movimiento angular se evalúen respecto a un eje a través del centro de masa.

Se puede reacomodar e integrar la ecuación 11.15 para obtener

$$\Delta\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}} = \int (\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}}) dt$$

Esta ecuación representa el *teorema impulso angular-cantidad de momento angular*. Compare esta ecuación con la versión traslacional, ecuación 9.40.

MODELO DE ANÁLISIS Sistema no aislado (cantidad de movimiento angular)

Imagine un sistema que rota respecto a un eje. Si existe un momento de torsión externo neto actuando sobre el sistema, la rapidez de cambio en el tiempo de la cantidad de movimiento angular del sistema es igual al momento de torsión externo neto:

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}}}{dt} \quad (11.15)$$

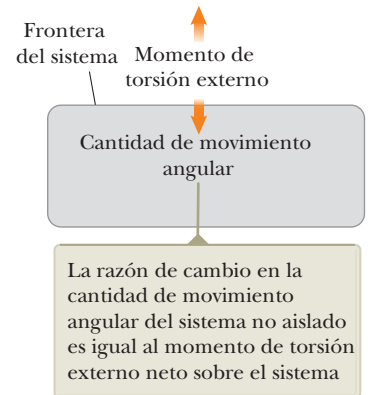
continúa



MODELO DE ANÁLISIS Sistema no aislado (cantidad de movimiento angular) continuación

Ejemplos:

- el volante en un motor de automóvil incrementa su cantidad de movimiento angular cuando el motor aplica momento de torsión sobre él
- la tina de una lavadora disminuye su cantidad de movimiento angular debido al momento de torsión friccional después de apagar la lavadora
- el eje de la Tierra experimenta un movimiento de precesión debido al momento de torsión ejercido sobre la Tierra por la fuerza gravitacional del Sol
- la armadura de un motor aumenta su cantidad de movimiento angular debido al momento de torsión ejercido por un campo magnético del entorno (capítulo 30)



Ejemplo 11.4 Un sistema de objetos

Una esfera de masa m_1 y un bloque de masa m_2 están conectados mediante una cuerda ligera que pasa sobre una polea, como se muestra en la figura 11.6. El radio de la polea es R , y la masa del borde delgado es M . Los rayos de la polea tienen masa despreciable. El bloque se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción. Encuentre una expresión para la aceleración lineal de los dos objetos, utilice los conceptos de cantidad de movimiento angular y momento de torsión.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Cuando el sistema se libera, el bloque se desliza hacia la izquierda, la esfera cae y la polea rota contra las manecillas del reloj. Esta situación es similar a problemas que se han resuelto con anterioridad, excepto que ahora se quiere utilizar un enfoque de cantidad de movimiento angular.

Categorizar El bloque, la polea y la esfera se identifican como un *sistema no aislado* para *cantidad de movimiento angular*, sujeto al momento de torsión externo debido a la fuerza gravitacional sobre la esfera. Calcule la cantidad de movimiento angular en torno a un eje que coincida con el eje de la polea. La cantidad de movimiento angular del sistema incluye la de dos objetos con desplazamiento traslacional (la esfera y el bloque) y un objeto (la polea) experimentando rotación pura.

Analizar En cualquier instante de tiempo, la esfera y el bloque tienen una rapidez común v , así que la cantidad de movimiento angular de la esfera es $m_1 v R$ y la del bloque es $m_2 v R$. Al mismo instante, todos los puntos sobre el borde de la polea también se mueven con rapidez v , de modo que la cantidad de movimiento angular de la polea es $M v R$.

Ahora considere el momento de torsión externo total que actúa sobre el sistema en torno al eje de la polea. Ya que tiene un brazo de momento cero, la fuerza que ejerce el eje sobre la polea no contribuye al momento de torsión. Además, la fuerza normal que actúa sobre el bloque se equilibra con la fuerza gravitacional $m_2 \vec{g}$, así que dichas fuerzas no contribuyen al momento de torsión. La fuerza gravitacional $m_1 \vec{g}$ que actúa sobre la esfera produce un momento de torsión en torno al eje, igual en magnitud a $m_1 g R$, donde R es el brazo de momento de la fuerza respecto al eje. Este resultado es el momento de torsión externo total en torno al eje de la polea; es decir, $\sum \tau_{\text{ext}} = m_1 g R$.

Escriba una expresión para la cantidad de movimiento angular total del sistema:

Sustituya esta expresión y el momento de torsión externo total en la ecuación 11.15, la representación matemática del modelo de sistema no aislado para cantidad de movimiento angular:

Observando que $dv/dt = a$, resuelva la ecuación (2) para a :

$$(1) \quad L = m_1 v R + m_2 v R + M v R = (m_1 + m_2 + M) v R$$

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{dL}{dt}$$

$$m_1 g R = \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2 + M) v R]$$

$$(2) \quad m_1 g R = (m_1 + m_2 + M) R \frac{dv}{dt}$$

$$(3) \quad a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + M}$$

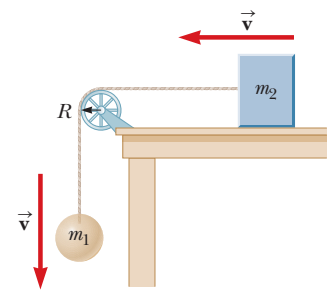


Figura 11.6 (Ejemplo 11.4) Cuando el sistema se libera, la esfera se mueve hacia abajo y el bloque se mueve hacia la izquierda.

11.4 continuación

Finalizar Al evaluar el momento de torsión neto respecto al eje, no se incluyeron las fuerzas que la cuerda ejerce sobre los objetos porque dichas fuerzas son internas al sistema en consideración. En vez de ello, el sistema se analizó como un todo. Sólo los momentos de torsión *externos* contribuyen al cambio en la cantidad de movimiento angular del sistema. Si $M \rightarrow 0$ en la ecuación (3) resulta una ecuación que se llama A. Si $\theta \rightarrow 0$ en la ecuación (5) del ejemplo 5.10 se obtiene una ecuación denotada por B. ¿Concuerdan las ecuaciones A y B? En estos límites observe las figuras 5.15 y 11.6, ¿las dos ecuaciones *deberían* concordar?

11.3 Cantidad de movimiento angular de un objeto rígido rotatorio

En el ejemplo 11.4 se consideró la cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas deformable. Ahora la atención se restringe a un sistema no deformable, un objeto rígido. Considere un objeto rígido rotatorio en torno a un eje fijo que coincide con el eje z de un sistema coordenado, como se muestra en la figura 11.7. Determine la cantidad de movimiento angular de este objeto. Cada *partícula* del objeto da vueltas en el plano xy alrededor del eje z con una rapidez angular ω . La magnitud de la cantidad de movimiento angular de una partícula de masa m_i en torno al eje z es $m_i v_i r_i$. Ya que $v_i = r_i \omega$ (ecuación 10.10), la magnitud de la cantidad de movimiento angular de esta partícula se expresa como

$$L_i = m_i v_i r_i = m_i (r_i \omega) r_i = m_i r_i^2 \omega$$

El vector \vec{L}_i para esta partícula se dirige a lo largo del eje z , como el vector $\vec{\omega}$.

Ahora se puede encontrar la cantidad de movimiento angular (que en esta situación sólo tiene una componente z) de todo el objeto al tomar la suma de L_i sobre todas las partículas:

$$L_z = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega$$

$$L_z = I\omega \tag{11.16}$$

donde $\sum_i m_i r_i^2$ se ha identificado como el momento de inercia I del objeto respecto al eje z (ecuación 10.19). Observe que la ecuación 11.14 es matemáticamente similar, en forma, a la ecuación 9.2 para la cantidad de movimiento lineal: $\vec{p} = m\vec{v}$.

Ahora derive la ecuación 11.16 respecto al tiempo, y note que I es constante para un objeto rígido:

$$\frac{dL_z}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha \tag{11.17}$$

donde α es la aceleración angular relativa al eje de rotación. Como dL_z/dt es igual al momento de torsión externo neto (véase la ecuación 11.15), la ecuación 11.17 adquiere la forma

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I\alpha \tag{11.18}$$

Es decir, el momento de torsión externo neto que actúa sobre un objeto rígido rotatorio en torno a un eje fijo es igual al momento de inercia respecto al eje de rotación multiplicado por la aceleración angular del objeto relativa a dicho eje. Este resultado es el mismo que en la ecuación 10.18, que fue deducido con el método de fuerza, pero la ecuación 11.18 se obtuvo mediante el concepto de cantidad de movimiento angular. Como se vio en la sección 10.7, la ecuación 11.16 es la representación matemática del objeto rígido bajo un análisis de modelo de momento de torsión neto. Esta ecuación también es válida para un objeto rígido rotatorio alrededor de un eje móvil, siempre que el eje en movimiento (1) pase a través del centro de masa y (2) sea un eje de simetría.

Si un objeto simétrico rota en torno a un eje fijo que pasa por su centro de masa, puede escribir la ecuación 11.16 en forma vectorial como $\vec{L} = I\vec{\omega}$, donde \vec{L} , $\vec{\omega}$ es la cantidad

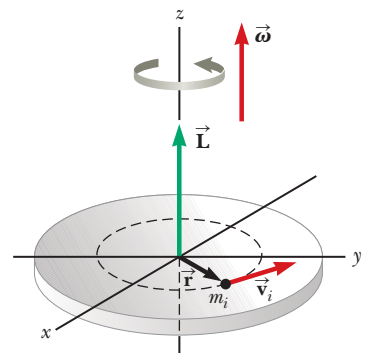


Figura 11.7 Cuando un objeto rígido da vueltas en torno a un eje, la cantidad de movimiento angular \vec{L} está en la misma dirección que la velocidad angular $\vec{\omega}$, de acuerdo con la expresión $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

◀ Forma rotacional de la segunda ley de Newton



de movimiento angular total del objeto medida respecto al eje de rotación. Además, la expresión es válida para cualquier objeto, sin importar su simetría, si \vec{L} representa la componente de cantidad de movimiento angular a lo largo del eje de rotación.¹

- EJEMPLO RÁPIDO 11.3** Una esfera sólida y una esfera hueca tienen la misma masa y radio. Ambas giran con la misma rapidez angular. ¿Cuál tiene la mayor cantidad de movimiento angular? (a) la esfera sólida, (b) la esfera hueca, (c) ambas tienen la misma cantidad de movimiento angular, (d) imposible de determinar.

Ejemplo 11.5 El Sube y baja

Un padre de masa m_f y su hija de masa m_d se sientan en extremos opuestos de un sube y baja a iguales distancias desde el eje en el centro (figura 11.8). El sube y baja se modela como una barra rígida de masa M y longitud ℓ , y se pivotea sin fricción. En cierto momento, la combinación rota en un plano vertical con una rapidez angular ω .

(A) Encuentre una expresión para la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema.

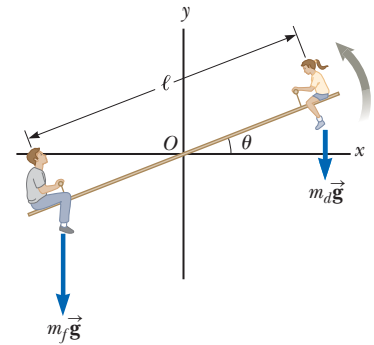


Figura 11.8 (Ejemplo 11.5) Un padre y su hija muestran la cantidad de movimiento angular sobre un sube y baja.

SOLUCIÓN

Conceptualizar En la figura 11.8 identifique el eje z a través de O como el eje de rotación. El sistema rotatorio tiene cantidad de movimiento angular en torno a dicho eje.

Categorizar Ignore cualquier movimiento de los brazos o piernas del padre y la hija, y represéntelos como partículas. Por tanto, el sistema se modela como un objeto rígido. Esta primera parte del ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

El momento de inercia del sistema es igual a la suma de los momentos de inercia de las tres componentes: el sube y baja y las dos personas. Se puede remitir a la tabla 10.2 para obtener la expresión para el momento de inercia de la barra y usar la expresión de partícula $I = mr^2$ para cada persona.

Encuentre el momento de inercia total del sistema en torno al eje z a través de O :

$$I = \frac{1}{12}M\ell^2 + m_f\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_d\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_f + m_d\right)$$

Obtenga la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema:

$$L = I\omega = \frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_f + m_d\right)\omega$$

(B) Encuentre una expresión para la magnitud de la aceleración angular del sistema cuando el sube y baja forma un ángulo θ con la horizontal.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Por lo general, los padres son más pesados que las hijas, así que el sistema no está en equilibrio y tiene una aceleración angular. Se espera que la aceleración angular sea positiva en la figura 11.8.

Categorizar La combinación de la tabla, el padre y la hija es un *objeto rígido sometido a un momento de torsión neto* debido al momento de torsión externo asociado con las fuerzas gravitacionales sobre el padre y la hija. De nuevo se identifica el eje de rotación como el eje z en la figura 11.8.

Analizar Para encontrar la aceleración angular del sistema en cualquier ángulo θ , primero calcule el momento de torsión neto sobre el sistema y luego use $\Sigma \tau_{\text{ext}} = I\alpha$ del modelo de objeto rígido sometido a un momento de torsión neto, para deducir una expresión para α .

Evalúe el momento de torsión debido a la fuerza gravitacional sobre el padre:

$$\tau_f = m_f g \frac{\ell}{2} \cos \theta \quad (\vec{\tau}_f \text{ fuera de la página})$$

Obtenga el momento de torsión debido a la fuerza gravitacional sobre la hija:

$$\tau_d = -m_d g \frac{\ell}{2} \cos \theta \quad (\vec{\tau}_d \text{ hacia la página})$$

¹En general, la expresión $\vec{L} = I\vec{\omega}$ no siempre es válida. Si un objeto rígido rota en torno a un eje *arbitrario*, entonces \vec{L} y $\vec{\omega}$ pueden apuntar en distintas direcciones. En este caso, el momento de inercia no se trata como un escalar. En un sentido estricto, $\vec{L} = I\vec{\omega}$ sólo se aplica a objetos rígidos de cualquier forma que rotan respecto a uno de tres ejes mutuamente perpendiculares (llamados *ejes principales*) a través del centro de masa. Este concepto se explica en textos de mecánica más avanzados.

11.5 continuación

Evalúe el momento de torsión externo neto ejercido sobre el sistema: $\sum \tau_{\text{ext}} = \tau_f + \tau_d = \frac{1}{2}(m_f - m_d)g\ell \cos \theta$

Use la ecuación 11.18 e I del inciso (a) para encontrar α : $\alpha = \frac{\sum \tau_{\text{ext}}}{I} = \frac{2(m_f - m_d)g \cos \theta}{\ell [(M/3) + m_f + m_d]}$

Finalizar Para un padre más pesado que su hija, la aceleración angular es positiva, como se esperaba. Si el sube y baja comienza con una orientación horizontal ($\theta = 0$) y se libera, la rotación es contra las manecillas del reloj en la figura 11.8 y el extremo del padre del sube y baja cae, lo que es consistente con la experiencia cotidiana.

¿QUÉ PASARÍA SI? Imagine que el padre se mueve hacia adentro del sube y baja a una distancia d desde el eje para intentar equilibrar los dos lados. ¿Cuál es la aceleración angular del sistema en este caso cuando se libera desde un ángulo arbitrario θ ?

Respuesta La aceleración angular del sistema debe disminuir si el sistema está más equilibrado.

Encuentre el momento de inercia total respecto al eje z a través de O para el sistema modificado:

$$I = \frac{1}{12}M\ell^2 + m_f d^2 + m_d \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{4} \left(\frac{M}{3} + m_d\right) + m_f d^2$$

Obtenga el momento de torsión neto sobre el sistema en torno a un eje a través de O :

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \tau_f + \tau_d = m_f g d \cos \theta - \frac{1}{2} m_d g \ell \cos \theta$$

Encuentre la nueva aceleración angular del sistema:

$$\alpha = \frac{\sum \tau_{\text{ext}}}{I} = \frac{(m_f d - \frac{1}{2} m_d \ell) g \cos \theta}{(\ell^2/4) [(M/3) + m_d] + m_f d^2}$$

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Dónde debe estar sentado el padre para que el sube y baja esté equilibrado?

Respuesta El sube y baja se equilibra cuando la aceleración angular es cero. En esta situación, tanto padre como hija pueden empujar desde el suelo y elevarse al punto más alto posible.

Para que el sube y baja esté equilibrado, la posición requerida del padre al hacer $\alpha = 0$ debe ser:

$$\alpha = \frac{(m_f d - \frac{1}{2} m_d \ell) g \cos \theta}{(\ell^2/4) [(M/3) + m_d] + m_f d^2} = 0$$

$$m_f d - \frac{1}{2} m_d \ell = 0 \rightarrow d = \left(\frac{m_d}{m_f}\right) \frac{\ell}{2}$$

Cuanto más pesado es el padre, más cerca debe sentarse al pivote para equilibrar el sube y baja. En el raro caso en que el padre y la hija tengan la misma masa, el padre se ubica en el final del sube y baja, $d = \ell/2$.

11.4 Modelo de análisis: sistema aislado (cantidad de movimiento angular)

En el capítulo 9 se encontró que la cantidad de movimiento lineal total de un sistema de partículas permanece constante si el sistema está aislado; es decir, si la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema es cero. Se tiene una ley de conservación análoga en el movimiento rotacional:

La cantidad de movimiento angular total de un sistema es constante tanto en magnitud como en dirección si el momento de torsión externo neto que actúa sobre el sistema es cero, es decir, si el sistema está aislado.

◀ Conservación de cantidad de movimiento angular

Con frecuencia, a este enunciado se le llama² el principio de **conservación de cantidad de movimiento angular** y es la base de la **versión de cantidad de movimiento angular del modelo de sistema aislado**. Este principio se sigue directamente de la ecuación 11.15, que indica que si

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}}}{dt} = 0$$

²La ecuación más general de conservación de la cantidad de movimiento angular es la ecuación 11.15, que describe cómo el sistema interactúa con su entorno.

Cuando sus brazos y piernas están cerca de su cuerpo, es pequeño el momento de inercia del patinador y su rapidez angular es grande.



Clive Rose/Getty Images

Para frenar al final de su giro, mueve brazos y piernas hacia afuera, lo que aumenta su momento de inercia.



Al Bello/Getty Images

Figura 11.9 La cantidad de movimiento angular se conserva mientras el patinador artístico ruso, medallista de oro, Evgeni Plushenko, participa en los Juegos Olímpicos de Invierno, Turín 2006.

entonces

$$\Delta \vec{L}_{\text{tot}} = 0 \quad (11.19)$$

La ecuación 11.19 puede escribirse como

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \text{constante} \text{ o } \vec{L}_i = \vec{L}_f \quad (11.20)$$

Para un sistema aislado que consiste de pocas partículas, esta ley de conservación se escribe como $\vec{L}_{\text{tot}} = \sum \vec{L}_n = \text{constante}$, donde el índice n denota la n -ésima partícula en el sistema. Si el sistema consiste de un gran número de partículas, es difícil evaluar el L_n individual, entonces podemos expresar la magnitud del momento angular del sistema con la ecuación 11.16, $L = I\omega$.

Si un sistema rotatorio aislado es deformable, de modo que su masa se somete a redistribución en alguna forma, el momento de inercia del sistema cambia. Combinando las ecuaciones 11.16 y 11.20, vemos que la conservación de la cantidad de movimiento angular requiere que el producto de I y ω permanezca constante. Por tanto, un cambio en I para un sistema aislado requiere un cambio en ω . En este caso, el principio de conservación de cantidad de movimiento angular se expresa como

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f = \text{constante} \quad (11.21)$$

Esta expresión es válida tanto para rotación en torno a un eje fijo, como para rotación alrededor de un eje a través del centro de masa de un sistema móvil en tanto dicho eje permanezca fijo en la dirección. Sólo se necesita que el momento de torsión externo neto sea cero.

Muchos ejemplos demuestran conservación de cantidad de movimiento angular para un sistema deformable. Usted ha observado a un patinador artístico girar al final de un programa (figura 11.9). La rapidez angular del patinador es grande cuando sus manos y pies están cerca del tronco de su cuerpo. (¡Observe el cabello del patinador!) Si se ignora la fricción entre el patinador y el hielo, no existen momentos de torsión externos sobre el patinador. El momento de inercia de su cuerpo aumenta mientras sus manos y pies se mueven alejándose de su cuerpo al final del giro. De acuerdo al modelo de sistema aislado para cantidad de movimiento angular, su rapidez angular debe disminuir. En forma similar, cuando los clavadistas o acróbatas quieren hacer piruetas, jalan manos y pies cerca de su cuerpo para rotar con mayor rapidez. En estos casos, la fuerza externa debida a la gravedad actúa a través del centro de masa y, por tanto, no ejerce momento de torsión en torno a un eje a través de este punto. En consecuencia, debe conservarse la cantidad de movimiento angular respecto al centro de masa; es decir, $I_i \omega_i = I_f \omega_f$. Por ejemplo, cuando los clavadistas quieren duplicar su rapidez angular, deben reducir su momento de inercia a la mitad de su valor inicial.

La semblanza de apertura de este capítulo preguntó acerca de la energía cinética rotacional adicional que poseen los patinadores y los clavadistas al girar cuando tiran de sus extremidades hacia adentro. Esta energía proviene del interior del cuerpo. Los músculos del atleta girando deben hacer un trabajo interno para tirar de las extremidades hacia adentro. Este trabajo es un mecanismo de transformación mediante el cual la energía potencial en el cuerpo de comidas previas se transforma en energía cinética rotacional. La semblanza también menciona un gato que cae, que una vez más es un ejemplo de un sistema deformable, introducido por primera vez en la sección 9.8. El gato se libera con un momento angular cero, pero es capaz de rotar y enderezarse antes de aterrizar. Se han propuesto varias teorías para este fenómeno, incluyendo una popular que modela al gato como un par de cilindros. Realice alguna investigación en línea para aprender más sobre los gatos cuando caen.

En la ecuación 11.20 se tiene una tercera versión del modelo de sistema aislado. Ahora se puede afirmar que la energía, la cantidad de movimiento lineal y la cantidad de movimiento angular de un sistema aislado se conservan:

$$\Delta E_{\text{sistema}} = 0 \quad (\text{si no hay transferencia de energía a través de la frontera del sistema})$$

$$\Delta \vec{p}_{\text{tot}} = 0 \quad (\text{si es cero la fuerza externa neta sobre el sistema})$$

$$\Delta \vec{L}_{\text{tot}} = 0 \quad (\text{si es cero el momento de torsión externo neto sobre el sistema})$$

Observe que la definición de un sistema aislado varía para las tres cantidades conservadas. Un sistema puede estar aislado en términos de una de estas cantidades, pero no en términos de otras. Si un sistema es no aislado en términos de cantidad de movimiento lineal o angular, entonces frecuentemente también será no aislado en términos de energía porque el sistema tiene una fuerza neta o momento de torsión sobre él y la fuerza neta o momento de torsión realizará trabajo sobre el sistema. Sin embargo, se pueden identificar sistemas que son no aislados en términos de energía, pero aislados en términos de cantidad de movimiento. Por ejemplo, imagine apretando un balón (el sistema) entre sus manos. Se efectúa trabajo al comprimir el balón, así el sistema no es aislado en términos de energía, pero es nula la fuerza neta sobre el sistema, entonces el sistema es aislado en términos de cantidad de movimiento. Un enunciado similar podría hacerse respecto a torcer los extremos de una larga pieza de metal elástica con ambas manos. Se realiza trabajo sobre el metal (el sistema), así que la energía se almacena en el sistema no aislado como energía potencial elástica, pero es cero el momento de torsión neto sobre el sistema. Por tanto, el sistema es aislado en términos de cantidad de movimiento angular. Otros ejemplos son colisiones de objetos macroscópicos, los cuales representan sistemas aislados en términos de cantidad de movimiento, pero sistemas no aislados en términos de energía debido a la fuga de energía del sistema mediante ondas mecánicas (sonido).

- E XAMEN RÁPIDO 11.4** Una clavadista salta del trampolín y cae hacia el agua con el cuerpo recto y en rotación lenta. Jala sus brazos y piernas hacia una apretada posición plegada. ¿Qué le ocurre a su energía cinética rotacional? (a) Aumenta. (b) Disminuye. (c) Permanece igual. (d) Es imposible determinar.

MODELO DE ANÁLISIS Sistema aislado (cantidad de movimiento angular)

Imagine un sistema que rota en torno a un eje. Si no existe un momento de torsión externo neto sobre el sistema, entonces no hay cambio en la cantidad de movimiento angular del sistema:

$$\Delta \vec{L}_{\text{tot}} = 0 \quad (11.19)$$

Al aplicar esta ley de conservación de cantidad de movimiento angular a un sistema cuyo momento de inercia cambia, se obtiene

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f = \text{constante} \quad (11.21)$$

Frontera del sistema

Cantidad de movimiento angular

La cantidad de movimiento angular del sistema aislado es constante.

Ejemplos:

- después de la explosión de una supernova, el núcleo de una estrella colapsa a un pequeño radio y gira con mayor rapidez
- el cuadrado del periodo orbital de un planeta es proporcional al cubo de su semieje mayor; tercera ley de Kepler (capítulo 13)
- en transiciones atómicas, se deben obedecer las reglas de selección sobre los números cuánticos para así conservarla cantidad de movimiento angular (capítulo 41)
- en el decaimiento beta de un núcleo radiactivo, se debe emitir un neutrino para así conservar la cantidad de movimiento angular (capítulo 43)

Ejemplo 11.6 Formación de una estrella de neutrones

Una estrella rota con un periodo de 30 días en torno a un eje a través de su centro. El periodo es el intervalo de tiempo necesario para que un punto sobre el ecuador de la estrella realice una revolución completa alrededor del eje de rotación. Después de que la estrella experimente una explosión supernova, el núcleo estelar, que tiene un radio de 1.0×10^4 km, colapsa en una estrella de neutrones de radio 3.0 km. Determine el periodo de rotación de la estrella de neutrones.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El cambio en el movimiento de la estrella de neutrones es similar al del patinador descrito anteriormente, pero en dirección inversa. Conforme la masa de la estrella se acerca al eje de rotación, se espera que la estrella gire más rápido.

continued

11.6 continuación

Categorizar Suponga que durante el colapso del núcleo estelar, (1) no actúa momento de torsión externo sobre él, (2) permanece esférico con la misma distribución de masa relativa y (3) su masa permanece constante. La estrella se clasifica como un *sistema aislado* en términos de *cantidad de movimiento angular*. No se conoce la distribución de masa de la estrella, pero se supuso que la distribución es simétrica, así que el momento de inercia se expresa como kMR^2 , donde k es alguna constante numérica. (De la tabla 10.2, por ejemplo, se ve que $k = \frac{2}{5}$ para una esfera sólida y $k = \frac{2}{3}$ para un cascarón esférico.)

Analizar Use el símbolo T para el periodo, con T_i como el periodo inicial de la estrella y T_f para el periodo de la estrella de neutrones. La rapidez angular de la estrella está dada por $\omega = 2\pi/T$.

Del modelo de sistema aislado para cantidad de movimiento angular, escriba la ecuación 11.21 para la estrella:

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

Use $\omega = 2\pi/T$ para reescribir esta ecuación en términos de los periodos inicial y final:

$$I_i \left(\frac{2\pi}{T_i} \right) = I_f \left(\frac{2\pi}{T_f} \right)$$

Sustituya los momentos de inercia en la ecuación precedente:

$$kMR_i^2 \left(\frac{2\pi}{T_i} \right) = kMR_f^2 \left(\frac{2\pi}{T_f} \right)$$

Resuelva para el periodo final de la estrella:

$$T_f = \left(\frac{R_f}{R_i} \right)^2 T_i$$

Sustituya valores numéricos:

$$T_f = \left(\frac{10.0 \text{ km}}{1.0 \times 10^4 \text{ km}} \right)^2 (30 \text{ días}) = 3.0 \times 10^{-5} \text{ días} = 2.6 \text{ s}$$

Finalizar Como se esperaba, la estrella de neutrones rota más rápido después del colapso. Si bien puede parecer difícil creer que el núcleo de una estrella podría rotar tan rápido como una vez cada 2.6 s, esta es una velocidad de rotación relativamente lenta. ¡Algunas estrellas de neutrones rotan con un periodo de 1-2 milisegundos!

Ejemplo 11.7 El carrusel

Una plataforma horizontal con la forma de un disco circular rota libremente en un plano horizontal en torno a un eje vertical sin fricción (figura 11.10). La plataforma tiene una masa $M = 100 \text{ kg}$ y un radio $R = 2.0 \text{ m}$. Una estudiante cuya masa es $m = 60 \text{ kg}$, camina lentamente desde el borde del disco hacia su centro. Si la rapidez angular del sistema es 2.0 rad/s cuando la estudiante está en el borde, ¿cuál es la rapidez angular cuando alcanza un punto $r = 0.50 \text{ m}$ desde el centro?

SOLUCIÓN

Conceptualizar El cambio de rapidez en este caso es similar al del patinador que gira y a la estrella de neutrones en los ejemplos precedentes. Este problema es distinto porque parte del momento de inercia del sistema cambia (el de la estudiante) mientras la otra parte permanece fijo (el de la plataforma).

Categorizar Ya que la plataforma da vueltas sobre un eje sin fricción, el sistema de la estudiante y la plataforma se identifica como un *sistema aislado* en términos de *cantidad de movimiento angular*.

Analizar Denote el momento de inercia de la plataforma como I_p y el de la estudiante como I_s . La estudiante se modela como una partícula.

Escriba la ecuación 11.21 para el sistema:

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

Sustituya los momentos de inercia, usando $r < R$ para la posición final de la estudiante:

$$\left(\frac{1}{2} MR^2 + mR^2 \right) \omega_i = \left(\frac{1}{2} MR^2 + mr^2 \right) \omega_f$$

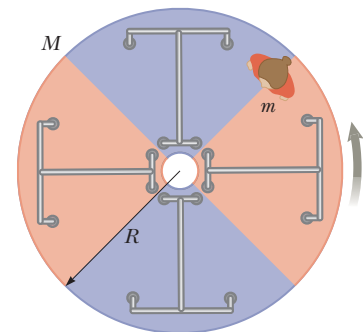


Figura 11.10 (Ejemplo 11.7) Conforme la estudiante camina hacia el centro de la plataforma giratoria, la rapidez angular del sistema aumenta porque la cantidad de movimiento angular del sistema permanece constante.

continúa



11.7 continuación

Resuelva para la rapidez angular final:
$$\omega_f = \left(\frac{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2} \right) \omega_i$$

Sustituya valores numéricos:
$$\omega_f = \left[\frac{\frac{1}{2}(100 \text{ kg})(2.0 \text{ m})^2 + (60 \text{ kg})(2.0 \text{ m})^2}{\frac{1}{2}(100 \text{ kg})(2.0 \text{ m})^2 + (60 \text{ kg})(0.50 \text{ m})^2} \right] (2.0 \text{ rad/s}) = \left[\frac{440 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{215 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} \right] (2.0 \text{ rad/s}) = 4.1 \text{ rad/s}$$

Finalizar Como se esperaba, la rapidez angular aumenta. Lo más rápido que este sistema podría girar sería cuando la estudiante se mueve al centro de la plataforma. Haga este cálculo para demostrar que esta rapidez angular máxima es 4.4 rad/s. Observe que la actividad descrita en este problema es peligrosa, como se explicó en relación con la fuerza de Coriolis en la sección 6.3.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si usted mide la energía cinética del sistema antes y después de que la estudiante camine hacia adentro? ¿La energía cinética inicial y la energía cinética final son iguales?

Respuesta Es posible que esté tentado a decir que sí, porque el sistema está aislado. Sin embargo, recuerde que la energía se puede transformar de varias maneras, así que debe tener cuidado ante una pregunta de energía.

Encuentre la energía cinética inicial:
$$K_i = \frac{1}{2}I_i\omega_i^2 = \frac{1}{2}(440 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(2.0 \text{ rad/s})^2 = 880 \text{ J}$$

Encuentre la energía cinética final:
$$K_f = \frac{1}{2}I_f\omega_f^2 = \frac{1}{2}(215 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(4.1 \text{ rad/s})^2 = 1.80 \times 10^3 \text{ J}$$

Por tanto, la energía cinética del sistema *aumenta* en más de un factor de 2. La estudiante debe efectuar actividad muscular para moverse más cerca al centro de rotación, así que esta energía cinética extra viene de la energía potencial almacenada en el cuerpo de la estudiante de comidas previas. El sistema es aislado en términos de energía, pero un proceso de transformación dentro del *sistema* cambia la energía potencial a energía cinética.

Ejemplo 11.8 Colisión de disco y bastón

Un disco de 2.0 kg que viaja a 3.0 m/s golpea un bastón de 1.0 kg y 4.0 m de longitud que se encuentra plano sobre hielo casi sin fricción, como se muestra en la vista superior de la figura 11.11a. El disco golpea el extremo del bastón, a una distancia $r = 2.0 \text{ m}$ del centro del bastón. Suponga que la colisión es elástica y que el disco no se desvía de su línea de movimiento original. Encuentre la rapidez traslacional del disco, la rapidez traslacional del bastón y la rapidez angular del bastón después de la colisión. El momento de inercia del bastón en torno a su centro de masa es $1.33 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Examine la figura 11.11a e imagine lo que sucede después de que el disco golpea el bastón. La figura 11.11b muestra lo que puede esperar: el disco continúa moviéndose con una rapidez más lenta y el bastón está tanto en movimiento traslacional como rotacional. Suponga que el disco no se desvía de su línea de movimiento original porque la fuerza que ejerce el bastón sobre el disco es paralela a la trayectoria original del disco.

Categorizar Ya que el hielo no tiene fricción, el disco y el bastón forman un *sistema aislado* en términos de *cantidad de movimiento lineal* y *cantidad de movimiento angular*. Ignore el sonido de la colisión, y modele el sistema como un *sistema aislado* en términos de *energía*. Además, como la colisión se supuso elástica, la energía cinética del sistema es constante.

Analizar Note primero que se tienen tres incógnitas, así que se requieren tres ecuaciones para resolver simultáneamente.

Aplique el modelo de sistema aislado para cantidad de movimiento lineal al sistema y reacomode el resultado:

$$\Delta \vec{p}_{\text{tot}} = 0 \rightarrow (m_d v_{df} + m_s v_s) - m_d v_{di} = 0$$

$$(1) \quad m_d(v_{di} - v_{df}) = m_s v_s$$

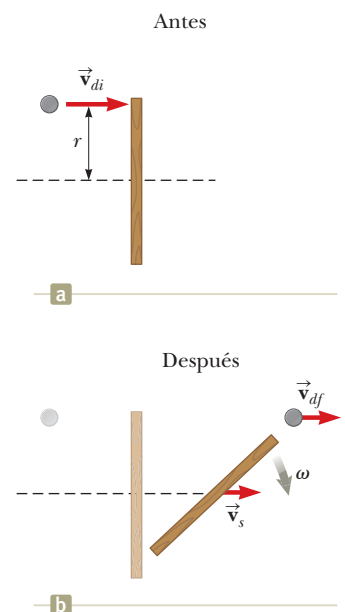


Figura 11.11 (Ejemplo 11.8) Vista superior de un disco que golpea un bastón en una colisión elástica. (a) Antes de la colisión, el disco se mueve hacia el bastón. (b) La colisión hace que el bastón gire y se mueva hacia la derecha.

11.8 continuación

Aplique el modelo de sistema aislado para cantidad de movimiento angular al sistema y reacomode el resultado. Use un eje que pase por el centro de masa del bastón como el eje de rotación, tal que la trayectoria del disco esté a una distancia r del eje de rotación:

$$\Delta \vec{L}_{\text{tot}} = 0 \rightarrow (-rm_d v_{df} + I\omega) - (-rm_d v_{di}) = 0$$

$$(2) \quad -rm_d(v_{di} - v_{df}) = I\omega$$

Aplique el modelo de sistema aislado para energía al sistema, reacomode la ecuación, y factorice la combinación de términos relativos al disco:

$$\Delta K = 0 \quad \text{S} \quad \left(\frac{1}{2}m_d v_{df}^2 + \frac{1}{2}m_s v_s^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\right) - \frac{1}{2}m_d v_{di}^2 = 0$$

$$m_d(v_{di} - v_{df})(v_{di} + v_{df}) = m_s v_s^2 + I\omega^2$$

Multiplique la ecuación (1) por r y sume a la ecuación (2):

$$rm_d(v_{di} - v_{df}) = rm_s v_s$$

$$-rm_d(v_{di} - v_{df}) = I\omega$$

$$0 = rm_s v_s + I\omega$$

Resuelva para ω :

$$(4) \quad \omega = -\frac{rm_s v_s}{I}$$

Divida la ecuación (3) entre la ecuación (1):

$$\frac{m_d(v_{di} - v_{df})(v_{di} + v_{df})}{m_d(v_{di} - v_{df})} = \frac{m_s v_s^2 + I\omega^2}{m_s v_s}$$

$$(5) \quad v_{di} + v_{df} = v_s + \frac{I\omega^2}{m_s v_s}$$

Sustituya la ecuación (4) en la ecuación (5):

$$v_{di} + v_{df} = v_s \left(1 + \frac{r^2 m_s}{I}\right)$$

Sustituya v_{df} de la ecuación (1), en la ecuación (6):

$$v_{di} + \left(v_{di} - \frac{m_s}{m_d} v_s\right) = v_s \left(1 + \frac{r^2 m_s}{I}\right)$$

Resuelva para v_s y sustituya valores numéricos:

$$v_s = \frac{2v_{di}}{1 + (m_s/m_d) + (r^2 m_s/I)}$$

$$= \frac{2(3.0 \text{ m/s})}{1 + (1.0 \text{ kg}/2.0 \text{ kg}) + [(2.0 \text{ m})^2(1.0 \text{ kg})/1.33 \text{ kg} \cdot \text{m}^2]} = 1.3 \text{ m/s}$$

Sustituya valores numéricos en la ecuación (4):

$$\omega = -\frac{(2.0 \text{ m})(1.0 \text{ kg})(1.3 \text{ m/s})}{1.33 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = -2.0 \text{ rad/s}$$

Resuelva la ecuación (1) para v_{df} y sustituya valores numéricos: $v_{df} = v_{di} - \frac{m_s}{m_d} v_s = 3.0 \text{ m/s} - \frac{1.0 \text{ kg}}{2.0 \text{ kg}}(1.3 \text{ m/s}) = 2.3 \text{ m/s}$

Finalizar Estos valores parecen razonables. El disco se mueve más lentamente, después de la colisión, de lo que se movía antes del choque, y el bastón tiene una pequeña rapidez traslacional. La tabla 11.1 resume los valores inicial y final de las variables para el disco y el bastón, y comprueba la conservación de cantidad de movimiento lineal, cantidad de movimiento angular y energía cinética del sistema.

TABLA 11.1 Comparación de valores en el ejemplo 11.9 antes y después de la colisión

	v (m/s)	ω (rad/s)	p (kg · m/s)	L (kg · m ² /s)	K_{trans} (J)	K_{rot} (J)
Antes						
Disco	3.0	—	6.0	-12	9.0	—
Bastón	0	0	0	0	0	0
Total para el sistema	—	—	6.0	-12	9.0	0
Después						
Disco	2.3	—	4.7	-9.3	5.4	—
Bastón	1.3	-2.0	1.3	-2.7	0.9	2.7
Total para el sistema	—	—	6.0	-12	6.3	2.7

Note: Se conservan la cantidad de movimiento lineal, la cantidad de movimiento angular y la energía cinética total del sistema.

11.5 El movimiento de giroscopios y trompos

Una clase de movimiento insólito y fascinante que probablemente ha observado es el de un trompo que gira en torno a su eje de simetría, como se muestra en la figura 11.12a. Si el trompo gira rápidamente, el eje de simetría rota en torno al eje z, barriendo un cono (véase la figura 11.12b). El movimiento del eje de simetría en torno a la vertical, conocido como **movimiento de precesión**, por lo general es lento en relación con el movimiento de giro del trompo.

Es muy natural preguntar por qué el trompo no cae. Ya que el centro de masa no está directamente arriba del punto pivote O , en el trompo actúa un momento de torsión neto en torno a un eje que pasa por O , un momento de torsión que resulta de la fuerza gravitacional $M\vec{g}$. El trompo ciertamente caerá si no está girando. Sin embargo, como gira, tiene una cantidad de movimiento angular \vec{L} que se dirige a lo largo de su eje de simetría. Se demostrará que este eje de simetría se mueve alrededor del eje z (ocurre movimiento de precesión) porque el momento de torsión produce un cambio en la *dirección* del eje de simetría. Esta ilustración es un excelente ejemplo de la importancia de la naturaleza vectorial de la cantidad de movimiento angular.

Las características esenciales del movimiento de precesión se ilustran al considerar el giroscopio simple. En la figura 11.12a se indican las dos fuerzas que actúan sobre el giroscopio: la fuerza gravitacional hacia abajo $M\vec{g}$ y la fuerza normal \vec{n} que actúa hacia arriba en el punto pivote O . La fuerza normal no produce momento de torsión en torno a un eje que pasa por el pivote porque su brazo de momento a través de ese punto es cero. Sin embargo, la fuerza gravitacional produce un momento de torsión $\vec{\tau} = \vec{r} \times M\vec{g}$ respecto al eje que pasa por O , donde la dirección de $\vec{\tau}$ es perpendicular al plano formado por \vec{r} y $M\vec{g}$. Por necesidad, el vector $\vec{\tau}$ se encuentra en un plano horizontal xy perpendicular al vector cantidad de movimiento angular. El momento de torsión neto y la cantidad de movimiento angular del giroscopio se relacionan mediante la ecuación 11.15:

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Esta expresión muestra que, en el intervalo de tiempo infinitesimal dt , el momento de torsión distinto de cero produce un cambio en la cantidad de movimiento angular $d\vec{L}$, un cambio que está en la misma dirección que $\vec{\tau}$. Por tanto, al igual que el vector momento de torsión, $d\vec{L}$ también debe ser perpendicular a \vec{L} . La figura 11.12c ilustra el movimiento de precesión resultante del eje de simetría del giroscopio. En un intervalo de tiempo dt , el cambio en cantidad de movimiento angular es $d\vec{L} = \vec{L}_f - \vec{L}_i = \vec{\tau} dt$. Ya que $d\vec{L}$ es perpendicular a \vec{L} , la magnitud de \vec{L} no cambia ($|\vec{L}_f| = |\vec{L}_i|$). En vez de ello, lo que cambia es la *dirección* de \vec{L} . Como el cambio en la cantidad de movimiento angular $d\vec{L}$ es en la dirección de $\vec{\tau}$, que se encuentra en el plano xy , entonces el giroscopio experimenta un movimiento de precesión.

El diagrama vectorial de la figura 11.12c muestra que, en el intervalo de tiempo dt , el vector cantidad de movimiento angular rota un ángulo $d\phi$, que también es el ángulo que gira el eje del giroscopio. A partir del triángulo vectorial formado por los vectores \vec{L}_i , \vec{L}_f , y $d\vec{L}$, se ve que

$$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{\sum \tau_{\text{ext}} dt}{L} = \frac{(Mgr_{\text{CM}}) dt}{L}$$

Al dividir entre dt y usar la relación $L = I\omega$, se encuentra que la rapidez a la que rota el eje respecto al eje vertical es

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{Mgr_{\text{CM}}}{I\omega} \tag{11.22}$$

La rapidez angular ω_p se llama **frecuencia de precesión**. Este resultado sólo es válido cuando $\omega_p \ll \omega$. De otro modo, está involucrado un movimiento mucho más complicado. Como puede ver de la ecuación 11.22, la condición $\omega_p \ll \omega$ se satisface cuando ω es grande, o sea, cuando la rueda gira rápidamente. Además, note que la frecuencia de precesión disminuye conforme ω aumenta, es decir, a medida que la rueda rota más rápido en torno a su eje de simetría.

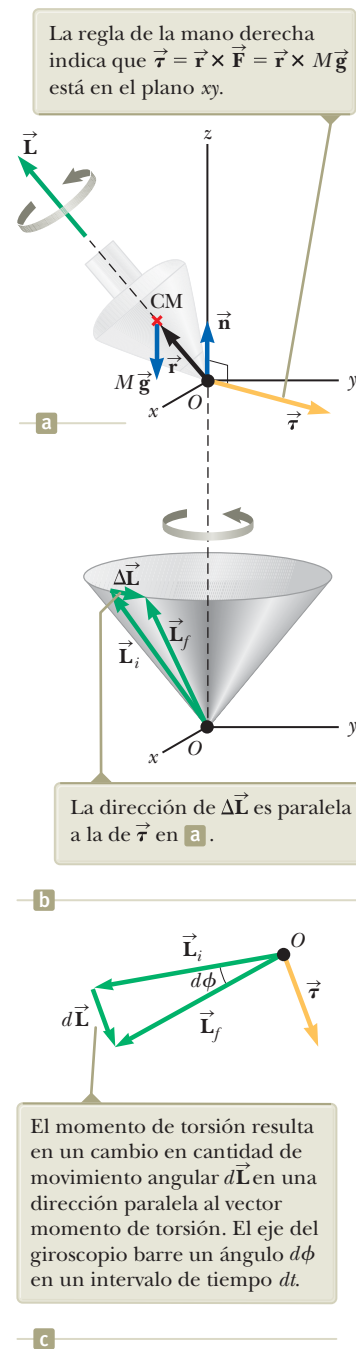


Figura 11.12 Movimiento de precesión de un trompo que gira en torno a su eje de simetría. (a) Las únicas fuerzas externas que actúan sobre el trompo son la fuerza normal \vec{n} y la fuerza gravitacional $M\vec{g}$. La dirección de la cantidad de movimiento angular \vec{L} es a lo largo del eje de simetría. (b) Ya que $\vec{L}_f = \Delta\vec{L} + \vec{L}_i$, el trompo realiza precesión en torno al eje z. (c) Vista superior (mirando hacia abajo del eje z) de los vectores cantidad de movimiento angular inicial y final del giroscopio para un intervalo de tiempo infinitesimal dt .

Resumen

Definiciones

Dados dos vectores \vec{A} y \vec{B} , el **producto vectorial** $\vec{A} \times \vec{B}$ es un vector \vec{C} que tiene una magnitud

$$C = AB \sin \theta \quad (11.3)$$

donde θ es el ángulo entre \vec{A} y \vec{B} . La dirección del vector $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ es perpendicular al plano que forman \vec{A} y \vec{B} , y esta dirección está determinada por la regla de la mano derecha.

El **momento de torsión** $\vec{\tau}$ debido a una fuerza \vec{F} en torno a un eje a través del origen en un marco inercial se define como

$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F} \quad (11.1)$$

La **cantidad de movimiento angular** \vec{L} de una partícula que tiene cantidad de movimiento lineal $\vec{p} = m\vec{v}$ en torno a un eje que pasa a través del origen es

$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} \quad (11.12)$$

donde \vec{r} es el vector de posición de la partícula relativo al origen.

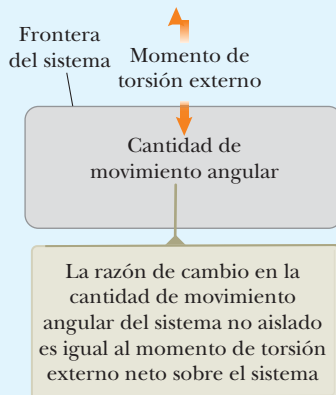
Conceptos y principios

La componente z de la cantidad de movimiento angular de un objeto rígido rotatorio en torno a un eje z fijo es

$$L_z = I\omega \quad (11.16)$$

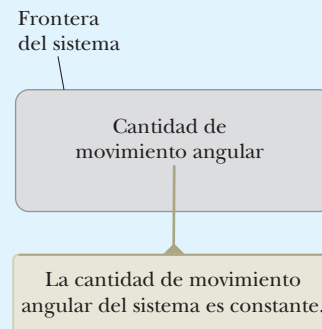
donde I es el momento de inercia del objeto en torno al eje de rotación y ω es su rapidez angular.

Análisis de modelo para resolver problemas



Sistema no aislado (cantidad de movimiento angular). Si un sistema interactúa con su entorno en el sentido de que sobre el sistema existe un momento de torsión externo, el momento de torsión externo neto que actúa sobre un sistema es igual a la rapidez de cambio en el tiempo de su cantidad de movimiento angular:

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} \quad (11.15)$$



Sistema aislado (cantidad de movimiento angular). Si un sistema no experimenta momento de torsión externo desde el ambiente, la cantidad de movimiento angular total del sistema se conserva:

$$\Delta \vec{L}_{\text{tot}} = 0 \quad (11.20)$$

Al aplicar esta ley de conservación de la cantidad de movimiento angular a un sistema cuyo momento de inercia cambia se obtiene

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f = \text{constante} \quad (11.21)$$

Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a WEBASSIGN. From Cengage.

- ACTIVIDAD** En su grupo, haga que alguien done temporalmente un juego de llaves para la causa. Ate un extremo de una cuerda de un metro de largo al anillo. En el otro extremo, coloque un peso ligero, como un clip o un clip de pinza. Si

sostiene el clip con las llaves que cuelgan del hilo de su mano y lo suelta, todo, por supuesto, cae al suelo. Ahora intente algo diferente. Suspenda las llaves de un lápiz horizontal sostenido con la mano izquierda para que cuelguen de éste en un segmento corto de la cuerda como se muestra en la figura TP11.1. El resto de la cuerda yace sobre el lápiz y se extiende horizontalmente al clip de pinza, que sujeta con la mano derecha. Ahora suelte el clip de pinza. ¿Qué sucede? Explique este resultado.

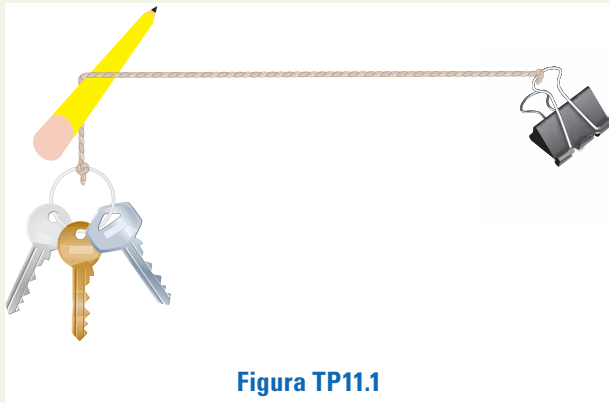


Figura TP11.1

2. Un disco con momento de inercia I_1 gira alrededor de un eje vertical sin fricción con velocidad angular ω_i . Un segundo disco, que tiene un momento de inercia I_2 e inicialmente no gira, cae sobre el primer disco (figura TP11.2). Debido a la fricción entre las superficies, las dos finalmente alcanzan la misma velocidad angular ω_f . Comente en su grupo lo siguiente. (a) Calcular ω_f . (b) ¿Qué fracción de la energía cinética inicial del sistema de dos discos permanece después de que los discos rotan con la misma velocidad angular? (c) Encuentre el valor de la respuesta en el inciso (b) para los siguientes límites: (i) $I_2 \rightarrow 0$, (ii) $I_1 = I_2$, (iii) $I_2 \rightarrow \infty$ y (iv) $I_1 \rightarrow \infty$. (d) Explique cómo cada uno de los resultados en el inciso (c) tiene sentido. (e) En el caso general en que la energía cinética del sistema disminuye en el proceso, ¿a dónde va esa energía? (f) ¿Qué pasaría si? En la figura TP11.2, ¿qué es ω_f si el segundo disco también está girando, pero en el sentido de las agujas del reloj, opuesto al del disco 1, con una velocidad angular de ω' antes de la colisión?

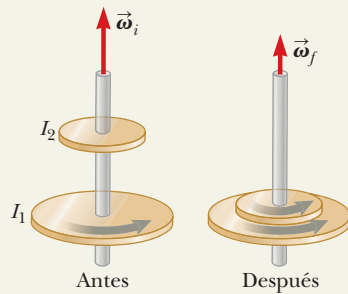


Figura TP11.2

3. Asistirá a una feria del condado con su amigo de su clase de física. Al caminar por el recinto ferial, descubre un nuevo juego de habilidad. Una barra delgada de masa $M = 0.500$ kg y longitud $\ell = 2.00$ m cuelga de un pivote libre de fricción en su extremo superior como se muestra en la figura TP11.3. La superficie frontal de la barra está cubierta con Velcro. Debe lanzar una pelota de masa cubierta de velcro $m = 1.00$ kg sobre la barra en un intento de hacerla girar hacia atrás y durante todo el camino a lo largo de la parte superior. La pelota debe adherirse a la barra en todo momento después de golpearla. Si hace que la barra gire sobre la posición superior, gana un peluche. Su amigo se ofrece como voluntario para probar suerte. Siente que se aplicará el mayor momento de torsión a la barra golpeándola en su extremo más bajo. Después de varios intentos, no puede ganar el animal de peluche lanzando la pelota para que se quede pegada al extremo de la barra. Simplemente no podía tirar la pelota lo suficientemente rápido y con la suficiente precisión. (Consulte el problema 43 para averiguar qué tan rápido debe lanzar la pelota.) Usted analiza las cosas de manera diferente a su amigo. ¿Qué pasaría si arroja la pelota en un punto por encima del extremo de la barra, una distancia y y debajo del pivote como se muestra en la figura TP11.3? Esto reduciría el momento de torsión en la varilla, pero el momento de torsión es proporcional a τ , mientras que el momento de inercia es proporcional a r^2 . Después de la colisión, la pelota es parte del sistema de rotación, por lo que el momento de inercia del sistema se reduce si la pelota está atrapada en algún lugar a lo largo de la barra, en lugar de en su extremo. (a) Tome algunas hojas de papel y calcule una expresión algebraica para la velocidad mínima requerida para girar la barra a la posición vertical en función del punto y y a lo largo de la barra en la que la pelota golpea y se pega a la barra. (b) Luego, con base en valores numéricos, determine el punto a lo largo de la barra donde debe golpearla con la pelota y hacerla pasar por la parte superior tirando la pelota con la velocidad más baja. (c) Finalmente, determine la velocidad más baja.

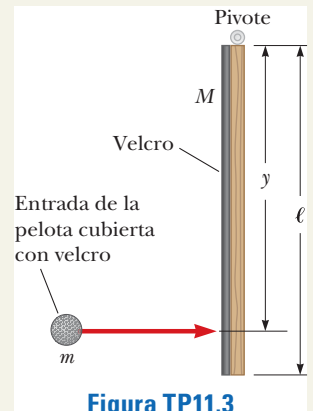


Figura TP11.3

Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a WEBASSIGN From Cengage

SECCIÓN 11.1 Producto vectorial y momento de torsión

1. Dado $\vec{M} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ y $\vec{N} = 4\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$, calcule el producto vectorial $\vec{M} \times \vec{N}$.
2. Los vectores desplazamiento 42.0 cm a 15.0° y 23.0 cm a 65.0° parten del origen y forman los lados de un paralelogramo. Ambos ángulos se miden en contra de las manecillas del reloj a partir del eje x . (a) Encuentre el área del paralelogramo. (b) Obtenga la longitud de su diagonal mayor.
3. Si $|\vec{A} \times \vec{B}| = \vec{A} \cdot \vec{B}$, ¿cuál es el ángulo entre \vec{A} y \vec{B} ?
4. Use la definición del producto vectorial y las definiciones de los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} , y \hat{k} para demostrar las ecuaciones 11.7. Suponga que el eje x apunta hacia la derecha, el eje y hacia arriba y el eje z es horizontal hacia usted (no alejándose de usted). Se dice que esta elección hace al sistema coordinado una *sistema de mano derecha*.

5. Dos fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 actúan a lo largo de los dos lados de un triángulo equilátero, como se muestra en la figura P11.9. El punto O es la intersección de las alturas del triángulo. (a) Encuentre una tercera fuerza \vec{F}_3 a aplicar en B y a lo largo de BC tal que el momento de torsión total sea cero en torno al punto O . (b) ¿Qué pasaría si? ¿Cambiará el momento de torsión total si \vec{F}_3 se aplica no en B sino en cualquier otro punto a lo largo de BC ?

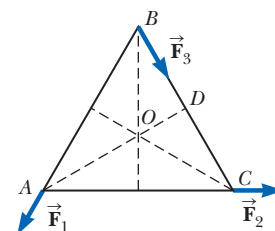


Figura P11.5

- 6.** Un estudiante afirma que encontró un vector \vec{A} tal que $(2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}) \times \vec{A} = (4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$. (a) ¿Usted cree esta afirmación? (b) Explique por qué sí o por qué no.
- 7.** Una partícula se ubica en la posición vectorial $\vec{r} = (4.00\hat{i} + 6.00\hat{j})\text{ m}$ y sobre ella se ejerce una fuerza dada por $\vec{F} = (3.00\hat{i} + 2.00\hat{j})\text{ N}$. (a) ¿Cuál es el momento de torsión que actúa sobre la partícula respecto al origen? (b) Hay otro punto respecto al cual el momento de torsión causado por esta fuerza sobre la partícula estará en la dirección opuesta con la mitad de la magnitud? (c) ¿Puede haber más de uno de tales puntos? (d) ¿Dicho punto puede encontrarse sobre el eje y ? (e) ¿Puede haber más de uno de tales puntos sobre el eje y ? (f) Determine el vector de posición de tal punto.

SECCIÓN 11.2 Análisis de modelo: sistema no aislado (cantidad de movimiento angular)

- 8.** Una partícula de 1.50 kg se mueve en el plano xy con una velocidad de $\vec{v} = (4.20\hat{i} - 3.60\hat{j})\text{ m/s}$. Determine la cantidad de movimiento angular de la partícula respecto al origen cuando su vector de posición es $\vec{r} = (1.50\hat{i} + 2.20\hat{j})\text{ m}$.
- 9.** Una partícula de masa m se mueve en el plano xy con una velocidad de $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$. Determine la cantidad de movimiento angular de la partícula respecto al origen cuando su vector de posición es $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$.

- 10.** Con dirección justo hacia la cima de los Pikes Peak, un avión de 12 000 kg de masa vuela sobre las planicies de Kansas a una altitud casi constante de 4.30 km con velocidad fija de 175 m/s. (a) ¿Cuál es el vector cantidad de movimiento angular del avión en relación con una granja de trigo sobre el suelo directamente bajo el avión? (b) ¿Este valor cambia a medida que el avión continúa su movimiento a lo largo de una línea recta? (c) ¿Qué pasaría si? ¿Cuál es su cantidad de movimiento angular respecto a la cima de los Pikes Peak?

- 11. Problema de repaso.** Una proyectil de masa m se dispara con una velocidad inicial \vec{v}_i que forma un ángulo θ con la horizontal, como se muestra en la figura P11.11. El proyectil se mueve en el campo gravitacional de la Tierra. Encuentre la cantidad de movimiento angular del proyectil en torno al origen (a) cuando el proyectil está en el origen, (b) cuando se ubica en el punto más alto de su trayectoria y (c) justo antes de golpear el suelo. (d) ¿Qué momento de torsión hace que cambie su cantidad de movimiento angular?

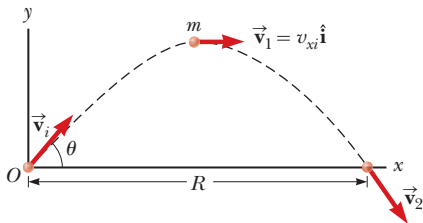


Figura P11.11

- 12. Problema de repaso.** Un péndulo cónico consiste de una plomada de masa m en movimiento en una trayectoria circular en un plano horizontal, como se muestra en la figura P11.12. Durante el movimiento, el alambre de soporte, de longitud ℓ , mantiene el ángulo constante θ con la vertical. Demuestre que la magnitud de la cantidad de movimiento angular de la plomada en torno al centro de la circunferencia punteada es

$$L = \left(\frac{m^2 g l^3 \sin^4 \theta}{\cos \theta} \right)^{1/2}$$

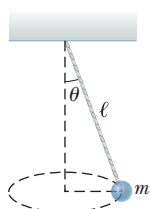


Figura P11.12

- 13.** Una partícula de masa m se mueve en una circunferencia de radio R con una rapidez constante v , como se muestra en la figura P11.13. El movimiento comienza en el punto Q en el tiempo $t = 0$. Determine la cantidad de movimiento angular de la partícula respecto al eje perpendicular a la página a través del punto P como una función del tiempo.

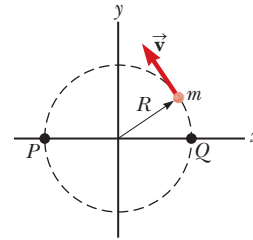


Figura P11.13

Problemas 13 y 24

- 14.** Una partícula de 5.00 kg parte del origen al tiempo cero. Su velocidad como función del tiempo está dada por

$$\vec{v} = 6t^2\hat{i} + 2t\hat{j}$$

donde \vec{v} está en metros y t está en segundos. (a) Encuentre su posición como función del tiempo. (b) Describa su movimiento cualitativamente. Encuentre (c) su aceleración como función del tiempo, (d) la fuerza neta ejercida sobre la partícula como función del tiempo, (e) el momento de torsión neto respecto al origen ejercido sobre la partícula como función del tiempo, (f) la cantidad de movimiento angular de la partícula como función del tiempo, (g) la energía cinética de la partícula como función del tiempo y (h) la potencia inyectada en el sistema de la partícula como función del tiempo.

- 15.** Una bola que tiene masa m está amarrada al extremo de un asta que está conectada al lado de un alto edificio en el punto P , como se muestra en la figura P11.15. La longitud del asta es ℓ y forma un ángulo θ con el eje x .

La bola se afloja y comienza a caer con aceleración $-g\hat{j}$. (a) Determine la cantidad de movimiento angular de la bola en torno al punto P como función del tiempo. (b) ¿Por qué razón física cambia la cantidad de movimiento angular? (c) ¿Cuál es la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular de la bola respecto al punto P ?

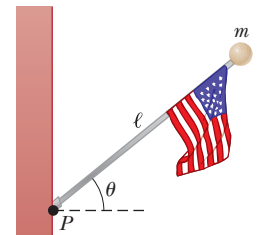


Figura P11.15

SECCIÓN 11.3 Cantidad de movimiento angular de un objeto rígido rotatorio

- 16.** Una esfera sólida uniforme de radio $r = 0.500\text{ m}$ y masa $m = 15.0\text{ kg}$ gira contra las manecillas del reloj respecto a un eje vertical a través de su centro. Encuentre su vector cantidad de movimiento angular cuando su rapidez angular es 3.00 rad/s .
- 17.** Un disco sólido uniforme de masa $m = 3.00\text{ kg}$ y radio $r = 0.200\text{ m}$ gira en torno a un eje fijo perpendicular a su cara con frecuencia angular 6.00 rad/s . Calcule la magnitud de la cantidad de movimiento angular del disco cuando el eje de rotación (a) pasa a través de su centro de masa y (b) pasa a través de un punto a la mitad entre el centro y el borde.
- 18.** Demuestre que la energía cinética de un objeto rotatorio en torno a un eje fijo con cantidad de movimiento angular $L = I\omega$ se puede escribir como $K = L^2/2I$.
- 19.** El *Big Ben* (figura P10.27, página 281), el reloj de la torre del Parlamento en Londres, tiene manecillas horaria y minutero con longitudes 2.70 m y 4.50 m y masas de 60.0 kg y 100 kg ,

respectivamente. Calcule la cantidad de movimiento angular total de dichas manecillas en torno al punto central. (Trate las manecillas como largas y delgadas barras rotando respecto a un extremo. Suponga que estas manecillas rotan con razón constante de una revolución por 12 horas y 60 minutos, respectivamente.)

- 20.** Modele la Tierra como una esfera uniforme. (a) Calcule la cantidad de movimiento angular de la Tierra debida a su movimiento de giro en torno a su eje. (b) Calcule la cantidad de movimiento angular de la Tierra debida a su movimiento orbital respecto al Sol. (c) Explique por qué la respuesta al inciso (b) es mayor que la obtenida en el inciso (a) no obstante que a la Tierra le lleva más tiempo ir alrededor del Sol que rotar sobre su propio eje.
- 21.** La distancia entre los centros de las ruedas de una motocicleta es 155 cm. El centro de masa de la motocicleta, incluido el conductor, está a 88.0 cm sobre el suelo y a la mitad entre las ruedas. Suponga que la masa de cada rueda es pequeña comparada con el cuerpo de la motocicleta. El motor sólo impulsa la rueda trasera. ¿Qué aceleración horizontal de la motocicleta hará que la rueda frontal se eleve del suelo?

SECCIÓN 11.4 Análisis de modelo: Sistema aislado (cantidad de movimiento angular)

22. Está trabajando en un observatorio, tomando datos sobre radiación electromagnética de estrellas de neutrones. Usted está analizando los resultados de la estrella de neutrones en el ejemplo 11.6, verificando que el periodo de la estrella de neutrones de 10.0 km de radio es de hecho de 2.6 s. Usted pasa por semanas de datos que muestran el mismo periodo. De repente, al analizar los datos más recientes, observa que el periodo ha disminuido a 2.3 s y se mantuvo en ese nivel desde ese momento. Le pregunta a su supervisora acerca de esto, quien se emociona y dice que la estrella de neutrones debe haber sufrido una falla, que es una contracción repentina del radio de la estrella, lo que resulta en una mayor velocidad angular. Mientras corre a su computadora para comenzar a escribir un artículo sobre el problema, ella lo llama para calcular el nuevo radio del planeta, suponiendo que se haya mantenido esférico. Ella también está hablando de vórtices y un núcleo superfluido, pero no entiende esas palabras.

- 23.** Una mujer de 60.0 kg está de pie en el borde oeste de una tornamesa horizontal que tiene un momento de inercia de $500 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ y un radio de 2.00 m. La tornamesa inicialmente está en reposo y es libre de dar vuelta en torno a un eje vertical sin fricción a través de su centro. Después la mujer comienza a caminar alrededor del borde en sentido de las manecillas del reloj (visto desde arriba del sistema) con una rapidez constante de 1.50 m/s en relación con la Tierra. Considere el sistema mujer-tornamesa mientras comienza el movimiento. (a) ¿Se conserva la energía mecánica del sistema? (b) ¿Es constante la cantidad de movimiento lineal del sistema? (c) ¿Se conserva la cantidad de movimiento angular del sistema? (d) ¿En qué dirección y con qué rapidez angular gira la tornamesa? (e) ¿Cuánta energía química convierte el cuerpo de la mujer en energía mecánica conforme la mujer se pone ella misma y a la tornamesa en movimiento?

- 24.** La figura P11.13 representa un pequeño disco plano con masa $m = 2.40 \text{ kg}$ que se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción. Se mantiene en una órbita circular en torno a un eje fijo mediante una barra con masa despreciable y longitud $R = 1.50 \text{ m}$, pivoteado en un extremo. Al inicio, el disco tiene una rapidez $v = 5.00 \text{ m/s}$. Una bola de arcilla de 1.30 kg se deja caer verticalmente sobre el disco desde una pequeña distancia sobre éste y de inmediato se pega al disco. (a)

¿Cuál es el nuevo periodo de rotación? (b) ¿En este proceso se conserva la cantidad de movimiento angular del sistema disco-arcilla en torno al eje de rotación? (c) ¿La cantidad de movimiento lineal del sistema se conserva en el proceso de la arcilla que se pega al disco? (d) ¿La energía mecánica del sistema se conserva en el proceso?

- 25.** Una tornamesa cilíndrica uniforme de 1.90 m de radio y 30.0 kg de masa gira contra las manecillas del reloj en un plano horizontal con una rapidez angular inicial de $4\pi \text{ rad/s}$. Los cojinetes fijos de la tornamesa no tienen fricción. Un bulto de barro de 2.25 kg de masa y tamaño despreciable se deja caer sobre la tornamesa desde una pequeña distancia sobre ésta y de inmediato se pega a la tornamesa en un punto a 1.80 m al este del eje. (a) Encuentre la rapidez angular final del barro y la tornamesa. (b) ¿En este proceso se conserva la energía mecánica del sistema tornamesa-barro? Explique y use sus resultados numéricos para verificar su respuesta. (c) ¿En este proceso se conserva la cantidad de movimiento del sistema? Explique su respuesta.
- 26.** Un disco de masa $m_1 = 80.0 \text{ g}$ y radio $r_1 = 4.00 \text{ cm}$ se desliza a través de una mesa de aire con una rapidez de $\vec{v} = 1.50 \text{ m/s}$, como se muestra en la figura P11.26a. Forma una colisión oblicua con un segundo disco de radio $r_2 = 6.00 \text{ cm}$ y masa $m_2 = 120 \text{ g}$ (inicialmente en reposo) tal que sus bordes apenas se tocan. Ya que sus bordes están recubiertos con pegamento de acción instantánea, los discos quedan unidos y giran después de la colisión (figura P11.26b). (a) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular del sistema relativa al centro de masa? (b) ¿Cuál es la rapidez angular en torno al centro de masa?

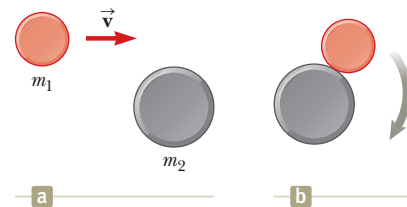


Figura P11.26

- 27.** Un bloque de madera de masa M , que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción, está unido a una barra rígida de longitud ℓ y masa despreciable (figura P11.27). La barra se articula en el otro extremo. Una bala de masa m , que viaja paralela a la superficie horizontal y perpendicular a la barra con rapidez v , golpea al bloque y queda incrustada en él. (a) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular del sistema bala-bloque respecto a un eje vertical a través del pivote? (b) ¿Qué fracción de la energía cinética original se convierte en energía interna en el sistema durante la colisión?

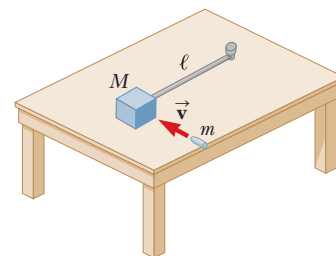


Figura P11.27

- 28.** ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Una estación espacial en forma de rueda gigante (figura P11.28, página 306) tiene un radio de $r = 100 \text{ m}$ y un momento de inercia de $5.00 \times 10^8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Una tripulación de 150 personas de masa promedio 65.0 kg vive en el borde, y la rotación de la estación hace que

la tripulación sienta una aparente aceleración de caída libre de g . Un técnico investigador es asignado para efectuar un experimento en el cual una bola es liberada en el borde de la estación cada 15 minutos y se mide el intervalo de tiempo que la bola tarda en recorrer una distancia dada, esto como una prueba para asegurar que el aparente valor de g se mantenga correctamente. Una tarde, 100 personas se mueven al centro de la estación para una reunión. El técnico investigador, quien ha estado realizando su experimento durante una hora antes de la reunión, está triste por no poder atender dicha reunión, y su ambiente se deteriora aún más por su aburrido experimento en donde la bola ha caído de la misma manera durante toda la tarde, para cada intervalo de tiempo.

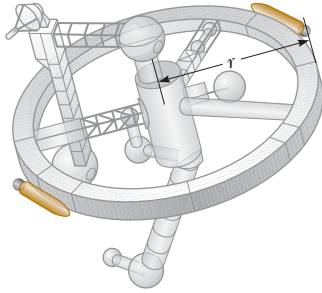


Figura P11.28

SECCIÓN 11.5 El movimiento de giroscopios y trompos

31. El vector cantidad de movimiento angular de un giroscopio en precesión barre un cono, como se muestra en la figura P11.31. La rapidez angular de la punta del vector de cantidad de movimiento angular, llamada su frecuencia de precesión, está dada por $\omega_p = \tau/L$, donde τ es la magnitud del momento de torsión sobre el giroscopio y L es la magnitud de su cantidad de movimiento angular. En el movimiento llamado *precesión de los equinoccios*, el eje de rotación de la Tierra precede en torno a la perpendicular a su plano orbital con un periodo de 2.58×10^4 años. Modele la Tierra como una esfera uniforme y calcule el momento de torsión sobre la Tierra que provoca esta precesión.

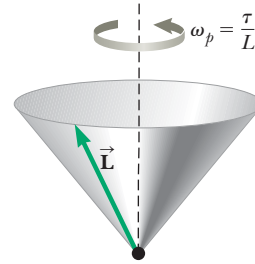


Figura P11.31 El vector cantidad de movimiento angular de un giroscopio en precesión barre un cono.

PROBLEMAS ADICIONALES

29. Un tapón de barro pegajoso con masa m y velocidad \vec{v}_i se dispara a un cilindro sólido de masa M y radio R (figura P11.29). El cilindro inicialmente está en reposo y se monta sobre un eje horizontal fijo que corre a través de su centro de masa. La línea de movimiento del proyectil es perpendicular al eje y a una distancia $d < R$ desde el centro. (a) Encuentre la rapidez angular del sistema justo antes de que el barro golpee y se pegue a la superficie del cilindro. (b) ¿En este proceso se conserva la energía mecánica del sistema barro-cilindro? Explique su respuesta. (c) ¿En este proceso se conserva la cantidad de movimiento del sistema barro-cilindro? Explique su respuesta.

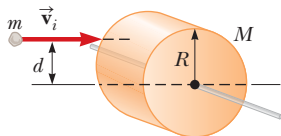


Figura P11.29

30. Una bala de 0.00500 kg que viaja horizontalmente con rapidez $1.00 \times 10^3 \text{ m/s}$ golpea una puerta de 18.0 kg , con una inmersión de 10.0 cm a partir del lado opuesto de las bisagras, como se muestra en la figura P11.30. El ancho de la puerta de 1.00 m es libre para girar sin fricción sobre sus bisagras. (a) Antes de golpear la puerta, ¿la bala tiene cantidad de movimiento angular relativa al eje de rotación de la puerta? (b) Si tiene, entonces evalúe esta cantidad de movimiento angular. Si no tiene, explique por qué no hay cantidad de movimiento angular. (c) ¿Durante esta colisión se conserva la energía mecánica del sistema bala-puerta? Responda sin realizar un cálculo. (d) Inmediatamente después de la colisión, ¿qué rapidez angular tiene la puerta? (e) Calcule la energía total del sistema bala-puerta y determine si es menor o igual que la energía cinética de la bala antes de la colisión.

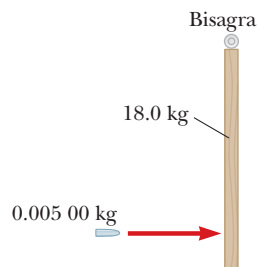


Figura P11.30 Vista de sobrecarga de una bala golpeando una puerta.

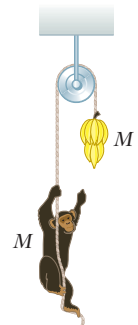


Figura P11.32

32. Una soga ligera pasa sobre una polea ligera sin fricción. Un extremo está unido a un racimo de plátanos de masa M y un mono de masa M escala por el otro extremo (figura P11.32). El mono escala la cuerda con la intención de llegar a los plátanos. (a) Al tratar el sistema que consiste de mono, plátanos, soga y polea, evalúe el momento de torsión neto en torno al eje de la polea. (b) Use los resultados de (a) y determine la cantidad de movimiento angular total en torno al eje de la polea y describa el movimiento del sistema. ¿El mono alcanzará los plátanos?

33. **Problema de repaso.** Un letrero rectangular delgado y uniforme cuelga verticalmente sobre la puerta de una tienda. El letrero está articulado a una barra horizontal estacionaria a lo largo de su borde superior. La masa del letrero es de 2.40 kg y su dimensión vertical es de 50.0 cm . El letrero se balancea sin fricción, por lo que es un blanco tentador para niños armados con bolas de nieve. El desplazamiento angular máximo del letrero es 25.0° en ambos lados de la vertical. En un momento en que el letrero está vertical y se mueve hacia la izquierda, una bola de nieve de 400 g de masa, que viaja horizontalmente con una velocidad de 160 cm/s hacia la derecha, golpea perpendicularmente en el borde inferior del letrero y se queda allí. (a) Calcule la velocidad angular del letrero inmediatamente antes del impacto. (b) Calcule su velocidad angular inmediatamente después del impacto. (c) ¿A través de qué ángulo máximo oscilará el letrero salpicado?

34. **CE** Usted está asesorando a un compañero de estudios que desea aprender a realizar múltiples vueltas en el trampolín. Lo hace rebotar verticalmente tan alto como puede, manteniendo su cuerpo perfectamente recto y vertical. Usted determina que puede elevar su centro de masa a una distancia de $h = 6.00 \text{ m}$ por encima de su nivel cuando inicia el salto. Puede hacer una sola voltereta al rebotar suavemente, lanzando sus brazos hacia adelante sobre su cabeza, y metiendo su cuerpo. Utiliza

su teléfono inteligente para hacer un video de él haciendo un solo giro. Según el análisis de este video, ¿determinó que su momento de inercia es $I_{\text{derecho}} = 26.7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ cuando su cuerpo está recto y $I_{\text{plegado}} = 5.62 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ en la posición de pliegue. Usted sugiere que mantenga su cuerpo en posición recta durante $\Delta t' = 0.400 \text{ s}$ después de salir de la superficie del trampolín y luego ir inmediatamente a una posición de pliegue. Cuando aterrice, debería enderezar su cuerpo $\Delta t' = 0.400 \text{ s}$ antes de aterrizar. A partir del análisis de la grabación de video, usted determina que al lanzar sus brazos hacia delante, tiene una velocidad angular inicial de $v_i = 2.88 \text{ rad/s}$ cuando abandona la superficie del trampolín. Si trata de rebotar tan alto como pueda, haga algunos giros, y aterrice en el mismo lugar en el trampolín, pronostique cuántos giros puede hacer de manera segura, de modo que aterrice de pie sobre el trampolín.

35. Todo mundo se queja de que no hay suficientes horas en un día. En un intento por componer esto, suponga que todas las personas en el mundo se alinean en el ecuador y comienzan a correr hacia el este a 2.50 m/s respecto a la superficie de la Tierra. ¿En cuánto aumenta la longitud de un día? Suponga que la población mundial es de 7.00×10^9 personas, con una masa promedio de 55.0 kg cada una, y que la Tierra es una esfera homogénea sólida. Además, puede usar la aproximación $1/(1-x) \approx 1+x$ para x pequeña.
36. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Un meteoro impacta directamente la Tierra en el ecuador. En el momento de impactar, lo hace exactamente en forma vertical y hacia abajo. Debido a la colisión, el tiempo de rotación de la Tierra se incrementa 0.5 s , así el día es más largo por 0.5 s , indetectable para el ciudadano común. Después del impacto, la gente en la Tierra ignora ese medio segundo extra y sigue con su vida normal. (Suponga que la Tierra tiene densidad uniforme.)
37. Una barra rígida sin masa tiene tres partículas con masas iguales unidas a ella, como se muestra en la figura P11.37. La barra es libre de girar en un plano vertical en torno a un eje sin fricción perpendicular a la barra a través del punto P y se libera del reposo en la posición horizontal en $t = 0$. Si supone que se conocen m y d , encuentre: (a) el momento de inercia del sistema (barra más partículas) en torno al eje, (b) el momento de torsión que actúa sobre el sistema en $t = 0$, (c) la aceleración angular del sistema en $t = 0$, (d) la aceleración lineal de la partícula 3 en $t = 0$, (e) la máxima energía cinética del sistema, (f) la máxima rapidez angular alcanzada por la barra, (g) la máxima cantidad de movimiento angular del sistema y (h) la máxima rapidez alcanzada por la partícula 2.

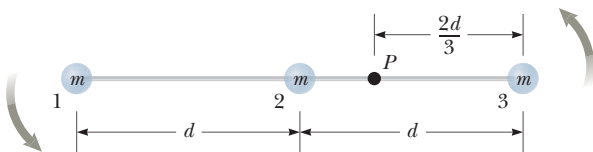


Figura P11.37

38. **Problema de repaso.** Dos niños se deslizan uno hacia el otro sobre un estacionamiento cubierto de hielo, sin fricción. Jacob, de masa 45.0 kg , se mueve hacia la derecha a 8.00 m/s , y Ethan, de masa 31.0 kg , se desplaza hacia la izquierda a 11.0 m/s a lo largo de la misma línea. Cuando ellos se encuentran, se agarran y quedan unidos. (a) ¿Cuál es su velocidad inmediatamente después de este momento? (b) ¿Qué fracción de su energía cinética original continúa siendo mecánica después de su colisión? Fue muy gracioso que los niños repitieron

la colisión con las mismas velocidades originales, esta vez moviéndose a lo largo de líneas paralelas separadas 1.20 m . En la aproximación más cercana, ellos acoplan sus brazos y comienzan a rotar respecto a su centro de masa común. Modele los niños como partículas y a sus brazos como una cuerda que no se estira. (c) Encuentre la velocidad de su centro de masa. (d) Obtenga su rapidez angular. (e) ¿Qué fracción de su energía cinética original continúa siendo mecánica después de que acoplan sus brazos? (f) ¿Por qué son diferentes las respuestas a los incisos (b) y (e)?

39. **T** Dos astronautas (figura P11.39), cada uno de 75.0 kg de masa, están conectados mediante una cuerda de 10.0 m de masa despreciable. Están aislados en el espacio, orbitando su centro de masa con magnitudes de velocidad de 5.00 m/s . Trate a los astronautas como partículas y calcule (a) la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema de dos astronautas y (b) la energía rotacional del sistema. Al jalar la cuerda, un astronauta acorta la distancia entre ellos a 5.00 m . (c) ¿Cuál es la nueva cantidad de movimiento angular del sistema? (d) ¿Cuáles son las nuevas magnitudes de velocidad de los astronautas? (e) ¿Cuál es la nueva energía rotacional del sistema? (f) ¿Cuánta energía potencial química en el cuerpo del astronauta se convirtió a energía mecánica en el sistema cuando él jaló la cuerda?

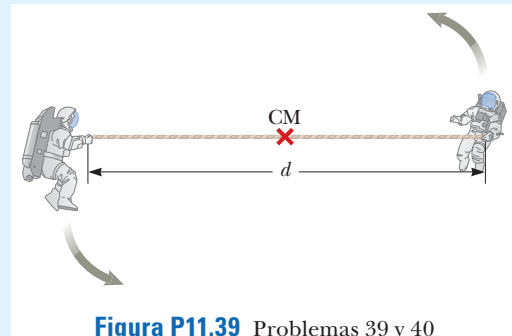


Figura P11.39 Problemas 39 y 40

40. **S** Dos astronautas (figura P11.39), cada uno de masa M , están conectados por una cuerda de longitud d de masa despreciable. Ellos están aislados en el espacio, orbitando su centro de masa con magnitudes de rapidez v . Trate a los astronautas como partículas y calcule (a) la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema de dos astronautas y (b) la energía rotacional del sistema. Al jalar la cuerda, uno de los astronautas acorta la distancia entre ellos a $d/2$. (c) ¿Cuál es la nueva cantidad de movimiento angular del sistema? (d) ¿Cuáles son las nuevas magnitudes de rapidez de los astronautas? (e) ¿Cuál es la nueva energía rotacional del sistema? (f) ¿Cuánta energía potencial química en el cuerpo del astronauta se convirtió a energía mecánica en el sistema cuando él acortó la cuerda?
41. **CIC** Los nativos de Norte y Sudamérica usan *boleadoras* para cazar aves y animales. Una *boleadora* puede consistir de tres piedras, cada una con masa m , en los extremos de tres cuerdas ligeras, cada una con longitud ℓ . Los otros extremos de las cuerdas se amarran juntos para formar una Y. El cazador sostiene una piedra y gira las otras dos piedras sobre su cabeza (figura P11.141a página 308). Ambas piedras se mueven juntas en un círculo horizontal de radio 2ℓ con rapidez v_0 . En el instante en que el componente horizontal de su velocidad se dirige hacia la presa, el cazador suelta la piedra de su mano. A medida que la *boleadora* vuela a través del aire, las cuerdas rápidamente toman un ordenamiento estable con ángulos constantes de 120° entre ellas (figura

P11.41b). En la dirección vertical, la *boleadora* está en caída libre. Las fuerzas gravitacionales que ejerce la Tierra hacen que la unión de las cuerdas se mueva con la aceleración descendente \vec{g} . Usted puede ignorar el movimiento vertical mientras procede a describir el movimiento horizontal de la *boleadora*. En términos de m , ℓ y v_0 , calcule (a) la magnitud de la cantidad de movimiento lineal de la *boleadora* en el momento de liberarla y, después de su liberación, (b) la rapidez horizontal del centro de masa de la *boleadora* y (c) la cantidad de movimiento angular de la *boleadora* respecto a su centro de masa. (d) Encuentre la rapidez angular de la *boleadora* respecto a su centro de masa y después en la formación en Y. Calcule la energía cinética de la *boleadora* (e) en el instante de liberación y (f) en su forma Y estable (g) Explique cómo se aplican las leyes de conservación a la *boleadora* a medida que cambia su configuración. Robert Beichner sugirió la idea de este problema.

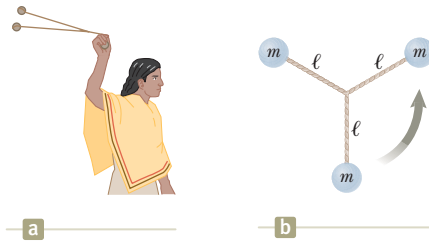


Figura P11.41

42. **CIC** Dos niños juegan sobre los taburetes del mostrador de un restaurante. Sus pies no llegan a los reposapiés y lo alto de los taburetes tiene libertad de girar sin fricción sobre pedestales fijos al suelo. Uno de los niños atrapa una bola lanzada en un proceso descrito por la ecuación

$$(0.730 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(2.40 \hat{\mathbf{j}} \text{ rad/s}) \\ + (0.120 \text{ kg})(0.350 \hat{\mathbf{i}} \text{ m}) \times (4.30 \hat{\mathbf{k}} \text{ m/s}) \\ = [0.730 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + (0.120 \text{ kg})(0.350 \text{ m})^2] \vec{\omega}$$

(a) Resuelva la ecuación para la incógnita $\vec{\omega}$. (b) Complete el enunciado del problema al que se aplica esta ecuación. Su enunciado debe incluir la información numérica dada y la especificación de la incógnita a determinar. (c) ¿La ecuación podría describir igualmente bien al otro niño que lanza la bola? Explique su respuesta.

43. **CE** Está asistiendo a una feria del condado con su amigo de su clase de física. Al caminar por el recinto ferial, descubre un nuevo juego de habilidad. Una barra delgada de masa $M = 0.500 \text{ kg}$ y longitud $\ell = 2.00 \text{ m}$ cuelga de un pivote libre de fricción en su extremo superior como se muestra en la figura P11.43. La superficie frontal de la varilla está cubierta con Velcro. Debe lanzar una pelota cubierta con velcro de masa $m = 1.00 \text{ kilogramos}$ sobre la barra en un intento de hacer que oscile hacia atrás y gire completamente a lo largo de la parte superior. La pelota debe adherirse a la barra en

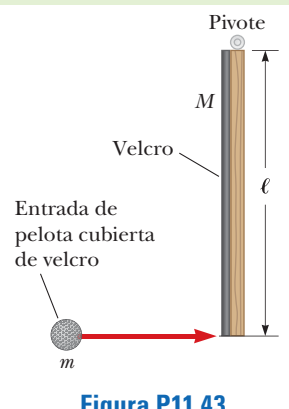


Figura P11.43

todo momento después de golpearla. Si hace que la barra gire sobre la posición superior, gana un peluche. Su amigo se ofrece como voluntario para probar suerte. Siente que se aplicará el mayor momento de torsión a la barra golpeándola en su extremo más bajo. Mientras se prepara para apuntar al punto más bajo de la barra, calcule qué tan rápido debe lanzar la pelota para ganar el animal de peluche con esta técnica.

44. **CIC** Una barra uniforme de 300 g de masa y 50.0 cm de longitud rota en un plano horizontal en torno a una clavija fija vertical sin fricción a través de su centro. Dos pequeñas cuentas densas, cada una de masa m , se montan sobre la barra de modo que puedan deslizarse sin fricción a lo largo de su longitud. Al inicio, las cuentas se sostienen mediante broches en posiciones a 10.0 cm en cada lado del centro, y el sistema está girando con una rapidez angular de 36.0 rad/s. Los broches se liberan simultáneamente y las cuentas se deslizan hacia afuera a lo largo de la barra. (a) Encuentre la rapidez angular ω_f del sistema, dependiente de m , en el instante en que las cuentas se deslizan de los extremos de la barra. (b) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo posibles para ω_f y los valores de m a los que corresponden?
45. El calentamiento global causa preocupación porque incluso pequeños cambios en la temperatura de la Tierra pueden tener consecuencias significativas. Por ejemplo, si las capas de hielo polar de la Tierra se derritieran por completo, el agua adicional resultante en los océanos inundaría muchas áreas costeras. Modele el hielo polar con una masa de $2.30 \times 10^{19} \text{ kg}$ y que forma dos discos planos de $6.00 \times 10^5 \text{ m}$ de radio. Suponga que el agua se dispersa en un delgado cascarón esférico irrompible después de derretirse. Calcule el cambio resultante en la duración de un día, en segundos y como un porcentaje.
46. El disco en la figura P11.46 tiene una masa de 0.120 kg. La distancia del disco al centro de rotación es originalmente 40.0 cm, y el disco está deslizando con una rapidez de 80.0 cm/s. La cuerda es jalada hacia abajo 15.0 cm a través del hoyo en la mesa sin fricción. Determine el trabajo realizado sobre el disco. (*Sugerencia:* Considere el cambio de energía cinética.)

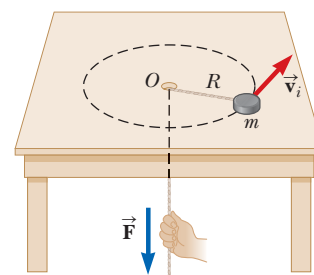


Figura P11.46

47. **CE** Usted opera un restaurante que tiene muchas mesas circulares grandes. En el centro de cada mesa hay una charola giratoria que puede entregar sal, pimienta, mermelada, salsa picante, pan y otros artículos a los comensales al otro lado de la mesa. En el centro de cada charola se encuentra un arreglo de flores de fantasía, y la transformación del arreglo floral es hermosa para usted. Debido a su interés en los trenes a escala, decide reemplazar cada charola con una vía circular en la mesa alrededor de la cual correrá un tren. ¿Puede cargar los diversos condimentos en los vagones del tren y presionar un botón para operar el tren, haciendo que este comience a moverse alrededor del círculo y entregue la carga a sus compañeros comensales! El tren tiene una masa de 1.96 kg y se mueve a una velocidad de 0.18 m/s en relación con la vía.

Después de unos días, se da cuenta de que echa de menos los hermosos arreglos florales girando. Entonces se le ocurre un nuevo esquema. Devuelve la charola a la mesa y monta la vía circular en la plataforma de la charola, que tiene un eje libre de fricción en el centro. El radio de la vía circular es de 40.0 cm (medido a mitad de camino entre los rieles) y la plataforma de la charola es un disco uniforme de masa 3.00 kg y radio 48.0 cm. Finalmente equipa todas sus mesas con el nuevo aparato y abre su restaurante. Como demostración para los comensales, monta un salero y un pimentero, que tienen una masa de 0.100 kg cada uno, en un vagón plano y presiona el botón para entregar los condimentos al otro lado de la mesa. ¿Cuánto tiempo lleva entregar los condimentos exactamente en el lado opuesto de la mesa? Ignore el momento de inercia del arreglo floral, ya que su masa está cerca del eje de rotación.

PROBLEMAS ADICIONALES

- 48.** Un cubo sólido de madera, de lado $2a$ y masa M , descansa sobre una superficie horizontal. El cubo está restringido a dar vuelta en torno al eje fijo AB (figura P11.48). Una bala de masa m y rapidez v se dispara a la cara opuesta $ABCD$ a una altura de $4a/3$. La bala se incrusta en el cubo. Encuentre

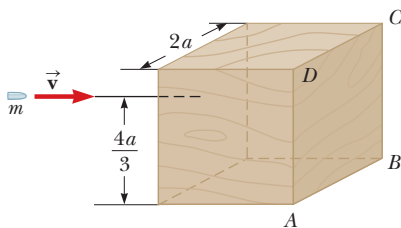


Figura P11.48

el valor mínimo de v que se requiere para voltear al cubo de modo que caiga sobre la cara $ABCD$. Suponga $m \ll M$.

- 49.** En el ejemplo 11.8, se estudió una colisión elástica entre un disco y un bastón sobre una superficie sin fricción. Suponga que todo es igual como en dicho ejemplo, excepto que ahora la colisión es perfectamente inelástica de manera que el disco se adhiere al bastón en el extremo donde golpea. Encuentre (a) la rapidez del centro de masa del sistema y (b) la rapidez angular del sistema después de la colisión.
- 50.** Un cubo sólido de lado $2a$ y masa M , se desliza sobre una superficie sin fricción con velocidad uniforme \vec{v} , como se muestra en la figura P11.50a. Golpea un pequeño obstáculo al final de la mesa, causando que el cubo se incline como se indica en la figura P11.50b. Encuentre el valor mínimo de la magnitud de \vec{v} tal que el cubo caiga de la mesa. *Nota:* El cubo experimenta una colisión inelástica en el borde.

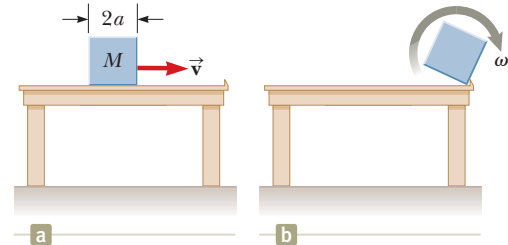


Figura P11.50



12

Apoye una regla cerca de los extremos de los dedos y mueva las manos hacia los demás. ¡Sus manos siempre se encuentran en la marca de 50 cm! (*Science Source*)

- 12.1 Modelo de análisis: Objeto rígido en equilibrio
- 12.2 Más acerca del centro de gravedad
- 12.3 Ejemplos de objetos rígidos en equilibrio estático
- 12.4 Propiedades elásticas de los sólidos



Equilibrio estático y elasticidad

IMAGINE En el capítulo anterior, estaba tomando un descanso de su tarea de física y viendo videos en línea sobre el movimiento rotatorio. Mientras piensa en los fenómenos giratorios de esos videos, levanta una regla y empieza a girarla y deslizarla hacia adelante y hacia atrás en sus manos. En un momento dado, algo sobre el comportamiento de la regla le hace olvidar los videos de movimiento rotativo. Usted dice: “¡Espera un minuto! ¿Qué acaba de pasar allí?”. Reproduce el comportamiento de la siguiente manera. Apoya la regla de forma horizontal en un dedo de cada mano, los dedos apuntando horizontalmente hacia adelante desde su cuerpo. Un dedo sostiene la regla cerca del extremo de 0 cm y la otra cerca del extremo de 100 cm. Ahora lentamente comienza a mover sus manos una hacia la otra. La regla se desliza sobre un dedo mientras se pega al otro dedo. ¡Entonces, cambia para deslizarse sobre el otro dedo! ¡Y luego de vuelta al primer dedo! Esta alternancia continúa hasta que sus dedos se encuentran. Independientemente de los esfuerzos que realice para mover solo un dedo a la vez, este comportamiento de adherencia y deslizamiento siempre ocurre, la regla siempre permanece apoyada sobre los dedos y sus dedos siempre se encuentran en la marca de 50 cm.

CONEXIONES En los capítulos 10 y 11, estudiamos la dinámica de los objetos rígidos en movimiento. Este capítulo aborda las condiciones bajo las cuales un objeto rígido está en equilibrio. El término equilibrio implica que el objeto se mueve con velocidad constante y velocidad angular constante en relación con un observador en un marco

de referencia inercial. En este capítulo, consideramos solo el caso especial en el que ambas velocidades son iguales a cero. En este caso, el objeto está en lo que se llama *equilibrio estático*. En el fenómeno de la regla descrito en la semblanza, en cualquier momento que detenga momentáneamente sus dedos para que la regla esté en reposo con relación al suelo, está en equilibrio estático. El equilibrio estático representa una situación común en la práctica de la ingeniería, y los principios que implica son de especial interés para los ingenieros civiles, arquitectos e ingenieros mecánicos. Si es un estudiante de ingeniería, indudablemente tomará un curso avanzado de estática en el futuro cercano. La última sección de este capítulo trata de cómo los objetos se deforman en condiciones de carga. Un objeto elástico vuelve a su forma original cuando se eliminan las fuerzas de deformación. Se definen varias constantes elásticas, cada una correspondiente a un tipo diferente de deformación. En capítulos futuros, veremos ejemplos de objetos rígidos en equilibrio estático: por ejemplo, moléculas polarizadas en un campo eléctrico y una espira de cable que transporta una corriente en un campo magnético.

12.1 Modelo de análisis: Objeto rígido en equilibrio

En el capítulo 5 se explicó el modelo de partícula en equilibrio, en el que una partícula se mueve con velocidad constante porque la fuerza neta que actúa sobre ella es cero. La situación con objetos reales (extendidos) es más compleja, porque dichos objetos con frecuencia no se pueden modelar como partículas. Para que un objeto extendido esté en equilibrio, se debe satisfacer una segunda condición. Esta segunda condición involucra el movimiento rotacional del objeto extendido.

Considere una sola fuerza \vec{F} que actúa sobre un objeto rígido, como se muestra en la figura 12.1. Recuerde que el momento de torsión, asociado con la fuerza \vec{F} , respecto a un eje que pasa a través de O está dado por la ecuación 11.1:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

La magnitud de $\vec{\tau}$ es Fd (véase la ecuación 10.14), donde d es el brazo de momento indicado en la figura 12.1. De acuerdo con la ecuación 10.18, el momento de torsión neto sobre un objeto rígido causa que éste experimente una aceleración angular.

En esta discusión, se investigan aquellas situaciones rotacionales en las cuales la aceleración angular de un objeto rígido es cero. Tal objeto está en **equilibrio rotacional**. Como $\Sigma \tau_{\text{ext}} = I\alpha$ para rotación alrededor de un eje fijo, la condición necesaria para equilibrio rotacional es que el momento de torsión neto respecto a cualquier eje debe ser cero. Ahora se tienen dos condiciones necesarias para el equilibrio de un objeto rígido:

1. La fuerza externa neta sobre el objeto debe ser igual a cero:

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = 0 \quad (12.1)$$

2. El momento de torsión externo neto sobre el objeto alrededor de cualquier eje debe ser cero:

$$\Sigma \vec{\tau}_{\text{ext}} = 0 \quad (12.2)$$

Estas condiciones describen el análisis de modelo de **objeto rígido en equilibrio**. La primera condición es un enunciado del equilibrio traslacional; establece que la aceleración traslacional del centro de masa del objeto debe ser cero cuando se ve desde un marco de referencia inercial. La segunda condición es un enunciado de equilibrio rotacional; afirma que la aceleración angular en torno a cualquier eje debe ser cero. En el caso especial de **equilibrio estático**, que es el tema principal de este capítulo, el objeto en equilibrio está en reposo relativo al observador y por eso carece de rapidez traslacional o angular (es decir, $v_{\text{CM}} = 0$ y $\omega = 0$).

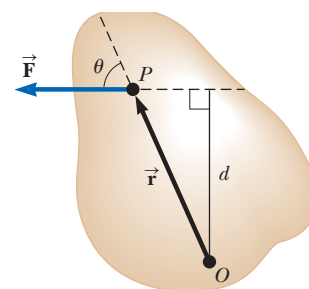


Figura 12.1 Una sola fuerza \vec{F} actúa sobre un objeto rígido en el punto P .

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 12.1

Momento de torsión cero Un momento de torsión neto cero no significa una ausencia de movimiento rotacional. Un objeto que rota con rapidez angular constante puede estar bajo la influencia de un momento de torsión neto nulo. Esta posibilidad es análoga a la situación traslacional: fuerza neta cero no significa una ausencia de movimiento traslacional.

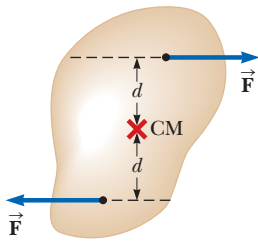


Figura 12.2 (Examen rápido 12.1) Dos fuerzas de igual magnitud se aplican a distancias iguales desde el centro de masa de un objeto rígido.

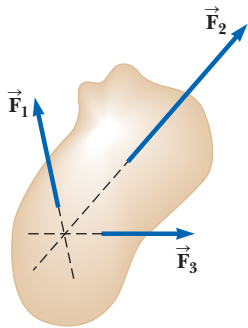


Figura 12.3 (Examen rápido 12.2) Tres fuerzas actúan sobre un objeto. Note que las líneas de acción de las tres fuerzas pasan a través de un punto común.

E XAMEN RÁPIDO 12.1 En la figura 12.2, considere el objeto sometido a dos fuerzas de igual magnitud. Elija el enunciado correcto respecto a esta situación. (a) El objeto está en equilibrio de fuerzas pero no en equilibrio de momento de torsión. (b) El objeto está en equilibrio de momento de torsión pero no en equilibrio de fuerza. (c) El objeto está en equilibrio de fuerza y en equilibrio de momento de torsión. (d) El objeto no está ni en equilibrio de fuerza ni en equilibrio de momento de torsión.

E XAMEN RÁPIDO 12.2 En la figura 12.3, considere el objeto sometido a tres fuerzas. Seleccione el enunciado correcto relativo a esta situación. Elija la afirmación correcta con respecto a esta situación de las opciones (a)-(d) en el examen rápido 12.1.

Las dos expresiones vectoriales dadas por las ecuaciones 12.1 y 12.2 son equivalentes, en general, a seis ecuaciones escalares: tres de la primera condición para equilibrio y tres de la segunda (que corresponden a las componentes x , y y z). Por tanto, en un sistema complejo que involucra varias fuerzas que actúan en diversas direcciones, se podría enfrentar con resolver un conjunto de ecuaciones con muchas incógnitas. Aquí, la discusión se restringe a situaciones donde todas las fuerzas se encuentran en el plano xy . (Se dice que las fuerzas cuyas representaciones vectoriales están en el mismo plano son *coplanares*.) Con esta restricción, sólo debe ocuparse con tres ecuaciones escalares. Dos vienen de equilibrar las fuerzas en las direcciones x y y . La tercera resulta de la ecuación de momento de torsión, a saber, que el momento de torsión neto respecto a un eje perpendicular a través de *cualquier* punto en el plano xy debe ser cero. Este eje perpendicular necesariamente será paralelo al eje z , así que las dos condiciones del modelo de equilibrio del objeto rígido aportan las ecuaciones

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum \tau_z = 0 \quad (12.3)$$

donde la ubicación del eje en la ecuación del momento de torsión es arbitraria.

MODELO DE ANÁLISIS Objeto rígido en equilibrio

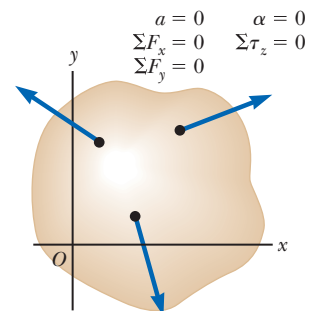
Imagine un objeto que puede rotar, pero que no muestra aceleración traslacional a ni aceleración rotacional α . Tal objeto está en equilibrio traslacional y rotacional, así la fuerza neta y el momento de torsión neto respecto a cualquier eje son iguales a cero:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0 \quad (12.1)$$

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = 0 \quad (12.2)$$

Ejemplos:

- un balcón sobresale de un edificio y debe sostener el peso de varias personas sin colapsar
- en un evento Olímpico, un gimnasta ejecuta la difícil maniobra *cruz de hierro*
- un barco navega con rapidez constante en agua tranquila y mantiene una orientación perfectamente nivelada (capítulo 14)
- en un material dieléctrico, las moléculas polarizadas en un campo eléctrico constante adoptan una orientación de equilibrio promedio que permanece fija en el tiempo (capítulo 25)



12.2 Más acerca del centro de gravedad

Siempre que trate con un objeto rígido, una de las fuerzas que debe considerar es la fuerza gravitacional que actúa sobre él, y debe conocer el punto de aplicación de esta fuerza. Como aprendió en la sección 9.5, asociado con todo objeto hay un punto especial llamado centro de gravedad. La combinación de las diferentes fuerzas gravitacionales que actúan en todos los elementos de masa del objeto es equivalente a una sola fuerza gravitacional que actúa a través de este punto. Por tanto, para calcular el momento de torsión debido a la fuerza gravitacional de un objeto de masa M , sólo se necesita considerar la fuerza $M\vec{g}$ que actúa en el centro de gravedad del objeto.



¿Cómo se encuentra este punto especial? Como se mencionó en la sección 9.5, si supone que \vec{g} es uniforme en el objeto, el centro de gravedad del objeto coincide con su centro de masa. Para ver por qué, considere un objeto con forma arbitraria que se encuentra en el plano xy , como se ilustra en la figura 12.4. Suponga que el objeto se divide en un gran número de partículas de masas m_1, m_2, m_3, \dots que tienen coordenadas $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots$. En la ecuación 9.29 se definió la coordenada x del centro de masa como

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \quad (9.29)$$

Se usa una ecuación similar para definir la coordenada y del centro de masa, al sustituir cada x con su contraparte y .

Ahora se examinará la situación desde otro punto de vista al considerar la fuerza gravitacional que se ejerce sobre cada partícula, como se muestra en la figura 12.5. Cada partícula contribuye con un momento de torsión en torno a un eje a través del origen igual en magnitud al peso mg de la partícula multiplicado por su brazo de momento. Por ejemplo, la magnitud del momento de torsión debida a la fuerza $m_1 \vec{g}_1$ es $m_1 g_1 x_1$, donde g_1 es el valor de la aceleración gravitacional en la posición de la partícula de masa m_1 . Se desea ubicar el centro de gravedad, el punto donde la aplicación de la única fuerza gravitacional $M \vec{g}_{CG}$ (donde $M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots$ es la masa total del objeto y \vec{g}_{CG} es la aceleración debida a la gravedad en la posición del centro de gravedad) tiene el mismo efecto sobre la rotación que el efecto combinado de todas las fuerzas gravitacionales individuales $m_i \vec{g}_i$. Al igualar el momento de torsión resultante de $M \vec{g}_{CG}$ que actúa en el centro de gravedad, con la suma de los momentos de torsión que actúan sobre las partículas individuales, se obtiene

$$(m_1 + m_2 + m_3 + \dots) g_{CG} x_{CG} = m_1 g_1 x_1 + m_2 g_2 x_2 + m_3 g_3 x_3 + \dots$$

Esta expresión revela la posibilidad de que el valor de g pueda en general variar sobre el objeto. Si se supone g uniforme sobre el objeto (como usualmente es el caso), los factores g se cancelan y resulta

$$x_{CG} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \quad (12.4)$$

Al comparar este resultado con la ecuación 9.29, se demuestra que el centro de gravedad se localiza en el centro de masa en tanto \vec{g} sea uniforme sobre todo el objeto. Varios ejemplos en la siguiente sección tratan con objetos homogéneos simétricos. El centro de gravedad para cualquiera de tales objetos coincide con su centro de geométrico.

E XAMEN RÁPIDO 12.3 Una cinta métrica de densidad uniforme cuelga de una cuerda amarrada en la marca de 25 cm. Un objeto de 0.50 kg cuelga del extremo cero de la regla y ésta se equilibra horizontalmente. ¿Cuál es la masa de la cinta métrica?
 (a) 0.25 kg, (b) 0.50 kg, (c) 0.75 kg, (d) 1.0 kg, (e) 2.0 kg, (f) imposible de determinar.

12.3 Ejemplos de objetos rígidos en equilibrio estático

La fotografía del soporte de una botella de vino de la figura 12.6 muestra un ejemplo de un sistema mecánico en equilibrio que parece desafiar a la gravedad. Para que el sistema (soporte más botella) esté en equilibrio, la fuerza externa neta debe ser cero (véase la ecuación 12.1) y el momento de torsión externo neto debe ser cero (véase la ecuación 12.2). La segunda condición se satisface sólo cuando el centro de gravedad del sistema está directamente arriba del punto de soporte.

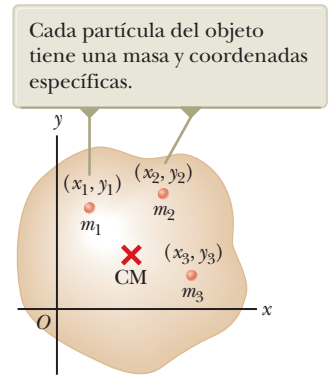


Figura 12.4 Un objeto se puede dividir en muchas pequeñas partículas. Estas partículas se pueden emplear para localizar el centro de masa.

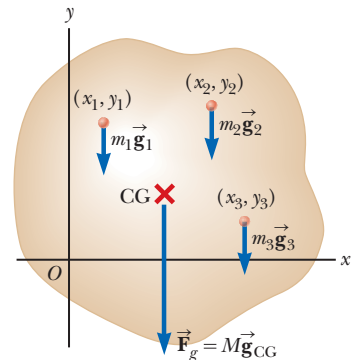


Figura 12.5 Si un objeto se divide en muchas partículas, se puede encontrar su centro de gravedad.

El centro de gravedad del sistema (botella más soporte) está directamente arriba del punto de soporte.

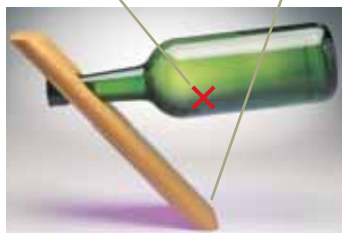


Figura 12.6 Este soporte de una botella de vino es una sorprendente muestra de equilibrio estático.

Charles D. Winters

ESTRATEGIA PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Objeto rígido en equilibrio

Cuando analice un objeto rígido en equilibrio bajo la acción de varias fuerzas externas, utilice el siguiente procedimiento.

- 1. Conceptualizar.** Piense en el objeto que está en equilibrio e identifique todas las fuerzas que actúan sobre él. Imagine qué efecto tendría cada fuerza en la rotación del objeto si fuese la única fuerza en acción.
- 2. Categorizar.** Confirme que el objeto bajo estudio es un objeto rígido en equilibrio. El objeto debe tener sus aceleraciones traslacional y angular iguales a cero.
- 3. Analizar.** Dibuje un diagrama y etiquete todas las fuerzas externas que actúan sobre el objeto. Intente sugerir la dirección correcta para cada fuerza, si ésta no tiene una dirección dada. Al emplear el modelo de partícula bajo una fuerza neta, el objeto sobre el que actúan las fuerzas puede representarse con un punto en un diagrama de cuerpo libre porque no depende en qué parte del objeto se aplican las fuerzas. Sin embargo, al utilizar el modelo de objeto rígido en equilibrio, no se puede emplear un punto para representar al objeto porque en los cálculos ahora sí es importante la ubicación donde actúan las fuerzas. Por tanto, en un diagrama que muestra las fuerzas sobre un objeto, se debe mostrar el objeto real o una versión simplificada de él.

Descomponga todas las fuerzas en componentes rectangulares y elija un sistema coordenado conveniente. Luego aplique la primera condición para el equilibrio, la ecuación 12.1. Recuerde seguir la pista de los signos de las diferentes componentes de las fuerzas.

Elija un eje conveniente para calcular el momento de torsión neto sobre el objeto rígido. Recuerde que la elección del eje para la ecuación del momento de torsión es arbitraria; por tanto, seleccione un eje que simplifique sus cálculos tanto como sea posible. Usualmente, el eje más conveniente para calcular momentos de torsión es el que pasa por un punto sobre la línea de acción de varias fuerzas, así éstas tienen momento de torsión cero respecto a ese eje. Si no conoce o no es necesario conocer una fuerza, entonces con frecuencia es benéfico elegir un eje a través del punto en el que actúa dicha fuerza. Aplique la segunda condición para el equilibrio, ecuación 12.2.

Resuelva las ecuaciones simultáneas para las incógnitas en términos de las cantidades conocidas.

- 4. Finalizar.** Confirme que sus resultados sean consistentes con su diagrama. Si seleccionó una dirección que conduce a un signo negativo en su solución para una fuerza, no se alarme; simplemente significa que la dirección de la fuerza es la opuesta a la que supuso. Sume las fuerzas verticales y horizontales sobre el objeto y confirme que cada conjunto de componentes suma cero. Sume los momentos de torsión sobre el objeto y confirme que la suma es igual a cero.

Ejemplo 12.1 Otra visita al sube y baja

Un sube y baja consiste de un tablón uniforme de masa M y longitud ℓ que sostiene en reposo a un padre y su hija con masas m_f y m_d , respectivamente, como se muestra en la figura 12.7. El soporte (llamado *fulcro*) está bajo el centro de gravedad del tablón, el padre a una distancia d del centro y la hija a una distancia $\ell/2$ del centro.

- (A) Determine la magnitud de la fuerza hacia arriba \vec{n} que ejerce el soporte sobre el tablón.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Concentre su atención en el tablón y considere las fuerzas gravitacionales sobre el padre y la hija como fuerzas aplicadas directamente al tablón. La hija causaría una rotación en sentido de las manecillas del reloj sobre el tablón en torno al soporte, mientras que el padre causaría una rotación contra las manecillas del reloj.

Categorizar Ya que el texto del problema establece que el sistema está en reposo, el tablón se modela como un *objeto rígido en equilibrio*. Sin embargo, debido a que sólo se necesitará la primera condición de equilibrio para resolver esta parte del problema, el tablón se modela como una *partícula en equilibrio*.

Analizar Defina hacia arriba como la dirección y positiva y sustituya las fuerzas sobre el tablón en la ecuación 12.1:

Resuelva para la magnitud de la fuerza \vec{n} :

$$n - m_f g - m_d g - Mg = 0$$

$$(1) \quad n = m_f g + m_d g + Mg = (m_f + m_d + M)g$$

- (B) Determine dónde se debería sentar el padre para equilibrar el sistema en reposo.

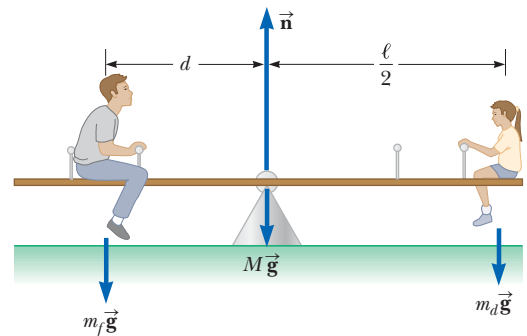


Figura 12.7 (Ejemplo 12.1) Un sistema en equilibrio.



12.1 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar Para el equilibrio del momento de torsión, debemos prestar atención a la ubicación del punto de aplicación de cada fuerza. La hija provocaría una rotación en sentido horario del tablero alrededor del soporte, mientras que el padre provocaría una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Categorizar Esta parte del problema requiere la introducción de momento de torsión para encontrar la posición del padre, así que el tablón se modela como un *objeto rígido en equilibrio*.

Analizar El centro de gravedad del tablón está en su centro geométrico porque se dijo que el tablón es uniforme. Si se elige un eje de rotación perpendicular a la página a través del centro de gravedad del tablón, los momentos de torsión producidos por \vec{n} y la fuerza gravitacional sobre el tablón en torno a este eje son cero.

Sustituya en la ecuación 12.2 expresiones para los momentos de torsión sobre el tablón debidos al padre y la hija:

$$(m_f g)(d) - (m_d g)\frac{l}{2} = 0$$

Resuelva para d :

$$d = \left(\frac{m_d}{m_f}\right)\frac{l}{2}$$

Finalizar Este resultado es el mismo que se obtuvo en el ejemplo 11.6 al evaluar la aceleración angular del sistema y haciendo la aceleración angular igual a cero.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que se elige otro punto por donde pasa el eje de rotación. Por ejemplo, suponga que el eje es perpendicular a la página y pasa a través de la posición del padre. ¿Esto cambia los resultados de las partes (A) y (B)?

Respuesta La parte (A) no se afecta porque el cálculo de la fuerza neta no involucra un eje de rotación. En la parte (B), conceptualmente se esperaría que no hubiera cambio si se elige un eje de rotación diferente, porque la segunda condición de equilibrio afirma que el momento de torsión es cero en torno a *cualquier* eje de rotación.

Compruebe matemáticamente esta respuesta. Recuerde que el signo del momento de torsión asociado con una fuerza es positivo si dicha fuerza tiende a dar vuelta al sistema contra las manecillas del reloj, mientras que el signo del momento de torsión es negativo si la fuerza tiende a dar vuelta al sistema en sentido de las manecillas del reloj. Elija un eje de rotación que pase a través de la posición del padre.

Sustituya en la ecuación 12.2 las expresiones para los momentos de torsión sobre el tablón respecto a este eje:

$$n(d) - (Mg)(d) - (m_d g)\left(d + \frac{l}{2}\right) = 0$$

Sustituya la ecuación (1) de la parte (A) y resuelva para d :

$$(m_f + m_d + M)g(d) - (Mg)(d) - (m_d g)\left(d + \frac{l}{2}\right) = 0$$

$$(m_f g)(d) - (m_d g)\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \quad \text{y} \quad d = \left(\frac{m_d}{m_f}\right)\frac{l}{2}$$

Este resultado está de acuerdo con el obtenido en la parte (B).

Ejemplo 12.2 De pie sobre una viga horizontal

Una viga horizontal uniforme con una longitud $\ell = 8.00$ m y un peso $W_b = 200$ N se une a una pared mediante una junta articulada. Su extremo lejano está sostenido con un cable que forma un ángulo de $\phi = 53.0^\circ$ con la viga (figura 12.8a página 316). Una persona de peso $W_p = 600$ N está de pie a 2.00 m de la pared. Encuentre la tensión en el cable así como la magnitud y dirección de la fuerza que ejerce la pared sobre la viga.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que la persona de la figura 12.8a se mueve hacia afuera sobre la viga. Parece razonable que mientras más avance hacia afuera, mayor será el momento de torsión que aplique sobre el eje y la tensión en el cable debe ser mayor para equilibrar este momento de torsión.

Categorizar Ya que el sistema está en reposo, la viga se clasifica como un *objeto rígido en equilibrio*.

continúa



12.2 continuación

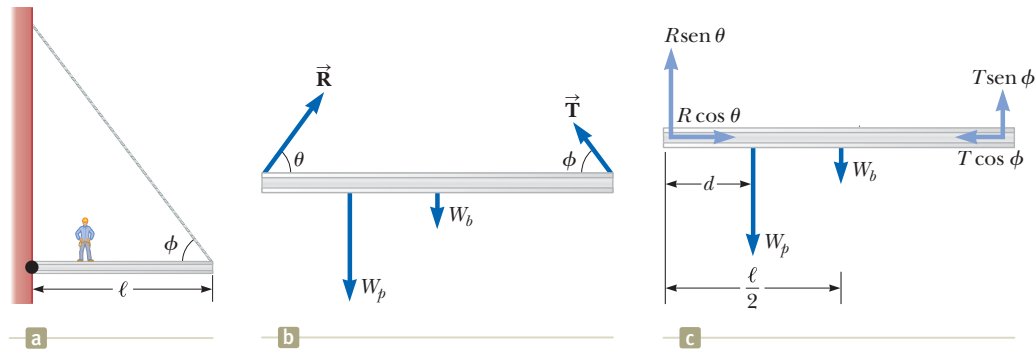


Figura 12.8 (Ejemplo 12.2) (a) Una viga uniforme sostenida por un cable. Una persona camina hacia afuera sobre la viga. (b) Diagrama de cuerpo libre para la viga. (c) Diagrama de cuerpo libre para la viga que muestra las componentes de \vec{R} y \vec{T} .

Analizar Identifique todas las fuerzas externas que actúan sobre la viga: la fuerza gravitacional de 200 N, la fuerza \vec{T} que ejerce el cable, la fuerza \vec{R} que ejerce la pared en el pivote y la fuerza de 600 N que ejerce la persona sobre la viga. Todas estas fuerzas se indican en el diagrama de cuerpo libre para la viga que se muestra en la figura 12.8b. Cuando se asignan direcciones a las fuerzas, a veces es útil imaginar qué sucedería si súbitamente se retira una fuerza. Por ejemplo, si de pronto desapareciera la pared, el extremo izquierdo de la viga se movería a la izquierda mientras comienza a caer. Este escenario dice que la pared no sólo sostiene la viga, sino también presiona hacia afuera contra ella. Por tanto, el vector \vec{R} se dibuja en la dirección que se indica en la figura 12.8b. La figura 12.8c muestra las componentes horizontal y vertical de \vec{T} y \vec{R} .

Aplique la primera condición de equilibrio, sustituya expresiones para las fuerzas sobre la viga en las ecuaciones de las componentes de la ecuación 12.1:

$$(1) \quad \sum F_x = R \cos \theta - T \cos \phi = 0$$

$$(2) \quad \sum F_y = R \sen \theta + T \sen \phi - W_p - W_b = 0$$

donde se eligió hacia la derecha y hacia arriba como las direcciones positivas. Puesto que R , T y θ son incógnitas, no se puede obtener una solución sólo a partir de estas expresiones. (Para resolver las incógnitas, en general el número de ecuaciones simultáneas debe ser igual al número de incógnitas.)

Ahora invoque la condición de equilibrio rotacional. Un eje conveniente a elegir para la ecuación de momento de torsión es el que pasa a través de la junta articulada. La característica que hace a este eje tan conveniente es que tanto la fuerza \vec{R} como la componente horizontal de \vec{T} tienen un brazo de momento cero; en consecuencia, dichas fuerzas no producen momento de torsión en torno a ese eje.

Sustituya expresiones para los momentos de torsión sobre la viga en la ecuación 12.2:

$$\sum \tau_z = (T \sen \phi)(l) - W_p d - W_b \left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

Esta ecuación sólo contiene a T como una incógnita debido a la elección del eje de rotación. Resuelva para T y sustituya valores numéricos:

$$T = \frac{W_p d + W_b(l/2)}{l \sen \phi} = \frac{(600 \text{ N})(2.00 \text{ m}) + (200 \text{ N})(4.00 \text{ m})}{(8.00 \text{ m}) \sen 53.0^\circ} = 313 \text{ N}$$

Reacomode las ecuaciones (1) y (2) y después divida:

$$\frac{R \sen \theta}{R \cos \theta} = \tan \theta = \frac{W_p + W_b - T \sen \phi}{T \cos \phi}$$

Resuelva para θ y sustituya valores numéricos:

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{W_p + W_b - T \sen \phi}{T \cos \phi} \right) \\ &= \tan^{-1} \left[\frac{600 \text{ N} + 200 \text{ N} - (313 \text{ N}) \sen 53.0^\circ}{(313 \text{ N}) \cos 53.0^\circ} \right] = 71.1^\circ \end{aligned}$$

Resuelva la ecuación (1) para R y sustituya valores numéricos:

$$R = \frac{T \cos \phi}{\cos \theta} = \frac{(313 \text{ N}) \cos 53.0^\circ}{\cos 71.1^\circ} = 581 \text{ N}$$

Finalizar El valor positivo para el ángulo θ indica que la estimación de la dirección de \vec{R} fue precisa.

De haber seleccionado algún otro eje para la ecuación de momento de torsión, la solución podría diferir en los detalles, pero las respuestas serían las mismas. Por ejemplo, si hubiese elegido un eje a través del centro de gravedad de la viga, la ecuación del momento de torsión involucraría tanto a T como a R . Sin embargo, esta ecuación, junto con las ecuaciones (1) y (2), todavía se podría resolver para las incógnitas. ¡Inténtelo!

12.2 continuación

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si la persona camina más lejos sobre la viga? ¿Cambia T ? ¿Cambia R ? ¿Cambia θ ?

Respuesta T debe aumentar porque la fuerza gravitacional sobre la persona ejerce un momento de torsión mayor en torno a la junta articulada, que debe contrarrestar un momento de torsión más grande en la dirección opuesta debido a un valor creciente de T . Si T aumenta, la componente vertical de \vec{R}

disminuye para mantener el equilibrio de fuerza en la dirección vertical. Sin embargo, el equilibrio de fuerzas en la dirección horizontal requiere una componente horizontal creciente de \vec{R} para equilibrar la componente horizontal de \vec{T} creciente. Este hecho sugiere que θ se vuelve más pequeño, pero es difícil predecir qué sucede con R . El problema 50 le pide explorar el comportamiento de R .

Ejemplo 12.3 La escalera inclinada

Una escalera uniforme de longitud ℓ descansa contra una pared vertical lisa (figura 12.9a). La masa de la escalera es m y el coeficiente de fricción estática entre la escalera y el suelo es $\mu_s = 0.40$. Encuentre el ángulo mínimo θ_{\min} en el cual la escalera no se resbala.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en cualquier escalera que haya subido. ¿Prefiere una gran fuerza de fricción entre la parte baja de la escalera y la superficie o una pequeña? Si la fuerza de fricción es cero, ¿la escalera quedará levantada? Simule una escalera con una regla que se inclina contra una superficie vertical. ¿La regla se desliza en ciertos ángulos y queda levantada en otros?

Categorizar No es deseable que la escalera se deslice, así que se le modela como un objeto rígido en equilibrio.

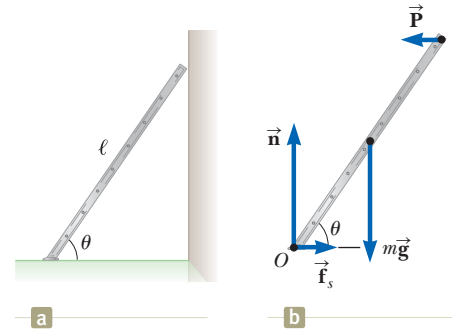


Figura 12.9 (Ejemplo 12.3) (a) Una escalera uniforme en reposo que se apoya contra una pared lisa. El suelo es rugoso. (b) Diagrama de cuerpo libre para la escalera.

Analizar En la figura 12.9b se ilustra el diagrama de cuerpo libre que muestra todas las fuerzas externas que actúan sobre la escalera. La fuerza que el suelo ejerce sobre la escalera es la suma vectorial de una fuerza normal \vec{n} y la fuerza de fricción estática \vec{f}_s . La pared ejerce una fuerza normal \vec{P} sobre lo alto de la escalera, pero ahí no existe fuerza de fricción porque la pared es lisa. Así que la fuerza neta sobre la parte alta de la escalera es perpendicular a la pared y tiene magnitud P .

Aplique a la escalera la primera condición para el equilibrio en las direcciones x y y :

$$(1) \sum F_x = f_s - P = 0$$

$$(2) \sum F_y = n - mg = 0$$

Resuelva la ecuación (1) para P :

$$(3) P = f_s$$

Resuelva la ecuación (2) para n :

$$(4) n = mg$$

Cuando la escalera está a punto de deslizarse, la fuerza de fricción estática debe tener su valor máximo, que se conoce por $f_{s,\max} = \mu_s n$. Combine esta ecuación con las ecuaciones (3) y (4):

$$(5) P_{\max} = f_{s,\max} = \mu_s n = \mu_s mg$$

Aplique a la escalera la segunda condición para el equilibrio, y considere momentos de torsión en torno a un eje perpendicular a la página a través de O :

$$\sum \tau_O = P/\text{sen } \theta - mg \frac{\ell}{2} \cos \theta = 0$$

Resuelva para $\tan \theta$:

$$\frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = \frac{mg}{2P} \rightarrow \theta = \tan^{-1} \left(\frac{mg}{2P} \right)$$

Bajo las condiciones de que la escalera está justo a punto de resbalar, θ es θ_{\min} y P_{\max} está dada por la ecuación (5). Sustituya:

$$\theta_{\min} = \tan^{-1} \left(\frac{mg}{2P_{\max}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{1}{2\mu_s} \right) = \tan^{-1} \left[\frac{1}{2(0.40)} \right] = 51^\circ$$

Finalizar Note que el ángulo sólo depende del coeficiente de fricción, no de la masa o longitud de la escalera.



Ejemplo 12.4 Superar una acera

(A) Estime la magnitud de la fuerza \vec{F} que una persona debe aplicar a la rueda principal de una silla de ruedas para que ruede sobre el borde de una acera (figura 12.10a). Esta rueda principal que entra en contacto con el borde tiene un radio r , y la altura del borde es h .

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en los accesos de los edificios para las sillas de ruedas. Por lo general, existen rampas que se construyen para los individuos en sillas de ruedas. Las estructuras escalonadas como los bordes de las aceras son serias barreras para una silla de ruedas.

Categorizar Imagine que la persona ejerce suficiente fuerza de modo que la parte baja de la rueda principal apenas pierde contacto con la superficie inferior y oscila en reposo. La rueda en esta situación se modela como un *objeto rígido en equilibrio*.

Analizar Por lo general, las manos de la persona proporcionan la fuerza requerida a una rueda ligeramente más pequeña que es concéntrica con la rueda principal. Por simplicidad, suponga que el radio de esta segunda rueda es el mismo que el radio de la rueda principal. Estime una fuerza gravitacional combinada de magnitud $mg = 1\,400\text{ N}$ para la persona y la silla de ruedas, que actúa a lo largo de la línea de acción que pasa por el eje de la rueda principal, y elija un radio de rueda de $r = 30\text{ cm}$. Considere que la altura del borde de la acera es $h = 10\text{ cm}$. Suponga también que la silla de ruedas y el ocupante son simétricos y que cada rueda soporta un peso de 700 N . En tal caso proceda a analizar sólo una de las ruedas principales. La figura 12.10b muestra la geometría para una sola rueda.

Cuando la rueda está a punto de elevarse del pavimento, la fuerza normal que ejerce el suelo sobre la rueda en el punto B tiende a cero. En consecuencia, en este instante sólo actúan tres fuerzas sobre la rueda, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la figura 12.10c. La fuerza \vec{R} , que es la fuerza que ejerce el borde de la acera sobre la rueda, actúa en el punto A , de modo que si se elige tener un eje de rotación perpendicular a la página y pasando a través del punto A , no es necesario incluir \vec{R} en la ecuación de momento de torsión. El brazo de momento de \vec{F} relativo a un eje a través de A es $2r-h$ (véase la figura 12.10c).

Use el triángulo OAC de la figura 12.10b para encontrar el brazo de momento d de la fuerza gravitacional $m\vec{g}$ que actúa sobre la rueda, relativo a un eje a través del punto A :

Aplique a la rueda la segunda condición para el equilibrio, considere momentos de torsión en torno a un eje que pasa a través de A :

Sustituya d de la ecuación (1):

Resuelva para F :

Simplifique:

Sustituya los valores conocidos:

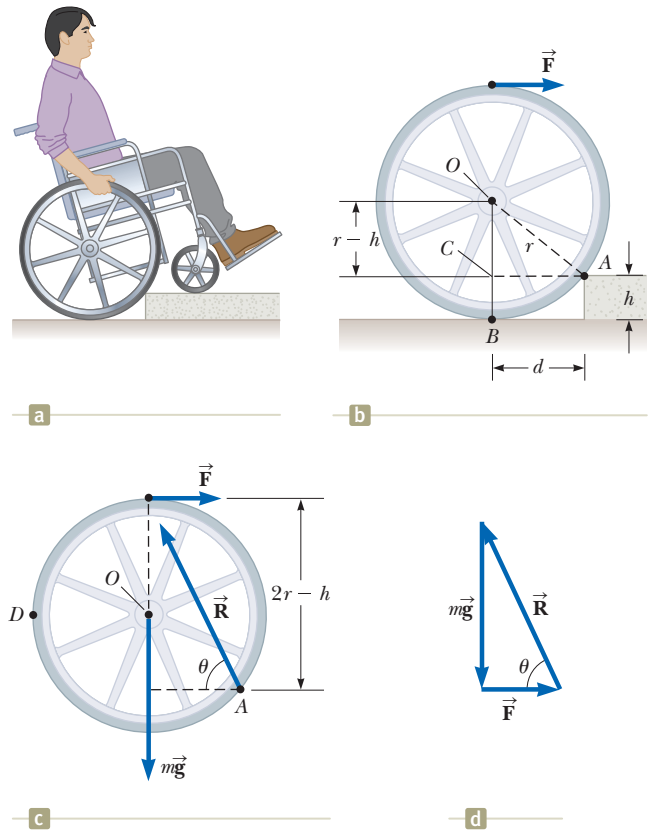


Figura 12.10 (Ejemplo 12.4) (a) Una persona en una silla de ruedas intenta rodar sobre el borde de una acera. (b) Detalles de la rueda y el borde. La persona aplica una fuerza \vec{F} a lo alto de la rueda. (c) Diagrama de cuerpo libre para la rueda cuando está a punto de elevarse. Tres fuerzas actúan sobre la rueda en este instante: \vec{F} que ejerce la mano; \vec{R} que ejerce el borde; y la fuerza gravitacional $m\vec{g}$. (d) La suma vectorial de las tres fuerzas externas que actúan sobre la rueda es cero.

$$(1) \quad d = \sqrt{r^2 - (r-h)^2} = \sqrt{2rh - h^2}$$

$$(2) \quad \sum \tau_A = mgd - F(2r-h) = 0$$

$$mg\sqrt{2rh - h^2} - F(2r-h) = 0$$

$$(3) \quad F = \frac{mg\sqrt{2rh - h^2}}{2r-h}$$

$$F = mg \frac{\sqrt{h}\sqrt{2r-h}}{2r-h} = mg \sqrt{\frac{h}{2r-h}}$$

$$F = (700\text{ N}) \sqrt{\frac{0.1\text{ m}}{2(0.3\text{ m}) - 0.1\text{ m}}}$$

$$= 3 \times 10^2\text{ N}$$

12.4 continuación

(B) Determine la magnitud y dirección de \vec{R}

SOLUCIÓN

Aplique a la rueda la primera condición para el equilibrio en las componentes xy y de las fuerzas:

$$(4) \quad \sum F_x = F - R \cos \theta = 0$$

$$(5) \quad \sum F_y = R \sin \theta - mg = 0$$

Divida la ecuación (5) entre la ecuación (4):

$$\frac{R \sin \theta}{R \cos \theta} = \tan \theta = \frac{mg}{F}$$

Resuelva para el ángulo θ :

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{mg}{F} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{700 \text{ N}}{300 \text{ N}} \right) = 70^\circ$$

Resuelva la ecuación (5) para R y sustituya valores numéricos:

$$R = \frac{mg}{\sin \theta} = \frac{700 \text{ N}}{\sin 70^\circ} = 8 \times 10^2 \text{ N}$$

Finalizar Advierta que sólo se conservó un dígito como significativo. (El ángulo se escribió como 70° , ¡porque 7×10^1 es complicado!) Por ejemplo, supongamos que el centro de masa de la persona en la silla de ruedas estaba directamente sobre el eje de la rueda. Los resultados indican que la fuerza que debe aplicarse a cada rueda es sustancial. Puede estimar la fuerza que se requiere para rodar una silla de ruedas por una típica rampa de acceso en la acera, para comparar.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Sería más fácil superar el borde si la persona sujeta la rueda en el punto D de la figura 12.10c y jala *hacia arriba*?

Respuesta Si la fuerza \vec{F} de la figura 12.10c se gira 90° contra las manecillas del reloj y se aplica en D , su brazo de momento es $d + r$. Llame a la magnitud de esta nueva fuerza F' .

Modifique la ecuación (2) para esta situación:

$$\sum \tau_A = mgd - F'(d + r) = 0$$

Resuelva esta ecuación para F' y sustituya para d :

$$F' = \frac{mgd}{d + r} = \frac{mg\sqrt{2rh - h^2}}{\sqrt{2rh - h^2} + r}$$

Tome la razón de esta fuerza a la fuerza original de la ecuación (3) y exprese el resultado en términos de h/r , la razón de la altura del borde al radio de la rueda:

$$\frac{F'}{F} = \frac{\frac{mg\sqrt{2rh - h^2}}{\sqrt{2rh - h^2} + r}}{\frac{mg\sqrt{2rh - h^2}}{2r - h}} = \frac{2r - h}{\sqrt{2rh - h^2} + r} = \frac{2 - \left(\frac{h}{r}\right)}{\sqrt{2\left(\frac{h}{r}\right) - \left(\frac{h}{r}\right)^2} + 1}$$

Sustituya la razón $h/r = 0.33$ a partir de los valores dados:

$$\frac{F'}{F} = \frac{2 - 0.33}{\sqrt{2(0.33) - (0.33)^2} + 1} = 0.96$$

Este resultado dice que, *para estos valores*, es ligeramente más fácil jalar hacia arriba en D que horizontalmente en lo alto de la rueda. Para bordes muy altos, de modo que h/r es cercano a 1, la razón F'/F cae aproximadamente 0.5 porque el punto A se ubica cerca del borde derecho de la rueda en la figura 12.10b. La fuerza en D se aplica a una distancia aproximada de $2r$ desde A , mientras que la fuerza en lo alto de la rueda tiene un brazo de momento de aproximadamente r . Para bordes, en tal caso, es mejor jalar hacia arriba en D , aunque se requiere un valor grande de la fuerza. Para bordes pequeños, es mejor aplicar la fuerza en lo alto de la rueda. La razón F'/F se hace cada vez más grande que 1 alrededor de $h/r = 0.3$ porque el punto A ahora está cerca de la parte baja de la rueda y la fuerza que se aplica a lo alto de la rueda tiene un brazo de momento más grande que cuando se aplicó en D .

Por último, se comenta acerca de la validez de estos resultados matemáticos. Considere la figura 12.10d e imagine que el vector \vec{F} está hacia arriba en lugar de hacia la derecha. No hay forma de que los tres vectores sumen cero, como requiere la primera condición de equilibrio. Por tanto, los resultados anteriores pueden ser cualitativamente válidos, pero no cuantitativamente exactos. Para cancelar la componente horizontal de \vec{R} , la fuerza en D se debe aplicar a un ángulo con la vertical en lugar de recto hacia arriba. Esta característica hace que el cálculo sea más complicado y requiere ambas condiciones de equilibrio.

12.4 Propiedades elásticas de los sólidos

Excepto por la explicación respecto a los resortes en capítulos anteriores, se ha supuesto que los objetos permanecen rígidos cuando fuerzas externas actúan sobre ellos. En la sección 9.8 se exploraron sistemas deformables. En realidad, todos los objetos son deformables en cierta medida. Es decir, es posible cambiar la forma o el tamaño (o ambos) de



un objeto al aplicar fuerzas externas. Sin embargo, conforme se presentan estos cambios, las fuerzas internas en el objeto resisten la deformación.

Se analizará la deformación de los sólidos en términos de los conceptos de *esfuerzo* y *deformación*. **Esfuerzo** es una cantidad que es proporcional a la fuerza que causa una deformación; más en específico, esfuerzo es la fuerza externa que actúa sobre un objeto por unidad de área de sección transversal. El resultado de un esfuerzo es una **deformación**, que es una medida del grado de deformación. Se encuentra que, para esfuerzos suficientemente pequeños, el esfuerzo es proporcional a la deformación; la constante de proporcionalidad depende del material que se deforma y de la naturaleza de la deformación. A esta constante de proporcionalidad se le llama **módulo elástico**. Por tanto, el módulo elástico se define como la razón del esfuerzo a la deformación resultante:

$$\text{Módulo elástico} \equiv \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}} \quad (12.5)$$

En general, el módulo elástico conecta lo que se hace a un objeto sólido (se aplica una fuerza) con la manera en que el objeto responde (se deforma en cierta medida). Es similar a la constante de resorte k en la ley de Hooke (ecuación 7.9) que relaciona una fuerza aplicada a un resorte y a la deformación resultante del resorte, medida por su elongación o compresión.

Se consideran tres tipos de deformación y se define un módulo elástico para cada uno:

1. El **módulo de Young** mide la resistencia de un sólido a cambiar su longitud.
2. El **módulo de corte** mide la resistencia al movimiento de los planos paralelos entre sí dentro de un sólido.
3. El **módulo volumétrico** mide la resistencia de los sólidos o líquidos a cambios en su volumen.

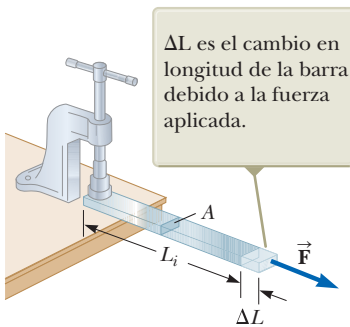


Figura 12.11 Una fuerza \vec{F} se aplica en el extremo libre de una barra sujeta en el otro extremo.

Módulo de Young: elasticidad en longitud

Considere una barra larga con área de sección transversal A y longitud inicial L_i que se sujeta con una pinza en un extremo, como en la figura 12.11. Cuando se aplica una fuerza externa perpendicular a la sección transversal, fuerzas moleculares internas en la barra resisten la distorsión (“estiramiento”), pero la barra llega a una situación de equilibrio donde su longitud final L_f es mayor que L_i y en la cual la fuerza externa se equilibra exactamente mediante fuerzas internas. En tal situación, se dice que la barra está sobrecargada. El **esfuerzo de tracción** se define como la razón de la magnitud de la fuerza externa F al área de sección transversal A , donde la sección transversal es perpendicular al vector fuerza. La **deformación por tracción** en este caso se define como la razón del cambio en longitud ΔL a la longitud original L_i . El **módulo de Young** se define mediante una combinación de estas dos razones:

$$Y \equiv \frac{\text{esfuerzo de tracción}}{\text{deformación por tracción}} = \frac{F/A}{\Delta L/L_i} \quad (12.6)$$

El módulo de Young típicamente se emplea para caracterizar una barra o alambre sobrecargado bajo tensión o compresión. Ya que la deformación es una cantidad adimensional, Y tiene unidades de fuerza por unidad de área. En la tabla 12.1, se proporcionan valores característicos.

Tabla 12.1 Valores típicos para módulos elásticos

Sustancia	Módulo de Young (N/m ²)	Módulo de corte (N/m ²)	Módulo volumétrico (N/m ²)
Tungsteno	35×10^{10}	14×10^{10}	20×10^{10}
Acero	20×10^{10}	8.4×10^{10}	6×10^{10}
Cobre	11×10^{10}	4.2×10^{10}	14×10^{10}
Latón	9.1×10^{10}	3.5×10^{10}	6.1×10^{10}
Aluminio	7.0×10^{10}	2.5×10^{10}	7.0×10^{10}
Vidrio	$6.5\text{--}7.8 \times 10^{10}$	$2.6\text{--}3.2 \times 10^{10}$	$5.0\text{--}5.5 \times 10^{10}$
Cuarzo	5.6×10^{10}	2.6×10^{10}	2.7×10^{10}
Agua	—	—	0.21×10^{10}
Mercurio	—	—	2.8×10^{10}

Módulo de Young ►



Para esfuerzos relativamente pequeños, la barra regresa a su longitud inicial cuando se retira la fuerza. El **límite elástico** de una sustancia se define como el esfuerzo máximo que se puede aplicar a la sustancia antes de quedar permanentemente deformada sin regresar a su longitud inicial. Es posible exceder el límite elástico de una sustancia al aplicar un esfuerzo demasiado grande, como se ve en la figura 12.12. Al inicio, una curva esfuerzo contra deformación es una línea recta. Sin embargo, conforme aumenta el esfuerzo, la curva ya no es una línea recta. Cuando el esfuerzo supera el límite elástico, el objeto se distorsiona permanentemente y no regresa a su forma original después de retirar el esfuerzo. A medida que el esfuerzo aumenta aún más, el material finalmente se rompe.

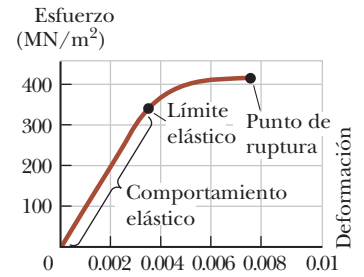


Figura 12.12 Curva esfuerzo contra deformación para un sólido elástico.

Módulo de corte: elasticidad de forma

Otro tipo de deformación se presenta cuando un objeto se somete a una fuerza paralela a una de sus caras mientras la cara opuesta se mantiene fija mediante otra fuerza (figura 12.13a). En este caso, el esfuerzo se llama *esfuerzo de corte*. Si originalmente el objeto es un bloque rectangular, un esfuerzo de corte resulta en una forma cuya sección transversal es un paralelogramo. Un libro que se empuja de costado, como se muestra en la figura 12.13b, es un ejemplo de un objeto sometido a un esfuerzo de corte. En una primera aproximación (para distorsiones pequeñas), con esta deformación no se presentan cambios en el volumen.

El **esfuerzo de corte** se define como F/A , la razón de la fuerza tangencial al área A de la cara a cortar. La **deformación de corte** se define como la razón $\Delta x/h$, donde Δx es la distancia horizontal que se mueve la cara cortada y h es la altura del objeto. En términos de estas cantidades, el **módulo de corte** es

$$S \equiv \frac{\text{esfuerzo de corte}}{\text{deformación de corte}} = \frac{F/A}{\Delta x/h} \quad (12.7)$$

◀ Módulo de corte

En la tabla 12.1 se proporcionan valores de módulos de corte para algunos materiales representativos. Al igual que el módulo de Young, la unidad del módulo de corte es la razón de la de fuerza a la de área.

Módulo volumétrico: elasticidad del volumen

El módulo volumétrico caracteriza la respuesta de un objeto a cambios en una fuerza de magnitud uniforme aplicada perpendicularmente sobre toda la superficie del objeto, como se muestra en la figura 12.14. (Aquí se supone que el objeto está hecho de una sola sustancia.) Como se verá en el capítulo 14, tal distribución uniforme de fuerzas se presenta cuando un cuerpo está inmerso en un fluido. Un objeto sujeto a este tipo de deformación experimenta un cambio en volumen pero no un cambio en forma. El **esfuerzo volumétrico** se define como la razón de la magnitud de la fuerza total F ejercida sobre una superficie al área A de la superficie. La cantidad $P = F/A$ se llama **presión**, que se estudiará con más detalle en el capítulo 14. Si la presión sobre un objeto cambia en una cantidad $\Delta P = \Delta F/A$, el objeto experimenta un cambio de volumen ΔV . La **deformación volumétrica** es igual al cambio en volumen ΔV dividido entre el volumen inicial V_i . Por tanto, de la

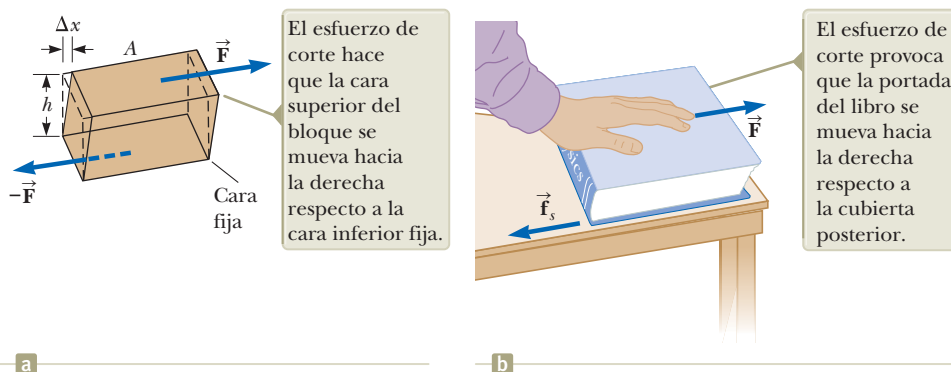


Figura 12.13 (a) Una deformación de corte en la que un bloque rectangular se distorsiona mediante dos fuerzas de igual magnitud pero direcciones opuestas aplicadas a dos caras paralelas. (b) Un libro está bajo esfuerzo de corte cuando una mano que se coloca en la portada aplica una fuerza horizontal que se aleja del lomo.

ecuación 12.5, una compresión volumétrica puede caracterizarse en términos del **módulo volumétrico**, que se define como

$$B \equiv \frac{\text{esfuerzo volumétrico}}{\text{deformación volumétrica}} = -\frac{\Delta F/A}{\Delta V/V_i} = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V_i} \quad (12.8)$$

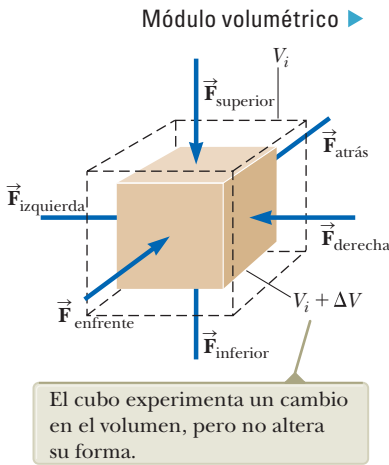


Figura 12.14 Un cubo está bajo presión uniforme y por tanto se comprime en todos sus lados mediante fuerzas normales a sus seis caras. El cubo oculta las puntas de flecha de los vectores fuerza sobre los lados no visibles.

En esta ecuación se inserta un signo menos de modo que B sea un número positivo. Esta maniobra es necesaria porque un aumento en presión (ΔP positivo) causa una disminución en volumen (ΔV negativo) y viceversa.

La tabla 12.1 menciona módulos volumétricos para algunos materiales. Si busca tales valores en una fuente distinta, puede encontrar que se menciona el recíproco del módulo volumétrico. El recíproco del módulo volumétrico se llama **compresibilidad** del material.

Observe de la tabla 12.1 que tanto sólidos como líquidos tienen un módulo volumétrico. Sin embargo, no se proporcionan módulos de corte ni módulos de Young para líquidos, porque un líquido no soporta un esfuerzo de corte o un esfuerzo de tracción. Si una fuerza cortante o una fuerza de tracción se aplican a un líquido, el líquido simplemente fluye como respuesta.

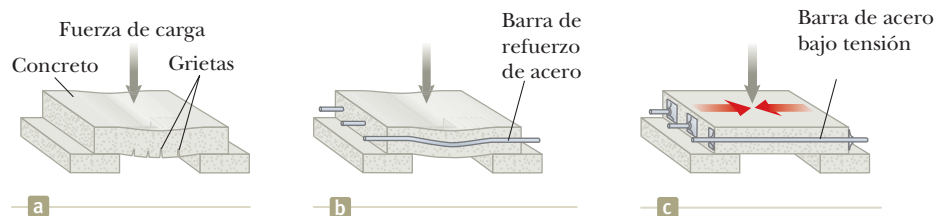
- E XAMEN RÁPIDO 12.4** Para las tres partes de este examen rápido, elija de las siguientes opciones la respuesta correcta para el módulo elástico que describa la correspondencia entre esfuerzo y deformación para el sistema de interés, que está en *itálicas*: (a) módulo de Young, (b) módulo de corte, (c) módulo volumétrico, (d) ninguna de estas opciones.
- (i) Un *bloque de hierro* se desliza a través de un suelo horizontal. La fuerza de fricción entre el bloque y el suelo hace que el bloque se deforme.
 - (ii) Un artista del trapecio se balancea a través de un arco circular. En la parte baja de la oscilación, los *alambres* que sostienen al trapecista son más largos que cuando el trapecista simplemente cuelga del trapecio debido a la tensión aumentada en ellos.
 - (iii) Una nave espacial lleva una *esfera de acero* a un planeta en el que la presión atmosférica es mucho mayor que en la Tierra. La mayor presión hace que el radio de la esfera disminuya.

Concreto pretensado

Si el esfuerzo sobre un objeto sólido supera cierto valor, el objeto se fractura. El máximo esfuerzo que puede aplicarse antes de ocurrir la fractura, llamado *resistencia a la tracción*, *resistencia a la compresión* o *resistencia al corte*, depende de la naturaleza del material y del tipo de esfuerzo aplicado. Por ejemplo, el concreto tiene una resistencia a la tracción de aproximadamente $2 \times 10^6 \text{ N/m}^2$, una resistencia a la compresión de $20 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ y una resistencia al corte de $2 \times 10^6 \text{ N/m}^2$. Si el esfuerzo aplicado supera estos valores, el concreto se fractura. Es práctica común usar grandes factores de seguridad para evitar la fractura en las estructuras de concreto.

Por lo general, el concreto es muy quebradizo cuando se moldea en secciones delgadas. Por tanto, las losas de concreto tienden a pandearse y romperse en áreas sin soporte, como se muestra en la figura 12.15a. La losa se puede reforzar con el empleo de barras de acero, como se ilustra en la figura 12.15b. Ya que el concreto es mucho más fuerte bajo compresión (comprimir) que bajo tensión (estiramiento) o corte, columnas verticales de concreto soportan cargas muy pesadas, mientras que las vigas horizontales de concreto tienden a pandearse y romperse. Sin embargo, se logra un aumento significativo en la resistencia al

Figura 12.15 (a) Una losa de concreto sin refuerzo tiende a romperse bajo una carga pesada. (b) La resistencia del concreto aumenta con el uso de barras de refuerzo de acero. (c) El concreto se fortalece aún más si se le pretensa con barras de acero bajo tensión.



corte si el concreto reforzado se pretensa, como se muestra en la figura 12.15c. Conforme se vierte el concreto, las barras de acero se mantienen bajo tensión mediante fuerzas externas. Las fuerzas externas se liberan después de que el concreto se cura; el resultado es una tensión permanente en el acero y, por tanto, un esfuerzo de compresión en el concreto. La losa de concreto ahora puede soportar una carga mucho más pesada.

Ejemplo 12.5 Diseño de escenario

En el ejemplo 8.3 se analizó un cable utilizado para sostener a un actor que se balanceaba hacia el escenario. Suponga ahora que la tensión en el cable es 940 N cuando el actor alcanza el punto más bajo. ¿Qué diámetro debe tener un cable de acero de 10 m de largo si se desea que no se estire más de 0.50 cm bajo estas condiciones?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Vea de nuevo el ejemplo 8.3 para recordar lo que sucede en esta situación. Ahí se ignoró cualquier elongación del cable, pero en este ejemplo se quiere abordar dicho fenómeno.

Categorizar Se realiza un simple cálculo que involucra la ecuación 12.6, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Resuelva la ecuación 12.6 para el área de la sección transversal del cable:

$$A = \frac{FL_i}{Y\Delta L}$$

Suponga que la sección transversal es circular, utilice $d = 2r$ y $A = \pi r^2$ para encontrar el diámetro del cable:

$$d = 2r = 2\sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{FL_i}{\pi Y\Delta L}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$d = 2\sqrt{\frac{(940 \text{ N})(10 \text{ m})}{\pi(20 \times 10^{10} \text{ N/m}^2)(0.0050 \text{ m})}} = 3.5 \times 10^{-3} \text{ m} = 3.5 \text{ mm}$$

Para lograr un gran margen de seguridad, probablemente usaría un cable flexible elaborado de muchos alambres más pequeños que tengan un área de sección transversal sustancialmente mayor que el valor calculado.

Ejemplo 12.6 Compresión de una esfera de latón

Una esfera de latón sólida inicialmente está rodeada de aire, y la presión del aire que se ejerce sobre ella es $1.0 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ (presión atmosférica normal). La esfera se sumerge en el océano a una profundidad donde la presión es $2.0 \times 10^7 \text{ N/m}^2$. El volumen de la esfera en el aire es 0.50 m^3 . ¿Por cuánto cambia el volumen una vez que la esfera se sumerge?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en las películas o programas de televisión que ha visto acerca de buzos que penetran a mayores profundidades en el agua en contenedores sumergibles. Dichos contenedores deben ser muy fuertes para soportar la gran presión bajo el agua. Esta presión comprime al contenedor y reduce su volumen.

Categorizar Se realiza un simple cálculo que involucra la ecuación 12.8, así que este ejemplo se clasifique como un problema de sustitución.

Resuelva la ecuación 12.8 para el cambio de volumen de la esfera:

$$\Delta V = -\frac{V_i \Delta P}{B}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\begin{aligned} \Delta V &= -\frac{(0.50 \text{ m}^3)(2.0 \times 10^7 \text{ N/m}^2 - 1.0 \times 10^5 \text{ N/m}^2)}{6.1 \times 10^{10} \text{ N/m}^2} \\ &= -1.6 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

El signo negativo indica que el volumen de la esfera disminuye.



Resumen

Definiciones

Se puede considerar que la fuerza gravitacional ejercida sobre un objeto actúa en un solo punto llamado **centro de gravedad**. El centro de gravedad de un objeto coincide con su centro de masa si el objeto está en un campo gravitacional uniforme.

Las propiedades elásticas de una sustancia se pueden describir con el uso de los conceptos de esfuerzo y deformación. El **esfuerzo** es una cantidad proporcional a la fuerza que produce una deformación; la **deformación** es una medida del grado de cambio de forma. El esfuerzo es proporcional a la deformación, y la constante de proporcionalidad es el **módulo elástico**:

$$\text{módulo elástico} \equiv \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}} \quad (12.5)$$

Conceptos y principios

Tres tipos comunes de deformación se representan mediante (1) la resistencia de un sólido a elongación bajo una carga, que se caracteriza por el **módulo de Young** Y ; (2) la resistencia de un sólido al movimiento de planos internos que se deslizan uno sobre otro, que se caracteriza por el **módulo de corte** S ; y (3) la resistencia de un sólido o un fluido a un cambio de volumen, que se caracteriza por el **módulo volumétrico** B .

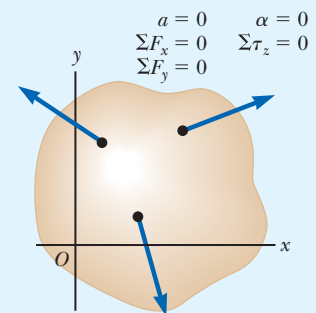
Modelo de análisis para resolver problemas

Objeto rígido en equilibrio. Un objeto rígido en equilibrio no muestra aceleración traslacional o angular. La fuerza externa neta que actúa sobre él es cero, y el momento de torsión externo neto sobre él es cero en torno a cualquier eje:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0$$

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = 0$$

La primera condición es para el equilibrio traslacional, y la segunda es la condición para equilibrio rotacional.



Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN** From Cengage.

- Un padre y su hijo están pintando una pared. Para llegar a las partes más altas de ésta, colocan un tablón de madera de 20.0 kg, 3.50 m de largo y de consistencia uniforme, en dos caballetes. Un caballete se coloca a 1.00 m de cada extremo de la tabla. El hijo tiene una masa de 50.0 kg. Él y su padre, con una masa de 85.0 kg, suben y se paran en la tabla. Discuta en su grupo y responda a lo siguiente. (a) El padre está parado en el tablón, directamente sobre uno de los caballetes. ¿Puede el hijo moverse a cualquier posición que desee sobre el tablón sin que este se incline? (b) Después de conocer las posibilidades de inflexión en el inciso (a), el padre y el hijo deciden usar un tablón más macizo. ¿Cuál debe ser la masa del tablón para que tanto el padre como el hijo puedan moverse libremente a cualquier lugar del tablón que deseen? (c) Encuentran un tablón de la masa hallada en el inciso (b) y la prueban colocándose juntos en el extremo derecho. ¿Estarán a salvo de ladearse si se paran juntos en el extremo izquierdo? (d) Después de usar el tablón de la masa requerida determinada en el inciso (b) y al cansarse de moverlo a nue-

vas posiciones a lo largo de la pared, el padre y el hijo deciden dejarlo a un lado y continuar usando el tablón de 20.0 kg, mientras tienen cuidado de mantenerse separados sobre el tablón. Pero el uso del tablón macizo en el inciso (b) ha dañado uno de los caballetes, de modo que solo puede soportar una fuerza de 1.75×10^3 N. Cuando el padre y el hijo regresan al tablón de 20 kg y se desplazan, ¿harán que el caballete dañado colapse?

- ACTIVIDAD** Si un objeto se coloca sobre una mesa de modo que parte de él se extiende fuera del borde de la mesa, el centro de masa del objeto debe estar sobre una parte de la superficie de la mesa para evitar que el objeto caiga. Si el centro de masa está más allá del borde de la mesa, la fuerza gravitacional ejercerá un momento de torsión sobre el objeto y lo levantará de la mesa. Reúna cuatro reglas juntas. (a) Determine la forma en que puede apilar las cuatro reglas de manera que (1) las cuatro reglas sean paralelas; (2) cada regla superior está más alejada del borde de la mesa que la que está debajo, y (3) la regla más alta no tiene parte de su longitud sobre la superficie de la mesa. *Sugerencia:* comience desde la parte superior; ponga la regla más alta sobre la segunda para que la superior no se incline. Luego coloque la pila de dos sobre

la tercera regla para que las dos superiores no vuelquen, y así sucesivamente. (b) Después de construir con éxito la pila apropiada, calcule la posición de la masa central de la pila y demuestre que está sobre la superficie de la mesa, no sobre el aire más allá del borde de la mesa. (c) **¿Qué pasaría si** girara la regla superior 90° alrededor de un eje vertical para que quede sobre el extremo de la tercera regla, perpendicular a las otras tres reglas? ¿El sistema aún estaría en equilibrio? (d) Ahora apile las reglas de la siguiente manera con los extremos cero de las reglas a la derecha en el diagrama en la parte superior de la siguiente columna:



Los extremos derechos de las dos reglas en la esquina superior izquierda están arriba de la marca de 50 cm de la regla inferior. Coloque el sistema de reglas sobre una mesa y muévalo fuera del borde hacia la derecha hasta que un pequeño movimiento adicional hacia afuera haga que vuelvan en el sentido de las agujas del reloj fuera de la mesa. ¿Qué lectura en la regla inferior coincide con el borde de la tabla?

Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a WEBASSIGN From Cengage

SECCIÓN 12.1 Análisis de modelo: Objeto rígido en equilibrio

1. Está construyendo espacio de almacenamiento adicional en su cochera. Usted decide colgar una hoja de madera contrachapada de 10.0 kg de dimensiones de 0.600 m de ancho por 2.25 m de largo desde el techo. La madera se mantendrá en una orientación horizontal mediante cuatro cadenas verticales ligeras unidas a la madera en sus esquinas y montada en el techo. Después de completar el trabajo de suspender la madera del techo, elige tres cajas cúbicas para colocar en el estante. Cada caja tiene 0.750 m de lado. La caja 1 tiene una masa de 50.0 kg, la caja 2 tiene una masa de 100 kg y la caja 3 tiene una masa de 125 kg. La masa de cada caja está uniformemente distribuida dentro de la caja y cada caja está centrada en el ancho de adelante hacia atrás del estante. Sin que lo sepa, una de las cadenas en el extremo derecho de su estante está defectuosa y se romperá si la somete a una fuerza superior a 700 N. Hay seis arreglos posibles de las tres cajas en el estante, por ejemplo, de izquierda a derecha, caja 1, caja 2, caja 3 y caja 1, 2 y cuatro más. **¿Qué disposiciones son seguras** (es decir, la cadena defectuosa no se romperá si las cajas están dispuestas de esta manera) y qué disposiciones son peligrosas?

2. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Una viga uniforme de masa $m_b = 3.00$ kg y longitud $\ell = 1.00$ m sostiene bloques con masas $m_1 = 5.00$ kg y $m_2 = 15.0$ kg en dos posiciones, como se muestra en la figura P12.2. La viga descansa sobre dos bloques triangulares, con el punto P a una distancia $d = 0.300$ m a la derecha del centro de gravedad de la viga. La posición del objeto de masa m_2 se ajusta a lo largo de la viga hasta que la fuerza normal sobre ésta en O sea cero.

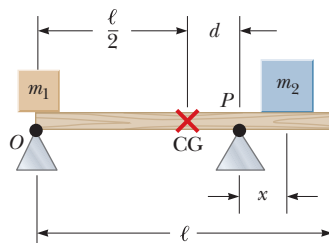


Figura P12.2

SECCIÓN 12.2 Más acerca del centro de gravedad

Los problemas 24 y 26 en el capítulo 9 también pueden asignarse con esta sección.

3. La escuadra de un carpintero tiene la forma de una L, como se muestra en la figura P12.3. Ubique su centro de gravedad.

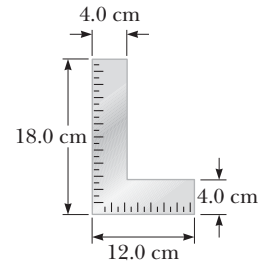


Figura P12.3

4. A una pizza circular de radio R se le quita un trozo circular de radio $R/2$, como se muestra en la figura P12.4. El centro de gravedad se movió de C a C' a lo largo del eje x . Demuestre que la distancia de C a C' es $R/6$. Suponga que el grosor y la densidad de la pizza son uniformes en todas sus partes.

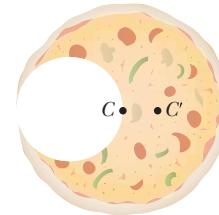


Figura P12.4

5. Su hermano está abriendo una tienda de patinetas. Él ha creado un letrero para su tienda hecho de un material uniforme y en la forma que se muestra en la figura P12.5. La forma del letrero representa una de las colinas en el parque de patinetas que planea construir en un terreno adyacente a la tienda. La curva en la parte superior del signo se describe mediante la función $y = (x - 3)^2 / 9$. Cuando el letrero llega a su tienda, su hermano quiere colgarlo de un solo cable fuera de la tienda. Pero no sabe en qué parte del letrero colocar el cable, de modo que el borde inferior de este se cuelgue en una orientación horizontal. Él pide su ayuda.

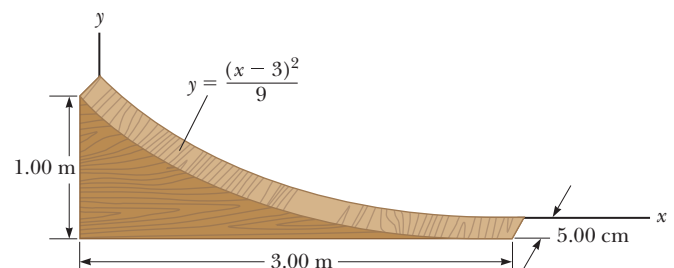


Figura P12.5

SECCIÓN 12.3 Ejemplos de objetos rígidos en equilibrio estático

Los problemas 14, 16, 18, 19, 34, 45 y 52 en el capítulo 5 también pueden asignarse con esta sección.

6. Una barra uniforme de longitud 7.60 m y peso 4.50×10^2 N es transportada por dos trabajadores, Sam y Joe, como se muestra en la figura P12.6. Determine la fuerza que cada persona ejerce sobre la barra.

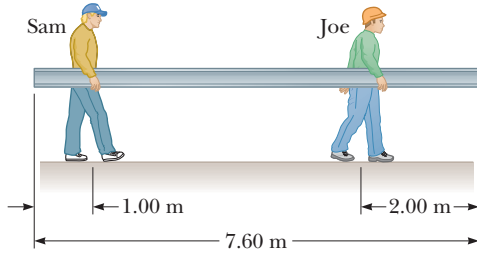


Figura P12.6

7. Encuentre la masa m del contrapeso necesario para equilibrar un camión de masa $M = 1\,500$ kg sobre un plano inclinado de $\theta = 45^\circ$ (figura P12.7). Suponga que ninguna polea tiene fricción ni masa.

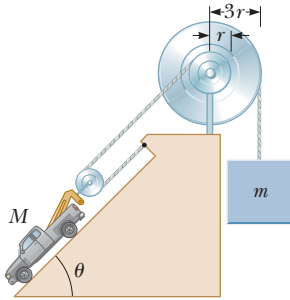


Figura P12.7

8. En la figura P12.8, se muestra una viga de longitud L y masa m inclinada un ángulo θ con la horizontal. Su extremo superior está unido a una pared mediante una cuerda, y su extremo inferior descansa sobre una superficie horizontal rugosa. El coeficiente de fricción estática entre la viga y la superficie es μ_s . Suponga que el ángulo θ es tal que la fuerza estática alcanza su valor máximo.

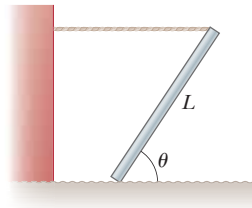


Figura P12.8

- (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la viga. (b) Utilice la condición de equilibrio rotacional para obtener una expresión para la tensión T en la cuerda en términos de m , g y θ . (c) Con la condición de equilibrio traslacional, encuentre una segunda expresión para T en términos de μ_s , m y g . (d) Empleando los resultados de los incisos (a), (b) y (c) obtenga una expresión para μ_s que sólo involucre el ángulo θ . (e) ¿Qué ocurre si la escalera es levantada y su base se coloca nuevamente sobre el suelo pero desplazada ligeramente hacia la izquierda de su posición en la figura P12.8? Explique.

9. Una cadena flexible que pesa 40.0 N cuelga entre dos ganchos ubicados a la misma altura (figura P12.9). En cada gancho, la tangente a la cadena forma un ángulo $\theta = 42.0^\circ$ con la horizontal. Encuentre (a) la magnitud de la fuerza que ejerce cada gancho sobre la cadena y (b) la tensión en la cadena en su

punto medio. *Sugerencia:* para el inciso (b), haga un diagrama de fuerza para la mitad de la cadena.

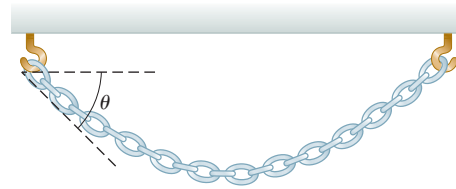


Figura P12.9

10. Un reflector de 20.0 kg en un parque está sostenido al final de una viga horizontal de masa despreciable que está articulada a un poste, como se muestra en la figura P12.10. Un cable a un ángulo de $\theta = 30.0^\circ$ con la viga ayuda a sostenerlo. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la viga. Calcule los momentos de torsión en torno a un eje en la bisagra en su extremo izquierdo, y después encuentre (b) la tensión en el cable, (c) la componente horizontal de la fuerza que ejerce el poste sobre la viga y (d) la componente vertical de esta fuerza. Ahora resuelva el mismo problema a partir del diagrama de cuerpo libre del inciso (a), calcule los momentos de torsión alrededor de la unión entre el cable y la viga en el extremo derecho de ésta. Obtenga (e) la componente vertical de la fuerza que ejerce el poste sobre la viga, (f) la tensión en el cable y (g) la componente horizontal de la fuerza que ejerce el poste sobre la viga. (h) Compare la solución a los incisos (b), (c) y (d) con la solución a los incisos (e) (f) y (g). ¿Alguna solución es más precisa?

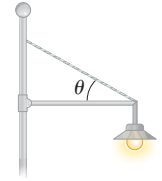


Figura P12.10

11. El Caballero Distráido se pone su armadura y sale del castillo en su noble corcel (figura P12.11). Usualmente, el puente elevadizo se baja a una posición horizontal de manera que el extremo del puente descansa sobre la repisa de piedra. Por desgracia, su escudero bajó demasiado el puente elevadizo y se detuvo a 20° bajo la horizontal. Distráido y su caballo se detienen cuando su centro de masa combinado es $d = 1.00$ m del extremo del puente. El puente uniforme mide $\ell = 8.00$ m y tiene una masa de 2 000 kg. El cable de elevación está unido al puente a 5.00 m de la bisagra en el lado del castillo y a un punto en la pared del castillo $h = 12.0$ m arriba del puente. La masa combinada de Distráido con su armadura y su corcel es 1 000 kg. Determine (a) la tensión en el cable, y las componentes de fuerza (b) horizontal y (c) vertical que actúan sobre el puente en la bisagra.

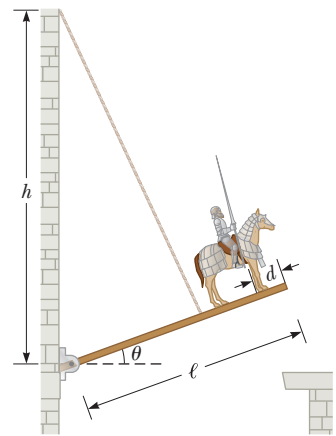


Figura P12.11 Problemas 11 y 12.

12. **Problema de repaso.** Mientras Distráido decide su próximo movimiento en la situación descrita en el problema 11 e ilustrada en la figura P12.11, ¡el enemigo ataca! Un proyectil destruye la repisa de piedra, así que el extremo del puente elevadizo puede bajarse aún más de donde usualmente descansaba. Además, ¡un fragmento del proyectil rompe el cable de elevación! La bisagra entre la pared del castillo y el puente carece

de fricción, y el puente se balancea libremente hasta que está en posición vertical pegado a la pared del castillo bajo la entrada a éste. (a) ¿Qué tanto estuvo en contacto Distráido con el puente mientras éste caía? (b) Encuentre la aceleración angular del puente justo cuando comienza a moverse. (c) Determine la rapidez angular del puente cuando golpea la pared abajo de la bisagra. Obtenga la fuerza que ejerce la bisagra sobre el puente (d) inmediatamente después de que el cable se rompe y (e) inmediatamente antes de golpear la pared del castillo.

- 13.** La figura P12.13 muestra un martillo de oreja que se utiliza para quitar un clavo de una tabla horizontal. La masa del martillo es 1.00 kg. Se ejerce una fuerza de 150 N horizontalmente como se muestra, y el clavo no se mueve respecto a la tabla. Encuentre (a) la fuerza que la oreja del martillo ejerce sobre el clavo y (b) la fuerza ejercida por la superficie sobre el punto de contacto con la cabeza del martillo. Suponga que el martillo ejerce sobre el clavo una fuerza paralela a éste.

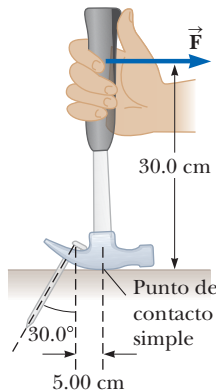


Figura P12.913

- 14.** Un mono de 10.0 kg trepa una escalera uniforme de peso 1.20×10^2 N y longitud $L = 3.00$ m, como se muestra en la figura P12.14. La escalera descansa contra la pared y forma un ángulo de $\theta = 60.0^\circ$ con el suelo. Los extremos de la escalera descansan sobre superficies sin fricción. El extremo inferior está unido a la pared mediante una cuerda horizontal que puede soportar una tensión máxima de sólo 80 N. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la escalera. (b) Encuentre la fuerza normal ejercida sobre la parte baja de la escalera. (c) Determine la tensión en la cuerda cuando el mono esté a dos tercios de la longitud de la escalera. (d) Obtenga la distancia máxima d que el mono puede trepar sobre la escalera antes de que se rompa la cuerda. (e) Si la superficie horizontal fuera rugosa y se eliminara la cuerda, ¿cómo cambiaría su análisis del problema? ¿Qué otra información necesitaría para contestar los incisos (c) y (d)?

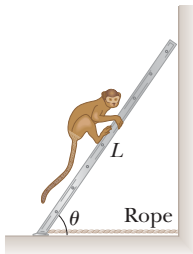


Figura P12.14

- 15.** John empuja a su hermana Rachel en una carretilla cuando la detiene un ladrillo de 8.00 cm de alto (figura P12.15). El manubrio de la carretilla forma un ángulo de $\theta = 15.0^\circ$ con el suelo. Debido al peso de Rachel y del manubrio, una fuerza de 400 N hacia abajo es ejercida en el centro de la rueda, la cual tiene un radio de 20.0 cm. (a) ¿Qué fuerza debe aplicar John a lo largo del manubrio para apenas comenzar a pasar

la rueda sobre el ladrillo? (b) ¿Cuál es la fuerza (magnitud y dirección) que el ladrillo ejerce sobre la rueda justo cuando ésta comienza a elevarse sobre el ladrillo? En ambos incisos, suponga que el ladrillo permanece fijo y no se desliza sobre el suelo. También suponga que la fuerza aplicada por John está dirigida exactamente hacia el centro de la rueda.

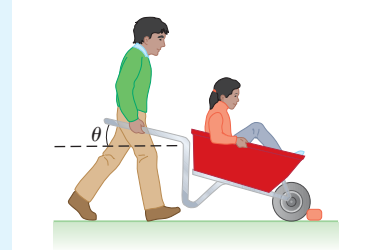


Figura P12.15 Problemas 15 y 16.

- 16.** John empuja a su hermana Rachel en una carretilla cuando la detiene un ladrillo de altura h (figura P12.15). El manubrio forma un ángulo θ con el suelo. Debido al peso de Rachel y del manubrio, una fuerza mg hacia abajo es ejercida en el centro de la rueda, la cual tiene radio R . (a) ¿Qué fuerza F debe aplicar John a lo largo del manubrio para apenas comenzar a pasar la rueda sobre el ladrillo? (b) ¿Cuáles son las componentes de la fuerza que el ladrillo ejerce sobre la rueda justo cuando ésta comienza a elevarse sobre el ladrillo? En ambos incisos, suponga que el ladrillo permanece fijo y no se desliza sobre el suelo. También suponga que la fuerza aplicada por John está dirigida exactamente hacia el centro de la rueda.

SECCIÓN 12.4 Propiedades elásticas de los sólidos

- 17.** El punto más profundo del océano está en la Fosa Mariana, que tiene aproximadamente 11 km de profundidad, en el Pacífico. Es enorme la presión a esta profundidad, más o menos de 1.13×10^8 N/m². (a) Calcule el cambio en volumen de 1.00 m³ de agua de mar que se lleve desde la superficie hasta este punto más profundo. (b) La densidad del agua de mar en la superficie es 1.03×10^3 kg/m³. Determine su densidad en el fondo. (c) Explique si es o cuándo es una buena aproximación pensar en el agua como incompresible.
- 18.** Un alambre de acero de 1 mm de diámetro puede sostener una tensión de 0.2 kN. Un cable para soportar una tensión de 20 kN debe tener diámetro, ¿de qué orden de magnitud?
- 19.** Un niño se desliza por el suelo con un par de zapatos con suela de caucho. La fuerza de fricción que actúa sobre cada pie es 20.0 N. El área de la huella de cada suela mide 14.0 cm² y el grosor de cada suela es de 5.00 mm. Encuentre la distancia horizontal que corren las superficies superior e inferior de cada suela. El módulo de corte del caucho es 3.00 MN/m².
- 20.** Evalúe el módulo de Young para el material cuya curva de esfuerzo-deformación está mostrada en la figura 12.12.
- 21.** Suponga que el esfuerzo de corte en acero excede aproximadamente 4.00×10^8 N/m², la ruptura del acero. Determine la fuerza cortante necesaria para (a) cortar un perno de acero de 1.00 cm de diámetro y (b) perforar un hoyo de 1.00 cm de diámetro en una placa de acero de 0.500 cm de espesor.
- 22.** Cuando el agua se congela, se expande aproximadamente 9.00%. ¿Qué aumento de presión se presenta dentro del monoblock de su automóvil si el agua se congela? (El módulo volumétrico del hielo es 2.00×10^9 N/m².)
- 23.** **Problema de repaso.** Un martillo de 30.0 kg, que se mueve con rapidez de 20.0 m/s, golpea una punta de acero de 2.30 cm de diámetro. El martillo rebota con rapidez de 10.0 m/s



después de 0.110 s. ¿Cuál es la deformación promedio en la punta de acero durante el impacto?

PROBLEMAS ADICIONALES

24. PG Una viga uniforme que descansa sobre dos pivotes tiene una longitud $L = 6.00$ m y una masa $M = 90.0$ kg. El pivote bajo el extremo izquierdo ejerce una fuerza normal n_1 sobre la viga, y el segundo pivote ubicado a una distancia $\ell = 4.00$ m del extremo izquierdo ejerce una fuerza normal n_2 . Una mujer de masa $m = 55.0$ kg se para en el extremo izquierdo de la viga y comienza a caminar hacia la derecha, como se indica en la figura P12.24. El objetivo es encontrar la posición de la mujer cuando la viga se empieza a inclinar. (a) ¿Cuál es el análisis de modelo apropiado para la viga antes de que se incline? (b) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la viga, marque las fuerzas gravitacionales y las normales que actúan sobre la viga y coloque a la mujer a una distancia x hacia la derecha del primer pivote, el cual es el origen. (c) ¿Dónde está la mujer cuando la fuerza normal n_1 es máxima? (d) ¿Cuánto vale n_1 cuando la viga está por inclinarse? (e) Utilice la ecuación 12.1 para encontrar el valor de n_2 cuando la viga está a punto de inclinarse. (f) Empleando el resultado del inciso (d) y la ecuación 12.2, con los momentos de torsión calculados en torno al segundo pivote, determine la posición x de la mujer cuando la viga tiende a inclinarse. (g) Verifique la respuesta al inciso (a) mediante el cálculo de momentos de torsión alrededor del primer punto pivote.

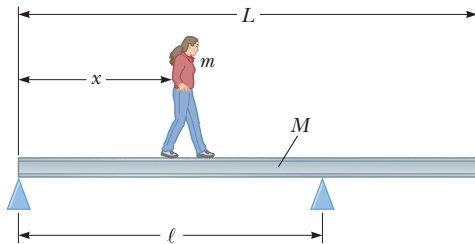


Figura P12.24

25. T Un puente de 50.0 m de largo y 8.00×10^4 kg de masa está sostenido sobre un pilar liso en cada extremo, como se muestra en la figura P12.25. Un camión de masa 3.00×10^4 kg de masa se ubica a 15.0 m de un extremo. ¿Cuáles son las fuerzas sobre el puente en los puntos de soporte?

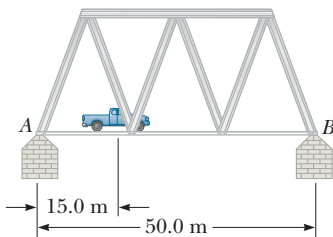


Figura P12.25

26. BIO V En estudios de fisiología del ejercicio, a veces es importante determinar la posición del centro de masa de una persona. Esta determinación se realiza con el dispositivo que se muestra en la figura P12.26. Una plancha ligera descansa sobre dos básculas, que leen $F_{g1} = 380$ N y $F_{g2} = 320$ N. Una distancia de 1.65 m separa las básculas. ¿A qué distancia de los pies de la mujer está su centro de masa?

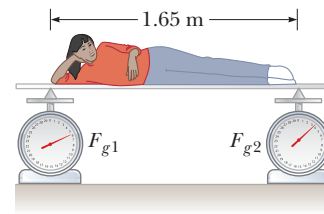


Figura P12.26

27. El dintel de concreto reforzado pretensado en la figura P12.27 tiene 1.50 m de largo. El concreto encierra una barra de acero reforzado con área de 1.50 cm² de sección transversal. La barra une las placas de los extremos. El área de la sección transversal del concreto perpendicular a la barra es 50.0 cm². El módulo de Young para el concreto es 30.0×10^9 N/m². Después de curar el concreto y de liberar la tensión original T_1 en la barra, el concreto está bajo el esfuerzo de compresión 8.00×10^6 N/m². (a) ¿Cuánto comprime la barra al concreto cuando se libera la tensión original en la barra? (b) ¿Cuál es la nueva tensión T_2 en la barra? (c) ¿Cuánto se alarga la barra respecto a su longitud sin esfuerzo? (d) Cuando el concreto fue vertido, ¿cuánto se alargó la barra respecto a su longitud sin esfuerzo? (e) Encuentre la tensión original requerida T_1 en la barra.

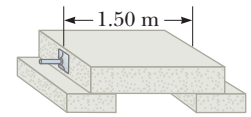


Figura P12.27

28. Las siguientes ecuaciones se obtienen a partir de un diagrama de cuerpo libre de una puerta rectangular, sostenida por dos bisagras en el lado izquierdo. Una cubeta de grano cuelga de la puerta.

$$\begin{aligned}
 -A + C &= 0 \\
 +B - 392 \text{ N} - 50.0 \text{ N} &= 0 \\
 A(0) + B(0) + C(1.80 \text{ m}) - 392 \text{ N}(1.50 \text{ m}) \\
 - 50.0 \text{ N}(3.00 \text{ m}) &= 0
 \end{aligned}$$

(a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre y complete el enunciado del problema, y especifique las incógnitas. (b) Determine los valores de las incógnitas y establezca el significado físico de cada una.

29. AMT Un oso hambriento que pesa 700 N camina hacia afuera de una viga en un intento por recuperar una canasta de golosinas que cuelga en el extremo de la viga (figura P12.29). La viga es uniforme, pesa 200 N, tiene 6.00 m de largo y es sostenida por un alambre a un ángulo de $\theta = 60.0^\circ$. La canasta pesa 80.0 N. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la viga. (b) Cuando el oso está en $x = 1.00$ m, encuentre la tensión en el alambre sosteniendo la viga y las componentes de la fuerza ejercida por la pared sobre el extremo izquierdo de la viga.

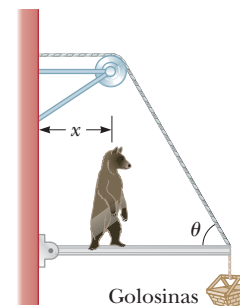


Figura P12.29

(c) **¿Qué pasaría si?** Si el alambre puede soportar una tensión máxima de 900 N, ¿cuál es la distancia máxima que el oso puede caminar antes de romperse el alambre?

30. Una pluma uniforme de 1 200 N a $\phi = 65^\circ$ de la vertical está sostenida por un cable a un ángulo $\theta = 25.0^\circ$ con la horizontal, como lo muestra la figura P12.30. La pluma está articulada en la parte baja, y un objeto de peso $mg = 2\,000$ N cuelga de su parte superior. Encuentre (a) la tensión en el cable y (b) las componentes de las fuerzas de reacción que ejerce el suelo sobre la pluma.

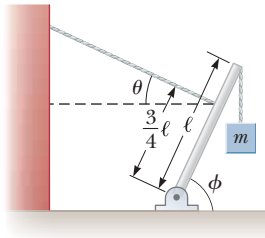


Figura P12.30

31. Un anuncio uniforme de peso F_g y ancho $2L$ cuelga de una viga horizontal ligera con bisagra en la pared y sostenida por un cable (figura P12.31). Determine (a) la tensión en el cable y (b) las componentes de la fuerza de reacción que ejerce la pared sobre la viga, en términos de F_g , d , L y θ .

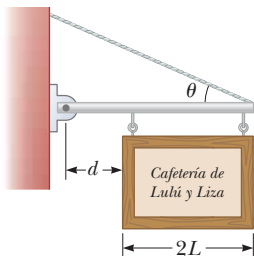


Figura P12.31

32. Cuando una persona se para de puntillas sobre un pie (una posición vigorosa), la posición del pie es como se muestra en la figura P12.32a. La fuerza gravitacional total \vec{F}_g sobre el cuerpo es compensada por la fuerza normal \vec{n} ejercida por el piso sobre los dedos de un pie. En la figura P12.32b se muestra un modelo mecánico de la situación, donde \vec{T} es la fuerza ejercida sobre el pie por el tendón de Aquiles y \vec{R} es la fuerza ejercida sobre el pie por la tibia. Encuentre los valores de T , R y θ cuando $F_g = 700$ N.

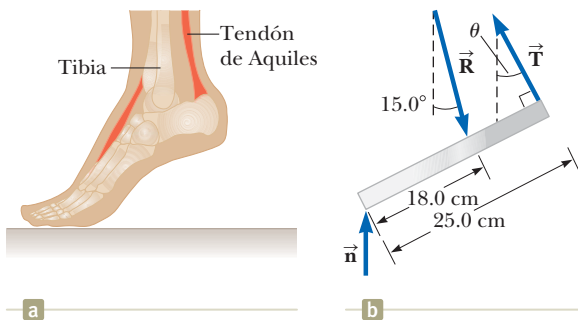


Figura P12.32

33. Un tiburón de 10 000 N está sostenido mediante un cable unido a una barra de 4.00 m que se articula en la base. (a) Calcule la tensión en el cable entre la barra y la pared,

suponga que el cable también sostiene el sistema en la posición mostrada en la figura P12.33. Encuentre (b) la fuerza horizontal y (c) la fuerza vertical ejercidas sobre la base de la barra. Ignore el peso de la barra.

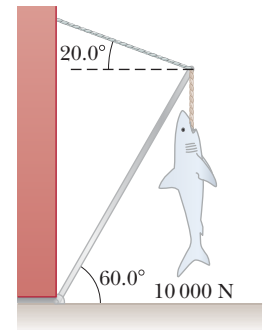


Figura P12.33

34. Suponga que una persona se dobla hacia adelante para levantar una carga “con su espalda”, como se muestra en la figura P12.34a. La columna de la persona se articula principalmente en la quinta vértebra lumbar, y la principal fuerza de soporte la da el músculo espinal erector de la espalda. Para estimar la magnitud de las fuerzas involucradas, considere el modelo que se indica en la figura P12.34b para una persona que se dobla hacia adelante para levantar un objeto de 200 N. La columna de la persona y la parte superior del cuerpo se representan como una barra horizontal uniforme de 350 N de peso, que se articula en la base de la columna. El músculo espinal erector, unido a un punto a dos tercios de camino sobre la columna, mantiene la posición de la espalda. El ángulo entre la columna y este músculo es $\theta = 12.0^\circ$. Encuentre (a) la tensión T en el músculo de la espalda y (b) la fuerza compresiva en la columna. (c) ¿Este método es una buena forma de levantar una carga? Explique su respuesta, utilice los resultados de los incisos (a) y (b). ¿Puede sugerir un mejor método para levantar una carga?

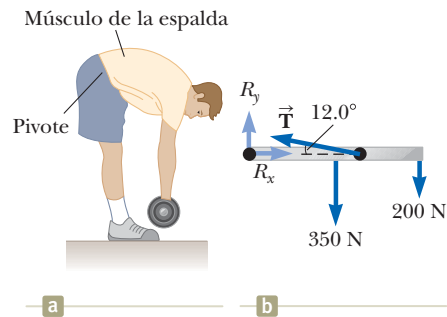


Figura P12.34

35. Una viga uniforme de masa m se inclina en un ángulo θ con la horizontal. Su extremo superior (punto P) produce un doblado de 90° en una cuerda muy rugosa unida a la pared, y su extremo inferior descansa sobre un suelo rugoso (figura P12.35). Sea μ_s el coeficiente de fricción estática entre la viga y el piso. Suponga que μ_s es menor que la cotangente de θ . (a) Encuentre una expresión para la máxima masa M que se puede suspender desde lo alto antes de que la viga se deslice. Determine (b) la magnitud de la fuerza de reacción en el suelo y (c) la magnitud de la fuerza ejercida por la viga sobre la cuerda en P en términos de m , M y μ_s .

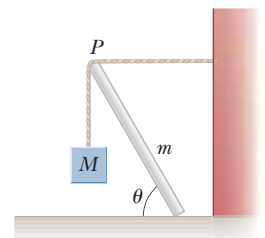


Figura P12.35

36. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? En una fábrica, un trabajador jala un mueble sobre el piso mediante una cuerda, como se muestra en la figura P12.36a. La cuerda forma un

ángulo $\theta = 37^\circ$ con el piso y está sujeta a una altura de $h_1 = 10.0$ cm respecto al fondo del mueble. El mueble rectangular uniforme $\ell = 100$ cm de alto, $w = 60.0$ cm de ancho y pesa 400 N. El mueble se desliza con rapidez constante cuando a la cuerda se le aplica una fuerza $F = 300$ N. El trabajador se cansa de caminar de espaldas, y entonces amarra la cuerda en un punto del mueble a una altura $h_2 = 65.0$ cm del piso y coloca la cuerda sobre su hombro de manera que ya no camina de espaldas y jala como se indica en la figura P12.36b. De esta forma, la cuerda otra vez forma un ángulo $\theta = 37.0^\circ$ con la horizontal y nuevamente tiene una tensión de 300 N. Empleando esta técnica, el trabajador logra arrastrar el mueble durante una larga distancia sobre el piso con menos cansancio.

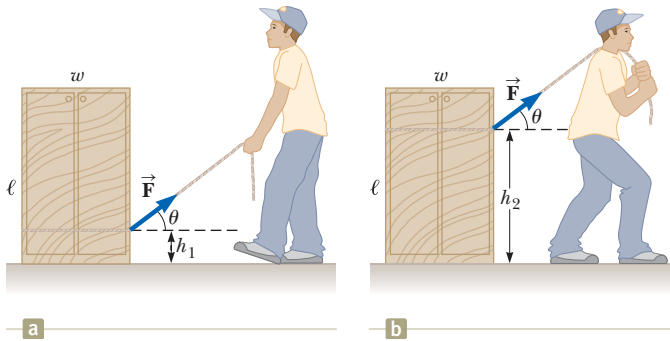
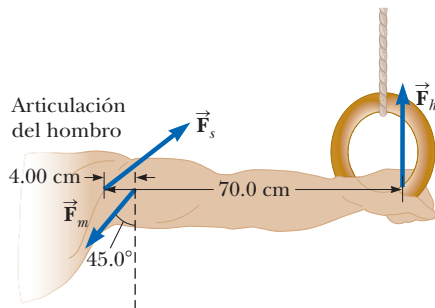


Figura P12.36 Problemas 36 y 44.

37. Cuando un gimnasta en su rutina de los anillos ejecuta la *cruz de hierro*, mantiene en reposo la posición indicada en la figura P12.37a. En esta maniobra, los pies del gimnasta (no mostrados) no tocan el suelo. Los músculos primarios involucrados en sostener esta posición son los dorsales y los pectorales. Uno de los anillos ejerce una fuerza hacia arriba \vec{F}_h sobre una mano, como se ilustra en la figura P12.37b. La fuerza \vec{F}_s es ejercida por la articulación del hombro sobre el brazo. Los músculos dorsales y pectorales ejercen una fuerza total \vec{F}_m



a



b

Figura P12.37

sobre el brazo. (a) Con la información en la figura, encuentre la magnitud de la fuerza \vec{F}_m para un atleta de peso 750 N. (b) Suponga que un atleta durante el entrenamiento no puede realizar la cruz de hierro, pero puede mantener una posición similar a la figura en la cual los brazos forman un ángulo de 45° con la horizontal en lugar de estar horizontales. ¿Por qué esta posición es más fácil para el atleta?

38. La figura P12.38 muestra una estructura ligera formada con tres puntales en un plano y unidos en sus extremos por tres pernos de bisagra lisos. La estructura soporta una fuerza hacia debajo de $\vec{F} = 1\,000$ N aplicada en el punto B. La estructura tiene peso despreciable. Los pilares en A y C son suaves. (a) Dados $\theta_1 = 30.0^\circ$ y $\theta_2 = 45.0^\circ$, encuentre n_A y n_C . (b) Se puede probar que la fuerza ejercida por cualquier puntal sobre un perno debe estar dirigida a lo largo de la longitud del puntal, como una fuerza de tensión o de compresión. Utilice ese hecho para identificar las direcciones de las fuerzas que ejercen los puntales sobre los pernos que las unen. Determine la fuerza de tensión o de compresión en cada una de las tres barras.

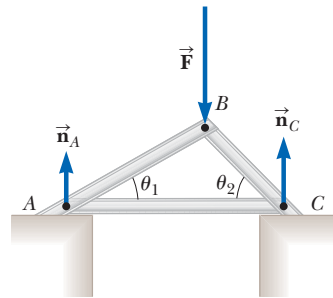


Figura P12.38

39. Un lado de una repisa está sostenido por una ménsula montada sobre una pared vertical mediante un solo tornillo, como se muestra en la figura P12.39. Desprecie el peso de la ménsula. (a) Encuentre la componente horizontal de la fuerza que ejerce el tornillo en la ménsula cuando una fuerza vertical de 80.0 N se aplica como se muestra. (b) Mientras su abuelo riega sus geranios, la fuerza de carga de 80.0 N aumenta con rapidez de 0.150 N/s. ¿A qué razón cambia la fuerza que ejerce el tornillo? *Sugerencia:* Imagine que la ménsula está ligeramente floja.

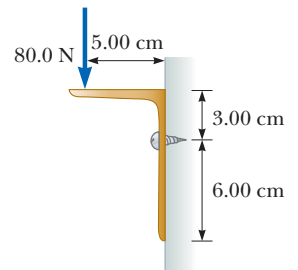


Figura P12.39

40. Una escalera de tijera de peso despreciable se construye como se muestra en la figura P12.40, con $AC = BC = \ell = 4.00$ m. Un pintor de masa $m = 70.0$ kg está de pie en la escalera, a $d = 3.00$ m desde la parte baja. Suponga que el suelo no tiene fricción, encuentre (a) la tensión en la barra horizontal DE que conecta las dos mitades de la escalera, (b) las fuerzas normales en A y B, y (c) las componentes de la fuerza de reacción en la única bisagra C que la mitad izquierda de la escalera ejerce sobre la mitad

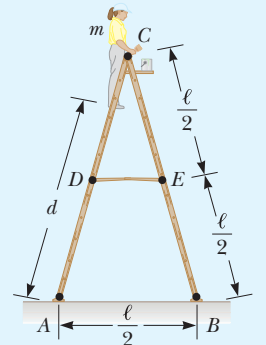


Figura P12.40

Problemas 40 y 41.

derecha. *Sugerencia:* Trate la escalera como un solo objeto, pero también trate a cada mitad de la escalera por separado.

- 41. S** Una escalera de tijera de peso despreciable se construye como se muestra en la figura P12.40, con $AC = BC = \ell$. Un pintor de masa m está de pie en la escalera a una distancia d desde la parte baja. Suponga que el suelo no tiene fricción, encuentre (a) la tensión en la barra horizontal DE que conecta las dos mitades de la escalera, (b) las fuerzas normales en A y B , y (c) las componentes de la fuerza de reacción en la única bisagra C que la mitad izquierda de la escalera ejerce sobre la mitad derecha. *Sugerencia:* Trate la escalera como un solo objeto, pero también trate a cada mitad de la escalera por separado.

- 42. S Problema de repaso.** Un alambre de longitud L , módulo de Young Y y área de sección transversal A se estira elásticamente una cantidad ΔL . Por la ley de Hooke, la fuerza restauradora es $-k\Delta L$. (a) Demuestre que $k = YA/L$. (b) Demuestre que el trabajo realizado al estirar el alambre una cantidad ΔL es $W = \frac{1}{2}YA(\Delta L)^2/L$.

- 43.** Dos pelotas de squash, cada una de 170 g de masa, se colocan en un frasco de vidrio como se muestra en la figura P12.43. Sus centros están sobre una línea recta a 45° con la horizontal. (a) Suponga que las paredes carecen de fricción y determine P_1 , P_2 y P_3 . (b) Obtenga la magnitud de la fuerza que ejerce la pelota izquierda sobre la pelota derecha.

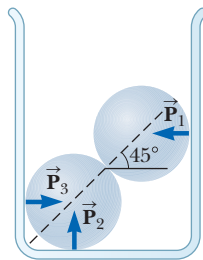


Figura P12.43

- 44.** Considere el mueble rectangular del problema 36 mostrado en la figura P12.36, pero con una fuerza \vec{F} aplicada horizontalmente en el borde superior. (a) ¿Cuál es la fuerza mínima requerida para iniciar la inclinación del mueble? (b) ¿Cuál es el mínimo coeficiente de fricción estática requerido para que el mueble no resbale con la aplicación de una fuerza de esta magnitud? (c) Encuentre la magnitud y dirección de la mínima fuerza requerida para inclinar el mueble si el punto de aplicación puede ser en *cualquier* lugar del mueble.
- 45. Problema de repaso.** Un alambre de aluminio mide 0.850 m de largo y tiene una sección transversal circular de 0.780 mm de diámetro. Fijo en el extremo superior, el alambre soporta un objeto de 1.20 kg que se balancea en un círculo horizontal. Determine la rapidez angular que se requiere para producir una deformación de 1.00×10^{-3} .

- 46. CE** Ha sido contratado como testigo experto en un caso que involucra una lesión en una fábrica. El abogado que lo contrató representa al trabajador lesionado. Se le dijo al trabajador que levantara un extremo de una caja larga y pesada que estaba horizontalmente en el piso y la inclinara hacia arriba para que quedara de pie. Él comenzó a levantar el extremo de la caja, siempre aplicando una fuerza que era perpendicular a la parte superior de la caja. Cuando el extremo de la caja se elevó, en cierto ángulo, la parte inferior de la caja se deslizó en el suelo, y el trabajador, al tratar de recuperarse, dio un paso adelante y la caja cayó sobre su pie, dañándolo gravemente. Como parte de su investigación, va a la fábrica y mide el coeficiente de fricción estática entre una caja y el piso de concreto liso. Usted encuentra que es 0.340. Prepare un argumento para el abogado que demuestre que era imposible levantar la caja de la manera descrita sin que se deslizara sobre el suelo.

- 47. T** Un anuncio rectangular uniforme de 4.00 m de ancho y 3.00 m de alto está suspendido de una barra horizontal uniforme de longitud 6.00 m, como se indica en la figura P12.47. El extremo izquierdo de la barra está soportado por una bisagra, y el extremo derecho está unido a un delgado cable que forma 30° con la vertical. (a) Encuentre la tensión T en el cable. (b) Determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por la bisagra sobre el extremo izquierdo de la barra.

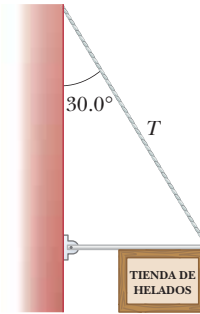


Figura P12.47

- 48.** Un cable de acero con 3.00 cm^2 de área transversal tiene una masa de 2.40 kg por metro. Si 500 m del cable cuelgan sobre un acantilado vertical, ¿qué tanto se estira el alambre bajo su propio peso? Utilice $Y_{\text{acero}} = 2.00 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$.

PROBLEMAS DE DESAFÍO

- 49.** Una barra uniforme de peso F_g y longitud L está sostenida en sus extremos mediante un canal sin fricción, como se muestra en la figura P12.49. (a) Demuestre que el centro de gravedad de la barra debe estar vertical sobre el punto O cuando la barra está en equilibrio. (b) Determine el valor de equilibrio del ángulo θ . (c) ¿El equilibrio de la barra es estable o inestable?

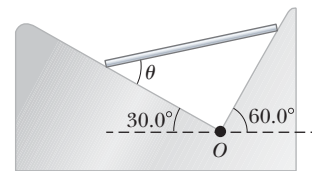


Figura P12.49

- 50.** En la sección ¿Qué pasaría si? del ejemplo 12.2, sea d la distancia en metros entre la persona y la bisagra en el extremo izquierdo de la viga. (a) Demuestre que la tensión en el cable está dada por $T = 93.9d + 125$, con T en newtons. (b) Demuestre que el ángulo de dirección θ de la fuerza de la bisagra está descrito por

$$\tan \theta = \left(\frac{32}{3d + 4} - 1 \right) \tan 53.0^\circ$$

- (c) Demuestre que la magnitud de la fuerza de la bisagra está dada por

$$R = \sqrt{8.82 \times 10^3 d^2 - 9.65 \times 10^4 d + 4.96 \times 10^5}$$

- (d) Conforme d se incrementa, describa cómo difieren entre sí los cambios en T , θ y R .



13

Gravitación universal

Imagen del Telescopio Espacial Hubble de una galaxia espiral, NGC 1566, tomada en 2014. En los brazos espirales de la galaxia, el gas de hidrógeno se comprime para crear nuevas estrellas. Se teoriza que nuestra propia galaxia, la Vía Láctea, tiene una estructura similar con brazos espirales. (ESA/Hubble y NASA)



- 13.1 Ley de Newton de gravitación universal
- 13.2 Aceleración en caída libre y fuerza gravitacional
- 13.3 Modelo de análisis: Partícula en un campo gravitacional
- 13.4 Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas
- 13.5 Energía potencial gravitacional
- 13.6 Consideraciones energéticas en el movimiento planetario y de satélites

IMAGINE En el capítulo 11, intentaba hacer sus deberes de física y lo distraían los patinadores y clavadistas que giraban. En el capítulo 12, se distrajo con un fenómeno sorprendente con una regla de medición. Ahora, finalmente comienza a trabajar en su tarea de física y abre su libro de texto de física. Mira nuevamente las tablas en el frente, antes de la página del título. En la tabla de Datos del Sistema Solar, observa una entrada para la masa del Sol. Después de remarcar que es mucha masa, exclama: “¡Espera un momento! ¿Cómo encontraron la masa del Sol? De hecho, ¿cómo encontraron la masa de cualquiera de los planetas?”. Eso le lleva a pensar en la masa de toda la Vía Láctea. Si busca en línea, encontrará diferentes estimaciones de la masa de la galaxia, algunas en el rango de cientos de miles de millones de masas solares y otras en los billones de masas solares. ¿Por qué no podemos encontrar un solo número para la masa de la galaxia? Su tarea de física se deshace a medida que reflexiona sobre estas nuevas preguntas.

CONEXIONES Primero estudiamos la gravedad en la sección 2.8, donde hablamos sobre la caída libre de objetos. Allí, y en la sección 4.3 sobre el movimiento del proyectil, consideramos los efectos de la gravedad sobre objetos cercanos a la superficie de la Tierra. En la sección 5.5, relacionamos la fuerza gravitatoria de tales objetos con su peso. En el capítulo 7, relacionamos la fuerza gravitatoria de un objeto cerca de la superficie de la Tierra con la energía potencial gravitacional del objeto-sistema de la Tierra. En este capítulo, eliminamos la suposición de que los objetos están cerca de la superficie de la Tierra. ¿Cómo varía la fuerza gravitatoria de un objeto cuando movemos el objeto lejos de la superficie de la Tierra? La respuesta a esa pregunta nos permitirá comprender el movimiento de los planetas alrededor del Sol y ha permitido a los científicos colocar muchos objetos en órbita alrededor de la Tierra, la Luna y Marte. El principio

que permite esta comprensión es la *ley de la gravitación universal*. Hacemos hincapié en una descripción del movimiento planetario porque los datos astronómicos proporcionan una prueba importante de la validez de esta ley. Después de presentar esta ley, mostraremos las conexiones entre ella y el momento angular del capítulo 11 y las técnicas de energía en los capítulos 7 y 8. Como preparación para el resto del libro, reconocemos la gravedad como una de las cuatro “fuerzas fundamentales” de la naturaleza. Los otros son la fuerza electromagnética (capítulos 22-33), la fuerza nuclear fuerte (capítulos 43-44) y la fuerza débil (capítulo 44).

13.1 Ley de Newton de gravitación universal

Quizá ha escuchado la leyenda de que, mientras dormitaba bajo un árbol, Newton fue golpeado en la cabeza por una manzana que caía. Este supuesto accidente hizo que él imaginara que tal vez todos los objetos en el Universo eran atraídos unos hacia otros en la misma forma que la manzana era atraída hacia la Tierra. Newton analizó datos astronómicos sobre el movimiento de la Luna alrededor de la Tierra. A partir de dicho análisis, hizo la atrevida afirmación de que la ley de fuerza que gobierna el movimiento de los planetas era la *misma* ley de fuerza que atraía una manzana en caída libre hacia la Tierra. Esta afirmación era contradictoria con el pensamiento anterior que había durado durante siglos, que sostenía que las leyes de la física en la Tierra no se aplicaban a los cielos.

En 1687 Newton publicó su obra acerca de la ley de gravedad en su tratado *Principios matemáticos de filosofía natural*. **La ley de Newton de la gravitación universal** establece que

toda partícula en el Universo atrae a cualquier otra partícula con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.

Si las partículas tienen masas m_1 y m_2 y están separadas una distancia r , la magnitud de esta fuerza gravitacional es

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (13.1)$$

donde G es una constante llamada *constante gravitacional universal*. Su valor en unidades del SI es

$$G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \quad (13.2)$$

La constante gravitacional universal G fue evaluada por primera vez en 1798 mediante un importante experimento realizado por Sir Henry Cavendish (1731-1810). La ley de gravitación universal no fue expresada por Newton en la forma de la ecuación 13.1, y él no mencionó una constante como G . En efecto, aún en la época de Cavendish, en su sistema de unidades no existía una unidad de fuerza. El objetivo de Cavendish era medir la densidad de la Tierra. Entonces 100 años después, sus resultados fueron utilizados por otros científicos para obtener un valor de G .

El aparato de Cavendish consistió en dos pequeñas esferas, cada una de masa m , fijadas en los extremos de una barra horizontal ligera, suspendida de una fibra fina o alambre metálico delgado, como se ilustra en la figura 13.1. Cuando dos esferas grandes, cada una de masa M , se colocan cerca de las más pequeñas, la fuerza de atracción entre las esferas pequeñas y grandes hace que la barra gire y tuerza el alambre de suspensión a una nueva orientación de equilibrio. El ángulo de rotación se mide por la desviación de un haz de luz reflejado de un espejo unido a la suspensión vertical.

La forma de la ley de fuerza dada por la ecuación 13.1 con frecuencia se conoce como un **ley del inverso del cuadrado** porque la magnitud de la fuerza varía con el inverso del cuadrado de la separación de las partículas.¹ En capítulos posteriores se verán otros ejem-

◀ La ley de gravitación universal

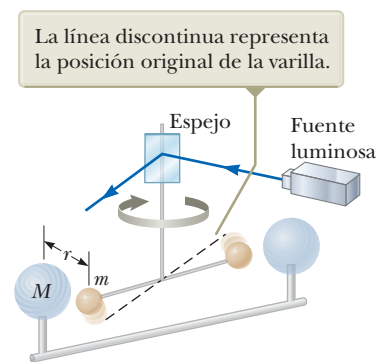


Figura 13.1 Aparato de Cavendish para medir fuerzas gravitacionales.

¹ Una proporcionalidad *inversa* entre dos cantidades x y y es aquella en la que $y = k/x$, donde k es una constante. Una proporción *directa* entre xy y existe cuando $y = kx$.

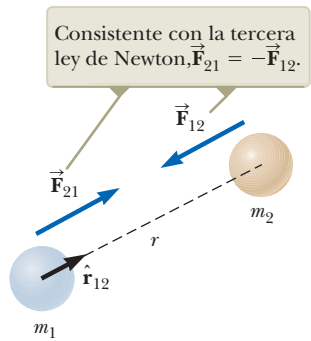


Figura 13.2 La fuerza gravitacional entre dos partículas de atracción. El vector unitario \hat{r}_{12} está dirigido de la partícula 1 a la partícula 2.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 13.1

Sea claro con g y G El símbolo g representa la magnitud de la aceleración en caída libre cerca de un planeta. En la superficie de la Tierra, g tiene un valor promedio de 9.80 m/s^2 . Por otra parte, G es una constante universal que tiene el mismo valor en cualquier parte del Universo.

plos de este tipo de ley de fuerza. Esta fuerza se expresa en forma vectorial al definir un vector unitario \hat{r}_{12} (figura 13.2). Ya que este vector unitario se dirige de la partícula 1 a la partícula 2, la fuerza que ejerce la partícula 1 sobre la partícula 2 es

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12} \quad (13.3)$$

donde el signo negativo indica que la partícula 2 es atraída hacia la partícula 1; en consecuencia, la fuerza sobre la partícula 2 debe dirigirse hacia la partícula 1. Por la tercera ley de Newton, la fuerza que ejerce la partícula 2 sobre la partícula 1, designada \vec{F}_{21} , es igual en magnitud a \vec{F}_{12} y en la dirección opuesta. Es decir, dichas fuerzas forman un par acción-reacción, y $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.

Dos características de la ecuación 13.3 merecen mención. Primero, la fuerza gravitacional es un campo de fuerza que siempre existe entre dos partículas, sin importar el medio que las separe. Segundo, ya que la fuerza varía como el inverso al cuadrado de la distancia entre las partículas, entonces disminuye rápidamente al aumentar la separación.

La ecuación 13.3 también se utiliza para mostrar que la fuerza gravitacional que ejerce una distribución de masa esféricamente simétrica y de tamaño finito sobre una partícula afuera de la distribución es la misma como si toda la masa de ésta se concentrara en el centro. Por ejemplo, la magnitud de la fuerza que ejerce la Tierra sobre una partícula de masa m cerca de la superficie de la Tierra es

$$F_g = G \frac{M_E m}{R_E^2} \quad (13.4)$$

donde M_E es la masa de la Tierra y R_E es su radio. Esta fuerza se dirige hacia el centro de la Tierra.

E XAMEN RÁPIDO 13.1 Un planeta tiene dos lunas de igual masa. La Luna 1 está en órbita circular de radio r . La Luna 2 está en órbita circular de radio $2r$. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza gravitacional que ejerce el planeta sobre la Luna 2? (a) cuatro veces mayor que sobre la Luna 1, (b) dos veces mayor que sobre la Luna 1, (c) igual que sobre la Luna 1, (d) la mitad de la ejercida sobre la Luna 1 y (e) un cuarto de la ejercida sobre la Luna 1.

Ejemplo 13.1 ¿Alguien juega billar?

Tres bolas de billar de 0.300 kg se colocan sobre una mesa en las esquinas de un triángulo rectángulo, como se muestra en la figura 13.3. Los lados del triángulo tienen longitudes $a = 0.400 \text{ m}$, $b = 0.300 \text{ m}$ y $c = 0.500 \text{ m}$. Calcule el vector de fuerza gravitacional sobre la bola blanca (designada por m_1) que resulta de las otras dos bolas, así como la magnitud y la dirección de esta fuerza.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Observe en la figura 13.3 que la bola blanca es atraída hacia ambas bolas por la fuerza gravitacional. En la gráfica se aprecia que la fuerza neta debe apuntar hacia arriba y a la derecha. Los ejes coordenados se ubican como se muestra en la figura 13.3, y el origen se coloca en la posición de la bola blanca.

Categorizar Este problema involucra evaluar las fuerzas gravitacionales sobre la bola blanca con el uso de la ecuación 13.3. Una vez evaluadas dichas fuerzas, la construcción de la fuerza neta equivale a un problema de suma vectorial.

Analizar Encuentre la fuerza que ejerce m_2 sobre la bola blanca:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{21} &= G \frac{m_2 m_1}{a^2} \hat{j} \\ &= (6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2) \frac{(0.300 \text{ kg})(0.300 \text{ kg})}{(0.400 \text{ m})^2} \hat{j} \\ &= 3.75 \times 10^{-11} \hat{j} \text{ N} \end{aligned}$$

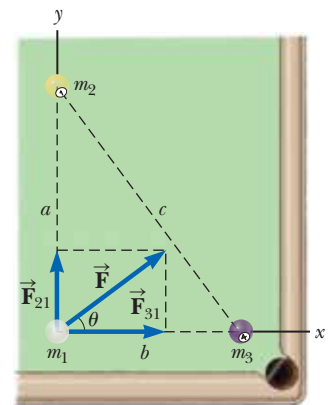


Figura 13.3 (Ejemplo 13.1) La fuerza gravitacional resultante que actúa sobre la bola blanca es la suma vectorial $\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$.

13.1 continuación

Halle la fuerza que ejerce m_3 sobre la bola blanca:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{31} &= G \frac{m_3 m_1}{b^2} \hat{i} \\ &= (6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2) \frac{(0.300 \text{ kg})(0.300 \text{ kg})}{(0.300 \text{ m})^2} \hat{i} \\ &= 6.67 \times 10^{-11} \hat{i} \text{ N}\end{aligned}$$

Encuentre la fuerza gravitacional neta sobre la bola blanca al sumar estos vectores de fuerza:

$$\vec{F} = \vec{F}_{31} + \vec{F}_{21} = (6.67 \hat{i} + 3.75 \hat{j}) \times 10^{-11} \text{ N}$$

Obtenga la magnitud de esta fuerza:

$$\begin{aligned}F &= \sqrt{F_{31}^2 + F_{21}^2} = \sqrt{(6.67)^2 + (3.75)^2} \times 10^{-11} \text{ N} \\ &= 7.66 \times 10^{-11} \text{ N}\end{aligned}$$

Encuentre la tangente del ángulo θ para el vector de fuerza neta:

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{F_{21}}{F_{31}} = \frac{3.75 \times 10^{-11} \text{ N}}{6.67 \times 10^{-11} \text{ N}} = 0.562$$

Evalúe el ángulo θ :

$$\theta = \tan^{-1}(0.562) = 29.4^\circ$$

Finalizar El resultado para F muestra que las fuerzas gravitacionales entre los objetos cotidianos tienen magnitudes extremadamente pequeñas.

13.2 Aceleración en caída libre y fuerza gravitacional

A la magnitud de la fuerza gravitacional sobre un objeto cerca de la superficie de la Tierra se le llama *peso* del objeto, donde el peso está dado por la ecuación 5.6, $F = mg$. La ecuación 13.4 es otra expresión para esta fuerza. Por tanto, las ecuaciones 5.6 y 13.4 se pueden igualar entre sí para obtener

$$\begin{aligned}mg &= G \frac{M_E m}{R_E^2} \\ g &= G \frac{M_E}{R_E^2}\end{aligned}\quad (13.5)$$

La ecuación 13.5 relaciona la aceleración en caída libre g con los parámetros físicos de la Tierra, su masa y radio, y explica el origen del valor de 9.80 m/s^2 que se ha utilizado en capítulos anteriores. Ahora considere un objeto de masa m ubicado a una distancia h sobre la superficie de la Tierra o a una distancia r del centro de la Tierra, donde $r = R_E + h$. La magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre este objeto es

$$F_g = G \frac{M_E m}{r^2} = G \frac{M_E m}{(R_E + h)^2}$$

La magnitud de la fuerza gravitacional que actúa sobre el objeto en esta posición también es $F_g = mg$, donde g es el valor de la aceleración en caída libre a la altura h . Al sustituir esta expresión para F_g en la última ecuación se obtiene que g está dada por

$$g = \frac{GM_E}{r^2} = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2}\quad (13.6)$$

TABLA 13.1 Aceleración en caída libre a diferentes alturas sobre la superficie de la Tierra

Altura h (km)	g (m/s ²)
0	9.80
1 000	7.33
2 000	5.68
3 000	4.53
4 000	3.70
5 000	3.08
6 000	2.60
7 000	2.23
8 000	1.93
9 000	1.69
10 000	1.49
50 000	0.13
∞	0

◀ Variación de g con la altura

Por tanto, se sigue que g disminuye con altura creciente. En la tabla 13.1 se proporcionan los valores de g para diferentes alturas. Ya que el peso de un objeto es mg , se ve que conforme $r \rightarrow \infty$, el peso tiende a cero.



- E XAMEN RÁPIDO 13.2** Superman está de pie en lo alto de una montaña elevada y
- lanza una pelota de béisbol horizontalmente con una rapidez tal que la pelota entra
 - en una órbita circular alrededor de la Tierra. Mientras la pelota está en órbita, ¿cuál
 - es la magnitud de la aceleración de la pelota? (a) Depende de qué tan rápido se lance
 - la pelota. (b) Es cero porque la pelota no cae al suelo. (c) Es ligeramente menor que
 - 9.80 m/s^2 . (d) Es igual a 9.80 m/s^2 .

Ejemplo 13.2 La densidad de la Tierra

Con el radio conocido de la Tierra y $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ en la superficie de la Tierra, encuentre la densidad promedio de la Tierra.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Suponga que la Tierra es una esfera perfecta. La densidad de material en la Tierra varía, pero adopte un modelo simplificado en donde considere que la densidad es uniforme en todas partes de la Tierra. La densidad resultante es la densidad promedio de la Tierra.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución relativamente simple.

Utilice la ecuación 13.5, resuelva para la masa de la Tierra:

$$M_E = \frac{gR_E^2}{G}$$

Sustituya esta masa y el volumen de una esfera en la definición de densidad (ecuación 1.1):

$$\begin{aligned} \rho_E &= \frac{M_E}{V_E} = \frac{gR_E^2/G}{\frac{4}{3}\pi R_E^3} = \frac{3}{4} \frac{g}{\pi G R_E} \\ &= \frac{3}{4} \frac{9.80 \text{ m/s}^2}{\pi(6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(6.37 \times 10^6 \text{ m})} = 5.50 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si se le dice que una densidad típica del granito en la superficie de la Tierra es de $2.75 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$? ¿Qué concluiría acerca de la densidad del material en el interior de la Tierra?

Respuesta Ya que este valor es casi la mitad de la densidad calculada como promedio para toda la Tierra, se concluiría que el núcleo de la Tierra tiene una densidad mucho mayor que el valor promedio. Es más sorprendente que el experimento de Cavendish, que determina G y se puede realizar sobre una mesa, combinado con simples mediciones de g en caída libre, ¡proporciona información acerca del núcleo de la Tierra!

13.3 Modelo de análisis: Partícula en un campo (gravitacional)

Cuando Newton publicó su teoría de la gravitación universal, fue considerada un éxito porque explicaba satisfactoriamente el movimiento de los planetas. Esto representó fuerte evidencia de que las mismas leyes que describen fenómenos sobre la Tierra pueden emplearse para grandes objetos como planetas y en diversos lugares del Universo. Desde 1687, la teoría de Newton se ha utilizado para explicar los movimientos de cometas, la desviación de una balanza de Cavendish, las órbitas de estrellas binarias y la rotación de galaxias. Sin embargo, tanto los contemporáneos de Newton como las generaciones siguientes han encontrado difícil de aceptar el concepto de una fuerza que actúa a distancia. Ellos preguntaron: ¿cómo es posible que dos objetos, como el Sol y la Tierra, interactúen cuando no están en contacto entre sí? Newton mismo no pudo responder esta pregunta.

Un método para describir las interacciones entre los objetos que no están en contacto apareció mucho después de la muerte de Newton. Este método permite una forma diferente de observar la interacción gravitacional, al usar el concepto de un *campo gravita-*



cional que existe en cada punto del espacio. El concepto de un **campo** ocurre a menudo en física. Un campo es una cantidad física que existe en todas partes en el espacio, tiene un valor único en todos los puntos y está establecido por una fuente de algún tipo. Por ejemplo, la presión atmosférica cerca de la superficie de la Tierra es un campo. En todos los puntos dentro de la atmósfera, hay un valor de la presión. Estos valores generalmente disminuyen al aumentar la altitud, y también cambian en el tiempo dependiendo de las condiciones climáticas actuales. La fuente de presión atmosférica es el aire mismo (vea el capítulo 14).

La fuente de un campo gravitacional es una *partícula fuente* con masa M . Generalmente, esta partícula es del tamaño de un planeta o una estrella, y se puede modelar como una partícula siempre que hagamos observaciones fuera del planeta o la estrella. La partícula fuente afecta el espacio sobre sí mismo de modo que hay una cantidad llamada campo gravitacional en todas partes en el espacio.

Esta discusión de campos plantea un par de preguntas. Primero, ¿cómo detectamos que un campo existe en algún punto? Y segundo, ¿cómo definimos el valor del campo en ese punto? Para responder a la primera pregunta, debemos poner una *partícula de prueba* en el punto. Una partícula de prueba es algo que es sensible al espacio alterado alrededor de la fuente. En el caso de la atmósfera, imagine colocar un globo lleno de helio en algún punto del aire. Debido a que hay un campo de presión en ese punto, y la presión varía en la altura del globo, el globo se elevará hacia arriba. (Si un globo de helio se coloca en el espacio vacío a una presión de cero, permanecerá estacionario.) Por tanto, el globo detecta la presencia del campo de presión. En el caso del campo gravitacional, la partícula de prueba es una segunda partícula, con masa m_0 . Si esta partícula se coloca en el campo gravitacional, hay una fuerza gravitacional en la partícula de prueba. Esta fuerza muestra que existe un campo gravitacional en ese punto.

Ahora, ¿cómo *definimos* el campo para que podamos asignarle un valor numérico? Para el globo en el campo de presión atmosférica, quizás podríamos basar la definición en la aceleración con la que se mueve el globo cuando se libera. En el caso de la gravedad, el **campo gravitacional** \vec{g} se define como

$$\vec{g} \equiv \frac{\vec{F}_g}{m_0} \quad (13.17)$$

Es decir, el campo gravitacional en un punto del espacio es igual a la fuerza gravitacional \vec{F}_g que experimenta una partícula de prueba colocada en dicho punto, dividida entre la masa m_0 de la partícula de prueba. Observe que la presencia de la partícula de prueba no es necesaria para que el campo exista: la partícula fuente crea el campo gravitacional. Es posible detectar la presencia del campo y medir su intensidad al colocar una partícula de prueba en el campo y notar la fuerza que se ejerce sobre ella. En esencia, lo que se describe es el “efecto” que cualquier objeto (en este caso, la Tierra) tiene sobre el espacio vacío alrededor de sí mismo en términos de la fuerza que *estaría* presente *si* un segundo objeto estuviese en alguna parte en ese espacio. Resulta útil remplazar la fuerza gravitacional directa entre dos partículas (ecuación 13.1) con este proceso de “dos pasos”: (1) una partícula establece un campo gravitacional y (2) una segunda partícula colocada en el campo experimenta una fuerza.²

El concepto de campo está en el corazón del análisis de modelo de **partícula en un campo**. En la ecuación 13.7, la partícula de prueba de la masa m_0 se coloca en el campo únicamente para determinar el valor del campo gravitacional \vec{g} . Una vez que se determina el valor, cualquier partícula arbitraria de masa m puede colocarse en el campo y experimentará una fuerza $m\vec{g}$. Por tanto, la representación matemática de la versión gravitacional del modelo de partícula en un campo es la ecuación 5.5:

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \quad (5.5)$$

² Se regresará a esta idea de una masa que afecta al espacio a su alrededor cuando se analice la teoría de gravitación de Einstein en el capítulo 38.



Los vectores de campo apuntan en la dirección de la aceleración que una partícula experimentaría si se le colocara en el campo. La magnitud del vector campo en cualquier ubicación es la magnitud de la aceleración en caída libre en dicha ubicación.

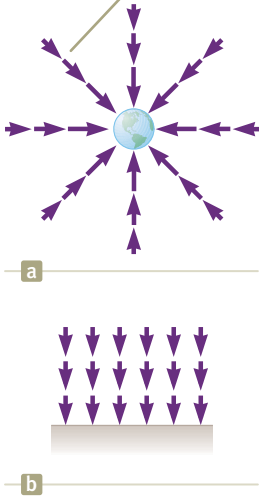


Figura 13.4 (a) Los vectores de campo gravitacional cercanos a una masa esférica uniforme como la Tierra varían tanto en dirección como en magnitud. (b) Los vectores de campo gravitacional en una pequeña región cerca de la superficie de la Tierra son uniformes tanto en dirección como en magnitud.

En el caso del campo de presión en la atmósfera, podríamos reconocer la fuerza entre el aire y el globo como una fuerza de contacto, como se discutió en la sección 5.1. Hay contacto físico entre el aire y el globo. Lo que desconcertó a Newton y otros científicos es que la gravedad es una fuerza de campo: no hay contacto físico entre una estrella que actúa como una partícula fuente y un planeta en órbita colocado en el campo resultante.

En futuros capítulos, se verán otras dos versiones del modelo de partícula en un campo. En la versión eléctrica, la propiedad de una partícula que resulta en un *campo eléctrico* es una *carga eléctrica*: cuando una segunda partícula cargada se coloca en un *campo eléctrico*, experimenta una fuerza. La magnitud de la fuerza es el producto de la carga eléctrica y el campo, en analogía con la fuerza gravitacional en la ecuación 5.5. En la versión magnética del modelo de partícula en un campo, una partícula cargada se coloca en un *campo magnético*. Se requiere otra propiedad de esta partícula para que ésta experimente una fuerza: la partícula debe tener una *velocidad* en algún ángulo no nulo respecto al campo magnético. Las versiones eléctrica y magnética del modelo de partícula en un campo son críticas en la comprensión de los principios del *electromagnetismo*, lo cual se estudiará en los capítulos 22-33.

Ya que la fuerza gravitacional que actúa sobre el objeto tiene una magnitud $GM_E m/r^2$ (vea la ecuación 13.4), el campo gravitacional \vec{g} a una distancia r del centro de la Tierra es

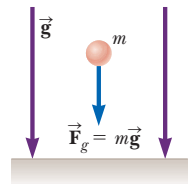
$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m_0} = -\frac{GM_E}{r^2} \hat{r} \quad (13.8)$$

donde \hat{r} es un vector unitario que apunta radialmente hacia afuera de la Tierra y el signo negativo indica que el campo apunta hacia el centro de la Tierra, como se ilustra en la figura 13.4a. Los vectores de campo en diferentes puntos alrededor de la Tierra varían tanto en dirección como en magnitud. En una pequeña región cerca de la superficie de la Tierra, el campo hacia abajo \vec{g} es aproximadamente constante y uniforme, como se indica en la figura 13.4b. La ecuación 13.8 es válida en todos los puntos *externos* a la superficie de la Tierra, si se supone que la Tierra es esférica. En la superficie de la Tierra, donde $r = R_E$, \vec{g} , \vec{g} tiene una magnitud de 9.80 N/kg. (La unidad N/kg es la misma que m/s^2 .)

MODELO DE ANÁLISIS Partícula en un campo (gravitacional)

Imagine un objeto con masa, la *partícula fuente*. La partícula fuente genera un **campo gravitacional** \vec{g} a través del espacio. El campo gravitacional se evalúa al medir la fuerza sobre una partícula de prueba de masa m_0 y emplear la ecuación 13.7. Ahora suponga que en ese campo se coloca una partícula de masa m . La partícula interactúa con el campo gravitacional, así que experimenta una fuerza gravitacional dada por

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \quad (5.5)$$



Ejemplos:

- un objeto de masa m cerca de la superficie de la Tierra tiene un *peso*, que es el resultado del campo gravitacional que la Tierra genera en el espacio
- un planeta en el sistema solar está en órbita alrededor del Sol, esto debido a la fuerza gravitacional ejercida sobre el planeta por el campo gravitacional generado por el Sol
- un objeto cercano a un agujero negro es atrapado por éste, para nunca escapar, esto debido al intenso campo gravitacional producido por el agujero negro (sección 13.6)
- en la teoría general de la relatividad, el campo gravitacional de un objeto masivo se supone descrito por la *curvatura del espacio-tiempo* (capítulo 38)
- se supone que el campo gravitacional de un objeto masivo es transmitido por partículas llamadas *gravitones*, que hasta la fecha no se han detectado (capítulo 44)



Ejemplo 13.3 El peso de la estación espacial

La Estación Espacial Internacional opera a una altura de 350 km. Una búsqueda en línea de la estación muestra que un peso de 4.11×10^6 N, medido en la superficie de la Tierra, ha sido levantado de la superficie por varias naves espaciales durante el proceso de construcción. ¿Cuál es el peso de la estación espacial cuando está en órbita?

SOLUCIÓN

Conceptualizar La masa de la estación espacial es fija; independiente de su ubicación. En términos de la explicación de esta sección y de la sección 13.2, se advierte que el valor de g se reducirá en la altura de la órbita de la estación espacial. Por tanto, su peso será más pequeño que en la superficie de la Tierra.

Categorizar La estación espacial se modela como una *partícula en un campo gravitacional*.

Analizar Del modelo de partícula en un campo, encuentre la masa de la estación espacial mediante su peso en la superficie de la Tierra:

$$m = \frac{F_{g\text{superficie}}}{g_{\text{superficie}}} = \frac{4.11 \times 10^6 \text{ N}}{9.80 \text{ m/s}^2} = 4.19 \times 10^5 \text{ kg}$$

Utilice la ecuación 13.6 con $h = 350$ km para encontrar la magnitud del campo gravitacional en la ubicación orbital:

$$g_{\text{órbita}} = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2} = \frac{(6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24} \text{ kg})}{(6.37 \times 10^6 \text{ m} + 0.350 \times 10^6 \text{ m})^2} = 8.82 \text{ m/s}^2$$

Aplique otra vez el modelo de partícula en un campo para obtener el peso de la estación espacial en órbita:

$$F_{g\text{órbita}} = mg_{\text{órbita}} = (4.19 \times 10^5 \text{ kg})(8.82 \text{ m/s}^2) = 3.70 \times 10^6 \text{ N}$$

Finalizar Observe que el peso de la Estación Espacial es menor cuando está en órbita, como se esperaba. El peso se reduce un 10% respecto a su valor en la superficie de la Tierra, implicando una disminución de 10% en la magnitud del campo gravitacional.

13.4 Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas

Los humanos han observado los movimientos de los planetas, estrellas y otros objetos celestes durante miles de años. En la historia temprana, dichas observaciones condujeron a los científicos a considerar a la Tierra como el centro del Universo. Este *modelo geocéntrico* fue elaborado y formalizado por el astrónomo griego Claudius Ptolomeo (c. 100-c. 170) en el siglo II y fue aceptado durante los siguientes 1 400 años. En 1543 el astrónomo polaco Nicolás Copérnico (1473-1543) sugirió que la Tierra y los otros planetas giraban en órbitas circulares alrededor del Sol (el *modelo heliocéntrico*).³

El astrónomo danés Tycho Brahe (1546-1601) quería determinar cómo estaban contruidos los cielos y siguió un proyecto para determinar las posiciones de las estrellas y los planetas. Dichas observaciones de los planetas y de 777 estrellas visibles a simple vista se realizaron sólo con un gran sextante y una brújula. (Todavía no se inventaba el telescopio.)

El astrónomo alemán Johannes Kepler fue asistente de Brahe durante una época breve antes de la muerte de éste, después de lo cual adquirió los datos astronómicos de su mentor y pasó 16 años intentando deducir un modelo matemático para el movimiento de los planetas. Tal información es difícil de ordenar porque los planetas en movimiento se observan desde una Tierra en movimiento. Después de muchos cálculos laboriosos, Kepler encontró que los datos de Brahe acerca de la revolución de Marte alrededor del Sol conducían a un modelo exitoso.

³ El modelo heliocéntrico fue propuesto por Aristarco de Samos (aproximadamente 310 aC-230 a.C.) varios siglos antes de Copérnico, pero la teoría no fue ampliamente aceptada.



El análisis completo de Kepler del movimiento planetario se resume en tres enunciados que se conocen como **leyes de Kepler**.

Leyes de Kepler ▶



© iStockphoto.com/GeorgiosArt

Johannes Kepler
Astrónomo alemán (1571-1630)

Kepler es mejor conocido por desarrollar las leyes de movimiento planetario en función de las cuidadosas observaciones de Tycho Brahe.

1. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en un foco.
2. El radio vector dibujado desde el Sol a un planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.
3. El cuadrado del periodo orbital de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica.

Primera ley de Kepler

Los modelos geocéntrico y heliocéntrico del sistema solar sugirieron órbitas circulares para los cuerpos celestes. La primera ley de Kepler indica que la órbita circular es un caso muy especial y que las órbitas elípticas son la situación general. Esta idea fue difícil de aceptar para los científicos de la época, porque creían que las órbitas circulares perfectas de los planetas reflejaban la perfección del cielo.

La figura 13.5 muestra la geometría de una elipse, que sirve como modelo para la órbita elíptica de un planeta. Una elipse se define matemáticamente al elegir dos puntos F_1 y F_2 , cada uno llamado **foco**, y luego dibujar una curva a través de los puntos para los que la suma de las distancias r_1 y r_2 desde F_1 y F_2 , respectivamente, es una constante. La mayor distancia a través del centro entre los puntos en la elipse (y que pasa por cada foco) se llama **eje mayor**, y esta distancia es $2a$. En la figura 13.5, el eje mayor se dibuja a lo largo de la dirección x . La distancia a se llama **semieje mayor**. De igual modo, la distancia más corta a través del centro entre los puntos en la elipse se llama eje menor de longitud $2b$, donde la distancia b es el **semieje menor**. Cualquier foco de la elipse se ubica a una distancia c desde el centro de la elipse, donde $a^2 = b^2 + c^2$. En la órbita elíptica de un planeta alrededor del Sol, éste está en un foco de la elipse. No hay objeto en el otro foco.

La **excentricidad** de una elipse se define como $e = c/a$ y describe la forma general de la elipse. Para una circunferencia, $c = 0$, y por tanto la excentricidad es cero. Mientras más pequeña sea b en comparación con a , más corta es la elipse a lo largo de la dirección y en comparación con su medida en la dirección x en la figura 13.5. A medida que b disminuye, c aumenta y crece la excentricidad e . Por tanto, mayores valores de excentricidad corresponden a elipses más grandes y delgadas. El intervalo de valores de la excentricidad para una elipse es $0 < e < 1$.

Las excentricidades para órbitas planetarias varían enormemente en el sistema solar. La excentricidad de la órbita de la Tierra es 0.017, lo que la hace casi circular. Por otra parte, la excentricidad de la órbita de Mercurio es 0.21, la mayor de los ocho planetas. La figura 13.6a, muestra una elipse con una excentricidad igual a la de la órbita de Mercurio. Note que incluso esta órbita de gran excentricidad es difícil de distinguir de una circunferencia, que es una razón para que la primera ley de Kepler sea un logro admirable. La

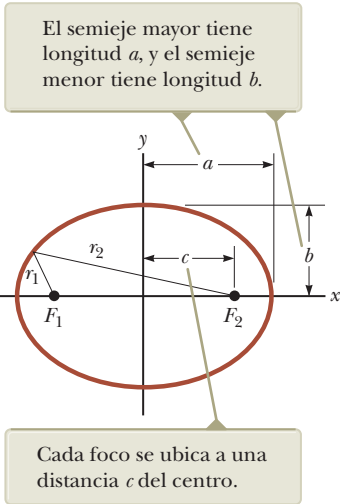
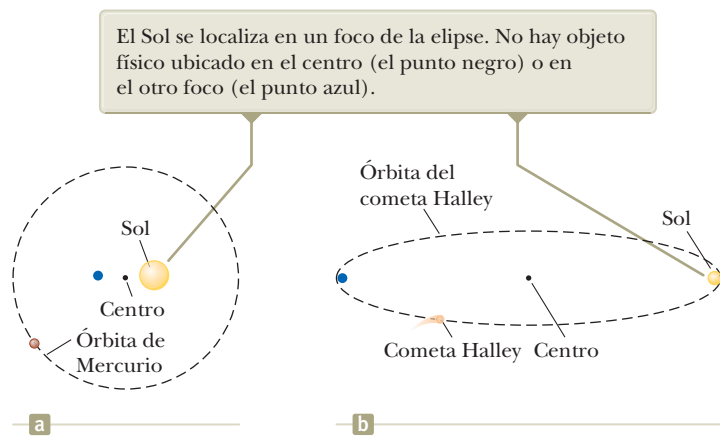


Figura 13.5 Gráfica de una elipse.

Figura 13.6 (a) La forma de la órbita de Mercurio, que tiene la mayor excentricidad ($e = 0.21$) entre los ocho planetas del sistema solar. La línea punteada no es un círculo. Mida los diámetros horizontal y vertical. Difieren en aproximadamente 0.5 mm en la página impresa. (¡Copie y agrande para ver la diferencia más fácilmente!) (b) La forma de la órbita del cometa Halley. La forma de la órbita es correcta; por claridad, el cometa y el Sol se muestran a mayor escala.



excentricidad de la órbita del cometa Halley es 0.97, así que describe una órbita cuyo eje mayor es mucho más largo que su eje menor, como se muestra en la figura 13.6b. Como un resultado, el cometa Halley pasa gran parte de su periodo de 76 años lejos del Sol e invisible a la Tierra. Sólo es visible a simple vista durante una pequeña parte de su órbita, cuando está cerca del Sol.

Ahora imagine un planeta en una órbita elíptica como se muestra en la figura 13.5, con el Sol en el foco F_2 . Cuando el planeta está en el extremo izquierdo del diagrama, la distancia entre el planeta y el Sol es $a + c$. En este punto, llamado *afelio*, el planeta está a su máxima distancia del Sol. (Para un objeto en órbita alrededor de la Tierra, este punto se llama *apogeo*.) Inversamente, cuando el planeta está en el extremo derecho de la elipse, la distancia entre el planeta y el Sol es $a - c$. En este punto, llamado *perihelio* (para una órbita terrestre, el *perigeo*), el planeta está a su distancia mínima desde el Sol.

La primera ley de Kepler es un resultado directo de la naturaleza del inverso al cuadrado de la fuerza gravitacional. Las órbitas circular y elíptica corresponden a objetos que están *ligados* al centro de fuerza gravitacional. Esos objetos incluyen planetas, asteroides y cometas que se mueven repetidamente alrededor del Sol, así como lunas que orbitan un planeta. También hay objetos *no ligados*, como un meteorito proveniente del espacio profundo que podría pasar por el Sol una vez y luego nunca regresar. La fuerza gravitacional entre el Sol y dichos objetos también varía con el inverso al cuadrado de la distancia de separación, y las trayectorias permitidas para tales objetos incluyen parábolas ($e = 1$) e hipérbolas ($e > 1$).

Segunda ley de Kepler

Se puede demostrar que la segunda ley de Kepler (página 340) es una consecuencia del modelo de sistema aislado para cantidad de movimiento angular. Considere un planeta de masa M_p que se mueve en torno al Sol en una órbita elíptica (figura 13.7a). Suponga al planeta como un sistema. El Sol se modela como mucho más pesado que el planeta, de modo que el Sol no se mueve. La fuerza gravitacional que ejerce el Sol sobre el planeta es una fuerza central, siempre a lo largo del radio vector, dirigido hacia el Sol (figura 13.7a). El momento de torsión sobre el planeta debido a esta fuerza central, respecto a un eje a través del Sol, es cero porque \vec{F}_g es paralela a \vec{r} .

Por tanto, ya que el momento de torsión externo sobre el planeta es cero, se modela como un sistema aislado para cantidad de movimiento angular (sección 11.4), y la cantidad de movimiento angular \vec{L} del planeta es una constante del movimiento:

$$\Delta \vec{L} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{constante}$$

Se evalúa \vec{L} para el planeta,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = M_p \vec{r} \times \vec{v} \rightarrow L = M_p |\vec{r} \times \vec{v}| \quad (13.9)$$

Este resultado se puede relacionar con la siguiente consideración geométrica. En un intervalo de tiempo dt , el radio vector \vec{r} en la figura 13.7b barre el área dA , que es igual a la mitad del área $|\vec{r} \times d\vec{r}|$ del paralelogramo formado por los vectores \vec{r} y $d\vec{r}$. Ya que el desplazamiento del planeta en el intervalo de tiempo dt está dado por $d\vec{r} = \vec{v} dt$,

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v} dt| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| dt$$

en donde puede emplearse el valor que la ecuación 13.9 da para el valor absoluto del producto cruz, así:

$$dA = \frac{1}{2} \left(\frac{L}{M_p} \right) dt$$

Divida ambos lados por dt para obtener:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2M_p} \quad (13.10)$$

donde L y M_p son constantes. Este resultado muestra que la derivada dA/dt es constante, el radio vector desde el Sol a cualquier planeta barre áreas iguales en tiempos iguales como establecido por la segunda ley de Kepler.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 13.2

¿Dónde está el Sol? El Sol se ubica en un foco de la órbita elíptica de un planeta. *No se localiza en el centro de la elipse.*

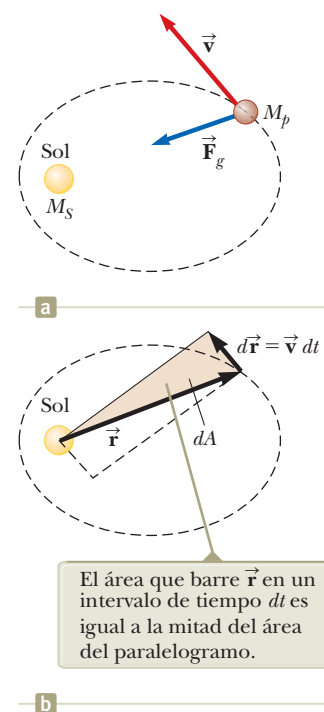


Figura 13.7 (a) La fuerza gravitacional que actúa sobre un planeta se dirige hacia el Sol. (b) Durante un intervalo de tiempo dt , los vectores \vec{r} y $d\vec{r} = \vec{v} dt$ forman un paralelogramo.

Esta conclusión es un resultado de la fuerza gravitacional que es una fuerza central, que a su vez implica que la cantidad de movimiento angular del planeta es constante. Por tanto, la ley aplica a *cualquier* situación que involucra una fuerza central, sea o no del inverso al cuadrado.

Tercera ley de Kepler

La tercera ley de Kepler (página 340) se puede predecir a partir de la ley del inverso al cuadrado para órbitas circulares y de los análisis de modelos. Considere un planeta de masa M_p que se supone en movimiento alrededor del Sol (masa M_S) en una órbita circular, como en la figura 13.8. Ya que la fuerza gravitacional proporciona la aceleración centrípeta del planeta conforme se mueve en círculo, se modela el planeta como una partícula sujeta a una fuerza neta y como una partícula en movimiento circular uniforme, y se incorpora la ley de Newton de gravitación universal,

$$F_g = M_p a \rightarrow \frac{GM_S M_p}{r^2} = M_p \left(\frac{v^2}{r} \right)$$

La rapidez orbital del planeta es $2\pi r/T$, donde T es el periodo; por tanto, la expresión anterior se convierte en

$$\frac{GM_S}{r^2} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r}$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S} \right) r^3 = K_S r^3$$

donde K_S es una constante dada por

$$K_S = \frac{4\pi^2}{GM_S} = 2.97 \times 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3$$

Esta ecuación también es válida para órbitas elípticas si se sustituye r con la longitud a del semieje mayor (figura 13.5):

Tercera ley de Kepler ▶

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S} \right) a^3 = K_S a^3 \quad (13.11)$$

La ecuación 13.11 es la tercera ley de Kepler: el cuadrado del periodo es proporcional al cubo del semieje mayor. Como el semieje mayor de una órbita circular es su radio, esta ecuación es válida tanto para órbitas circulares como para elípticas. Observe que la constante de proporcionalidad K_S es independiente de la masa del planeta. Por tanto, la ecuación 13.8 es válida para *cualquier* planeta.⁴ Si tuviera que considerar la órbita de un satélite como la Luna en torno a la Tierra, la constante tendría un valor diferente, con la masa del Sol sustituida por la masa de la Tierra, es decir, $K_T = 4\pi^2/GM_T$.

La tabla 13.2, es un conjunto de datos útiles para planetas y otros objetos en el sistema solar. La columna de la extrema derecha verifica que la relación T^2/r^3 es constante para todos los objetos que orbitan el Sol. Las pequeñas variaciones en los valores de esta columna son el resultado de incertidumbres en los datos observados para los periodos y semiejes mayores de los objetos. Trabajos astronómicos recientes revelaron la existencia de un gran número de objetos del sistema solar más allá de la órbita de Neptuno. En general, dichos objetos se encuentran en el *cinturón Kuiper*, una región que se extiende desde casi 30 UA (el radio orbital de Neptuno) hasta 50 UA. (Una UA es una *unidad astronómica*, igual al radio de la órbita de la Tierra.) Estimaciones actuales identifican, en esta región, al menos 70 000 objetos con diámetros mayores a 100 km. El primer objeto del cinturón Kuiper (KBO) es Plutón, descubierto en 1930, y anteriormente clasificado como planeta. A partir de 1992, se han detectado muchos más. Varios tienen diámetros en el rango de 1 000 km, como Varuna (descubierto en 2000), Ixion (2001), Quaoar (2002), Sedna (2003),

⁴La ecuación 13.11 de hecho es una proporción porque la razón entre las dos cantidades T^2 y a^3 es una constante. En una proporción, no se requiere que las variables estén limitadas sólo a la primera potencia.



TABLA 13.2 Datos planetarios útiles

Cuerpo	Masa (kg)	Radio medio (m)	Periodo de revolución (s)	Distancia media desde el Sol (m)	$\frac{T^2}{r^3}$ (s ² /m ³)
Mercurio	3.30×10^{23}	2.44×10^6	7.60×10^6	5.79×10^{10}	2.98×10^{-19}
Venus	4.87×10^{24}	6.05×10^6	1.94×10^7	1.08×10^{11}	2.99×10^{-19}
Tierra	5.97×10^{24}	6.37×10^6	3.156×10^7	1.496×10^{11}	2.97×10^{-19}
Marte	6.42×10^{23}	3.39×10^6	5.94×10^7	2.28×10^{11}	2.98×10^{-19}
Júpiter	1.90×10^{27}	6.99×10^7	3.74×10^8	7.78×10^{11}	2.97×10^{-19}
Saturno	5.68×10^{26}	5.82×10^7	9.29×10^8	1.43×10^{12}	2.95×10^{-19}
Urano	8.68×10^{25}	2.54×10^7	2.65×10^9	2.87×10^{12}	2.97×10^{-19}
Neptuno	1.02×10^{26}	2.46×10^7	5.18×10^9	4.50×10^{12}	2.94×10^{-19}
Plutón ^a	1.25×10^{22}	1.20×10^6	7.82×10^9	5.91×10^{12}	2.96×10^{-19}
Luna	7.35×10^{22}	1.74×10^6	—	—	—
Sol	1.989×10^{30}	6.96×10^8	—	—	—

^aEn agosto de 2006, la Unión Astronómica Internacional adoptó una definición de planeta que separa a Plutón de los otros ocho planetas. Ahora Plutón se define como un "planeta enano", como el asteroide Ceres.

Haumea (2004), Orcus (2004) y Makemake (2005). Un KBO, Eris, descubierto en 2005, se piensa que es similar en tamaño a Plutón y aproximadamente un 27% más masivo. Otros KBO, todavía carecen de nombre, pero actualmente se indican mediante su año de descubrimiento y un código, como 2010 EK139 y 2015 FG345.

Un subconjunto de aproximadamente 1 400 KBO se llama "Plutinos" porque, como Plutón, muestran un fenómeno de resonancia y orbitan el Sol dos veces en el mismo intervalo de tiempo que Neptuno da vuelta tres veces. La aplicación contemporánea de las leyes de Kepler y propuestas tan exóticas como el intercambio de cantidad de movimiento angular planetario y la migración de los planetas sugiere lo emocionante de esta área activa de la investigación actual.

- EJEMPLO RÁPIDO 13.3** Un asteroide está en una órbita elíptica altamente excéntrica alrededor del Sol. El periodo de la órbita del asteroide es de 90 días. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero acerca de la posibilidad de una colisión entre este asteroide y la Tierra? (a) No hay peligro de posible colisión. (b) Existe posibilidad de una colisión. (c) No se tiene suficiente información para determinar si hay peligro de colisión.

Ejemplo 13.4 La masa del Sol

En la semblanza de apertura, se preguntaba cómo determinar la masa del Sol. Ahora que hemos estudiado la tercera ley de Kepler, calcule la masa del Sol.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Apoyándose en la representación matemática de la tercera ley de Kepler expresada por la ecuación 13.11, se observa que la masa del objeto central en un sistema gravitacional está relacionada con el tamaño orbital y con el periodo de objetos en órbita en torno al objeto central.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución relativamente simple.

Resuelva la ecuación 13.11 para la masa del Sol: $M_s = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$

Sustituya los valores conocidos: $M_s = \frac{4\pi^2(1.496 \times 10^{11} \text{ m})^3}{(6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(3.156 \times 10^7 \text{ s})^2} = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

En el ejemplo 13.2, un entendimiento de las fuerzas gravitacionales permitió encontrar algo sobre la densidad del núcleo de la Tierra, y ahora se ha empleado dicho entendimiento para determinar la masa del Sol! Para responder a su pregunta sobre las masas de planetas, podemos realizar el mismo cálculo utilizando el tamaño orbital y el periodo de una luna de un planeta para encontrar la masa planetaria. Ni la tercera ley de Kepler ni la ley de gravitación universal de Newton pueden usarse para determinar la masa del objeto en órbita, y los planetas y KBO para los que tenemos datos de masa precisos son aquellos con lunas o sobre los cuales hemos colocado una nave espacial en órbita.

Ejemplo 13.5 Un satélite geosíncrono

Considere un satélite de masa m que se mueve en una órbita circular alrededor de la Tierra con una rapidez constante v y a una altura h sobre la superficie de la Tierra, como se muestra en la figura 13.9.

(A) Determine la rapidez del satélite en términos de G , h , R_E (el radio de la Tierra) y M_E (la masa de la Tierra).

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que el satélite se mueve alrededor de la Tierra en una órbita circular bajo la influencia de la fuerza gravitacional. Este movimiento es similar a efectuado por la Estación Espacial Internacional, el telescopio Hubble y otros objetos en órbita alrededor de la Tierra.

Categorizar El satélite se mueve en una órbita circular con rapidez constante. Por tanto, el satélite se clasifica como una *partícula en movimiento circular uniforme* y también como una *partícula bajo una fuerza neta*.

Analizar La única fuerza ejercida sobre el satélite es la fuerza gravitacional, que actúa hacia el centro de la Tierra y mantiene al satélite en su órbita circular.

Al satélite se le pueden aplicar los modelos de partícula bajo una fuerza neta y de partícula en movimiento circular uniforme:

$$F_g = ma \rightarrow G \frac{M_E m}{r^2} = m \left(\frac{v^2}{r} \right)$$

Resuelva para v y observe que la distancia r del centro de la Tierra al satélite es $r = R_T + h$:

$$(1) \quad v = \sqrt{\frac{GM_E}{r}} = \sqrt{\frac{GM_E}{R_E + h}}$$

(B) Si el satélite es *geosíncrono* (es decir, parece permanecer en una posición fija sobre la Tierra), ¿qué tan rápido se mueve a través del espacio?

SOLUCIÓN

Para que parezca mantenerse en una posición fija sobre la Tierra, el periodo del satélite debe ser 24 h = 86 400 s y el satélite debe estar en órbita directamente sobre el ecuador.

Resuelva la tercera ley de Kepler (ecuación 13.11), con $a = r$ y $M_s \rightarrow M_E$, para r :

$$r = \left(\frac{GM_E T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

Sustituya valores numéricos:

$$r = \left[\frac{(6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24} \text{ kg})(86\,400 \text{ s})^2}{4\pi^2} \right]^{1/3}$$

$$= 4.22 \times 10^7 \text{ m}$$

Utilice la ecuación (1) para encontrar la rapidez del satélite:

$$v = \sqrt{\frac{(6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24} \text{ kg})}{4.22 \times 10^7 \text{ m}}}$$

$$= 3.07 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Finalizar El valor de r aquí calculado se traduce a una altura del satélite sobre la superficie de la Tierra de casi 36 000 km. Por tanto, los satélites geosíncronos tienen la ventaja de permitir que una antena en tierra apunte en una dirección fija, pero existe la desventaja en que las señales entre la Tierra y el satélite deben viajar una distancia más larga. Debido a su gran altura, es difícil emplear satélites síncronos para observación óptica de la superficie de la Tierra.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si el movimiento del satélite en la parte (A) tuviera lugar a una altura h sobre la superficie de otro planeta más masivo que la Tierra, pero del mismo radio? ¿El satélite se movería con mayor o menor rapidez de la que se mueve alrededor de la Tierra?

Respuesta Si el planeta ejerce una mayor fuerza gravitacional sobre el satélite debido a su mayor masa, el satélite debe moverse con una rapidez superior para evitar un movimiento hacia la superficie. Esta conclusión es consistente con las predicciones de la ecuación (1), lo cual muestra que, como la rapidez v es proporcional a la raíz cuadrada de la masa del planeta, la rapidez aumenta conforme se incrementa la masa del planeta.

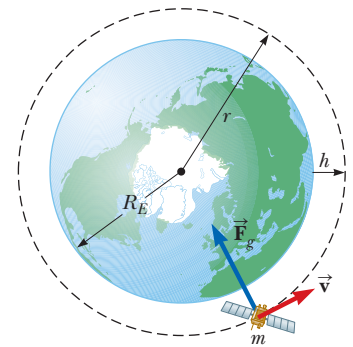


Figura 13.9 (Ejemplo 13.5) Un satélite de masa m se mueve alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio r con rapidez constante v . La única fuerza que actúa sobre el satélite es la fuerza gravitacional \vec{F}_g . (Dibujo no hecho a escala.)



13.5 Energía potencial gravitacional

En el capítulo 7 se introdujo el concepto de energía potencial gravitacional, que es la energía asociada con la configuración de un sistema de objetos que interactúan mediante la fuerza gravitacional. Se enfatizó que la función de energía potencial gravitacional $U = mgy$ (ecuación 7.19) para un sistema partícula-Tierra sólo es válida cuando la partícula de masa m reside en ese campo. Esto también está restringido para posiciones del objeto cerca de la superficie de la Tierra, donde la fuerza gravitacional es independiente de y . Sin embargo, en realidad, ya que la fuerza gravitacional varía como $1/r^2$ como se muestra en la ecuación 13.8, se espera que una función más general de energía potencial, una que sea válida sin las restricciones mencionadas, sea diferente de $U = mgy$.

De la ecuación 7.27 recuerde que el cambio en la energía potencial de un sistema, asociado con un desplazamiento dado de un integrante del sistema, se define como el negativo del trabajo interno realizado por la fuerza sobre dicho integrante durante el desplazamiento:

$$\Delta U = U_f - U_i = - \int_{r_i}^{r_f} F(r) dr \tag{13.12}$$

Se puede emplear este resultado para evaluar la función generalizada de energía potencial gravitacional. Considere una partícula de masa m que se mueve entre dos puntos A y B sobre la superficie de la Tierra (figura 13.10). La partícula está sujeta a la fuerza gravitacional dada por la ecuación 13.1. Esta fuerza se expresa como:

$$F(r) = - \frac{GM_E m}{r^2}$$

donde el signo negativo indica que la fuerza es de atracción. Al sustituir esta expresión para $F(r)$ en la ecuación 13.12, se puede calcular el cambio en la función de energía potencial gravitacional para el sistema partícula-Tierra conforme cambia la distancia de separación r :

$$U_f - U_i = GM_E m \int_{r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2} = GM_E m \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_i}^{r_f}$$

$$U_f - U_i = -GM_E m \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) \tag{13.13}$$

Como siempre, la elección de una configuración de referencia para la energía potencial es por completo arbitraria. Es costumbre seleccionar la configuración de referencia para energía potencial cero como la misma para la cual la fuerza es cero.

Al tomar $U_i = 0$ en $r_i = \infty$, se obtiene el importante resultado:

$$U_g(r) = - \frac{GM_E m}{r} \tag{13.14}$$

Esta expresión se aplica cuando la partícula está separada del centro de la Tierra una distancia r , siempre que $r \geq R_T$. El resultado no es válido para partículas dentro de la Tierra, donde $r < R_T$. Dada la elección de U_i , la función U siempre es negativa (figura 13.11).

Aunque la ecuación 13.14 se dedujo para el sistema partícula-Tierra, una ecuación de forma similar se puede aplicar a dos partículas cualesquiera. Es decir, la energía potencial gravitacional asociada con cualquier par de partículas de masas m_1 y m_2 separadas una distancia r es

$$U_g(r) = - \frac{Gm_1 m_2}{r} \tag{13.15}$$

Esta expresión muestra que la energía potencial gravitacional para cualquier par de partículas varía como $1/r$, mientras que la fuerza entre ellas cambia como $1/r^2$. Además, la energía potencial es negativa porque la fuerza es de atracción y se eligió la energía

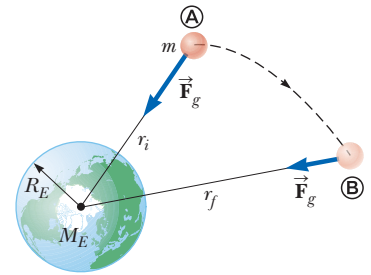


Figura 13.10 A medida que una partícula de masa m se mueve de a sobre la superficie de la Tierra, la energía potencial gravitacional del sistema partícula-Tierra cambia de acuerdo con la ecuación 13.12.

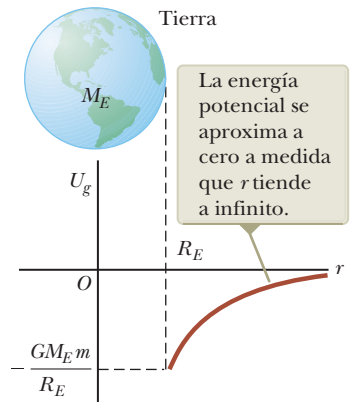


Figura 13.11 Gráfica de la energía potencial gravitacional U contra r para el sistema de un objeto sobre la superficie de la Tierra.

◀ Energía potencial gravitacional del sistema Tierra-partícula



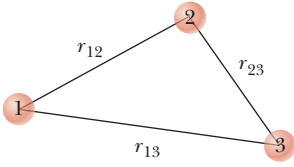


Figura 13.12 Tres partículas en interacción.

potencial como cero cuando la separación de las partículas es infinita. Debido a que la fuerza entre las partículas es atractiva, un agente externo debe hacer trabajo positivo para aumentar la separación entre ellas. El trabajo efectuado por el agente externo produce un aumento en la energía potencial conforme se separan las dos partículas. Es decir, U se vuelve menos negativa a medida que r aumenta.

Este concepto se puede extender a tres o más partículas. En este caso, la energía potencial total del sistema es la suma sobre todos los pares de partículas. Cada par aporta un término de la forma dada por la ecuación 13.15. Por ejemplo, si el sistema contiene tres partículas como en la figura 13.12,

$$U_{\text{total}} = U_{12} + U_{13} + U_{23} = -G \left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} \right)$$

El valor absoluto de U_{total} representa el trabajo necesario para separar las partículas una distancia infinita.

Ejemplo 13.6 El cambio en energía potencial

Una partícula de masa m se desplaza a través de una pequeña distancia vertical Δy cerca de la superficie de la Tierra. Demuestre que en esta situación la expresión general para el cambio en energía potencial gravitacional dada por la ecuación 13.13 se reduce a la familiar relación $\Delta U = mg\Delta y$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Compare las dos diferentes situaciones para las que se desarrollaron expresiones para la energía potencial gravitacional: (1) un planeta y un objeto que están separados, la expresión de energía para ellos es la ecuación 13.14, y (2) un objeto pequeño en la superficie de un planeta, la expresión de energía para ellos es la ecuación 7.19. Se quiere demostrar que estas dos expresiones son equivalentes.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución.

Combine las fracciones en la ecuación 13.13:

$$(1) \quad \Delta U_g = -GM_E m \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) = GM_E m \left(\frac{r_f - r_i}{r_i r_f} \right)$$

Evalúe $r_f - r_i$ y $r_i r_f$ si las posiciones inicial y final de la partícula están cerca de la superficie de la Tierra:

$$r_f - r_i = \Delta y \quad r_i r_f \approx R_E^2$$

Sustituya estas expresiones en la ecuación (1):

$$\Delta U_g \approx GM_E m \left(\frac{\Delta y}{R_E^2} \right) = m \left(\frac{GM_E}{R_E^2} \right) \Delta y = mg \Delta y$$

donde $g = GM_T/R_T^2$ a partir de la ecuación 13.5.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que usted realiza estudios en la atmósfera superior y su supervisor le pide encontrar la altura en la atmósfera terrestre a la cual la “ecuación de superficie” $\Delta U = mg\Delta y$ da un error de 1.0% en el cambio en la energía potencial. ¿Cuál es esta altura?

Respuesta Como la ecuación de superficie supone un valor constante para g , dará un valor ΔU mayor que el valor dado por la ecuación general, ecuación 13.13.

Obtenga una razón que dé un error de 1.0%:

$$\frac{\Delta U_{\text{superficie}}}{\Delta U_{\text{general}}} = 1.010$$

Sustituya las expresiones para cada uno de estos cambios ΔU :

$$\frac{mg \Delta y}{GM_E m (\Delta y / r_i r_f)} = \frac{g r_i r_f}{GM_E} = 1.010$$

Sustituya para r_i , r_f y g de la ecuación 13.5:

$$\frac{(GM_E/R_E^2) R_E (R_E + \Delta y)}{GM_E} = \frac{R_E + \Delta y}{R_E} = 1 + \frac{\Delta y}{R_E} = 1.010$$

Resuelva para Δy :

$$\Delta y = 0.010 R_E = 0.010 (6.37 \times 10^6 \text{ m}) = 6.37 \times 10^4 \text{ m} = 63.7 \text{ km}$$



13.6 Consideraciones energéticas en el movimiento planetario y de satélites

Con la expresión general para la energía potencial gravitacional desarrollada en la sección 13.5, se puede aplicar los análisis de modelos de energía a sistemas gravitacionales. Considere un objeto de masa m que se mueve con una rapidez v en la vecindad de un objeto masivo de masa M , donde $M \gg m$. El sistema podría ser un planeta moviéndose alrededor del Sol, un satélite en órbita en torno a la Tierra o un cometa que hace un vuelo una sola vez alrededor del Sol. Si suponemos que el objeto de masa M está en reposo en un marco de referencia inercial, la energía mecánica total E del sistema de dos objetos, cuando éstos están separados una distancia r , es la suma de la energía cinética del objeto de masa m y la energía potencial del sistema, dada por la ecuación 13.15:

$$E = K + U_g$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \quad (13.16)$$

Si el sistema está aislado de objetos de masas m y M , y no hay fuerzas no conservativas actuando dentro del sistema, entonces la energía mecánica del sistema dada por la ecuación 13.16 es la energía total del sistema y esta energía se conserva:

$$\Delta K + \Delta U_g = 0 \rightarrow E_i = E_f$$

Por tanto, conforme el objeto de masa m se mueve de a a b en la figura 13.10, la energía total permanece constante y la ecuación 13.16 da

$$\frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GMm}{r_i} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GMm}{r_f} \quad (13.17)$$

Al combinar este enunciado de conservación de energía con la anterior discusión de conservación de cantidad de movimiento lineal, se observa que la energía total y la cantidad de movimiento angular total de un sistema de dos objetos ligados gravitacionalmente, son constantes de movimiento.

La ecuación 13.16 muestra que E puede ser positiva, negativa o cero, dependiendo del valor de v . Sin embargo, para un sistema ligado como el sistema Tierra-Sol, E necesariamente es menor que cero porque se eligió la convención de que $U_g \rightarrow 0$ conforme $r \rightarrow \infty$.

Fácilmente se puede establecer que $E < 0$ para el sistema que consiste de un objeto de masa m que se mueve en una órbita circular alrededor de un objeto de masa $M \gg m$ (figura 13.13). Si el objeto de masa m se modela como una partícula bajo una fuerza neta y también como una partícula en movimiento circular uniforme, se tiene que

$$F_g = ma \rightarrow \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Al multiplicar ambos lados por r y dividir por 2 se obtiene

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r} \quad (13.18)$$

Al sustituir esta ecuación en la ecuación 13.16:

$$E = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r}$$

$$E = -\frac{GMm}{2r} \quad (\text{órbitas circulares}) \quad (13.19)$$

Este resultado muestra que la energía mecánica total es negativa en el caso de órbitas circulares. Observe que la energía cinética es positiva e igual a la mitad del valor absoluto de la energía potencial.

La energía mecánica total también es negativa en el caso de órbitas elípticas. La expresión para E para órbitas elípticas es la misma que la ecuación 13.19 con r sustituida por

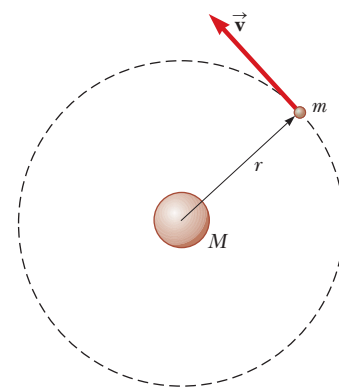


Figura 13.13 Un objeto de masa m que se mueve en una órbita circular en torno a un objeto mucho mayor de masa M .

◀ Energía total para órbitas circulares de un objeto de masa m en torno a un objeto de masa $M \gg m$.



la longitud del semieje mayor a :

Energía total para órbitas elípticas de un objeto de masa m en torno a un objeto de masa $M \gg m$.

$$E = -\frac{GMm}{2a} \quad (\text{órbitas elípticas}) \quad (13.20)$$

- EJEMPLO RÁPIDO 13.4** Un cometa se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. ¿Cuál punto en su órbita (perihelio o afelio) representa el valor más alto de (a) la rapidez del cometa, (b) la energía potencial del sistema cometa-Sol, (c) la energía cinética del cometa y (d) la energía total del sistema cometa-Sol?

Ejemplo 13.7 Cambio de la órbita de un satélite

Un vehículo de transporte espacial libera un satélite de comunicaciones de 470 kg mientras está en órbita a 280 km sobre la superficie de la Tierra. Un motor cohete en el satélite lo pone en una órbita geosíncrona. ¿Cuánta energía debe proporcionar el motor?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Note que la altura de 280 km es mucho más baja que la de un satélite geosíncrono, 36 000 km, como se mencionó en el ejemplo 13.5. Por tanto, se debe gastar energía para elevar el satélite a esta posición mucho más alta.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución.

Encuentre el radio inicial de la órbita del satélite cuando aún está en la bahía de carga del trasbordador:

$$r_i = R_E + 280 \text{ km} = 6.65 \times 10^6 \text{ m}$$

Aplique la ecuación 13.19 para encontrar la diferencia en energías para el sistema satélite-Tierra con el satélite en los radios inicial y final:

$$\Delta E = E_f - E_i = -\frac{GM_E m}{2r_f} - \left(-\frac{GM_E m}{2r_i} \right) = -\frac{GM_E m}{2} \left(\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)$$

Sustituya valores numéricos empleando $r_f = 4.22 \times 10^7 \text{ m}$ del ejemplo 13.5:

$$\Delta E = -\frac{(6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24} \text{ kg})(470 \text{ kg})}{2} \times \left(\frac{1}{4.22 \times 10^7 \text{ m}} - \frac{1}{6.65 \times 10^6 \text{ m}} \right) = 1.19 \times 10^{10} \text{ J}$$

que es la energía equivalente a 89 galones de gasolina. Los ingenieros de la NASA deben tomar en cuenta el cambio de masa de la nave mientras expulsa combustible quemado, algo que no se hizo en este caso. ¿Esperaría que al incluir dicho cálculo el efecto de esta masa cambiante, produzca una cantidad de energía mayor o menor que la requerida por el motor?

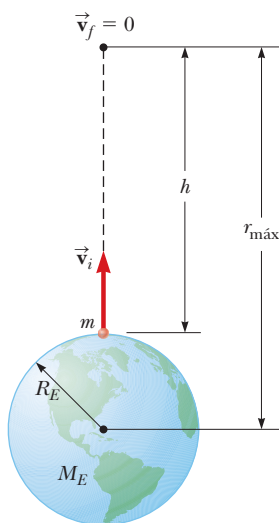


Figura 13.14 Un objeto de masa m es proyectado hacia arriba desde la superficie de la Tierra, con una rapidez inicial v_i alcanza una altura máxima h .

Rapidez de escape

Suponga que un objeto de masa m se proyecta verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una rapidez inicial v_i , como se muestra en la figura 13.14. Se pueden emplear consideraciones de energía para encontrar el valor de la rapidez inicial necesaria para permitir que el objeto alcance una cierta distancia del centro de la Tierra. La ecuación 13.16 da la energía total del sistema para cualquier configuración. Como el objeto es proyectado hacia arriba desde la superficie de la Tierra, $v = v_i$ y $r = r_i = R_T$. Cuando el objeto alcanza su altura máxima, $v = v_f = 0$ y $r = r_f = r_{\text{máx}}$. Ya que el sistema objeto-Tierra es aislado, se sustituyen estos valores en la expresión del modelo de sistema aislado dada por la ecuación 13.17:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_E m}{R_E} = -\frac{GM_E m}{r_{\text{máx}}}$$

Al resolver para v_i^2 se obtiene

$$v_i^2 = 2GM_E \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{r_{\text{máx}}} \right) \quad (13.21)$$

Para una altura máxima dada $h = r_{\text{máx}} - R_T$, se puede emplear esta ecuación para encontrar la rapidez inicial requerida.

Ahora está en posición de calcular la **rapidez de escape**, que es la rapidez mínima que debe tener el objeto en la superficie de la Tierra para aproximarse a una distancia de separación infinita desde la Tierra. Al viajar con esta rapidez mínima, el objeto continúa moviéndose cada vez más lejos de la Tierra conforme su rapidez se aproxima asintóticamente a cero. Al hacer $r_{\text{máx}} \rightarrow \infty$ en la ecuación 13.21 e identificar v_i como v_{esc} , resulta

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} \quad (13.22)$$

◀ Velocidad de escape de la Tierra

Esta expresión para v_{esc} es independiente de la masa del objeto. En otras palabras, una nave espacial tiene la misma rapidez de escape que una molécula. Además, el resultado es independiente de la dirección de la velocidad e ignora la resistencia del aire. Tenga en cuenta que un objeto ya tiene cierta velocidad inicial en la superficie de la Tierra debido a su rotación.

Si al objeto se le da una rapidez inicial igual a v_{esc} , la energía total del sistema es igual a cero. Advertía que, cuando $r \rightarrow \infty$, la energía cinética del objeto y la energía potencial del sistema son cero. Sin embargo, si v_i es mayor que v_{esc} , la energía total del sistema es mayor que cero y el objeto tiene alguna energía cinética residual conforme $r \rightarrow \infty$.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 13.3

En realidad no puede escapar

Aunque la ecuación 13.22 proporciona la “rapidez de escape” de la Tierra, escapar por completo de la influencia gravitacional de la Tierra es imposible porque la fuerza gravitacional es de alcance infinito.

Ejemplo 13.8 Rapidez de escape de una roca

Superman recoge una roca de 20 kg y la arroja al espacio. ¿Qué velocidad mínima debe tener en la superficie de la Tierra para moverse infinitamente lejos de la Tierra?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine a Superman tirando la roca desde la superficie de la Tierra de modo que se mueva cada vez más lejos, viajando más y más lentamente, con su rapidez tendiendo a cero. Sin embargo, su rapidez nunca llegará a cero, así que el objeto nunca dará vuelta y regresará.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución.

Aplique la ecuación 13.22 para encontrar la rapidez de escape:

$$\begin{aligned} v_{\text{esc}} &= \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} = \sqrt{\frac{2(6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2)(5.97 \times 10^{24} \text{ kg})}{6.37 \times 10^6 \text{ m}}} \\ &= 1.12 \times 10^4 \text{ m/s} \end{aligned}$$

La rapidez de escape calculada corresponde más o menos a 25 000 mi/h. La masa de la roca no aparece en el cálculo. Por tanto, esta es también la velocidad de escape para que Superman arroje una nave espacial de 5 000 kg desde la superficie de la Tierra. Además, si una nave espacial está en una órbita alrededor de la Tierra, su radio orbital r es similar al de la Tierra, R_T , entonces la velocidad de escape que hemos calculado también es válida para la situación de no superhéroe de una nave espacial en órbita disparando motores para escapar de esa órbita.

Las ecuaciones 13.21 y 13.22 se pueden aplicar a objetos proyectados desde cualquier planeta. Es decir, en general, la rapidez de escape de la superficie de cualquier planeta de masa M y radio R es

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (13.23)$$

◀ Velocidad de escape de la superficie de un planeta de masa M y radio R .

En la tabla 13.3 (página 350) se proporcionan magnitudes de rapidez de escape para los planetas, la Luna y el Sol. Los valores varían de 2.3 km/s para la Luna a más o menos 618 km/s para el Sol. Estos resultados, junto con algunas ideas de la teoría cinética de los gases (vea el capítulo 20), explican por qué algunos planetas tienen atmósferas y otros no. Como se verá más adelante, a una temperatura dada la energía cinética promedio de una molécula de gas sólo depende de la masa de la molécula. Las moléculas más ligeras, como el hidrógeno y el helio, tienen una rapidez promedio mayor que las moléculas más pesa-

TABLA 13.3 Velocidad de escape de las superficies de los planetas, Luna y Sol

Planeta	v_{esc} (km/s)
Mercurio	4.3
Venus	10.3
Tierra	11.2
Marte	5.0
Júpiter	60
Saturno	36
Urano	22
Neptuno	24
Luna	2.3
Sol (desde la órbita de la Tierra)	42
Sol (desde la superficie del Sol)	618

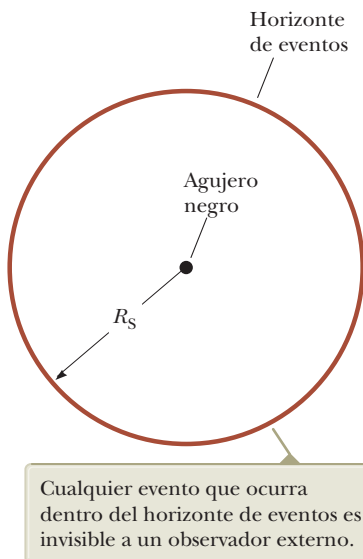


Figura 13.15 Un agujero negro. La distancia R_s es igual al radio de Schwarzschild.

das a la misma temperatura. Cuando la rapidez promedio de las moléculas más ligeras no es mucho menor que la rapidez de escape de un planeta, una fracción significativa de ellas tienen oportunidad de escapar.

Este mecanismo también explica por qué la Tierra no retiene moléculas de hidrógeno y átomos de helio en su atmósfera pero sí retiene moléculas más pesadas, como oxígeno y nitrógeno. Por otra parte, la rapidez de escape de Júpiter es tan grande que le permite al planeta retener hidrógeno, el principal componente de su atmósfera.

Agujeros negros

En el ejemplo 11.6, se describió brevemente un raro evento llamado supernova, la explosión catastrófica de una estrella muy masiva. El material que permanece en el núcleo central de tal objeto continúa colapsándose y el destino final del núcleo depende de su masa. A medida que la estrella colapsa hacia adentro, los electrones y protones se fusionan para formar neutrones, y nace un objeto hecho puramente de neutrones, una estrella de neutrones, como se discute en el ejemplo 11.6. El colapso interno de dicha estrella se detiene por la repulsión mecánica cuántica de neutrones llamada presión de *degeneración de neutrones*, y la masa de la estrella se comprime a un radio de aproximadamente 10 km. (En la Tierra, ¡una cucharadita de este material pesaría aproximadamente 5 mil millones de toneladas!). La velocidad de escape de una estrella de neutrones es típicamente $> 0.5c$, donde c es la velocidad de la luz.

Una muerte estelar todavía más inusual puede presentarse cuando el núcleo tiene una masa mayor que aproximadamente tres masas solares. El colapso puede continuar hasta que la estrella se convierta en un objeto muy pequeño en el espacio, al que comúnmente se le conoce como **agujero negro**. En efecto, los agujeros negros son restos de estrellas que colapsaron bajo su propia fuerza gravitacional. Si un objeto como una nave espacial se acerca a un agujero negro, el objeto experimenta una fuerza gravitacional extremadamente intensa y queda atrapado para siempre.

La rapidez de escape para un agujero negro es muy alta debido a la concentración de la masa de la estrella en una esfera de radio muy pequeño (vea la ecuación 13.23). Si la rapidez de escape supera la rapidez de la luz c , la radiación del objeto (como la luz visible) no puede escapar y el objeto parece ser negro (de ahí el origen de la terminología “agujero negro”). El radio crítico R_s en el cual la rapidez de escape es c se llama **radio de Schwarzschild** (figura 13.15). La superficie imaginaria de una esfera de este radio que rodea al agujero negro se llama **horizonte de eventos**, que es el límite de qué tan cerca se puede aproximar al agujero negro y le es posible escapar.

Existe evidencia de que en los centros de las galaxias existen agujeros negros supermasivos, con masas mucho mayores que la del Sol. (Hay fuerte evidencia de un agujero negro supermasivo con masa de 4.0-4.3 millones de masas solares en el centro de nuestra galaxia.)

Materia oscura

La ecuación (1) en el ejemplo 13.5 muestra que la rapidez de un objeto en órbita alrededor de la Tierra disminuye conforme el objeto se aleja de la Tierra:

$$v = \sqrt{\frac{GM_E}{r}} \quad (13.24)$$

Al emplear los datos en la tabla 13.2 para encontrar las magnitudes de velocidad de los planetas en sus órbitas en torno al Sol, se obtiene el mismo comportamiento para los planetas. La figura 13.16 muestra este comportamiento para los ocho planetas de nuestro sistema solar. La predicción teórica de la rapidez del planeta, como una función de la distancia al Sol, se indica mediante la curva rojo marrón, en donde se utilizó la ecuación 13.24 con la masa de la Tierra sustituida por la masa del Sol. Los datos para los planetas individuales están a la derecha sobre esta curva. Este comportamiento se debe a que la mayor parte de la masa del sistema solar está concentrada en un pequeño espacio, el Sol.

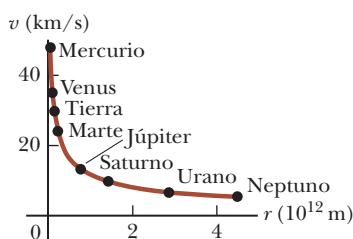


Figura 13.16 Rapidez orbital v como una función de la distancia r desde el Sol para los ocho planetas del sistema solar. La curva teórica en rojo marrón, y los puntos de datos para los planetas están en negro.



Si este concepto se extiende aún más, se podría esperar el mismo comportamiento en una galaxia. Gran parte de la masa galáctica visible, incluyendo la de un agujero negro supermasivo, está cerca del núcleo central de una galaxia. Las mediciones de las velocidades de los objetos lejanos en la galaxia se pueden utilizar en la tercera ley de Kepler para estimar la masa de toda la galaxia, un tema planteado en la historia inicial. Estas estimaciones van desde 0.8×10^{12} a 4.5×10^{12} masas solares. Las mediciones realizadas en estos objetos lejanos son difíciles y los resultados dependen del método utilizado para realizar las observaciones.

La fotografía al inicio de este capítulo muestra el núcleo central de la galaxia NGC 1566 como un área muy brillante rodeada por los “brazos” de la galaxia, los cuales tienen material en órbita alrededor del núcleo central. De acuerdo a esta distribución de materia en la galaxia, la rapidez de un objeto en la parte exterior de la galaxia sería menor que la de los objetos más cercanos al centro, justo igual que para los planetas del sistema solar.

Sin embargo, eso *no* es lo que se observa. La figura 13.17 muestra los resultados de mediciones de las magnitudes de rapidez de objetos en la galaxia de Andrómeda como una función de la distancia al centro de la galaxia.⁵ La curva rojo marrón muestra las magnitudes de rapidez esperadas para esos objetos si ellos se mueven en órbitas circulares en torno a la masa agrupada en el núcleo central. Los datos para los objetos individuales en la galaxia, indicados por los puntos negros, están muy arriba de la curva teórica. Estos datos, así como una extensa cantidad de datos acumulados durante 50 años en la pasada centuria, muestran que para objetos fuera del núcleo central de la galaxia, la curva de rapidez contra distancia al centro de la galaxia es aproximadamente plana en lugar de que disminuya a grandes distancias. Por tanto, estos objetos (incluyendo nuestro propio sistema solar en la Vía Láctea) ¡están rotando más rápido que lo esperado por la gravedad debida a la galaxia visible! Este resultado sorprendente significa que ahí debe existir masa adicional en una distribución más extendida, provocando que los objetos orbiten más rápido, y ha originado que los científicos propongan la existencia de **materia oscura**. Se propone que esta materia está presente en un gran halo alrededor de cada galaxia (con un radio hasta 10 veces más grande que el radio visible de la galaxia). Como no es luminosa (es decir, no emite radiación electromagnética), entonces debe ser muy fría o eléctricamente neutra. Por tanto, no es posible “ver” la materia oscura, excepto a través de sus efectos gravitacionales.

La supuesta existencia de la materia oscura también es implicada por anteriores observaciones realizadas en grandes estructuras ligadas gravitacionalmente, conocidas como cúmulos de galaxias.⁶ Esas observaciones muestran que las magnitudes de rapidez orbitales de galaxias en un cúmulo son, en promedio, tan grandes como para ser explicadas sólo mediante la materia luminosa en el cúmulo. Las magnitudes de rapidez de las galaxias individuales son muy altas, lo cual sugiere que existe ¡50 veces más de materia oscura en los cúmulos de galaxias que en las galaxias mismas!

¿Por qué la materia oscura no afecta las magnitudes de rapidez orbitales de los planetas como lo hace con las galaxias? Tal parece que un sistema solar es una estructura muy pequeña como para contener suficiente materia oscura para afectar el comportamiento de magnitudes de rapidez orbitales. Sin embargo, una galaxia o un cúmulo de galaxias contienen enormes cantidades de materia oscura, lo cual origina el sorprendente comportamiento.

¿Qué es la materia oscura? Por ahora, nadie lo sabe. Una teoría afirma que la materia oscura está fundamentada en una partícula llamada partícula masiva interactuando débilmente, o WIMP por sus siglas en inglés. Si esta teoría es correcta, los cálculos muestran que en cualquier momento aproximadamente 200 WIMP pasan a través de un cuerpo humano. El nuevo Large Hadron Collider en Europa (vea el capítulo 44) es el primer acelerador de partículas con suficiente energía para posiblemente generar y detectar la existencia de la WIMP, lo cual ha producido mucho interés en la materia oscura. Será emocionante estar al pendiente de esta investigación en el futuro cercano y la creatividad de los físicos en la generación de nombres caprichosos para los objetos recién propuestos debe ser entretenida.

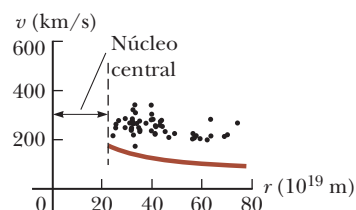


Figura 13.17 La rapidez orbital v de un objeto galáctico como una función de la distancia r al centro del núcleo central de la galaxia de Andrómeda. La curva teórica está en rojo marrón, y los puntos datos para los objetos galácticos están en negro. Ningún dato se proporciona a la izquierda porque es más complicado el comportamiento dentro del núcleo central de la galaxia.

⁵V.C. Rubin and W.K. Ford, “Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions,” *Astrophysical Journal* **159**: 379-405 (1970).

⁶F. Zwicky, “On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae,” *Astrophysical Journal* **86**: 217-246 (1937).

Resumen

Definiciones

El **campo gravitacional** en un punto en el espacio se define como la fuerza gravitacional \vec{F}_g que experimenta cualquier partícula de prueba ubicada en dicho punto, dividida entre la masa m_0 de la partícula de prueba:

$$\vec{g} \equiv \frac{\vec{F}_g}{m_0} \quad (13.7)$$

Conceptos y principios

La **ley de Newton de la gravitación universal** afirma que la fuerza de atracción gravitacional entre dos partículas cualesquiera de masas m_1 y m_2 separadas por una distancia r tiene la magnitud

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (13.1)$$

donde $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ N} \times \text{m}^2/\text{kg}^2$ es la **constante gravitacional universal**. Esta ecuación permite calcular la fuerza de atracción entre masas bajo muchas circunstancias.

Un objeto a una distancia h sobre la superficie de la Tierra experimenta una fuerza gravitacional de magnitud mg , donde g es la aceleración en caída libre en dicha elevación:

$$g = \frac{GM_E}{r^2} = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2} \quad (13.6)$$

En esta expresión, M_T es la masa de la Tierra y R_T es su radio. Por tanto, el peso de un objeto disminuye a medida que el objeto se aleja de la superficie de la Tierra.

Las **leyes de Kepler de movimiento planetario** afirman que:

1. Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos.
2. El radio vector que se dibuja desde el Sol hacia un planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.
3. El cuadrado del periodo orbital de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica.

La tercera ley de Kepler se puede expresar como

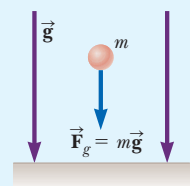
$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM_S} \right) a^3 \quad (13.11)$$

donde M_S es la masa del Sol y a es el semieje mayor. Para una órbita circular, a se puede sustituir en la ecuación 13.11 por el radio r . La mayoría de los planetas tiene órbitas casi circulares alrededor del Sol.

Modelo de análisis para resolver problemas

Partícula en un campo (gravitacional) Una partícula fuente con cierta masa establece un **campo gravitacional** \vec{g} a través del espacio. Cuando una partícula de masa m se coloca en ese campo, experimenta una fuerza gravitacional dada por

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \quad (5.5)$$



La **energía potencial gravitacional** asociada con un sistema de dos partículas de masas m_1 y m_2 separadas una distancia r es

$$U_g(r) = -\frac{Gm_1 m_2}{r} \quad (13.15)$$

donde U se considera cero conforme $r \rightarrow \infty$.

Si un sistema aislado consiste en un objeto de masa m que se mueve con una rapidez v en la vecindad de un objeto masivo de masa M , la energía total E del sistema es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \quad (13.16)$$

La energía total del sistema es una constante del movimiento. Si el objeto se mueve en una órbita elíptica con semieje mayor a alrededor del objeto masivo y $M \gg m$, la energía total del sistema es

$$E = -\frac{GMm}{2a} \quad (13.20)$$

Para una órbita circular, esta misma ecuación se aplica con $a = r$.

La **rapidez de escape** para un objeto que se proyecta desde la superficie de un planeta de masa M y radio R es

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \quad (13.23)$$



Piense, dialogue y comparte

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage.

- La tercera ley de Kepler debe obedecerse para cualquier grupo de objetos que orbitan alrededor de un objeto central masivo. Considere las cinco lunas de Plutón: Charon, Styx, Nix, Kerberos e Hydra. Los datos para estas lunas se dan en la tabla a continuación. Si evalúa la relación T^2/a^3 para estas lunas, donde T es el período orbital y a es la longitud del semieje mayor, los resultados son todos muy cercanos, a excepción de Charon, que no parece seguir la tercera ley de Kepler. Discuta con su grupo por qué el valor de la relación T^2/a^3 para Charon es diferente de las otras lunas.

Luna	Eje a semimayor (10^6 m)	Periodo orbital T (d)	Diámetro (km)
Charon	17.54	6.387	1 208
Styx	42.66	20.16	~12
Nix	48.69	24.85	~40
Kerberos	57.78	32.17	~14
Hydra	64.74	38.20	~50

- ACTIVIDAD** Júpiter tiene más de 60 lunas, la mayoría descubiertas en el siglo XXI. La tabla muestra datos medidos astronómicamente para las primeras quince lunas, en orden de eje semimayor de la órbita alrededor de Júpiter. (a) Para estas lunas, demuestre que la tercera ley de Kepler se cumple dentro de una incertidumbre de observación razonable para los datos en la tabla. (b) Evalúe la relación T^2/a^3 , donde T es el período orbital y a es la longitud del semieje mayor, para estas lunas y compare los resultados con el valor del sistema

solar (tabla 13.2). ¿Por qué el valor de esta relación es más grande para las lunas de Júpiter que para el sistema solar? (c) Antes de calcular el valor de T^2/a^3 a partir de los datos, ¿podría haber predicho cuál sería?

Luna	Eje a semimayor (10^9 m)	Periodo orbital T (d)	Excentricidad	Ángulo de inclinación
Lunas descubiertas por Galileo:				
Io	0.421 7	1.769 1	0.004 1	0.05
Europa	0.671 0	3.551 2	0.009 4	0.47
Ganymede	1.070 4	7.154 6	0.001 1	0.20
Callisto	1.882 7	16.689	0.007 4	0.20
Lunas interiores:				
Metis	0.127 7	0.294 8	0.000 02	0.06
Adrastea	0.128 7	0.298 3	0.001 5	0.03
Amalthea	0.181 4	0.498 2	0.003 2	0.37
Thebe	0.221 9	0.674 5	0.017 5	1.08
Lunas exteriores:				
Themisto	7.393 2	129.87	0.215 5	45.8
Leda	11.187 8	240.82	0.167 3	27.6
Himalia	11.452 0	250.23	0.151 3	30.5
Lysithea	11.740 6	259.89	0.132 2	27.0
Elara	11.778 0	257.62	0.194 8	29.7
Dia	12.570 4	287.93	0.205 8	27.6
Carmo	17.144 9	458.62	0.273 5	56.0

Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage.

SECCIÓN 13.1 Ley de Newton de gravitación universal

- En los laboratorios de introducción a la física, una típica **T** balanza de Cavendish para medir la constante gravitacional G emplea esferas de plomo con masas de 1.50 kg y 15.0 g cuyos centros están separados aproximadamente 4.50 cm. Calcule la fuerza gravitacional entre dichas esferas y trate a cada una como una partícula ubicada en el centro de la esfera.
- C/C** Durante un eclipse solar, la Luna, la Tierra y el Sol se encuentran en la misma línea, con la Luna entre la Tierra y el Sol. (a) ¿Qué fuerza ejerce el Sol sobre la Luna? (b) ¿Qué fuerza ejerce la Tierra sobre la Luna? (c) ¿Qué fuerza ejerce el Sol sobre la Tierra? (d) Compare las respuestas a los incisos (a) y (b). ¿Por qué el Sol no captura la Luna y la aleja de la Tierra?
- Determine el orden de magnitud de la fuerza gravitacional que usted ejerce sobre otra persona a 2 m de distancia. En su solución, establezca las cantidades que mida o estime y sus valores.
- ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Los centros de dos esferas homogéneas están separados 1.00 m. Las esferas están elaboradas del mismo elemento de la tabla periódica. La fuerza gravitacional entre las esferas es 1.00 N.

SECCIÓN 13.2 Aceleración en caída libre y fuerza gravitacional

- Problema de repaso.** En la figura P13.13a se muestra Miranda, un satélite de Urano. Se le puede modelar como una esfera de 242 km de radio y 6.68×10^{19} kg de masa. (a) Encuentre la aceleración en caída libre sobre su superficie. (b) Un risco en Miranda mide 5.00 km de alto. Aparece en el extremo de la posición que corresponde a las 11 en punto en la figura P13.5a y se amplifica en la figura P13.5b. Si un devoto de los depor-



Figura P13.5

tes extremos corre horizontalmente desde lo alto del risco a 8.50 m/s, ¿durante qué intervalo de tiempo está en vuelo? (c) ¿Qué tan lejos de la base del risco vertical golpea la superficie congelada de Miranda? (d) ¿Cuál es su vector de velocidad de impacto?

SECCIÓN 13.3 Análisis de modelo: Partícula en un campo (gravitacional)

6. (a) Calcule el vector campo gravitacional en un punto P sobre el bisector perpendicular de la línea que une dos objetos de igual masa separados por una distancia $2a$, como se muestra en la figura P13.14. (b) Explique físicamente por qué el campo debe tender a cero conforme $r \rightarrow 0$. (c) Demuestre matemáticamente que la respuesta del inciso (a) se comporta de esta forma. (d) Explique físicamente por qué la magnitud del campo debe tender a $2GM/r^2$ conforme $r \rightarrow \infty$. (e) Pruebe matemáticamente que la respuesta al inciso (a) se comporta de manera correcta en este límite.

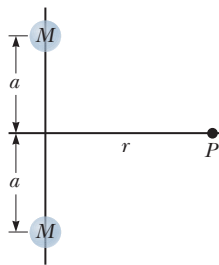


Figura P13.6

7. Una nave espacial tiene forma de un largo cilindro con una longitud de 100 m y su masa con ocupantes es de 1 000 kg. Se acercó demasiado a un agujero negro que tiene una masa 100 veces la del Sol (figura P13.16). La nariz de la nave apunta hacia el agujero negro y la distancia entre la nariz y el centro del agujero negro es 10.0 km. (a) Determine la fuerza total sobre la nave. (b) ¿Cuál es la diferencia en los campos gravitacionales que actúan sobre los ocupantes en la nariz de la nave y sobre los que están en la parte trasera de ésta, más lejos del agujero negro? (Esta diferencia en aceleración crece rápidamente a medida que la nave se aproxima al agujero negro. Pone al cuerpo de la nave bajo extrema tensión y al final lo rompe.)

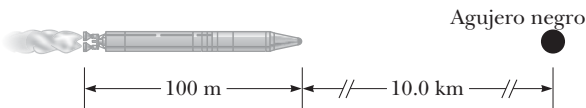


Figura P13.7

SECCIÓN 13.4 Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas

8. Un satélite artificial gira en torno a la Tierra, con una órbita circular, en una región donde la aceleración debida a la gravedad es 9.00 m/s^2 . Determine el periodo orbital del satélite.
9. Está en una cita, cenando en un restaurante que tiene varias pantallas de televisión. La mayoría de las pantallas muestran eventos deportivos, pero una cerca de usted y su acompañante muestra un debate sobre un próximo viaje a Marte. (a) Su acompañante dice: “Me pregunto cuánto tiempo lleva llegar a Marte”. Queriendo impresionarla, toma una servilleta y dibuja la figura P13.9 en ella. Aún más impresionante, le dice a su acompañante que la órbita de transferencia de energía mínima desde la Tierra a Marte es una trayectoria elíptica con el planeta de partida correspondiente al perihelio de la elipse

y al planeta de llegada en el afelio. Saca su teléfono inteligente, activa la función de calculadora y realiza un cálculo en otra servilleta para responder a la pregunta anterior que su acompañante hizo sobre el intervalo de tiempo de transferencia a Marte en esta trayectoria particular. (b) ¿Qué pasaría si? Su acompañante está impresionada, pero luego le pide que determine el tiempo de tránsito a un planeta interior, como Venus.

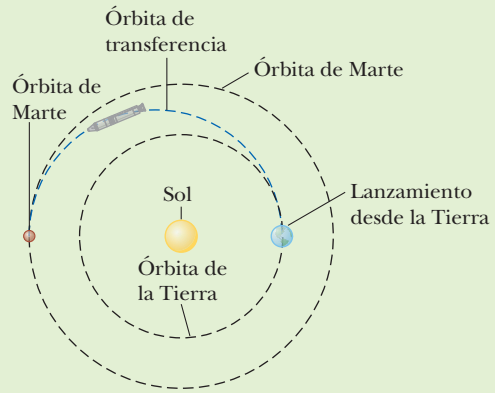


Figura P13.9

10. Una partícula de masa m se mueve a lo largo de una línea recta con velocidad constante \vec{v}_0 en la dirección x , a una distancia b del eje x (figura P13.10). (a) ¿La partícula tiene alguna cantidad de movimiento angular en torno al origen? (b) Explique por qué la cantidad de movimiento angular debe cambiar o debería permanecer constante. (c) Demuestre que la segunda ley de Kepler se satisface al mostrar que los dos triángulos sombreados en la figura tienen la misma área cuando $t - t = t - t$.

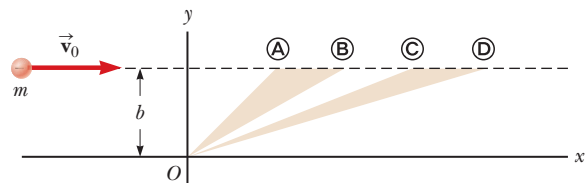


Figura P13.10

11. Utilice la tercera ley de Kepler para determinar cuántos días le toma a una nave viajar en una órbita elíptica desde un punto a 6 670 km del centro de la Tierra, hasta la Luna, a 385 000 km desde el centro de la Tierra.
12. El satélite *Explorer VIII*, colocado en órbita el 3 de noviembre de 1960, para investigar la ionosfera, tenía los siguientes parámetros de órbita: perigeo, 459 km; apogeo, 2 289 km (ambas distancias sobre la superficie de la Tierra); periodo, 112.7 min. Encuentre la razón v_p/v_a de la rapidez en el perigeo con la rapidez en el apogeo.
13. Suponga que la gravedad del Sol se desconectara. Los planetas dejarían sus órbitas y volarían en línea recta como describe la primera ley de Newton. (a) ¿Alguna vez Mercurio estaría más lejos del Sol que Plutón? (b) Si es así, encuentre cuánto tardaría Mercurio en lograr este tránsito. Si no, proporcione un argumento convincente de que Plutón siempre estará más lejos del Sol.
14. (a) Dado que el periodo de la órbita de la Luna en torno a la Tierra es 27.32 días y la distancia casi constante entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna es $3.84 \times 10^8 \text{ m}$, aplique la ecuación 13.11 para calcular la masa de la Tierra. (b) ¿Por qué es un poco más grande el valor que calcula?

SECCIÓN 13.5 Energía potencial gravitacional

Nota: En los problemas 15 al 23, suponga $U = 0$ en $r = \infty$.

- 15. ¿Cuánta energía se requiere para mover un objeto de 1 000 kg desde la superficie de la Tierra hasta una altura de dos veces el radio de la Tierra?
- 16. Un objeto se libera desde el reposo a una altura h sobre la superficie de la Tierra. (a) Demuestre que su rapidez a una distancia r del centro de la Tierra, donde $R_T \leq r \leq R_T + h$, es

$$v = \sqrt{2GM_E \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_E + h} \right)}$$

(b) Suponga que la altura de liberación es de 500 km. Realice la integral

$$\Delta t = \int_i^f dt = - \int_i^f \frac{dr}{v}$$

para encontrar el tiempo en caída a medida que el objeto se mueve desde el punto de liberación hasta la superficie de la Tierra. El signo negativo aparece porque el objeto se mueve opuesto a la dirección radial, así que su rapidez es $v = -dr/dt$. Efectúe la integral numéricamente.

- 17. Un sistema consiste de tres partículas, cada una de 5.00 g de masa, ubicadas en las esquinas de un triángulo equilátero con lados de 30.0 cm. (a) Calcule la energía potencial del sistema. (b) Suponga que las partículas se liberan simultáneamente. Describa el movimiento posterior de cada una. ¿Habrá colisiones? Explique.

SECCIÓN 13.6 Consideraciones energéticas en el movimiento planetario y de satélites.

- 18. Un “satélite copa de árbol” se mueve en una órbita circular justo sobre la superficie de un planeta, que se supone no ofrece resistencia del aire. Demuestre que su rapidez orbital v y la rapidez de escape del planeta se relacionan mediante la expresión $v_{esc} = \sqrt{2}v$.
- 19. Un satélite de 500 kg está en órbita circular a una altitud de 500 km sobre la superficie de la Tierra. Debido a la fricción del aire, el satélite eventualmente cae a la superficie de la Tierra, donde golpea el suelo con una rapidez de 2.00 km/s. ¿Cuánta energía fue transformada en energía interna debido a la fricción del aire?
- 20. Obtenga una expresión para el trabajo requerido para mover un satélite de la Tierra, de masa m , de una órbita circular de radio $2R_T$ a otra de radio $3R_T$.
- 21. Un asteroide está en ruta de colisión con la Tierra. Un astronauta aterriza sobre la roca para colocar cargas explosivas y destruir el asteroide. La mayoría de los pequeños fragmentos no impactarán la Tierra, y aquellos que entren a la atmósfera sólo producirán hermosas lluvias de meteoritos. El astronauta encuentra que la densidad del asteroide esférico es igual a la densidad promedio de la Tierra. Para asegurar su pulverización, en los explosivos ella adiciona combustible de cohetes y oxidantes que están destinados para el viaje de regreso. ¿Qué radio máximo puede tener el asteroide para que a ella le sea posible abandonarlo mediante un simple salto en línea recta? En la Tierra, ella es capaz de saltar una altura de 0.500 m.
- 22. (a) ¿Cuál es la rapidez mínima, relativa al Sol, necesaria para que una nave espacial escape del sistema solar, si parte en la órbita de la Tierra? (b) El *Voyager 1* logró una rapidez máxima de 125 000 km/h en su camino para fotografiar a Júpiter. ¿Más allá de qué distancia desde el Sol es suficiente esta rapidez para escapar del sistema solar?

- 23. Ganímedes es la más grande de las lunas de Júpiter. Considere un cohete sobre la superficie de Ganímedes, en el punto más lejano del planeta (figura P13.23). Modele el cohete como una partícula. (a) ¿La presencia de Ganímedes hace que Júpiter ejerza una fuerza mayor, menor o igual sobre el cohete, en comparación con la fuerza que ejercería si Ganímedes no se interpusiera? (b) Determine la rapidez de escape para el cohete del sistema planeta-satélite. El radio de Ganímedes es 2.64×10^6 m y su masa es 1.495×10^{23} kg. La distancia entre Júpiter y Ganímedes es 1.071×10^9 m, y la masa de Júpiter es 1.90×10^{27} kg.



Figura P13.23

PROBLEMAS ADICIONALES

- 24. Desde el Polo Sur, un cohete es disparado directo hacia arriba rumbo a la atmósfera, logrando una altitud de 250 km cuando viaja a 6.00 km/s. (a) ¿Qué distancia máxima, desde la superficie de la Tierra, viaja antes de caer de regreso a la Tierra? (b) ¿Sería mayor su distancia máxima, desde la superficie, si el mismo cohete fuera disparado con la misma carga de combustible desde una plataforma de lanzamiento sobre el ecuador? ¿Por qué sí o por qué no?
- 25. Las sondas *Voyager 1* y *Voyager 2* estudiaron la superficie de Io, Luna de Júpiter, y fotografiaron volcanes activos expulsando azufre líquido a alturas de 70 km sobre la superficie de esta Luna. Encuentre la rapidez con la que se arroja el azufre líquido desde la boca del volcán. La masa de Io es 8.9×10^{22} kg, y su radio es 1 820 km.

26. Después de leer las secciones 13.2 y 13.3, su compañero de clase busca en línea para recopilar información sobre las estrellas de neutrones. Encuentra que un radio típico de una estrella de neutrones es de 10 km, una masa típica es de dos masas solares, y que un periodo de rotación típico es de tan solo 1.4 ms. Él sugiere que si una estrella de neutrones esférica estuviera girando tan rápido, parecería que el material en el ecuador de la esfera sería arrojado porque la gravedad de la estrella no puede suministrar la aceleración centrípeta necesaria del material. Prepare un argumento que muestre que la gravedad en la superficie de una estrella de neutrones es más que suficiente para proporcionar la aceleración centrípeta. (*Nota:* las estrellas de neutrones generalmente tienen la misma masa que nuestro Sol).

27. Está en una estación espacial, en una órbita circular $h = 500$ km sobre la superficie de la Tierra. Completa sus tareas varios días antes y debe esperar a la próxima misión desde la superficie para llevarlo a casa. Después de días de aburrimiento, decide jugar un poco de golf. Caminando sobre la superficie de la estación espacial con zapatos magnéticos, coloca una pelota de golf en el tee. La golpea con todas sus fuerzas, enviándola con la velocidad v_{rel} , relativa a la estación espacial, en una dirección paralela al vector de velocidad de la estación espacial en el momento en que golpea la pelota. Observa que luego orbita la Tierra exactamente $n = 2.00$ veces y alcanza y atrapa la pelota de golf cuando regresa a la estación espacial. ¿Con qué velocidad fue golpeada la pelota de golf? *Nota:* Su resultado será irrealmente alto, mucho más alto de lo que es posible que un humano golpee una pelota de golf.



28. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Una nave espacial es lanzada a órbita circular alrededor de la Tierra y da una vuelta completa en una hora.
29. Sea Δg_M la diferencia en los campos gravitacionales producidos por la Luna en los puntos más cercano y más lejano de la Luna sobre la superficie de la Tierra. Encuentre la fracción $\Delta g_M/g$, donde g es el campo gravitacional de la Tierra. (Esta diferencia es responsable del acontecimiento de las *mareas lunares* sobre la Tierra.)
30. El área de dormir para un largo viaje espacial consiste de dos cabinas, cada una conectada mediante un cable a un centro, como se muestra en la figura P13.30. Las cabinas se hacen girar respecto al eje central, el cual está conectado al resto de la nave para generar gravedad artificial en las cabinas. Un viajero del espacio descansa en una cama paralela a la pared exterior, como se indica en la figura P13.30. (a) Con $r = 10.0$ m, ¿qué rapidez angular del viajero de 60.0 kg se necesitaría si él debe experimentar la mitad de su peso terrestre normal? (b) Si el astronauta se pone de pie perpendicular a la cama, sin hacer nada con sus manos, ¿su cabeza se moverá más rápido, más despacio, o con la misma rapidez tangencial que sus pies? ¿Por qué? (c) ¿Por qué es peligrosa la acción en el inciso (b)?

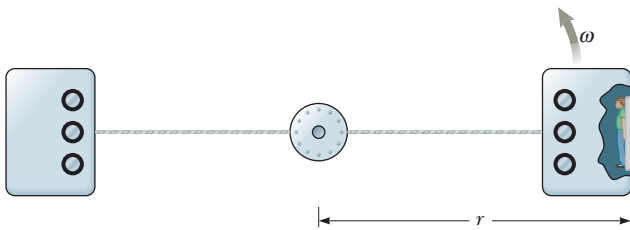


Figura P13.30

31. (a) Un vehículo espacial se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una rapidez inicial de 8.76 km/s, menor que la rapidez de escape de 11.2 km/s. ¿Qué altura máxima alcanza? (b) Un meteoróide cae hacia la Tierra. Esencialmente está en reposo respecto a la Tierra cuando se encuentra a una altura de 2.51×10^7 m sobre la superficie de la Tierra. ¿Con qué rapidez el meteorito (un meteoróide que sobrevive para impactar la superficie de la Tierra) golpea la Tierra?
32. (a) Un vehículo espacial se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una rapidez inicial v_i que es comparable, pero menor, que la rapidez de escape v_{esc} . ¿Qué altura máxima alcanza? (b) Un meteoróide cae hacia la Tierra. Esencialmente está en reposo respecto a la Tierra cuando se encuentra a una altura h sobre la superficie de la Tierra. ¿Con qué rapidez el meteorito (un meteoróide que sobrevive para impactar la superficie de la Tierra) golpea la Tierra? (c) ¿Qué pasaría si? Suponga que una pelota de béisbol se lanza con una rapidez inicial que es muy pequeña comparada con la rapidez de escape. Demuestre que la ecuación del inciso (a) es consistente con la ecuación 4.19.
33. Suponga que usted es lo suficientemente ágil como para correr a través de una superficie horizontal a 8.50 m/s, independientemente del valor del campo gravitacional. ¿Cuál sería (a) el radio y (b) la masa de un asteroide esférico sin aire de 1.10×10^3 kg/m³ de densidad uniforme en el que podría lanzarse usted mismo en órbita al correr? (c) ¿Cuál sería su periodo? (d) ¿Su carrera afectaría significativamente la rotación del asteroide? Explique.

34. Dos esferas que tienen masas M y $2M$, y radios R y $3R$, respectivamente, desde el reposo se liberan simultáneamente cuando la distancia entre sus centros es $12R$. Suponga que las dos esferas sólo interactúan entre sí, y se quiere encontrar las magnitudes de velocidad con las cuales colisionan. (a) Indique *dos* modelos de sistema aislado que sean apropiados para este sistema. (b) Escriba una ecuación de uno de los modelos y resuélvala para \vec{v}_1 , la velocidad de la esfera de masa M en cualquier tiempo posterior a la liberación, en términos de \vec{v}_2 , la velocidad de $2M$. (c) Escriba una ecuación del otro modelo y resuélvala para la rapidez v_1 en términos de la rapidez v_2 cuando las esferas colisionan. (d) Combine las dos ecuaciones para obtener las dos magnitudes de velocidad v_1 y v_2 cuando las esferas colisionan.
35. (a) Demuestre que la rapidez de cambio de la aceleración en caída libre con la posición vertical cerca de la superficie de la Tierra es

$$\frac{dg}{dr} = -\frac{2GM_E}{R_E^3}$$

Esta rapidez de cambio con la posición se llama *gradiente*. (b) Suponga que h es pequeña en comparación con el radio de la Tierra, demuestre que la diferencia en aceleración en caída libre entre dos puntos separados por la distancia vertical h es

$$|\Delta g| = \frac{2GM_E h}{R_E^3}$$

(c) Evalúe esta diferencia para $h = 6.00$ m, una altura típica para un edificio de dos pisos.

36. Cierta sistema estelar cuaternario consiste en tres estrellas, cada una de masa m , que se mueven en la misma órbita circular de radio r en torno a una estrella central de masa M . Las estrellas orbitan en el mismo sentido y se ubican a un tercio de revolución una de otra. Demuestre que el periodo de cada una de las tres estrellas es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G(M + m/\sqrt{3})}}$$

37. Estudios de la relación del Sol con su galaxia, la Vía Láctea, revelaron que el Sol se ubica cerca del borde exterior del disco galáctico, más o menos a 30 000 años luz (1 año luz = 9.46×10^{15} m) del centro. El Sol tiene una rapidez orbital de aproximadamente 250 km/s alrededor del centro galáctico. (a) ¿Cuál es el periodo del movimiento galáctico del Sol? (b) ¿Cuál es el orden de magnitud de la masa de la galaxia Vía Láctea? (c) Suponga que la galaxia está hecha principalmente de estrellas entre las cuales el Sol es característico. ¿Cuál es el orden de magnitud del número de estrellas en la Vía Láctea?
38. **Problema de repaso.** Dos esferas duras idénticas, cada una con masa m y radio r , se liberan desde el reposo en espacio vacío con sus centros separados por la distancia R . Se les permite chocar bajo la influencia de su atracción gravitacional. (a) Demuestre que la magnitud del impulso recibido por cada esfera antes de tener contacto está dada por $[Gm^3(1/2r - 1/R)]^{1/2}$. (b) ¿Qué pasaría si? Encuentre la magnitud del impulso que cada una recibe durante su contacto si chocan elásticamente.

39. La distancia máxima desde la Tierra al Sol (en afelio) es 1.521×10^{11} m, y la distancia de máximo acercamiento (en perihelio) es 1.471×10^{11} m. La rapidez orbital de la Tierra en perihelio es 3.027×10^4 m/s. Determine (a) La rapidez orbital de la Tierra en afelio y las energías cinética y potencial del sis-

tema Tierra-Sol (b) en perihelio y (c) en afelio. (d) ¿La energía total del sistema es constante? Explique. Ignore el efecto de la Luna y otros planetas.

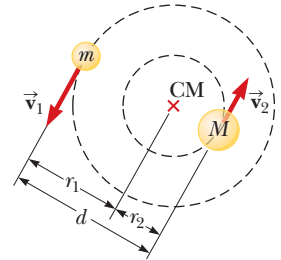
- 40. C C** Muchas personas suponen que la resistencia del aire que actúa sobre un objeto en movimiento siempre hará que el objeto frene. Sin embargo, en realidad puede ser responsable de hacer que el objeto aumente su rapidez. Considere un satélite de la Tierra de 100 kg en una órbita circular a una altura de 200 km. Una fuerza pequeña de resistencia de aire hace que el satélite caiga en una órbita circular con una altura de 100 km. (a) Calcule su rapidez inicial. (b) Calcule su rapidez final en este proceso. (c) Calcule la energía inicial del sistema satélite-Tierra. (d) Calcule la energía final del sistema. (e) Demuestre que el sistema perdió energía mecánica y encuentre la cantidad de la pérdida debida a la fricción. (f) ¿Qué fuerza hace que aumente la rapidez del satélite? *Sugerencia:* Encontrará que un diagrama de cuerpo libre es útil para explicar su respuesta.
- 41.** Considere un objeto de masa m , no necesariamente pequeña comparada con la masa de la Tierra, que se libera a una distancia de 1.20×10^7 m desde el centro de la Tierra. Suponga que la Tierra y el objeto se comportan como un par de partículas, aislado del resto del Universo. (a) Encuentre la magnitud de la aceleración a_{rel} , con la que cada uno comienza a moverse respecto al otro, como una función de m . Evalúe la aceleración (b) para $m = 5.00$ kg, (c) para $m = 2\,000$ kg y (d) para $m = 2.00 \times 10^{24}$ kg. (e) Describa el patrón de variación de a_{rel} con m .
- 42. S** Demuestre que el periodo mínimo para un satélite en órbita alrededor de un planeta esférico de densidad uniforme ρ es

$$T_{\text{min}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

independiente del radio del planeta.

- 43.** A medida que la fusión termonuclear procede en su núcleo, el Sol pierde masa a razón de 3.64×10^9 kg/s. Durante el periodo de 5 000 años de historia registrada, ¿cuánto ha cambiado la duración del año debido a la pérdida de masa del Sol? *Sugerencia:* Suponga que la órbita de la Tierra es circular. Sobre el sistema Tierra-Sol no actúan momentos de torsión externos, de modo que se conserva la cantidad de movimiento angular.

- 44. S** Dos estrellas de masa M y m , separadas una distancia d , giran en órbitas circulares en torno a su centro de masa (figura P13.44). Demuestre que cada estrella tiene un periodo dado por



$$T^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{G(M+m)}$$

Figura P13.44

PROBLEMAS DE DESAFÍO

- 45.** La nave espacial Observatorio Solar y Helioesférico (SOHO) tiene una órbita especial, localizada entre la Tierra y el Sol a lo largo de la línea que los une, y siempre está lo suficientemente cerca de la Tierra para transmitir datos con facilidad. Ambos objetos ejercen fuerzas gravitacionales sobre el observatorio. Su movimiento es casi circular alrededor del Sol, y es más pequeño que la órbita circular de la Tierra. Sin embargo, su periodo no es menor a un año, sino que es igual a un año. Demuestre que su distancia desde la Tierra debe ser 1.48×10^9 m. En 1772, Joseph Louis Lagrange determinó teóricamente la ubicación especial que permitiría esta órbita. *Sugerencias:* Use datos que sean precisos a cuatro dígitos. La masa de la Tierra es 5.974×10^{24} kg. No será fácil resolver las ecuaciones que usted obtenga; entonces, utilice una computadora para verificar que 1.48×10^9 m es el valor correcto.





Un avión despegando de una pista del aeropuerto. ¿Qué tan larga tiene que ser la pista?
(F. JIMENEZ MECA/Shutterstock)

- 14.1 Presión
- 14.2 Variación de la presión con la profundidad
- 14.3 Mediciones de presión
- 14.4 Fuerzas de flotación y principio de Arquímedes
- 14.5 Dinámica de fluidos
- 14.6 Ecuación de Bernoulli
- 14.7 Flujo de fluidos viscosos en tuberías
- 14.8 Otras aplicaciones de la dinámica de fluidos

IMAGINE Es un día feriado académico y pasa un tiempo con sus abuelos en Denver, Colorado. Después de visitarlos, su viaje continúa cuando aborda un avión para volar desde Denver y ver a sus otros abuelos en Boston, Massachusetts. A medida que el avión acelera en el aeropuerto de Denver, observa que le está tomando bastante tiempo, en comparación con su experiencia de vuelo anterior, elevarse de la tierra. Comienza a preocuparse de que el avión se quede sin pista antes de despegar. Finalmente, el avión se eleva y usted respira con alivio. Piensa: “¿Por qué tardó tanto en despegar el avión? No me tomó tanto tiempo cuando despecué para mi vuelo desde Los Ángeles”. Decidiendo que valdría la pena pagar el servicio de Wi-Fi en el avión, busca en línea las longitudes de las pistas. La pista más larga del aeropuerto de Los Ángeles, a nivel del mar, mide 12 091 pies. La pista más larga de Denver mide 16 000 pies. La pista más larga del mundo está en el aeropuerto de Qamdo Bamda en China: 18 045 pies. Ese aeropuerto es también el segundo con más altura del mundo: 14 219 pies. (Fue el más alto hasta 2013.) ¿Existe una relación entre la altitud del aeropuerto y la longitud de la pista? ¿Por qué?

CONEXIONES En los capítulos anteriores, consideramos la mecánica de partículas, sistemas y objetos rígidos. Las fuerzas sobre estas partículas y objetos han sido aplicadas por manos, cuerdas, planos inclinados, gravedad, etc. En este capítulo, consideramos las fuerzas que actúan entre un objeto y un *fluido*. Un **fluido** es una colección de moléculas que están dispuestas aleatoriamente y unidas por fuerzas de cohesión débiles entre las moléculas y también por las fuerzas ejercidas por el recipiente que contiene el fluido. Los líquidos y gases son fluidos. Hablamos brevemente sobre esta situación en la sección 6.4, cuando consideramos las fuerzas resistivas sobre los objetos que se *mueven* a través de los fluidos. Aquí discutiremos las fuerzas que los fluidos

ejercen sobre los objetos que están *en reposo* en relación con el fluido. Esta discusión dará lugar a una nueva cantidad, *presión* y fuerza importantes llamadas *fuerza de flotación*, que no es un nuevo tipo de fuerza, sino que nuestras fuerzas familiares actúan en una situación específica. También investigaremos la física de los fluidos en movimiento en las secciones posteriores de este capítulo. Comprender los conceptos de fluidos en movimiento es importante para una amplia gama de aplicaciones, desde sistemas de plomería hasta aerodinámica de automóviles y flujo sanguíneo en venas y arterias.

14.1 Presión

Los fluidos no soportan esfuerzos cortantes o de tracción como los estudiados en el capítulo 12; por tanto, el único esfuerzo que se puede ejercer sobre un objeto sumergido en un fluido estático es el que tiende a comprimir el objeto desde todos lados. En otras palabras, la fuerza ejercida por un fluido estático sobre un objeto siempre es perpendicular a las superficies del objeto, como se muestra en la figura 14.1. Esta situación se estudió en la sección 12.4.

La presión en un fluido se puede medir con el dispositivo mostrado en la figura 14.2. El dispositivo consta de un cilindro al vacío que encierra un pistón ligero conectado a un resorte. Mientras el dispositivo está sumergido en un fluido, éste presiona arriba del pistón y comprime el resorte hasta que la fuerza hacia adentro ejercida por el fluido se equilibra con la fuerza hacia afuera que ejerce el resorte. Si de antemano se calibra el resorte, es posible medir directamente la presión del fluido. Si F es la magnitud de la fuerza ejercida sobre el pistón y A es el área del pistón, la **presión** P del fluido en el nivel al que se sumergió el dispositivo se define como la proporción de la fuerza al área:

$$P \equiv \frac{F}{A} \quad (14.1)$$

La presión es una cantidad escalar porque es proporcional a la magnitud de la fuerza sobre el pistón.

Si la presión varía sobre un área, la fuerza infinitesimal dF sobre un elemento de superficie infinitesimal de área dA es

$$dF = P dA \quad (14.2)$$

donde P es la presión en la posición del área dA . Para calcular la fuerza total que se ejerce sobre una superficie de un recipiente, se debe integrar la ecuación 14.2 sobre la superficie.

Las unidades de presión son newtons por metro cuadrado (N/m^2) en el sistema SI. Otro nombre para la unidad SI de presión es **pascal** (Pa):

$$1 \text{ Pa} \equiv 1 \text{ N}/\text{m}^2 \quad (14.3)$$

Para una demostración táctil de la definición de presión, sostenga una tachuela entre sus dedos pulgar e índice, con la punta de la tachuela en el pulgar y la cabeza en el índice. Ahora presione *suavemente* el pulgar y el índice. El pulgar comenzará a sentir dolor, el índice no. La tachuela ejerce la misma fuerza sobre el pulgar y el índice, pero la presión sobre el pulgar es mucho mayor debido al área pequeña sobre la que se aplica la fuerza.

E XAMEN RÁPIDO 14.1 Suponga que está de pie detrás de alguien que se mueve
 • hacia atrás, quien por accidente le pisa con el tacón de su zapato. ¿Usted saldría mejor
 • librado si la persona fuera (a) un alto jugador de basquetbol que usa tenis o (b) una
 • mujer pequeña que calce zapatillas con tacón de aguja?

En cualquier punto sobre la superficie del objeto, la fuerza que ejerce el fluido es perpendicular a la superficie del objeto.

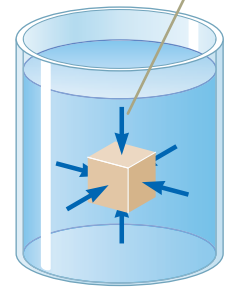


Figura 14.1 Fuerzas ejercidas por un fluido sobre las superficies de un objeto sumergido.

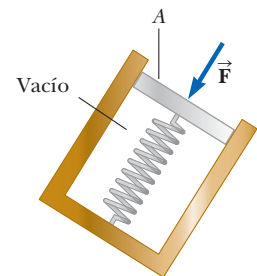


Figura 14.2 Un dispositivo simple para medir la presión que ejerce un fluido.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 14.1

Fuerza y presión Las ecuaciones 14.1 y 14.2 hacen una clara distinción entre fuerza y presión. Otra importante distinción es que la *fuerza es un vector* y la *presión es un escalar*. La presión no tiene dirección asociada, pero la dirección de la fuerza asociada con la presión es perpendicular a la superficie sobre la que actúa la presión.



Ejemplo 14.1 La cama de agua

El colchón de una cama de agua mide 2.00 m de largo por 2.00 m de ancho y 30.0 cm de espesor.

(A) Encuentre el peso del agua en el colchón.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en transportar un cubo de agua y qué tan pesado es. Ahora imagine una muestra del agua del tamaño de una cama de agua. Se espera que el peso sea relativamente grande.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución.

Encuentre el volumen del agua que llena el colchón:

$$V = \ell wh$$

Utilice la ecuación 1.1 y la densidad del agua pura (consulte la tabla 14.1) para obtener la masa de la cama de agua:

$$Mg = (\rho V)g = \rho g \ell wh$$

Determine el peso de la cama:

$$\begin{aligned} Mg &= (1000 \text{ kg/m}^3)(9.80 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ m})(2.00 \text{ m})(0.300 \text{ m}) \\ &= 1.18 \times 10^4 \text{ N} \end{aligned}$$

que es aproximadamente 2 650 lb. (Una cama regular, incluido el colchón, box spring y marco metálico, pesa alrededor de 300 lb.) Como esta carga es muy grande, es mejor colocar una cama de agua sobre la base o en un piso fuerte y firme.

(B) Encuentre la presión que ejerce la cama de agua sobre el suelo cuando la cama descansa en su posición normal. Suponga que toda la superficie inferior de la cama tiene contacto con el suelo.

SOLUCIÓN

Cuando la cama de agua está en su posición normal, el área en contacto con el suelo es $A = \ell w$. Utilice la ecuación 14.1 para encontrar la presión:

$$P = \frac{Mg}{\ell w} = \frac{1.18 \times 10^4 \text{ N}}{(2.00 \text{ m})(2.00 \text{ m})} = 2.94 \times 10^3 \text{ Pa}$$

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si la cama de agua se sustituye con una cama regular de 300 lb que se sostiene en sus cuatro patas? Cada pata tiene una sección transversal circular de 2.00 cm de radio. ¿Qué presión ejerce esta cama sobre el suelo?

Respuesta El peso de la cama regular se distribuye sobre cuatro secciones transversales circulares en la parte baja de las patas. Por tanto, la presión es

$$\begin{aligned} P &= \frac{F}{A} = \frac{mg}{4(\pi r^2)} = \frac{300 \text{ lb}}{4\pi(0.0200 \text{ m})^2} \left(\frac{1 \text{ N}}{0.225 \text{ lb}} \right) \\ &= 2.65 \times 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

¡Este resultado es casi 100 veces mayor que la presión debida a la cama de agua! El peso de la cama regular, aun cuando es mucho menor que el peso de la cama de agua, se aplica sobre el área muy pequeña de las cuatro patas. La presión alta sobre el suelo que ejerce el pie de una cama regular podría causar abolladuras en los suelos de madera o desgarrar permanentemente las alfombras.

14.2 Variación de la presión con la profundidad

Como bien saben los buzos, la presión del agua aumenta con la profundidad. Del mismo modo, la presión atmosférica disminuye al aumentar la altitud; por esta razón, las aeronaves que vuelan a grandes alturas deben tener cabinas presurizadas para comodidad de los pasajeros.

Ahora se demostrará cómo la presión en un líquido aumenta con la profundidad. Como describe la ecuación 1.1, la *densidad* de una sustancia se define como su masa por unidad de volumen; la tabla 14.1 menciona las densidades de diferentes sustancias. Estos valores varían ligeramente con la temperatura porque el volumen de una sustancia depende de la temperatura (como se muestra en el capítulo 19). Bajo condiciones estándar (a 0 °C y presión atmosférica), las densidades de los gases son aproximadamente $\frac{1}{1000}$ las densidades de sólidos y líquidos. Esta diferencia en densidades implica que la separación molecular



TABLE 14.1 Densidades de algunas sustancias comunes a temperatura estándar (0 °C) y presión (atmosférica)

Sustancia	ρ (kg/m ³)	Substance	ρ (kg/m ³)
Aire	1.29	Hierro	7.86×10^3
Aire (a 20 °C y presión atmosférica)	1.20	Plomo	11.3×10^3
Aluminio	2.70×10^3	Mercurio	13.6×10^3
Benceno	0.879×10^3	Nitrógeno gaseoso	1.25
Latón	8.4×10^3	Roble	0.710×10^3
Cobre	8.92×10^3	Osmio	22.6×10^3
Alcohol etílico	0.806×10^3	Oxígeno gaseoso	1.43
Agua pura	1.00×10^3	Pino	0.373×10^3
Glicerina	1.26×10^3	Platino	21.4×10^3
Oro	19.3×10^3	Agua de mar	1.03×10^3
Helio gaseoso	1.79×10^{-1}	Plata	10.5×10^3
Hidrógeno gaseoso	8.99×10^{-2}	Estaño	7.30×10^3
Hielo	0.917×10^3	Uranio	19.1×10^3

promedio en un gas bajo estas condiciones es aproximadamente diez veces mayor que la de un sólido o líquido.

Considere ahora un líquido de densidad ρ en reposo, como se muestra en la figura 14.3. Se supone que ρ es uniforme en todo el líquido, esto significa que el líquido es *incompresible*. Seleccione una muestra del líquido contenido dentro de un cilindro imaginario de área de sección transversal A que se extiende desde la profundidad d a la profundidad $d + h$. El líquido externo a la muestra ejerce fuerzas en todos los puntos de la superficie de la muestra, perpendicular a la superficie. La presión que ejerce el líquido en la cara inferior de la muestra es P , y la presión en la cara superior es P_0 . Por tanto, la fuerza hacia arriba ejercida por el fluido exterior sobre el fondo del cilindro tiene una magnitud PA , y la fuerza descendente que se ejerce sobre la parte superior tiene magnitud P_0A . La masa de líquido en la muestra es $M = \rho V = \rho Ah$; en consecuencia, el peso del líquido en el cilindro es $Mg = \rho Ahg$. Como la muestra está en reposo y permanece en reposo, puede modelarse como una partícula en equilibrio, entonces la fuerza neta que actúa sobre ella debe ser cero. Al elegir hacia arriba la dirección y positiva, se ve que

$$\sum \vec{F} = PA \hat{j} - P_0A \hat{j} - Mg \hat{j} = 0$$

o

$$PA - P_0A - \rho Ahg = 0$$

$$P = P_0 + \rho gh \quad (14.4)$$

Es decir, la presión P a una profundidad h bajo un punto en el líquido, donde la presión es P_0 , es mayor en una cantidad ρgh . Si el líquido está abierto a la atmósfera y P_0 es la presión en la superficie del líquido, entonces P_0 es la **presión atmosférica**. Al realizar los cálculos y al trabajar los problemas al final del capítulo, es usual tomar la presión atmosférica como

$$P_0 = 1.00 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

La ecuación 14.4 implica que la presión es la misma en todos los puntos que tengan la misma profundidad, independientemente de la forma del recipiente.

Ya que la presión en un fluido depende de la profundidad y del valor de P_0 , cualquier aumento en presión en la superficie debe transmitirse a todo otro punto en el fluido. Este concepto lo reconoció por primera vez el científico francés Blaise Pascal (1623-1662) y se llama **ley de Pascal: un cambio en la presión aplicada a un fluido se transmite sin disminución a todos los puntos del fluido y a las paredes del recipiente.**

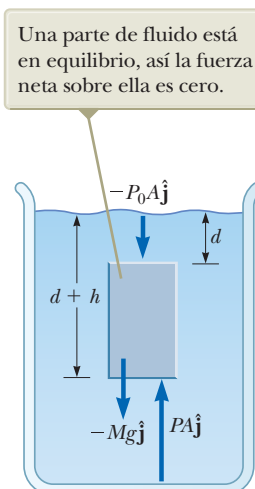


Figura 14.3 Una parte de fluido, en un volumen mayor de fluido, está aislada.

◀ Variación de la presión con la profundidad

◀ Ley de Pascal

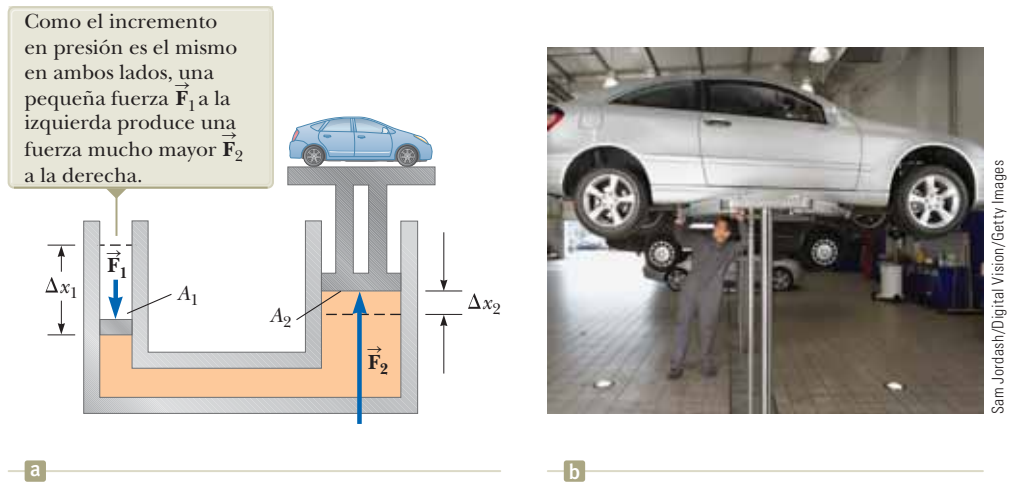


Figura 14.4 (a) Diagrama de un elevador hidráulico. (b) Un vehículo en reparación levantado mediante un elevador hidráulico en un taller.

Una aplicación importante de la ley de Pascal es el elevador hidráulico, que se ilustra en la figura 14.4a. Una fuerza de magnitud F_1 se aplica a un pequeño pistón de área superficial A_1 . La presión se transmite a través de un líquido incompresible a un pistón más grande de área superficial A_2 . Ya que la presión debe ser la misma en ambos lados, $P = F_1/A_1 = F_2/A_2$. Por tanto, la fuerza F_2 es mayor que la fuerza F_1 en un factor A_2/A_1 . Al diseñar una prensa hidráulica con áreas apropiadas A_1 y A_2 , se aplica una gran fuerza de salida mediante una pequeña fuerza de entrada. Los frenos hidráulicos, elevadores de automóviles, gatos hidráulicos y carretillas elevadoras utilizan este principio (figura 14.4b).

Puesto que no se agrega ni retira líquido del sistema, el volumen de líquido que se empuja hacia abajo, a la izquierda de la figura 14.4a, mientras el pistón se mueve hacia abajo a través de un desplazamiento Δx_1 , es igual al volumen de líquido que se empuja hacia arriba en el lado derecho, mientras el pistón derecho se mueve hacia arriba a través de un desplazamiento Δx_2 . Es decir, $A_1\Delta x_1 = A_2\Delta x_2$; por lo tanto $A_2/A_1 = \Delta x_1/\Delta x_2$. Ya se demostró que $A_2/A_1 = F_2/F_1$. En consecuencia, $F_2/F_1 = \Delta x_1/\Delta x_2$, de modo que $F_1\Delta x_1 = F_2\Delta x_2$. Cada lado de esta ecuación es el trabajo realizado por la fuerza sobre su pistón respectivo. Por ende, el trabajo efectuado por \vec{F}_1 sobre el pistón de entrada es igual al trabajo realizado por \vec{F}_2 sobre el pistón de salida, como debe ser para conservar energía. (El proceso se puede modelar como un caso especial del modelo de sistema no aislado: el *sistema no aislado en estado estacionario*. Existe transferencia de energía hacia y desde el sistema, pero dicha transferencia de energía se equilibra, así que no existe cambio neto en la energía del sistema.) También se podría considerar que la ecuación indica que “intercambia” la fuerza por la distancia. Imagínese levantando un carro. Puede levantar un automóvil pesado con una fuerza relativamente pequeña en el mango del gato de su mano, ¡pero debe mover su mano a través de una distancia total muy grande cuando suma todas las veces que debe mover el extremo del mango hacia arriba y hacia abajo!

- EJEMPLO RÁPIDO 14.2** La presión en el fondo de un vaso lleno de agua ($\rho = 1\,000 \text{ kg/m}^3$) es P . El agua se derrama y el vaso se llena con alcohol etílico ($\rho = 806 \text{ kg/m}^3$). ¿Cuál es la presión en el fondo del vaso? (a) menor que P , (b) igual a P , (c) mayor que P , (d) indeterminado.

Ejemplo 14.2 El elevador de automóviles

En un elevador de automóviles en una estación de servicio, el aire comprimido ejerce una fuerza sobre un pequeño pistón que tiene una sección transversal circular de radio 5.00 cm. Esta presión se transmite mediante un líquido a un pistón que tiene un radio de 15.0 cm.

(A) ¿Qué fuerza debe ejercer el aire comprimido para elevar un automóvil que pesa 13 300 N?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Revise el material ya estudiado sobre la ley de Pascal para entender la operación de un elevador de automóviles.

14.2 continuación

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución.

Resuelva $F_1/A_1 = F_2/A_2$ para F_1 :

$$F_1 = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)F_2 = \frac{\pi(5.00 \times 10^{-2} \text{ m})^2}{\pi(15.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2}(1.33 \times 10^4 \text{ N})$$

$$= 1.48 \times 10^3 \text{ N}$$

(B) ¿Qué presión de aire produce esta fuerza?

SOLUCIÓN

Utilice la ecuación 14.1 para encontrar la presión de aire que produce esta fuerza:

$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{1.48 \times 10^3 \text{ N}}{\pi(5.00 \times 10^{-2} \text{ m})^2}$$

$$= 1.88 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Esta presión es aproximadamente el doble de la presión atmosférica.

Ejemplo 14.3 Dolor en su oído

Estime la fuerza que se ejerce sobre su tímpano debido al agua cuando nada en el fondo de una alberca que tiene 5.0 m de profundidad.

SOLUCIÓN

Conceptualizar A medida que desciende en el agua, la presión aumenta. Es posible que haya notado este aumento de presión en sus oídos mientras nada en una alberca, un lago o el océano. Puede encontrar la diferencia de presión que se ejerce sobre el tímpano a partir de la profundidad dada en el problema; entonces, después de estimar el área superficial del tímpano, puede determinar la fuerza neta que el agua ejerce sobre él.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución.

Por lo general, el aire dentro del oído medio está a presión atmosférica P_0 . Por tanto, para encontrar la fuerza neta sobre el tímpano, debe considerar la diferencia entre la presión total en el fondo de la alberca y la presión atmosférica. Estime el área superficial del tímpano como aproximadamente $1 \text{ cm}^2 = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2$.

Utilice la ecuación 14.4 para encontrar esta diferencia de presión:

$$P_{\text{bot}} - P_0 = \rho g h$$

$$= (1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.80 \text{ m/s}^2)(5.0 \text{ m}) = 4.9 \times 10^4 \text{ Pa}$$

Aplique la ecuación 14.1 para determinar la magnitud de la fuerza neta sobre el oído:

$$F = (P_{\text{fondo}} - P_0)A = (4.9 \times 10^4 \text{ Pa})(1 \times 10^{-4} \text{ m}^2) \approx 5 \text{ N}$$

Ya que una fuerza de esta magnitud sobre el tímpano es extremadamente incómoda, los nadadores con frecuencia “estiran de repente los oídos” mientras están bajo el agua, una acción que empuja el aire desde los pulmones hacia el oído medio. Usar esta técnica iguala la presión en los dos lados del tímpano y alivia la incomodidad.

Ejemplo 14.4 La fuerza sobre un dique

El agua llena una altura H detrás de un dique de ancho w (figura 14.5). Determine la fuerza resultante que el agua ejerce sobre el dique.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La presión varía con la profundidad, entonces no se puede calcular la fuerza simplemente al multiplicar el área por la presión. Como la presión en el agua se incrementa con la profundidad, entonces también aumenta la fuerza sobre la parte adyacente del dique.

Categorizar Debido a la variación de la presión con la profundidad, se debe integrar para resolver este ejemplo, así que se le clasifica como un problema de análisis.



14.4 continuación

Analizar Imagine un eje vertical y , con $y = 0$ en el fondo del dique. Divida la cara del dique en estrechas tiras horizontales a una distancia y sobre el fondo, como la tira roja de la figura 14.5. La presión sobre cada tira sólo se debe al agua; la presión atmosférica actúa sobre ambos lados del dique.

Utilice la ecuación 14.4 para calcular la presión $P = \rho gh = \rho g(H - y)$ debida al agua a la profundidad h :

Use la ecuación 14.2 para encontrar la fuerza ejercida sobre la tira sombreada de área $dA = w dy$: $dF = P dA = \rho g(H - y)w dy$

Integre para determinar la fuerza total sobre el dique: $F = \int P dA = \int_0^H \rho g(H - y)w dy = \frac{1}{2} \rho g w H^2$

Finalizar Note que el grosor del dique que se muestra en la figura 14.5 aumenta con la profundidad. Este diseño explica la mayor presión que el agua ejerce sobre el dique a mayor profundidad.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si se le pide encontrar esta fuerza sin emplear cálculo? ¿Cómo podría determinar este valor?

Respuesta Por la ecuación 14.4 sabe que la presión varía linealmente con la profundidad. Por tanto, la presión promedio debida al agua sobre la cara del dique es el promedio de la presión en la parte superior y la presión en el fondo:

$$P_{\text{prom}} = \frac{P_{\text{superior}} + P_{\text{fondo}}}{2} = \frac{0 + \rho g H}{2} = \frac{1}{2} \rho g H$$

La fuerza total sobre el dique es igual al producto de la presión promedio y el área de la cara del dique:

$$F = P_{\text{prom}} A = \left(\frac{1}{2} \rho g H\right)(Hw) = \frac{1}{2} \rho g w H^2$$

que es el mismo resultado obtenido utilizando cálculo.

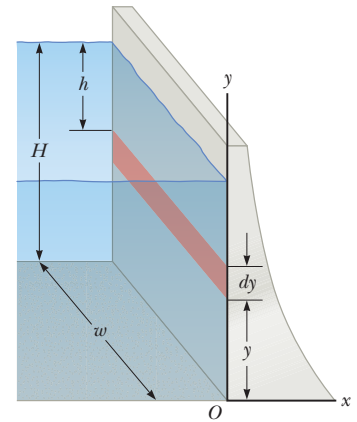


Figura 14.5 (Ejemplo 14.4) El agua ejerce una fuerza sobre un dique.

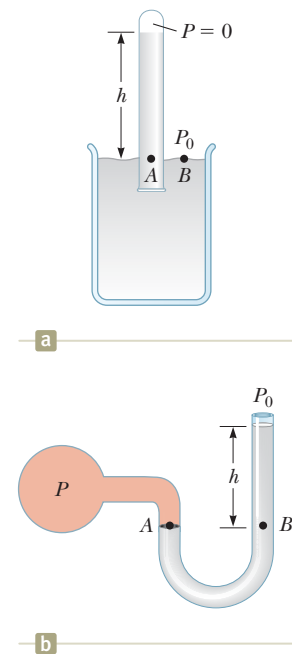


Figura 14.6 Dos dispositivos para medir la presión: (a) un barómetro de mercurio y (b) un manómetro de tubo abierto.

14.3 Mediciones de presión

Durante el reporte del clima en los noticieros de televisión, con frecuencia se proporcióna la *presión barométrica*. Esta lectura es la presión actual de la atmósfera, que varía en un pequeño intervalo del valor estándar dado anteriormente. ¿Cómo se mide esta presión?

Un instrumento que se usa para medir la presión atmosférica es el barómetro común, inventado por Evangelista Torricelli (1608-1647). Un tubo largo cerrado en un extremo se llena con mercurio y luego se invierte en un recipiente con mercurio (figura 14.6a). El extremo cerrado del tubo es casi un vacío, así que la presión en lo alto de la columna de mercurio se considera cero. En la figura 14.6a, la presión en el punto A, debida a la columna de mercurio, debe ser igual a la presión en el punto B, debido a la atmósfera. Si este no fuera el caso, habría una fuerza neta que movería al mercurio de un punto al otro hasta establecer equilibrio. Por tanto, $P_0 = \rho_{\text{Hg}}gh$, donde ρ_{Hg} es la densidad del mercurio y h es la altura de la columna de mercurio. Conforme varía la presión atmosférica, la altura de la columna de mercurio varía, así que la altura se puede calibrar para medir la presión atmosférica. Determine la altura de una columna de mercurio para una atmósfera de presión, $P_0 = 1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$:

$$P_0 = \rho_{\text{Hg}}gh \quad h = \frac{P_0}{\rho_{\text{Hg}}g} = \frac{1.013 \times 10^5 \text{ Pa}}{(13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.80 \text{ m/s}^2)} = 0.760 \text{ m}$$

Apoyándose en tal cálculo, una atmósfera de presión se define como la presión equivalente de una columna de mercurio que tiene exactamente 0.760 0 m de alto a 0 °C.

Un dispositivo para medir la presión de un gas contenido en un recipiente es el manómetro de tubo abierto que se ilustra en la figura 14.6b. Un extremo de un tubo con forma de U que contiene un líquido está abierto a la atmósfera, y el otro extremo está conectado a un recipiente de gas a presión P . En una situación de equilibrio, las presiones en los puntos A y B deben ser iguales (de otro modo, la parte curva del líquido experimentaría una fuerza neta y aceleraría), y la presión en A es la presión desconocida del gas. Por tanto, al igualar la presión incógnita P con la presión en el punto B , se ve que $P = P_0 + \rho gh$. Otra vez, la altura h se puede calibrar a la presión P .

En cada inciso de la figura 14.6 la diferencia en las presiones (es decir, $P - P_0$) es igual a ρgh . La presión P se llama **presión absoluta**, y la diferencia $P - P_0$ se llama **presión manométrica**. Por ejemplo, la presión que mide en la llanta de su bicicleta es presión manométrica, la diferencia entre la presión absoluta del aire dentro de la llanta y la presión atmosférica fuera de ella.

E XAMEN RÁPIDO 14.3 Se construyen diversos barómetros comunes, con una variedad de fluidos. ¿Para cuál de los siguientes fluidos la columna de fluido en el barómetro será la más alta? (a) mercurio, (b) agua, (c) alcohol etílico, (d) benceno.



© iStockphoto.com/HultonArchive

14.4 Fuerzas de flotación y principio de Arquímedes

¿Alguna vez ha intentado empujar una pelota de playa hacia abajo del agua (figura 14.7a)? Es extremadamente difícil hacerlo debido a la gran fuerza hacia arriba que ejerce el agua sobre la pelota. La fuerza hacia arriba que un fluido ejerce sobre cualquier objeto sumergido se llama **fuerza de flotación (boyante)**. La fuerza de flotación es lo que permite que enormes buques de acero floten en la superficie del océano. Se puede determinar la magnitud de una fuerza de flotación al aplicar algo de lógica. Imagine una parte de agua del tamaño de una pelota de playa bajo la superficie del agua, como en la figura 14.7b. Ya que esta parte está en equilibrio, debe haber una fuerza hacia arriba que equilibre la fuerza gravitacional hacia abajo sobre la parte. Esta fuerza hacia arriba es la fuerza de flotación, y *su magnitud es igual al peso del agua en la parte*. La fuerza de flotación es la fuerza que resulta sobre la parte debido a todas las fuerzas aplicadas por el fluido que rodea la parte.

Ahora imagine sustituir la parte de agua del tamaño de una pelota de playa con una pelota de playa del mismo tamaño. La fuerza neta aplicada al volumen esférico indicado por la línea punteada en la figura 14.7b debida al fluido que rodea la pelota es la misma, sin importar si se aplica a una pelota de playa o a una parte de agua. En consecuencia, **la magnitud de la fuerza de flotación sobre un objeto siempre es igual al peso del fluido desplazado por el objeto**. Este enunciado se conoce como **principio de Arquímedes**.

Con la pelota de playa bajo el agua, la fuerza de flotación, igual al peso de una parte de agua del tamaño de la pelota de playa, es mucho mayor que el peso de la pelota de playa.

Arquímedes

Matemático, físico e ingeniero griego (c.287-212 a.C)

Arquímedes fue quizá el más grande científico de la antigüedad. Fue el primero en calcular con precisión la razón de la circunferencia de un círculo a su diámetro, y también demostró cómo calcular el volumen y el área superficial de las esferas, cilindros y otras formas geométricas. Es bien conocido por descubrir la naturaleza de la fuerza de flotación y también fue un inventor genial. Una de sus invenciones prácticas, todavía en uso actual, es el tornillo de Arquímedes, un tubo anillado rotatorio e inclinado que originalmente se empleó para levantar agua de las galeras de los barcos. También inventó la catapulta y vislumbró sistemas de palancas, poleas y pesos para levantar cargas pesadas. Tales invenciones tuvieron una aplicación afortunada en la defensa de su ciudad natal, Siracusa, durante un acoso de dos años por los romanos.

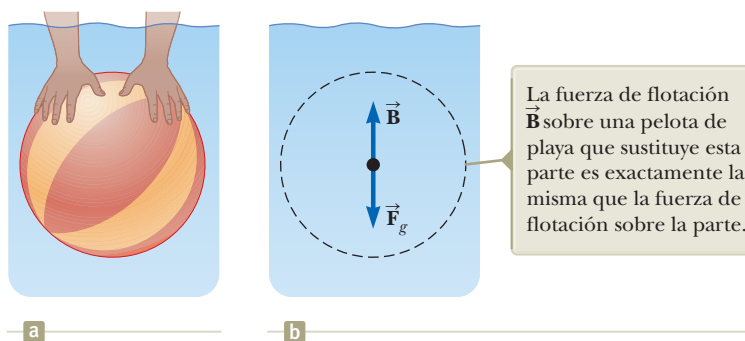


Figura 14.7 (a) Un nadador empuja una pelota de playa bajo el agua. (b) Fuerzas sobre una parte de agua del tamaño de la pelota de playa.



La fuerza de flotación sobre el cubo es la resultante de las fuerzas ejercidas por el líquido sobre sus caras inferior y superior.

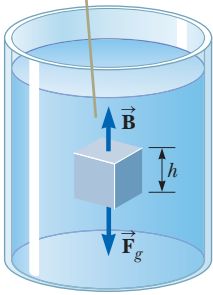


Figura 14.8 Las fuerzas externas que actúan sobre un cubo sumergido son la fuerza gravitacional \vec{F}_g y la fuerza de flotación \vec{B} .

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 14.2

El fluido ejerce la fuerza de flotación Recuerde que la fuerza de flotación la ejerce el fluido. No está determinada por las propiedades del objeto, excepto por la cantidad de fluido desplazado por el objeto. Por tanto, si varios objetos de distintas densidades, pero igual volumen, se sumergen en un fluido, todos experimentarán la misma fuerza de flotación. El que se hundan o floten está determinado por la relación entre la fuerza de flotación y la fuerza gravitacional.

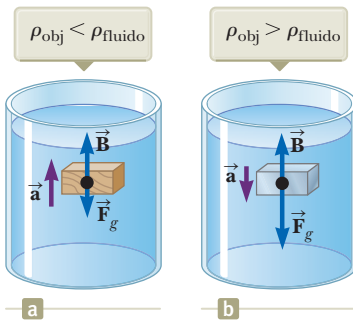


Figura 14.9 (a) Un objeto totalmente sumergido menos denso que el fluido en el que se sumerge experimenta una fuerza neta hacia arriba y se eleva hasta la superficie después de ser liberado. (b) Un objeto totalmente sumergido y que es más denso que el fluido experimenta una fuerza neta hacia abajo y se hunde.

Por tanto, existe una gran fuerza neta hacia arriba, que explica por qué es tan difícil sostener la pelota de playa bajo el agua. Observe que el principio de Arquímedes no se refiere a la configuración del objeto que experimenta la fuerza de flotación. La composición del objeto no es un factor en la fuerza de flotación porque ésta la ejerce el fluido circundante.

Para comprender mejor el origen de la fuerza de flotación, considere un cubo de material sólido sumergido en un líquido, como en la figura 14.8. De acuerdo con la ecuación 14.4, la presión P_{fondo} en el fondo del cubo es mayor que la presión P_{sup} en la parte superior por una cantidad $\rho_{\text{fluido}}gh$, donde h es la altura del cubo y ρ_{fluido} es la densidad del fluido. La presión en el fondo del cubo causa una fuerza hacia arriba igual a $P_{\text{fondo}}A$, donde A es el área de la cara inferior. La presión en la parte superior del cubo causa una fuerza hacia abajo igual a $P_{\text{sup}}A$. La resultante de estas dos fuerzas es la fuerza de flotación \vec{B} con magnitud

$$B = (P_{\text{fondo}} - P_{\text{sup}})A = (\rho_{\text{fluido}}gh)A$$

$$B = \rho_{\text{fluido}}gV_{\text{despl}} \quad (14.5)$$

donde $V_{\text{despl}} = Ah$ es el volumen del fluido desplazado por el cubo. Ya que el producto $\rho_{\text{fluido}}V_{\text{despl}}$ es igual a la masa de fluido desplazado por el objeto,

$$B = M_{\text{fluido}}g$$

donde Mg es el peso del fluido desplazado por el cubo. Este resultado es consistente con el enunciado anterior acerca del principio de Arquímedes, basado en el estudio de la pelota de playa.

Las fuerzas de flotación son muy importantes para el movimiento de peces a través del agua. Bajo condiciones normales, el peso de un pez es ligeramente mayor que la fuerza de flotación sobre él, por ende, el pez se hundiría si no tuviese algún mecanismo para ajustar la fuerza de flotación. El pez logra esto mediante la regulación interna del tamaño de su vejiga natatoria llena de aire para aumentar su volumen y la magnitud de la fuerza de flotación que actúa sobre él, de acuerdo con la ecuación 14.5. De esta manera, el pez es capaz de nadar a diversas profundidades.

Antes de proceder con algunos ejemplos, es ilustrativo discutir dos situaciones comunes: un objeto totalmente sumergido y un objeto que flota (parcialmente sumergido).

Caso 1: Objeto totalmente sumergido. Cuando un objeto está totalmente sumergido en un fluido de densidad ρ_{fluido} , el volumen V_{despl} del fluido desplazado es igual al volumen V_{obj} del objeto; así, de la ecuación 14.5, la magnitud de la fuerza de flotación hacia arriba es $B = \rho_{\text{fluido}}gV_{\text{obj}}$. Si el objeto tiene una masa M y densidad ρ_{obj} , su peso es igual a $F_g = Mg = \rho_{\text{obj}}gV_{\text{obj}}$, y la fuerza neta sobre el objeto es $B - F_g = (\rho_{\text{fluido}} - \rho_{\text{obj}})gV_{\text{obj}}$. Entonces, si la densidad del objeto es menor que la densidad del fluido, la fuerza gravitacional hacia abajo es menor que la fuerza de flotación y el objeto sin apoyo acelera hacia arriba (figura 14.9a). Si la densidad del objeto es mayor que la densidad del fluido, la fuerza de flotación hacia arriba es menor que la fuerza gravitacional hacia abajo y el objeto sin apoyo se hunde (figura 14.9b). Si la densidad del objeto sumergido es igual a la densidad del fluido, la fuerza neta sobre el objeto es cero y el objeto permanece en equilibrio. Por tanto, la dirección de movimiento de un objeto sumergido en un fluido está determinada *sólo* por las densidades del objeto y el fluido.

Es importante señalar que los gases también ejercen fuerzas de flotación. Imagine un globo rodeado de aire. El globo desplaza un volumen de aire, por lo que hay una fuerza de flotación hacia arriba sobre él. Si el globo se llena con aire, la densidad efectiva de la combinación globo-aire es mayor que la del aire, debido a la densidad del material del globo. Por tanto, el peso del globo es mayor que el del aire desplazado, y el globo liberado cae al suelo. Sin embargo, si el globo está lleno de helio, la densidad efectiva de la combinación balón-helio es menor que la del aire, y el globo se eleva en el aire cuando se libera.

Caso 2: Objeto que flota. Ahora considere un objeto de volumen V_{obj} y densidad $\rho_{\text{obj}} < \rho_{\text{fluido}}$ en equilibrio estático que flota en la superficie de un fluido, es decir, un objeto que sólo está *parcialmente* sumergido (figura 14.10). En este caso, la fuerza de flotación hacia arriba se equilibra mediante la fuerza gravitacional hacia abajo que actúa sobre el objeto. Si V_{despl} es el volumen del fluido desplazado por el objeto (este volumen es el mismo que el volumen de la parte del objeto bajo la superficie del fluido), la fuerza de flotación tiene una magnitud $B = \rho_{\text{fluido}}gV_{\text{despl}}$. Ya que el peso del objeto es $F_g = Mg = \rho_{\text{obj}}gV_{\text{obj}}$, y como $F_g = B$, se ve que $\rho_{\text{fluido}}gV_{\text{despl}} = \rho_{\text{obj}}gV_{\text{obj}}$, o

$$\frac{V_{\text{despl}}}{V_{\text{obj}}} = \frac{\rho_{\text{obj}}}{\rho_{\text{fluido}}} \quad (14.6)$$

Esta ecuación demuestra que la fracción del volumen de un objeto en flotación que está debajo de la superficie del fluido es igual al cociente de la densidad del objeto a la del fluido. Por ejemplo, la densidad del hielo es menor que la del agua líquida. Por tanto, cuando un cubo de hielo flota en su vaso de agua o un iceberg flota en la superficie del océano, parte del hielo está debajo de la superficie del agua y parte está arriba. Exploramos esta situación en el ejemplo 14.6.

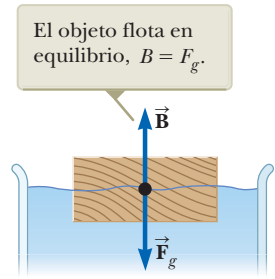


Figura 14.10 Un objeto que flota sobre la superficie de un fluido experimenta dos fuerzas, la fuerza gravitacional \vec{F}_g y la fuerza de flotación \vec{B} .

- E XAMEN RÁPIDO 14.4** Usted es un náufrago y flota en medio del océano en una balsa. Su carga en la balsa incluye un cofre del tesoro lleno de oro que encontró antes de que su barco se hundiera, y la balsa apenas se mantiene a flote. Para mantenerse flotando tan alto como sea posible en el agua, ¿usted debe (a) dejar el cofre del tesoro arriba de la balsa, (b) asegurar el cofre del tesoro en la parte inferior de la balsa o (c) con una soga amarrada a la balsa colgar el cofre del tesoro en el agua? (Suponga que lanzar el cofre del tesoro por la borda no es una opción que quiera considerar.)

Ejemplo 14.5 ¡Eureka!

Supuestamente a Arquímedes se le pidió determinar si una corona hecha para el rey consistía de oro puro. De acuerdo con la leyenda, él resolvió este problema al pesar la corona primero en aire y luego en agua, como se muestra en la figura 14.11. Suponga que la lectura en la balanza es 7.84 N cuando la corona estaba en aire y 6.84 N cuando estaba en agua. ¿Qué dijo Arquímedes al rey?

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 14.11 ayuda a pensar lo que sucede en este ejemplo. Debido a la fuerza de flotación, la lectura de la balanza es menor en la figura 14.11b que en la figura 14.11a.

Categorizar Este problema es un ejemplo del caso 1 discutido anteriormente, porque la corona está sumergida por completo. La lectura de la balanza es la medida de una de las fuerzas sobre la corona, y ésta es fija. Por tanto, la corona se clasifica como una *partícula en equilibrio*.

Analizar Cuando la corona está suspendida en aire, la lectura en la balanza es el peso verdadero $T_1 = F_g$ (se desprecia la pequeña fuerza de flotación debida al aire circundante). Cuando la corona se sumerge en agua, la fuerza de flotación \vec{B} reduce la lectura de la balanza a un peso *aparente* de $T_2 = F_g - B$.

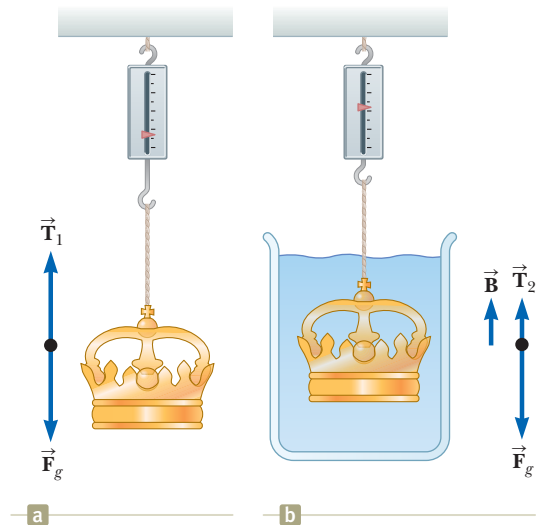


Figura 14.11 (Ejemplo 14.5) (a) Cuando la corona está suspendida en aire, la lectura en la balanza es su peso verdadero porque $T_1 = F_g$ (la flotabilidad del aire es despreciable). (b) Cuando la corona se sumerge en agua, la fuerza de flotación \vec{B} cambia la lectura de la balanza a un valor menor $T_2 = F_g - B$.

continúa

14.5 continuación

Aplique el modelo de partícula en equilibrio a la corona en agua:

Resuelva para B :

Ya que esta fuerza de flotación es igual en magnitud al peso del agua desplazada, $B = \rho_a g V_{\text{despl}}$, donde V_{despl} es el volumen de agua desplazada y ρ_a es su densidad. También, el volumen de la corona V_c es igual al volumen del agua desplazada porque la corona está completamente sumergida, así $B = \rho_a g V_c$.

Encuentre la densidad de la corona mediante la ecuación 1.1

Sustituya valores numéricos:

$$\sum F = B + T_2 - F_g = 0$$

$$B = F_g - T_2 = m_c g - T_2$$

$$\rho_c = \frac{m_c}{V_c} = \frac{m_c g}{V_c g} = \frac{m_c g}{(B/\rho_w)} = \frac{m_c g \rho_w}{B} = \frac{m_c g \rho_w}{F_g - T_2} = \frac{m_c g \rho_w}{m_c g - T_2}$$

$$\rho_c = \frac{(7.84 \text{ N})(1\,000 \text{ kg/m}^3)}{7.84 \text{ N} - 6.84 \text{ N}} = 7.84 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Finalizar De la tabla 14.1 se ve que la densidad del oro es $19.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. Por tanto, Arquímedes debió informar al rey que lo habían engañado. La corona estaba hueca o no estaba hecha de oro puro.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que la corona tiene el mismo peso, está hecha de oro puro y no está hueca. ¿Cuál sería la lectura de la balanza cuando la corona estuviera sumergida en agua?

Respuesta Encuentre la fuerza de flotación sobre la corona:

$$B = \rho_w g V_{\text{disp}} = \rho_w g V_c = \rho_w g \left(\frac{m_c}{\rho_c} \right) = \rho_w \left(\frac{m_c g}{\rho_c} \right)$$

Sustituya valores numéricos:

$$B = (1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3) \frac{7.84 \text{ N}}{19.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3} = 0.406 \text{ N}$$

Determine la tensión en la cuerda que cuelga de la balanza:

$$T_2 = m_c g - B = 7.84 \text{ N} - 0.406 \text{ N} = 7.43 \text{ N}$$

Ejemplo 14.6 Una sorpresa titánica

Un iceberg que flota en agua de mar, como se muestra en la figura 14.12a, es extremadamente peligroso porque la mayor parte del hielo está bajo la superficie. Este hielo oculto puede dañar una embarcación que aún está a una distancia considerable del hielo visible. ¿Qué fracción del iceberg se encuentra bajo el nivel del agua?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Es probable que usted esté familiarizado con la expresión “sólo es la punta del iceberg”. El origen de este dicho popular es que la mayor parte del volumen de un iceberg flotante está bajo la superficie del agua (figura 14.12b).

Categorizar Este ejemplo corresponde al caso 2 porque sólo una parte del iceberg está bajo el agua. También es un simple problema de sustitución que involucra la ecuación 14.6.

Evalúe la ecuación 14.6 empleando las densidades del hielo y el agua de mar (tabla 14.1):

Por tanto, la fracción visible de hielo sobre la superficie del agua es aproximadamente 11%. Es ese 89% no visto bajo el agua lo que representa el peligro a una embarcación que pase.



Figura 14.12 (Ejemplo 14.6) (a) Gran parte del volumen de este iceberg está bajo el agua. (b) Una embarcación puede resultar dañada incluso cuando no esté cerca del hielo visible.

$$f = \frac{V_{\text{despl}}}{V_{\text{hielo}}} = \frac{\rho_{\text{hielo}}}{\rho_{\text{aguadema}}} = \frac{917 \text{ kg/m}^3}{1\,030 \text{ kg/m}^3} = 0.890 \text{ o } 89.0\%$$

14.5 Dinámica de fluidos

Hasta el momento, el estudio de los fluidos se restringió a fluidos en reposo. Ahora la atención se dirige a los fluidos en movimiento. Cuando el fluido está en movimiento, su flujo se caracteriza como uno de los dos tipos principales. Se dice que el fluido es **estable**,

o **laminar**, si cada partícula del fluido sigue una trayectoria uniforme de tal modo que las trayectorias de diferentes partículas nunca se cruzan unas con otras, como se muestra en la figura 14.13. En el flujo estable todas las partículas de fluido que llegan a un punto dado tienen la misma velocidad.

Arriba de cierta rapidez crítica, el flujo de fluido se vuelve **turbulento**. El flujo turbulento es flujo irregular que se caracteriza por pequeñas regiones tipo remolino, como se muestra en la figura 14.14.

El término *viscosidad* se usa comúnmente en la descripción del flujo de fluido para caracterizar el grado de fricción interna en el fluido. Esta fricción interna, o *fuerza viscosa*, se asocia con la resistencia que tienen dos capas adyacentes de fluido para moverse una respecto a la otra. La viscosidad hace que parte de la energía cinética del fluido se convierta en energía interna. Este mecanismo es similar a aquel donde un objeto que se desliza sobre una superficie horizontal rugosa pierde energía cinética, como se analizó en las secciones 8.3 y 8.4. Abordaremos más detalles sobre la viscosidad en la sección 14.7.

Ya que el movimiento de los fluidos reales es muy complejo y no se entiende por completo, en el método de este libro se hacen algunas suposiciones simplificadoras. En este modelo simplificado de **flujo de fluido ideal**, se hacen las siguientes cuatro suposiciones:

1. **El fluido no es viscoso.** En un fluido no viscoso, se desprecia la fricción interna. Un objeto que se mueve a través del fluido experimenta fuerza no viscosa.
2. **El flujo es estable.** En el flujo estable (laminar), todas las partículas que pasan por un punto tienen la misma velocidad.
3. **El fluido es incompresible.** La densidad de un fluido incompresible es constante.
4. **El flujo es irrotacional.** En flujo irrotacional el fluido no tiene cantidad de movimiento angular en torno a cualquier punto. Si una pequeña rueda de paletas colocada en cualquier parte en el fluido no gira alrededor del centro de masa de la rueda, el flujo es irrotacional.

La trayectoria que toma una partícula de fluido en flujo estable se llama **línea de corriente**. La velocidad de la partícula siempre es tangente a la línea de corriente, como se muestra en la figura 14.15. Un conjunto de líneas de corriente como las que se muestran en la figura 14.15 forman un *tubo de flujo*. Las partículas de fluido no pueden fluir a través de este tubo; si lo hicieran, las líneas de corriente se cruzarían mutuamente.

Considere el flujo de fluido ideal a través de una tubería de tamaño no uniforme, como se muestra en la figura 14.16. Ahora examinemos un segmento de fluido en la tubería. La figura 14.16a muestra el segmento en $t = 0$ formado por la parte gris entre los puntos 1 y 2, y la pequeña parte azul a la izquierda del punto 1. En ese tiempo, el fluido en la pequeña porción azul fluye con rapidez v_1 por una sección transversal de área A_1 . Durante el intervalo de tiempo Δt , la pequeña longitud Δx_1 de fluido en la parte azul se mueve y pasa el punto 1. Durante el mismo intervalo de tiempo, el fluido en el extremo derecho del segmento se mueve a través del punto 2 de la tubería. La figura 14.16b muestra la situación al final del intervalo de tiempo Δt . La parte azul en el extremo derecho representa el fluido que se ha movido por el punto 2 a través del área A_2 con rapidez v_2 .



Figura 14.13 Flujo laminar alrededor de un automóvil en un túnel de viento.



Figura 14.14 Los gases calientes de un cigarrillo se hacen visibles mediante partículas de humo. Primero el humo se mueve en flujo laminar en la parte baja y luego en flujo turbulento arriba.

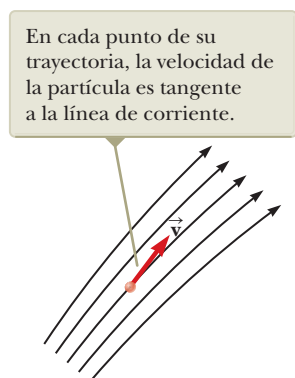


Figura 14.15 Una partícula en flujo laminar sigue una línea de corriente.

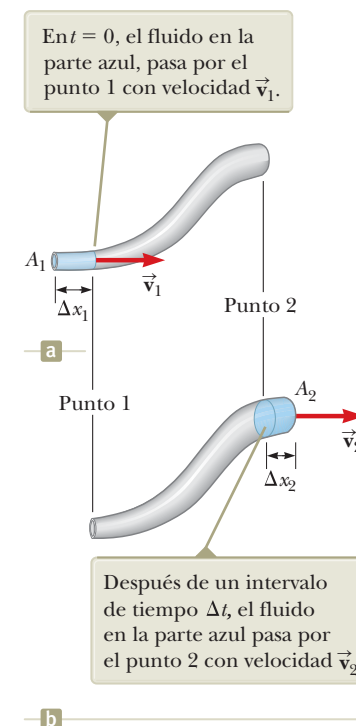


Figura 14.16 Un fluido en flujo estable se mueve a través de una tubería con área de sección transversal variable. (a) En $t = 0$, la pequeña parte azul del fluido a la izquierda se desplaza por el área A_1 . (b) Después de un intervalo de tiempo Δt , la parte azul se mueve a través del área A_2 .

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 14.3

El lenguaje que estamos usando aquí Para ayudar a entender este análisis, tenga en cuenta tres palabras que estamos usando: *sección*, *segmento* y *porción*. *Sección*: esta palabra se refiere a la longitud de la tubería entre los puntos 1 y 2 en la figura 14.16. *Segmento*: esta palabra se refiere a la longitud total del fluido en el que nos estamos enfocando. En la figura 14.16a, este segmento aparece como la porción azul corta a la izquierda del punto 1 más la parte gris entre los puntos 1 y 2. En la figura 14.16b, el mismo segmento de fluido se ha movido y aparece como la parte gris más la porción azul más allá del punto 2. *Porción*: esta palabra se refiere a una parte del segmento de fluido. Las porciones aparecen en azul o gris en la figura 14.16.



© Cengage

Figura 14.17 La rapidez del agua que se rocía desde el extremo de una manguera de jardín aumenta conforme el tamaño de la abertura disminuye con el pulgar.

La masa del fluido contenida en la parte azul de la figura 14.16a está dada por $m_1 = \rho A_1 \Delta x_1 = \rho A_1 v_1 \Delta t$, donde ρ es la densidad (invariable) del fluido ideal. Similarmente, el fluido en la parte azul de la figura 14.16b tiene una masa $m_2 = \rho A_2 \Delta x_2 = \rho A_2 v_2 \Delta t$. Sin embargo, como el fluido es incompresible y el flujo es estable, la masa de fluido que pasa por el punto 1 en un intervalo de tiempo Δt debe ser igual a la masa que pasa por el punto 2 en el mismo intervalo de tiempo. Es decir, $m_1 = m_2$ o $\rho A_1 v_1 \Delta t = \rho A_2 v_2 \Delta t$, lo cual significa que

Ecuación de continuidad para fluidos

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{constante}$$

14.7

Esta expresión se llama **ecuación de continuidad para fluidos**. Establece que el producto del área y la rapidez del fluido en todos los puntos a lo largo de una tubería es constante para un fluido incompresible. La ecuación 14.7 muestra que la rapidez es alta donde el tubo es estrecho (A pequeña) y baja donde el tubo es ancho (A grande). El producto Av , que tiene las dimensiones de volumen por unidad de tiempo, se llama *flujo volumétrico* o *caudal volumétrico*. La condición $Av = \text{constante}$ es equivalente a la afirmación de que el volumen de fluido que entra por un extremo de un tubo en un intervalo de tiempo dado iguala al volumen que abandona el otro extremo del tubo en el mismo intervalo de tiempo si no hay fugas presentes.

Usted demuestra la ecuación de continuidad cada vez que riega su jardín y pone su pulgar sobre el extremo de una manguera de jardín, como en la figura 14.17. Al bloquear parcialmente la abertura con su pulgar, reduce el área de sección transversal por la que pasa el agua. Como resultado, la rapidez del agua aumenta en la salida de la manguera, y se puede rociar a gran distancia.

Ejemplo 14.7 Regar un jardín

Un jardinero utiliza una manguera para llenar con agua una cubeta de 30.0 L. El jardinero nota que tarda 1.00 min en llenar la cubeta. Luego acopla una boquilla con una abertura de 0.500 cm^2 de área de sección transversal. La boquilla se sostiene de modo que el agua se proyecta horizontalmente desde un punto a 1.00 m sobre el suelo. ¿A qué distancia horizontal se puede proyectar el agua?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine cualquier experiencia pasada que haya tenido al proyectar agua desde una manguera horizontal o una tubería utilizando el pulgar o una boquilla, ésta puede estar acoplada al extremo de la manguera. Mientras más rápido viaje el agua que sale de la manguera, más se alejará del extremo de ésta.

Categorizar Una vez que el agua sale de la manguera, está en caída libre. Por tanto, un elemento dado del agua se clasifica como un proyectil. El elemento se modela como una *partícula bajo aceleración constante* (debido a la gravedad) en la dirección vertical y una *partícula bajo velocidad constante* en la dirección horizontal. La distancia horizontal sobre la que se proyecta el elemento depende de la rapidez con la que se proyecta. Este ejemplo involucra un cambio en el área de la tubería, así que también se clasifica como un uso de la ecuación de continuidad para fluidos.

Analizar Expresé la rapidez de flujo volumétrico I_V en términos del área y rapidez del agua en la manguera (explicaremos el origen de esta notación en la sección 14.7):

$$I_V = A_1 v_1$$

14.7 continuación

Resuelva para la rapidez del agua en la manguera:

$$v_1 = \frac{I_V}{A_1}$$

Esta rapidez se etiqueta v_1 porque se identifica el punto 1 dentro de la manguera. El punto 2 se identifica en el aire justo afuera de la boquilla. Se debe encontrar la rapidez $v_2 = v_{xi}$ con la que el agua sale de la boquilla. El subíndice i anticipa que será la componente de velocidad *inicial* del agua que se proyecta desde la manguera, y el subíndice x indica que el vector velocidad inicial del agua proyectada es horizontal.

Resuelva la ecuación de continuidad para fluidos para v_2 :

$$(1) \quad v_2 = v_{xi} = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{I_V}{A_1} \right) = \frac{I_V}{A_2}$$

Ahora el pensamiento se traslada de fluidos al movimiento de proyectiles. En la dirección vertical, un elemento del agua parte del reposo y cae una distancia vertical de 1.00 m.

Escriba la ecuación 2.16 para la posición vertical de un elemento de agua, modelado como una partícula bajo aceleración constante:

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Identifique el origen como la posición inicial del agua cuando deja la manguera y acepte que el agua comienza con una componente de velocidad vertical nula. Resuelva para el tiempo cuando el agua alcanza el suelo:

$$(2) \quad y_f = 0 + 0 - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{S} \quad t = \sqrt{\frac{-2y_f}{g}}$$

Use la ecuación 2.7 para encontrar la posición horizontal del elemento en este tiempo, modelado como una partícula bajo velocidad constante:

$$x_f = x_i + v_{xi}t = 0 + v_2t = v_2t$$

Sustituya de las ecuaciones (1) y (2):

$$x_f = \frac{I_V}{A_2} \sqrt{\frac{-2y_f}{g}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$x_f = \frac{30.0 \text{ L/min}}{0.500 \text{ cm}^2} \sqrt{\frac{-2(-1.00 \text{ m})}{9.80 \text{ m/s}^2}} \left(\frac{10^3 \text{ cm}^3}{1 \text{ L}} \right) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) = 452 \text{ cm} = 4.52 \text{ m}$$

Finalizar El intervalo de tiempo para que el elemento de agua caiga al suelo no cambia si la rapidez de proyección varía porque la proyección es horizontal. Aumentar la rapidez de proyección resulta en que el agua golpea el suelo más lejos del extremo de la manguera, pero requiere el mismo intervalo de tiempo para llegar al suelo.

14.6 Ecuación de Bernoulli

Tal vez ha experimentado conducir en una autopista y que un camión grande pase junto a usted con gran rapidez. En esta situación, es posible que haya tenido la aterradora sensación de que su automóvil era jalado hacia el camión mientras éste pasaba. En esta sección se investigará el origen de este efecto.

A medida que un fluido se mueve a través de una región donde su rapidez o elevación sobre la superficie de la Tierra cambian, la presión en el fluido varía con dichos cambios. La relación entre rapidez del fluido, presión y elevación la dedujo por primera vez, en 1738, el físico suizo Daniel Bernoulli. Considere el flujo de un segmento de un fluido ideal a través de una tubería no uniforme en un intervalo de tiempo Δt , como se ilustra en la figura 14.18 (página 372). Esta figura es muy similar a la figura 14.16, la cual se utilizó para desarrollar la ecuación de continuidad. Se han agregado dos aspectos: las fuerzas sobre los extremos externos de las partes azules del fluido y las alturas de dichas partes sobre la posición de referencia $y = 0$.

La fuerza ejercida sobre el segmento por el fluido a la izquierda de la parte azul en la figura 14.18a tiene una magnitud P_1A_1 . El trabajo hecho por esta fuerza sobre el segmento en un intervalo de tiempo Δt es $W_1 = F_1\Delta x_1 = P_1A_1\Delta x_1 = P_1V$, donde V es el volumen de la parte azul del fluido que pasa por el punto 1 en la figura 14.18a. De manera similar, el trabajo realizado sobre el segmento por el fluido a la derecha del segmento en el mismo intervalo de tiempo Δt (figura 14.8b) es $W_2 = -P_2A_2\Delta x_2 = -P_2V$, donde V es el volumen de la parte azul de fluido que pasa por el punto 2 en la figura 14.18b. (Los volúmenes de las



Daniel Bernoulli
Físico suizo (1700-1782)

Bernoulli hizo importantes descubrimientos en dinámica de fluidos. La obra más famosa de Bernoulli, *Hidrodinámica*, se publicó en 1738; es un estudio tanto teórico como práctico acerca del equilibrio, la presión y la rapidez en los fluidos. Demostró que, a medida que aumenta la rapidez de un fluido, su presión disminuye. Conocido como "principio de Bernoulli", el trabajo de Bernoulli se usa para producir un vacío parcial en laboratorios químicos al conectar un recipiente a un tubo a través del cual corre agua rápidamente.

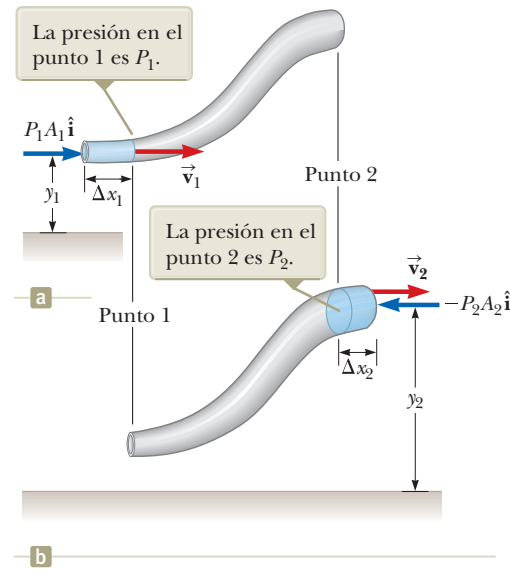


Figura 14.18 Un fluido en flujo laminar a través de una tubería. (a) Un segmento del fluido al tiempo $t = 0$. Una pequeña parte del fluido, de color azul, está a una altura y_1 sobre una posición de referencia. (b) Después de un intervalo de tiempo Δt , el segmento completo se ha movido hacia la derecha. La parte del fluido de color azul es la que ha pasado por el punto 2 con altura y_2 .

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 14.4

El lenguaje que estamos usando de nuevo aquí Estamos usando el mismo lenguaje de porción-segmento-sección aquí como lo hicimos en el análisis que conduce a la ecuación de continuidad para fluidos en la sección 14.5.

partes de color azul del fluido en las figuras 14.18a y 14.18b son iguales porque el fluido es incompresible.) Este trabajo es negativo porque la fuerza sobre el segmento de fluido es hacia la izquierda y el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza es hacia la derecha. Por tanto, el trabajo neto efectuado sobre el segmento por estas fuerzas en el mismo intervalo de tiempo Δt es

$$W = (P_1 - P_2)V \quad (14.8)$$

Parte de este trabajo cambia la energía cinética del segmento de fluido, y otra parte cambia la energía potencial gravitacional del sistema segmento-Tierra. La reducción apropiada de la ecuación 8.2 para el sistema no aislado de la Tierra y el segmento de fluido es

$$\Delta K + \Delta U_g = W \quad (14.9)$$

Ya que se supone flujo en líneas de corriente, la energía cinética K_{gris} de la parte gris del segmento es la misma en ambos incisos de la figura 14.18. Por tanto, el cambio en la energía cinética del segmento de fluido es

$$\Delta K = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 + K_{\text{gris}}\right) - \left(\frac{1}{2}mv_1^2 + K_{\text{gris}}\right) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (14.10)$$

donde m es la masa de las partes de fluido de color azul en ambos incisos de la figura 14.18. (Como los volúmenes de ambas partes son iguales, entonces también tienen la misma masa.)

Al considerar la energía potencial gravitacional del sistema segmento-Tierra, una vez más durante el intervalo de tiempo no existe cambio para la energía potencial gravitacional U_{gris} asociada con la parte gris del fluido. En consecuencia, el cambio en la energía potencial gravitacional del sistema es

$$\Delta U_g = (mgy_2 + U_{\text{gris}}) - (mgy_1 + U_{\text{gris}}) = mgy_2 - mgy_1 \quad (14.11)$$

Sustituyendo las ecuaciones 14.8, 14.10, y 14.11 en la ecuación 14.9 da

$$\left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\right) - (mgy_2 - mgy_1) = (P_1 - P_2)V$$

Si divide cada término entre el volumen V de la parte y recuerda que $\rho = m/V$, esta expresión se reduce a

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gy_2 - \rho gy_1 = P_1 - P_2$$

Al reordenar términos resulta

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gy_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gy_2 \quad (14.12)$$

que es la **ecuación de Bernoulli** como se aplica a un fluido ideal. Esta ecuación con frecuencia se expresa como

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gy = \text{constante} \quad (14.13) \quad \leftarrow \text{Ecuación de Bernoulli}$$

La ecuación de Bernoulli muestra que la presión de un fluido disminuye conforme aumenta la rapidez del fluido. Además, la presión disminuye a medida que aumenta la elevación. Este último punto explica por qué la presión del agua de las llaves en los pisos superiores de un edificio alto es débil a menos que se tomen medidas para proporcionar mayor presión para dichos edificios.

Cuando el fluido está en reposo, $v_1 = v_2 = 0$ y la ecuación 14.12 se convierte en

$$P_1 - P_2 = \rho g(y_2 - y_1) = \rho gh$$

Este resultado está de acuerdo con la ecuación 14.4.

No obstante que la ecuación 14.13 se dedujo para un fluido incompresible, el comportamiento general de la presión con la rapidez es verdadero incluso para gases: si la rapidez aumenta, la presión disminuye. Este *efecto Bernoulli* explica la experiencia con el camión en la autopista, citada al inicio de esta sección. A medida que el aire pasa entre usted y el camión, debe pasar a través de un canal relativamente estrecho. De acuerdo con la ecuación de continuidad, la rapidez del aire es mayor. Por el efecto Bernoulli, esta mayor rapidez del aire ejerce menos presión sobre su auto que el aire que se mueve con lentitud en el otro lado de su vehículo. Por tanto, ¿existe una fuerza neta que lo empuja hacia el camión!

- E XAMEN RÁPIDO 14.5** Observe dos globos de helio que flotan uno junto al otro en los extremos de cuerdas aseguradas a una mesa. Las superficies de los globos enfrentados están separadas de 1 a 2 cm. Usted sopla a través del pequeño espacio entre los globos. ¿Qué ocurre con los globos? (a) Se mueven uno hacia el otro. (b) Se alejan uno del otro. (c) No resultan afectados.

Ejemplo 14.8 El tubo Venturi

La tubería horizontal constreñida que se ilustra en la figura 14.19, conocida como *tubo Venturi*, se utiliza para medir la rapidez de flujo de un fluido incompresible. Determine la rapidez de flujo en el punto 2 de la figura 14.19a si se conoce la diferencia de presión $P_1 - P_2$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La ecuación de Bernoulli muestra cómo disminuye la presión de un fluido ideal a medida que aumenta su rapidez. Por tanto, debe ser posible calibrar un dispositivo para obtener la rapidez del fluido si se puede medir la presión.

Categorizar El problema afirma que el fluido es incompresible, por lo que se le clasifica como uno en el que puede aplicarse la ecuación de continuidad para fluidos y la ecuación de Bernoulli.

Analizar Aplique la ecuación 14.12 a los puntos 1 y 2, note que $y_1 = y_2$ porque la tubería es horizontal:

Resuelva la ecuación de continuidad para v_1 :

Sustituya esta expresión en la ecuación (1):

Resuelva para v_2 :

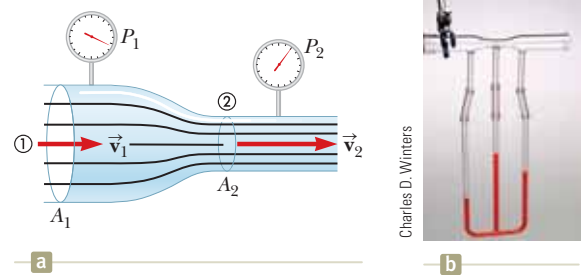


Figura 14.19 (Ejemplo 14.8) (a) La presión P_1 es mayor que la presión P_2 porque $v_1 < v_2$. Este dispositivo se utiliza para medir la rapidez del flujo de fluido. (b) Un tubo Venturi, ubicado en la parte superior de la fotografía. El aire se sopla a través del tubo desde la izquierda. El mayor nivel de fluido en la columna de en medio muestra que la presión en lo alto de la columna, que está en la región estrecha del tubo Venturi, es menor.

$$(1) P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 v_2^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$v_2 = A_1 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

continúa

14.8 continuación

Finalizar A partir del diseño del tubo (áreas A_1 y A_2) y las mediciones de la diferencia de presión $P_1 - P_2$, con esta ecuación se puede calcular la rapidez del fluido. Para ver la correspondencia entre la rapidez del fluido y la diferencia de presión, coloque sobre sus costados dos latas de refresco vacías, separadas aproximadamente 2 cm sobre una mesa. Sople suavemente

una corriente de aire horizontalmente entre las latas y observe las rodar lentamente debido a una modesta diferencia de presión entre el aire que se estanca en sus bordes exteriores y el aire en movimiento entre ellas. Ahora sople más fuerte y observe la creciente diferencia de presión que mueve a las latas más rápidamente.

Ejemplo 14.9 Ley de Torricelli

Un tanque cerrado que contiene un líquido de densidad ρ tiene un orificio en su costado a una distancia y_1 desde el fondo del tanque (figura 14.20). El orificio está abierto a la atmósfera y su diámetro es mucho menor que el diámetro superior del tanque. El aire sobre el líquido se mantiene a una presión P . Determine la rapidez del líquido que sale del orificio cuando el nivel del líquido está a una distancia h sobre el orificio.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que el tanque es un extintor de incendios. Cuando el orificio se abre, el líquido sale del orificio con cierta rapidez. Si la presión P en lo alto del líquido aumenta, éste sale con una mayor rapidez. Si la presión P cae muy baja, el líquido sale con una rapidez baja y se debe sustituir el extintor. Debido a que $A_2 \gg A_1$, el líquido está cerca del reposo en la parte superior del tanque, donde la presión es P , entonces $v_2 = 0$. En el orificio, el líquido está abierto a la atmósfera externa, por lo que P_1 es igual a la presión atmosférica P_0 .

Categorizar Al observar la figura 14.20, se conoce la presión en dos puntos y la velocidad en el punto 2. Se desea encontrar la velocidad en el segundo punto. Por tanto, este ejemplo se puede clasificar como uno en el que es válido aplicar la ecuación de Bernoulli.

Analizar

Aplique la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2:

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P + \rho g y_2$$

Resuelva para v_1 y note que $y_2 - y_1 = h$:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(P - P_0)}{\rho} + 2gh}$$

Finalizar Cuando P es mucho mayor que P_0 (de modo que el término $2gh$ se puede despreciar), la rapidez de salida del agua es principalmente una función de P . Si el tanque está abierto a la atmósfera, entonces $P = P_0$ y $v_1 = \sqrt{2gh}$. En otras palabras, para un tanque abierto, la rapidez del líquido que sale de un orificio a una distancia h bajo la superficie es igual a la que adquiere un objeto en caída libre a través de una distancia vertical h . Este fenómeno se conoce como **ley de Torricelli**.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si la posición del orificio en la figura 14.20 se pudiera ajustar verticalmente? Si el tanque está abierto a la atmósfera y colocado en una mesa, ¿qué posición del orificio haría que el agua cayera sobre la mesa a la mayor distancia del tanque?

Respuesta Modele una parte de agua que sale del orificio como un proyectil. Del modelo de *partícula bajo aceleración constante*, encuentre el tiempo en que la parte golpea la mesa desde un orificio en una posición arbitraria y_1 :

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$0 = y_1 + 0 - \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2y_1}{g}}$$

$$x_f = x_i + v_{xi}t = 0 + \sqrt{2g(y_2 - y_1)} \sqrt{\frac{2y_1}{g}}$$

$$= 2\sqrt{(y_2 y_1 - y_1^2)}$$

$$\frac{dx_f}{dy_1} = \frac{1}{2}(2)(y_2 y_1 - y_1^2)^{-1/2}(y_2 - 2y_1) = 0$$

Del modelo de *partícula bajo velocidad constante*, determine la posición horizontal de la parte en el tiempo cuando golpea la mesa:

Maximice la posición horizontal al tomar la derivada de x_f con respecto a y_1 (porque y_1 , la altura del orificio, es la variable que se puede ajustar) e iguale a cero:

Resuelva para y_1 :

$$y_1 = \frac{1}{2}y_2$$

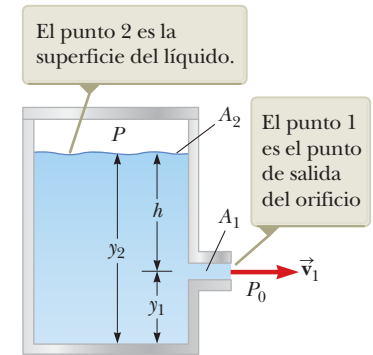


Figura 14.20 (Ejemplo 14.9) Salida de un líquido por un orificio en un tanque con rapidez v_1 .



14.9 continuación

Por tanto, para maximizar la distancia horizontal, el orificio debería estar a la mitad entre el fondo del tanque y la superficie superior del agua. Debajo de esta posición, el agua se proyecta a una mayor rapidez, pero cae durante un intervalo de tiempo breve, lo que reduce el alcance horizontal. Arriba de este punto, el agua está en el aire durante un intervalo de tiempo más largo, pero se proyecta con una rapidez horizontal menor.

14.7 Flujo de fluidos viscosos en tuberías

En la sección 14.5, explicamos el flujo de un fluido ideal. Los resultados obtenidos allí y en la sección 14.6 son aplicables a muchas situaciones. Por otro lado, hay otras situaciones en las que debemos investigar el flujo de fluidos reales no idealizados.

Como ejemplo, considere el flujo de un fluido en una tubería cerrada, como agua en un sistema de tuberías o sangre en un sistema circulatorio humano. De acuerdo con el principio de Bernoulli, si la tubería tuviera una sección transversal uniforme, la diferencia de presión entre dos ubicaciones en una sección horizontal de la tubería sería cero. Por tanto, una vez que se pone en movimiento, el fluido fluiría sin ninguna influencia externa. Esto no es verdad en la realidad. Si esto fuera cierto, ¿por qué los humanos necesitarían corazones para bombear continuamente la sangre?

En una situación real, el diferencial de presión para mantener el fluido moviéndose a una rapidez fija en una tubería horizontal viene dado por

$$\Delta P = I_V R \quad (14.14)$$

En esta ecuación, I_V representa el caudal volumétrico del flujo de fluido en m^3/s . Esta cantidad es igual al producto $A v$ en la ecuación 14.7, como se menciona en el ejemplo 14.7. El parámetro R es una medida de la resistencia del sistema al movimiento de fluido en la tubería.

La notación I_V puede parecer extraña, pero se elige para hacer una comparación con una ecuación similar en electricidad que veremos en el capítulo 26:

$$\Delta V = IR \quad (14.15)$$

En esta ecuación, ΔV es una diferencia de potencial eléctrico, que representa la influencia externa que intenta mover electrones a través de un cable. La cantidad I es la corriente, que representa el flujo de electrones en el cable, y R es la resistencia del flujo de esos electrones a través del cable. Compare esta ecuación con la ecuación 14.14, en la que ΔP representa una diferencia de presión que intenta mover fluido a través de una tubería. La cantidad I_V representa el flujo de fluido en la tubería, y R es la resistencia del flujo de ese fluido a través de la tubería. Las ecuaciones 14.14 y 14.15 son tipos de *ecuaciones de transporte*, en las cuales una entidad intenta mover algo a través del espacio y encuentra resistencia al esfuerzo. Veremos una situación similar en el capítulo 19, donde una diferencia de temperatura intenta mover la energía a través de un material por el calor, y encuentra resistencia en función de qué tan bueno es el aislante térmico del material. Incluso podríamos invertir las variables en el lado derecho de la ecuación 5.2 para convertirlo en una forma para comparar con las ecuaciones 14.14 y 14.15:

$$\sum F = ma = am$$

Aquí, una fuerza neta en la izquierda intenta mover un objeto a través del espacio, medido por su aceleración, y encuentra resistencia en forma de la masa del objeto. También existen otras situaciones de transporte, como una diferencia de concentración que impulsa la difusión de moléculas a través de otra sustancia.

Ahora, ¿qué determina la resistencia R para el flujo de fluido? Una contribución al origen físico de la resistencia son las fuerzas de resistencia viscosas (sección 6.4) entre el fluido y la pared interior de la tubería y entre las capas de fluido que pueden moverse con rapidez diferentes entre sí. Para comenzar a evaluar el efecto de estas fuerzas viscosas, considere la figura 14.21 (página 376), que muestra una capa de fluido de espesor h . Inicialmente, el lado visible de la capa forma un rectángulo $ABCD$.



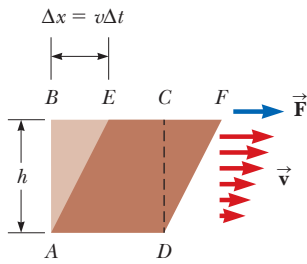


Figura 14.21 La superficie inferior de una capa de líquido se mantiene fija mientras se aplica una fuerza a la superficie superior. Como resultado, la capa se deforma en el contorno.

En $t = 0$, se aplica una fuerza de magnitud F a la derecha en la superficie superior mientras que la superficie inferior permanece fija. Después de un intervalo de tiempo Δt , el lado visible de la capa ahora forma el paralelogramo $AEFD$. La superficie superior del líquido se mueve con la rapidez v , mientras que las porciones inferiores de la capa se mueven con rapidezces progresivamente más bajas.

Compare la figura 14.21 con la figura 12.13, en la que aplicamos una fuerza de corte a un material sólido, y observe las similitudes en las dos situaciones. Con base en esta comparación, modifique la ecuación 12.7 para que se ajuste a las circunstancias actuales. Resuelva la ecuación 12.7 para la fuerza en la superficie superior:

$$F = SA \frac{\Delta x}{h} \quad (14.16)$$

donde S es el módulo de corte del material. Esta ecuación representa la deformación de un sólido, pero imaginemos que representa la deformación del líquido viscoso en la figura 14.21, con la superficie superior moviéndose a la rapidez v . El comportamiento de deformación es el mismo, aunque finalmente remplazaremos el módulo de corte con otro parámetro. Por tanto, podemos escribir la ecuación 14.16 como una proporcionalidad:

$$F \propto A \frac{\Delta x}{h} \quad (14.17)$$

Para un intervalo de tiempo dado, Δx es proporcional a la rapidez v de la superficie superior, por lo que podemos escribir

$$F \propto A \frac{v}{h}$$

Podemos convertir esta desigualdad en una igualdad introduciendo una constante de proporcionalidad η :

$$F = \eta A \frac{v}{h} \quad (14.18)$$

La constante η se llama **viscosidad** del fluido y tiene unidades de $\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2 = \text{Pa} \cdot \text{s}$. Otra unidad común de viscosidad es el *poise* (P), donde $1 \text{ Pa} \cdot \text{s} = 10 \text{ P}$. La tabla 14.2 enumera las viscosidades de algunos fluidos. Tenga en cuenta que un fluido “espeso” como la miel tiene una alta viscosidad, mientras que los fluidos como el agua y el aire tienen valores de viscosidad más bajos.

Viendo nuevamente nuestra representación de un fluido viscoso en la figura 14.21, la rapidez de la superficie inferior es cero y la rapidez de las porciones subsiguientes más altas hacia la parte superior aumenta, y la superficie más alta tiene la rapidez más alta. Al aplicar esta noción al flujo de fluido en una tubería, encontramos que, debido a la fuerza viscosa entre las capas de fluido, el flujo de un fluido en una tubería no es uniforme en toda el área de la tubería. La figura 14.22 muestra que la rapidez del fluido es mayor en el centro de la tubería y se acerca a cero en las paredes de la tubería.

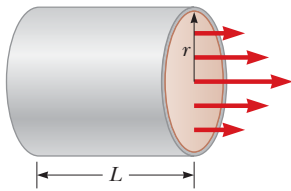


Figura 14.22 Flujo de un fluido viscoso en una tubería. Los vectores de rapidez en color rojo muestran la variación en la velocidad del fluido a través del diámetro de la tubería. El fluido fluye más rápido en el centro y lentamente en las paredes de la tubería.

TABLA 14.2 Viscosidad de algunos fluidos^a

Fluido	Viscosidad (mPa · s)
Aire	0.018
Helio	0.020
Nitrógeno líquido (−196 °C)	0.158
Acetona	0.306
Agua	0.894
Etanol	1.07
Sangre (37.0 °C)	2.70
Aceite de oliva	81
Aceite de motor (SAE 40, 20 °C)	319
Jarabe de maíz	1381
Glicerina	1500
Miel ^b	2 000–10 000
Mantequilla de cacahuate	250 000

^a Todos los valores a 25.0 °C a menos que se indique lo contrario.

^b El valor depende del contenido de humedad.

Volvamos a la ecuación 14.14. ¿Qué es lo que determina la resistencia R al flujo del fluido en la tubería? Claramente, la viscosidad juega un papel, pero hay otros factores. Se puede demostrar que la resistencia del fluido en el segmento de tubería en la figura 14.22 de longitud L y radio r viene dada por

$$R = \frac{8\eta L}{\pi r^4} \quad (14.19)$$

Por tanto, la ecuación 14.14 se convierte en

$$\Delta P = \frac{8\eta L}{\pi r^4} I_V \quad (14.20)$$

◀ Ley de Poiseuille (ecuación de Hagen-Poiseuille)

Esta ecuación se conoce como la ley de Poiseuille o la ecuación de Hagen-Poiseuille. Observe la importante dependencia de la diferencia de presión en r : la diferencia de presión es inversamente proporcional a la cuarta potencia. Por lo tanto, si el radio de la tubería cae en un 50%, la diferencia de presión requerida para mantener el mismo flujo a través de la tubería aumenta en un factor de 16.

Esta dependencia es muy importante en el flujo sanguíneo en el sistema circulatorio humano. Si un vaso sanguíneo queda ocluido por la placa de manera que el radio a través del cual puede fluir la sangre disminuye, la presión requerida para mantener el flujo sanguíneo aumenta rápidamente. Por el contrario, para una presión dada, se reduce el caudal I_V de la sangre.

14.8 Otras aplicaciones de la dinámica de fluidos

Consideremos el “Imagine” de apertura de este capítulo. ¿Qué fuerzas son responsables de elevar un avión al aire? Considere las líneas de corriente que circulan alrededor del ala de un avión, como se muestra en la figura 14.23. Suponga que la corriente de aire horizontal se aproxima al ala desde la derecha con una velocidad \vec{v}_1 . La inclinación del ala hace que la corriente de aire se desvíe hacia abajo con una velocidad \vec{v}_2 . La corriente de aire es desviada por el ala, entonces ésta debe ejercer una fuerza sobre la corriente de aire. De acuerdo con la tercera ley de Newton, la corriente de aire ejerce una fuerza \vec{F} sobre el ala que es igual en magnitud y opuesta en dirección. Esta fuerza tiene una componente vertical llamada **sustentación** (o sustentación aerodinámica) y una componente horizontal llamada **arrastre**. La sustentación depende de varios factores, como la rapidez del avión, el área del ala, la curvatura del ala y el ángulo entre el ala y la horizontal. La curvatura de las superficies del ala hace que la presión sobre el ala sea menor que la presión debajo de ésta debido al efecto Bernoulli. Esta diferencia de presión ayuda a la sustentación sobre el ala. A medida que el ángulo entre el ala y la horizontal aumenta, se establece un flujo turbulento sobre el ala para reducir la sustentación.

La fuerza de sustentación ejercida por el aire en el ala según la ley de Newton y la diferencia de presión entre la parte superior e inferior del ala causada por el efecto Bernoulli dependerán de la densidad del aire que rodea las alas. ¿Qué sabemos sobre la ubicación de Denver en nuestra historia inicial? A menudo se le llama a Denver la “Ciudad de la milla de alto”. Esto se debe a que se encuentra en las Montañas Rocosas, a una altitud de 1 610 m sobre el nivel del mar. Debido a esa altitud, el aire tiene una densidad menor que la del aeropuerto de Los Ángeles, en un promedio de aproximadamente 15%. En consecuencia, la aeronave debe alcanzar una velocidad más alta para que las fuerzas y las diferencias de presión sean suficientes para levantar la aeronave. Esto lleva a una distancia más larga en la pista para que la aeronave se mueva antes de alcanzar esta rapidez más alta.

En general, un objeto que se mueve a través de un fluido experimenta sustentación como resultado de cualquier efecto que haga que el fluido cambie su dirección mientras circula por el objeto. Algunos factores que influyen en la sustentación son la forma del objeto, su orientación respecto al flujo de fluido, cualquier movimiento de giro que pueda tener y la textura de su superficie.

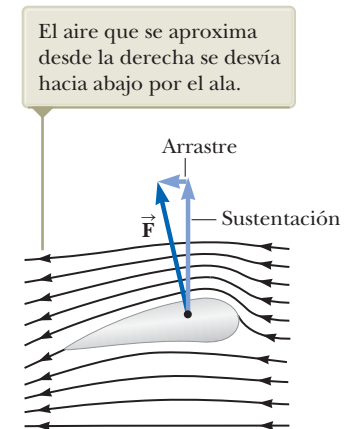


Figura 14.23 Flujo de línea de corriente alrededor del ala de un avión en movimiento. Por la tercera ley de Newton, la desviación del aire por el ala resulta en una fuerza hacia arriba sobre el ala proveniente del aire: *sustentación*. Debido a la resistencia del aire, también hay una fuerza opuesta a la velocidad del ala: *arrastre*.

¹ Nombrada así para honrar a Jean Leonard Marie Poiseuille (1797-1869), un físico francés, y Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen (1797-1884), un ingeniero civil alemán. La unidad *poise* lleva el nombre en honor de Poiseuille.

Por ejemplo, a una bola de golf golpeada con un palo se le da un rápido giro hacia atrás debido a la inclinación del palo. Los hoyuelos en la bola aumentan la fuerza de fricción entre la bola y el aire, de modo que el aire se adhiere a la superficie de la bola. Ya que la bola empuja el aire hacia abajo, el aire debe empujar hacia arriba sobre la bola. Sin los hoyuelos, la fuerza de fricción es menor y la bola de golf no viaja tanto. Puede parecer contrario a la intuición aumentar el alcance al incrementar la fuerza de fricción, pero la sustentación ganada al girar la bola más compensa la pérdida de alcance debida al efecto de fricción sobre el movimiento traslacional de la bola. Por la misma razón, la cubierta de una pelota de beisbol ayuda a que la pelota que gira “agarre” el aire por el que pasa y le ayuda a desviarlo cuando se lanza una “bola curva”.

Resumen

Definiciones

La **presión** P en un fluido es la fuerza por unidad de área que ejerce el fluido sobre una superficie:

$$P \equiv \frac{F}{A} \quad (14.1)$$

En el sistema SI, la presión tiene unidades de newtons por metro cuadrado (N/m^2), y $1 \text{ N}/\text{m}^2 = 1$ **pascal** (Pa).

Conceptos y principios

La presión en un fluido en reposo varía con la profundidad h en el fluido de acuerdo con la expresión

$$P = P_0 + \rho gh \quad (14.4)$$

donde P_0 es la presión en $h = 0$ y ρ es la densidad del fluido, que se supone uniforme.

La **ley de Pascal** afirma que, cuando se aplica presión a un fluido encerrado, la presión se transmite sin disminución a cualquier punto en el fluido y a todos los puntos en las paredes del recipiente.

La rapidez de flujo (flujo volumétrico) a través de una tubería que varía en el área de sección transversal es constante; esto es equivalente a afirmar que el producto del área transversal A y la rapidez v en cualquier punto es una constante. Este resultado se expresa en la **ecuación de continuidad para fluidos**:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{constante} \quad (14.5)$$

Cuando un objeto está parcial o completamente sumergido en un fluido, éste ejerce sobre el objeto una fuerza hacia arriba llamada **fuerza de flotación (boyante)**. De acuerdo con el **principio de Arquímedes**, la magnitud de la fuerza boyante es igual al peso del líquido desplazado por el objeto:

$$B = \rho_{\text{fluido}} g V_{\text{Desp.}} \quad (14.7)$$

La suma de la presión, la energía cinética por unidad de volumen y la energía potencial gravitacional por unidad de volumen tiene el mismo valor en todos los puntos a lo largo de una línea de corriente para un fluido ideal. Este resultado se resume en la **ecuación de Bernoulli**:

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gy = \text{constante} \quad (14.13)$$

Piense, dialogue, comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN**.
From Cengage

- Usted es miembro de un grupo de testigos expertos que brinda servicios científicos a la comunidad legal. Se ha pedido a su grupo que defienda a un equipo de fútbol de la NFL, que ha quedado atrapado en una práctica embarazosa: han estado llenando los balones de sus equipos con helio en lugar de aire, creyendo que el helio proporcionaría una mayor fuerza de empuje en los balones, causando que sus pases y patadas sean más largos. A pesar de su descontento con los esfuerzos del equipo para obtener una ventaja injusta,

su grupo legal cree que todos merecen una defensa, por lo que acepta llevar el caso. (a) Desarrolle un argumento para sostener que llenar los balones de fútbol con helio no proporcionaría una fuerza adicional de flotación en los balones; por tanto, el equipo no estaba tratando de obtener una ventaja. (b) Desarrolle un argumento privado para presentarle al equipo sosteniendo que llenar las bolas con helio realmente disminuirá el rendimiento.

- Es un día cálido, y un estudiante decide que le gustaría pasar unas horas nadando en la piscina. Usando su equipo de snorkel, él ve el fondo de la piscina. Después de un rato, observa un tubo de PVC apoyado contra la casa y piensa en usarlo



como un tubo largo. Él saca la boquilla de su tubo y la sujeta al extremo de la tubería de PVC. ¡Su plan es tener la boca en la boquilla del tubo largo y hundirse en el extremo profundo de la piscina, ¡respirando hasta el fondo! Mientras prepara su largo snorkel, llega su tío, que es neumólogo, para una visita. Él le pregunta al estudiante qué está haciendo con el tubo y él explica. El tío está horrorizado y dice que es muy peligroso intentar esta actividad. El estudiante está decepcionado, pero luego le dice a su tío que aguantará la respiración mientras se hunde hasta el fondo, manteniendo la boquilla cerrada con el pulgar, coloca la boquilla mientras llega al final y comienza a respirar. ¡Su tío parece aún más horrorizado, y le dice que esa

actividad podría ser fatal! Discuta en su grupo: ¿Por qué el buceo profundo es tan *peligroso*?

3. **ACTIVIDAD** Realice las siguientes actividades y analice la física detrás de los resultados con los miembros de su grupo:

- Coloque una lata de refresco dietético y refresco común de la misma marca en un recipiente grande con agua. ¿Ambos flotan? Explique los resultados.
- Abra una lata de bebida carbonatada transparente y llene un vaso transparente con el líquido. Ahora vierta unas pocas pasas en la bebida y registre su comportamiento.

Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN**
From Cengage

Nota: En todos los problemas, para la densidad del aire utilice el valor dado en la tabla 14.1 a 20 °C, es decir, 1.20 kg/m^3 , a menos que se indique otro valor.

SECCIÓN 14.1 Presión

- Un hombre grande se sienta en una silla de cuatro patas, con sus pies levantados del piso. La masa combinada del hombre y la silla es 95.0 kg. Si las patas de la silla son circulares y tienen un radio de 0.500 cm en el fondo, ¿qué presión ejerce cada pata sobre el piso?
- C/C** El núcleo de un átomo se puede modelar como constituido por protones y neutrones cercanamente empaquetados. Cada partícula tiene una masa de $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ y un radio del orden de 10^{-15} m . (a) Utilice este modelo y los datos proporcionados para estimar la densidad del núcleo de un átomo. (b) Compare su resultado con la densidad de un material, por ejemplo, el hierro. ¿Qué sugieren su resultado y la comparación respecto a la estructura de la materia?
- Estime la masa total de la atmósfera de la Tierra. (El radio de la Tierra es $6.37 \times 10^6 \text{ m}$, y la presión atmosférica en la superficie es $1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$.)

SECCIÓN 14.2 Variación de la presión con la profundidad

- ¿Por qué es imposible la siguiente situación? La figura P14.4 muestra a Superman intentando beber agua fría con un popote de longitud $\ell = 12.0 \text{ m}$. Las paredes del popote tubular son muy fuertes y no colapsan. Con su gran fuerza, logra la máxima succión posible y disfruta beber el agua fría.

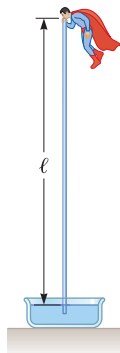


Figura P14.4

5. ¿Cuál debe ser el área de contacto entre una ventosa (completamente vacía) y un techo, si la ventosa debe soportar el peso de un estudiante de 80.0 kg?

AMT
T

6. Para el sótano de una nueva casa, se cava un hoyo en el suelo, con lados verticales que bajan 2.40 m. Una pared de cemento de concreto se construye horizontal los 9.60 m de ancho de la excavación. Esta pared de cemento mide 0.183 m desde el frente del hoyo del sótano. Durante una tormenta, el drenaje de la calle llena el espacio enfrente de la pared de concreto, pero no el sótano detrás de la pared. El agua no se filtra en el suelo de arcilla. Encuentre la fuerza que ejerce el agua sobre la pared de cemento. En comparación, el peso del agua está dado por $2.40 \text{ m} \times 9.60 \text{ m} \times 0.183 \text{ m} \times 1000 \text{ kg/m}^3 \times 9.80 \text{ m/s}^2 = 41.3 \text{ kN}$.

7. **Problema de repaso.** Una esfera sólida de latón (módulo volumétrico de $14.0 \times 10^{10} \text{ N/m}$) con un diámetro de 3.00 m es lanzada al océano. ¿Cuánto disminuye el diámetro de la esfera cuando se sumerge a una profundidad de 1.00 km?

SECCIÓN 14.3 Mediciones de presión

8. El cerebro humano y la médula espinal están sumergidos en el fluido cerebroespinal. El fluido normalmente es continuo entre las cavidades craneal y espinal y ejerce una presión de 100 a 200 mm de H_2O sobre la presión atmosférica prevaeciente. En el trabajo médico, las presiones usualmente se miden en milímetros de H_2O porque los fluidos corporales, incluido el fluido cerebroespinal, por lo general tienen la misma densidad que el agua. La presión del fluido cerebroespinal se puede medir mediante una *sonda espinal*, como se ilustra en la figura P14.20. Un tubo hueco se inserta en la columna vertebral y se observa la altura a la que se eleva el fluido. Si el fluido se eleva a una altura de 160 mm, su presión manométrica se escribe como 160 mm H_2O . (a) Exprese esta presión en pascuales, en atmósferas y en milímetros de mercurio. (b) Algunas condiciones que bloquean o inhiben el flujo de fluido cerebroespinal se pueden investigar mediante la *prueba de Queckenstedt*. En este procedimiento, se comprimen las venas en la nuca del paciente para hacer que la presión sanguínea se eleve en el cerebro, lo cual se transmite

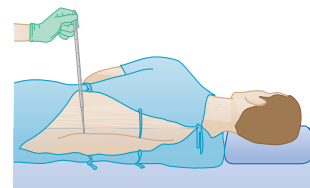


Figura P14.8

al fluido cerebroespinal. Explique cómo el nivel de fluido en la sonda espinal puede utilizarse como herramienta de diagnóstico para la condición de la espina del paciente.

- CIC** 9. Blaise Pascal duplicó el barómetro de Torricelli usando un vino tinto Bordeaux, de 984 kg/m^3 de densidad, como el líquido de trabajo (figura P14.9). (a) ¿Cuál fue la altura h de vino para presión atmosférica normal? (b) ¿Esperaría que el vacío sobre la columna sea tan bueno como para el mercurio?

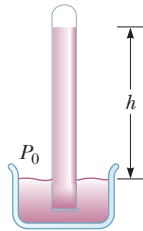


Figura P14.9

- S** 10. Un tanque con un fondo plano de área A y lados verticales se llena con agua con una profundidad h . La presión es P_0 en la superficie superior. (a) ¿Cuál es la presión absoluta en el fondo del tanque? (b) Suponga que un objeto de masa M y densidad menor a la densidad del agua se coloca en el tanque y flota. No se desborda agua. ¿Cuál es el aumento resultante de presión en el fondo del tanque?

SECCIÓN 14.4 Fuerzas de flotación y principio de Arquímedes

11. La fuerza gravitacional que se ejerce sobre un objeto sólido es 5.00 N . Cuando el objeto se suspende de una balanza de resorte y se sumerge en agua, la lectura en la balanza es 3.50 N (figura P14.26). Encuentre la densidad del objeto.

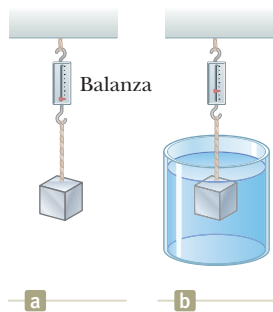


Figura P14.11

12. Un bloque metálico de 10.0 kg que mide 12.0 cm por 10.0 cm por 10.0 cm , está suspendido de una balanza y sumergido en agua, como se muestra en la figura P14.11b. La dimensión de 12.0 cm es vertical y la parte superior del bloque está 5.00 cm debajo de la superficie del agua. (a) ¿Cuáles son las magnitudes de las fuerzas que actúan sobre las partes superior e inferior del bloque debidas al agua circundante? (b) ¿Cuál es la lectura en la balanza de resorte? (c) Demuestre que la fuerza de flotación es igual a la diferencia entre las fuerzas sobre las partes inferior y superior del bloque.
- T** 13. Una esfera plástica flota en agua con 50.0% de su volumen sumergido. Esta misma esfera flota en glicerina con 40.0% de su volumen sumergido. Determine las densidades de (a) la glicerina y (b) la esfera.

- CIC** 14. El peso de un bloque rectangular de material de baja densidad es 15.0 N . Con una cuerda delgada, el centro de la cara inferior horizontal del bloque se amarra al fondo de un vaso de precipitados parcialmente lleno con agua. Cuando 25.0% del volumen del bloque está sumergido, la tensión en la cuerda es 10.0 N . (a) Encuentre la fuerza de flotación sobre el bloque. (b) Ahora al vaso de precipitados se le agrega sin interrupción aceite de 800 kg/m^3 de densidad, lo que forma una capa sobre el agua y rodea al bloque. El aceite ejerce fuerzas sobre cada una de las cuatro paredes laterales del bloque que el aceite toca. ¿Cuáles son las direcciones de dichas fuerzas? (c) ¿Qué le ocurre a la tensión en la cuerda conforme se agrega el aceite? Explique cómo el aceite tiene este efecto sobre la tensión de la cuerda. (d) La cuerda se rompe cuando su tensión alcanza 60.0 N . En este momento, 25.0% del volumen del bloque todavía está bajo la línea del agua. ¿Qué fracción adicional del volumen del bloque continúa por debajo de la superficie superior del aceite?

- CIC** 15. Un bloque de madera de volumen $5.24 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ flota en agua, y un pequeño objeto de acero de masa m se coloca en la parte superior del bloque. Cuando $m = 0.310 \text{ kg}$, el sistema está en equilibrio y la parte superior del bloque de madera está justo al nivel del agua. (a) ¿Cuál es la densidad de la madera? (b) ¿Qué le ocurre al bloque cuando el objeto de acero es reemplazado por un objeto cuya masa es menor que 0.310 kg ? (c) ¿Qué le sucede al bloque cuando el objeto de acero se sustituye por un objeto cuya masa es mayor que 0.310 kg ?

- S** 16. Un hidrómetro es un instrumento utilizado para determinar la densidad de los líquidos. En la figura P14.36 se muestra uno simple. El bulbo de una jeringa se presiona y libera para dejar que la atmósfera eleve una muestra del líquido de interés en un tubo que contiene una barra calibrada de densidad conocida. La barra, de longitud L y densidad promedio ρ_0 , flota parcialmente sumergida en el líquido de densidad ρ . Una longitud h de la barra sobresale de la superficie del líquido. Demuestre que la densidad del líquido está dada por

$$\rho = \frac{\rho_0 L}{L - h}$$

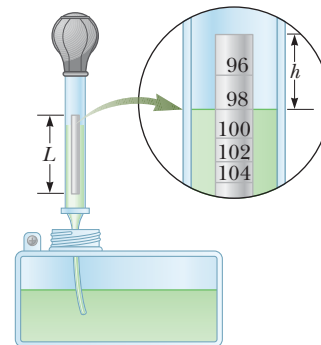


Figura P14.16 Problemas 16 y 17

- CIC** 17. Remítase al problema 16 y la figura P14.16. Se construirá un hidrómetro con una barra cilíndrica flotante. Se colocarán nueve marcas a lo largo de la barra para indicar densidades que tengan valores de 0.98 g/cm^3 , 1.00 g/cm^3 , 1.02 g/cm^3 , 1.04 g/cm^3 , ..., 1.14 g/cm^3 . La hilera de marcas comenzará 0.200 cm desde el extremo superior de la barra y terminará 1.80 cm desde el extremo superior. (a) ¿Cuál es la longitud requerida de la barra? (b) ¿Cuál debe ser su densidad promedio? (c) ¿Las marcas deberían estar igualmente espaciadas? Explique su respuesta.
- CIC** 18. El 21 de octubre de 2001, Ian Ashpole del Reino Unido logró un récord de altura de 3.35 km ($11\,000$ pies) impulsado por

600 globos llenos con helio. Cada globo lleno tuvo un radio de aproximadamente 0.50 m y una masa estimada de 0.30 kg. (a) Estime la fuerza de flotación total sobre los 600 globos. (b) Estime la fuerza neta hacia arriba sobre los 600 globos. (c) Ashpole utilizó paracaídas para su retorno a la Tierra después de que los globos empezaron a reventarse a elevadas altitudes y disminuyera la fuerza boyante. ¿Por qué se reventaron los globos?

- 19. CE** Usted tiene un trabajo en una empresa que produce suministros para fiestas. Está diseñando globos llenos de helio para vender como regalos. Para ahorrar dinero en costos de producción, parte de este diseño es elegir de entre una selección disponible la ficha menos masiva necesaria para ser atada al extremo inferior de la cuerda que cuelga del globo para evitar que el globo se levante de una mesa, bandeja de comida de hospital, tocador de dormitorio, etc. De esta manera, la ficha permanece estacionaria en la superficie plana y el globo se mantiene flotando por encima de la ficha a una altura fija, con la cuerda recta. Está trabajando en un globo cuya envoltura es muy delgada y tiene una masa de 0.150 kg. La envoltura se llena a un volumen de 0.230 m^3 con helio a presión atmosférica. La cuerda tiene una masa de 0.070 kg. Entre la selección de fichas se encuentran aquellas con masas de 10.0 g, 20.0 g, 30.0 g, 40.0 g y 50.0 g. Elija la ficha apropiada para el globo en el que está trabajando.

SECCIÓN 14.5 Dinámica de fluidos

- 20.** El agua que fluye de una manguera de jardín de diámetro 2.74 cm llena una cubeta de 25 L en 1.50 min. (a) ¿Cuál es la rapidez del agua que sale del extremo de la manguera? (b) Se acopla una boquilla al extremo de la manguera. Si el diámetro de la boquilla es un tercio del diámetro de la manguera, ¿cuál es la rapidez del agua que sale por la boquilla?
- 21.** Sobre un dique de altura h cae agua con un caudal de masa R , en unidades de kilogramos por segundo. (a) Demuestre que la potencia disponible a causa del agua es

$$P = I_v g h$$

donde g es la aceleración en caída libre. (b) Cada unidad hidroeléctrica en el dique Grand Coulee toma agua en una cantidad de $8.50 \times 10^5 \text{ kg/s}$ desde una altura de 87.0 m. La potencia desarrollada por la caída de agua se convierte en energía eléctrica con una eficiencia del 85.0%. ¿Cuánta energía eléctrica produce cada unidad hidroeléctrica?

SECCIÓN 14.6 Ecuación de Bernoulli

- 22.** Un legendario niño holandés salvó a Holanda al poner su dedo en un hoyo de 1.20 cm de diámetro en un dique. Si el hoyo estaba 2.00 m bajo la superficie del Mar del Norte (densidad $1\,030 \text{ kg/m}^3$), (a) ¿cuál fue la fuerza sobre su dedo? (b) Si él hubiera sacado el dedo del hoyo, ¿durante qué intervalo de tiempo, el agua liberada llenaría 1 acre de tierra a una profundidad de 1 pie? Suponga que el hoyo mantuvo constante su tamaño.
- 23.** Desde el Río Colorado se bombea agua para suministrar a Grand Canyon Village, ubicada a la orilla del cañón. El río está a una elevación de 564 m y la villa está a una elevación de 2 096 m. Imagine que el agua se bombea a través de una larga tubería de 15.0 cm de diámetro, impulsada por una bomba en el extremo inferior. (a) ¿Cuál es la presión mínima a la que el agua debe bombearse si ha de llegar a la villa? (b) Si $4\,500 \text{ m}^3$ de agua se bombean por día, ¿cuál es la rapidez del agua en la tubería? *Nota:* Suponga que la aceleración en caída libre y la densidad del aire son constantes en este intervalo de elevaciones. Las presiones que calcule son muy altas para una tubería

ordinaria. En realidad el agua se eleva en etapas mediante varias bombas a través de tuberías cortas.

- 24. C/C** En flujo ideal, un líquido de 850 kg/m^3 de densidad se mueve desde un tubo horizontal de 1.00 cm de radio a un segundo tubo horizontal de 0.500 cm de radio a la misma elevación que el primer tubo. La presión difiere por ΔP entre el líquido en un tubo y el líquido en el segundo tubo. (a) Encuentre la rapidez de flujo volumétrico como una función de ΔP . Evalúe la rapidez de flujo volumétrico para (b) $\Delta P = 6.00 \text{ kPa}$ y (c) $\Delta P = 12.0 \text{ kPa}$.

- 25. C/C** **Problema de repaso.** El géiser Old Faithful en el parque nacional Yellowstone erupciona a intervalos aproximados de 1 hora, y la altura de la columna de agua alcanza 40.0 m (figura P14.25). (a) Modele la corriente que se eleva como una serie de gotas separadas. Analice el movimiento en caída libre de una de las gotas para determinar la rapidez a la que el agua deja el suelo. (b) **¿Qué pasaría si?** Modele la corriente que se eleva como un fluido ideal en un flujo de líneas de corriente. Use la ecuación de Bernoulli para determinar la rapidez del agua mientras deja el nivel del suelo. (c) ¿De qué modo se compara la respuesta del inciso (a) con la respuesta del inciso (b)? (d) ¿Cuál es la presión (arriba de la atmosférica) en la cámara subterránea caliente si su profundidad es de 175 m? Suponga que la cámara es grande en comparación con la boca del géiser.



Figura P14.25

- 26. CE** Está trabajando como testigo experto para el propietario de un complejo de rascacielos en el centro de la ciudad. El propietario está siendo demandado por peatones en las calles debajo de sus edificios que resultaron heridos por la caída de cristales cuando ventanas salieron expelidas de los lados del edificio. El efecto Bernoulli puede tener consecuencias importantes para las ventanas en dichos edificios. Por ejemplo, el viento puede soplar alrededor de un rascacielos a una velocidad notablemente alta, creando una baja presión en la superficie exterior de las ventanas. La presión atmosférica más alta en el aire inmóvil dentro de los edificios puede hacer que las ventanas sean expulsadas. (a) En su investigación sobre el caso, encontrará algunas vistas generales del proyecto de su cliente, como se muestra a continuación. El proyecto incluye dos altos rascacielos y un área de parque en un terreno cuadrado. El plan (i) (figura P14.26 (i), página 382) fue presentado por los arquitectos y planificadores originales. En el último minuto, el propietario decidió que no quería que los terrenos del parque se dividieran en dos áreas y presentó el Plan (ii) (figura P14.26 (ii)), que es la forma en que se construyó el proyecto. Explique a su cliente por qué el plan (ii) es una situación mucho más peligrosa en términos de ventanas expulsadas que el plan (i). (b) Su cliente no está convencido por su argumento conceptual en el inciso (a), por lo que proporciona un argumento numérico. Un viento horizontal sopla con una velocidad de 11.2 m/s fuera de un gran panel de vidrio con dimensiones de 4.00 m x 1.50 m. Suponga que la densidad del aire es constante a 1.20 kg/m^3 . El aire dentro del edificio está a presión atmosférica. Calcule la fuerza total ejercida por el aire sobre el cristal de la ventana para su cliente. (c) **¿Qué pasaría si?** Para convencer aún más a su cliente

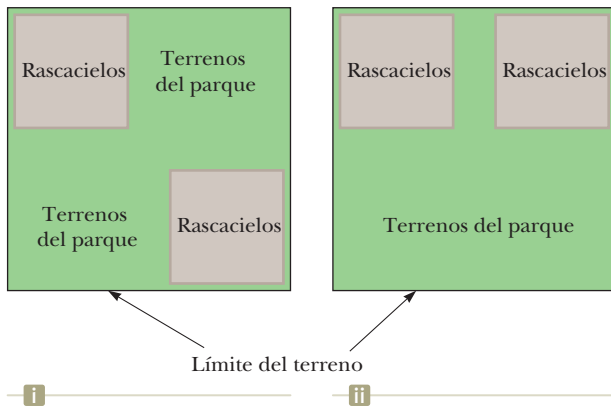


Figura P14.26

de los problemas con el diseño del edificio, calcule la fuerza total ejercida por el aire sobre el cristal si la velocidad del viento los edificios son 22.4 m/s, dos veces más altos que en el inciso (b).

SECCIÓN 14.7 Flujo de fluidos viscosos en tuberías

- 27. Se ha colocado un recubrimiento fino de glicerina de 1.50 mm entre dos portaobjetos de microscopio de 1.00 cm de ancho y 4.00 cm de largo. Encuentre la fuerza requerida para jalar de uno de los portaobjetos del microscopio a una velocidad constante de 0.300 m/s en relación con el otro portaobjetos.
- 28. Una aguja hipodérmica mide 3.00 cm de largo y 0.300 mm de diámetro. ¿Qué diferencia de presión entre la entrada y la salida de la aguja es necesaria para que el caudal de agua a través de ella sea de 1.00 g/s? (Use 1.00×10^{-3} Pa como la viscosidad del agua).
- 29. ¿Qué radio de aguja se debe usar para inyectar un volumen de 500 cm³ de una solución en un paciente en 30.0 minutos? Suponga que la longitud de la aguja es de 2.50 cm y la solución está elevada 1.00 m por encima del punto de inyección. Además, asuma que la viscosidad y la densidad de la solución son las del agua pura, y que la presión dentro de la vena es atmosférica.

SECCIÓN 14.8 Otras aplicaciones de la dinámica de fluidos

- 30. Un avión tiene una masa de 1.60×10^4 kg y cada ala tiene un área de 40.0 m². Durante vuelo a nivel, la presión sobre la superficie inferior del ala es 7.00×10^4 Pa. (a) Suponga que el empuje sobre el avión sólo se debió a una diferencia de presión. Determine la presión sobre la superficie superior del ala. (b) Más real, una parte significativa del empuje se debe a la deflexión del aire hacia abajo causada por el ala. ¿La presión en (a) es más alta o más baja si se incluye esta fuerza? Explique.
- 31. Un sifón se utiliza para drenar agua de un tanque, como se ilustra en la figura P14.31. Suponga flujo estable sin fricción.

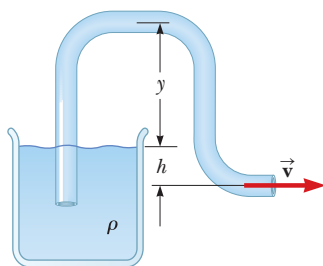


Figura P14.31

- (a) Si $h = 1.00$ m, encuentre la rapidez del flujo de salida en el extremo del sifón. (b) ¿Qué pasaría si? ¿Cuál es la limitación en la altura de la parte superior del sifón respecto al extremo de éste? Nota: Para que el flujo del líquido sea continuo, su presión no debe caer debajo de su presión de vapor. Suponga que el agua está a 20.0 °C, con una presión de vapor de 2.3 kPa.

PROBLEMAS ADICIONALES

- 32. Hace décadas se creía que los grandes dinosaurios herbívoros, como el *Apatosaurus* y el *Brachiosaurus*, habitualmente caminaban sobre el fondo de los lagos, y sus largos cuellos les permitían tomar aire de la superficie para respirar. El *Brachiosaurus* tenía sus orificios nasales en la parte superior de su cabeza. En 1977, Knut Schmidt-Nielsen puntualizó que para tal criatura sería muy difícil el proceso respiratorio. Como un simple modelo, considere una muestra de 10.0 L de aire a presión absoluta de 2.00 atm, con densidad de 2.40 kg/m³, localizada en la superficie de un lago de agua dulce. Encuentre el trabajo requerido para transportarla a una profundidad de 10.3 m, permaneciendo constantes su temperatura, volumen y presión. Este requerimiento de energía es mayor que la energía que puede obtenerse mediante el metabolismo de alimentos con el oxígeno en esa cantidad de aire.
- 33. Un globo (su envoltura tiene una masa de $m_b = 0.250$ kg) se llena con helio y se amarra a una cuerda uniforme de longitud $\ell = 2.00$ m y masa $m = 0.050$ kg. El globo es esférico, con un radio de $r = 0.400$ m. Cuando se libera en aire a temperatura de 20 °C y densidad $\rho_{\text{aire}} = 1.20$ kg/m³, se eleva una longitud h de cuerda y después permanece en equilibrio como se muestra en la figura P14.33. Se desea encontrar la longitud de cuerda levantada por el globo. (a) Cuando el globo permanece estacionario, ¿cuál es el modelo de análisis apropiado para describirlo? (b) Escriba una ecuación de fuerzas para el globo, a partir de este modelo, en términos de la fuerza boyante B , el peso F_b del globo, el peso F_{He} del helio y el peso F_s del segmento de cuerda de longitud h . (c) Realice una apropiada sustitución para cada una de esas fuerzas y resuelva simbólicamente para la masa m_s del segmento de cuerda de longitud h en términos de m_b , r , ρ_{aire} y la densidad del helio ρ_{He} . (d) Obtenga el valor numérico de la masa m_s . (e) Determine la longitud h numéricamente.

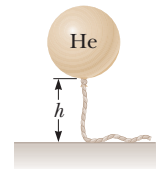


Figura P14.33

- 34. El peso verdadero de un objeto se puede medir en un vacío, donde las fuerzas de flotación están ausentes. Un objeto de volumen V se pesa en el aire sobre una balanza de brazos iguales, con el uso de contrapesos de densidad ρ . Al representar la densidad del aire como ρ_{aire} y la lectura de la balanza como F'_g , demuestre que el verdadero peso F_g es

$$F_g = F'_g + \left(V - \frac{F'_g}{\rho g} \right) \rho_{\text{aire}} g$$

- 35. A un orden de magnitud, ¿cuántos globos llenos de helio se requerirán para levantarlo a usted? Ya que el helio es un recurso irremplazable, desarrolle una respuesta teórica en lugar de una respuesta experimental. En su solución, establezca las cantidades físicas que consideró como datos y los valores que midió o estimó para ellas.
- 36. **Problema de repaso.** Suponga que cierto líquido, con densidad de 1 230 kg/m³, no ejerce fuerza de fricción sobre objetos esféricos. Una bola de 2.10 kg de masa y 9.00 cm de radio se deja caer desde el reposo en un tanque profundo de este líquido desde una altura de 3.30 m sobre la superficie. (a) Encuentre la rapidez con que entra la bola al líquido. (b)

Evalúe las magnitudes de las dos fuerzas que se ejercen sobre la bola mientras se mueve a través del líquido. (c) Explique por qué la bola se mueve hacia abajo sólo una distancia limitada en el líquido y calcule esta distancia. (d) ¿Con qué rapidez la bola aparece fuera del líquido? (e) ¿De qué modo se compara el intervalo de tiempo Δt_{abajo} durante el cual la bola se mueve desde la superficie hasta su punto más bajo, con el intervalo de tiempo Δt_{arriba} para el viaje de regreso entre los mismos puntos? (f) **¿Qué pasaría si?** Ahora modifique el modelo para suponer que el líquido ejerce una pequeña fuerza de fricción sobre la bola, opuesta en dirección a su movimiento. En este caso, ¿de qué forma se comparan los intervalos de tiempo Δt_{abajo} y Δt_{arriba} ? Explique su respuesta con un argumento conceptual en lugar de un cálculo numérico.

37. Evangelista Torricelli fue la primera persona en darse cuenta de que los seres humanos viven en el fondo de un océano de aire. Él conjeturó correctamente que la presión de la atmósfera es atribuible al peso del aire. La densidad del aire a 0 °C en la superficie de la Tierra es 1.29 kg/m³. La densidad disminuye al aumentar la altitud (a medida que la atmósfera se adelgaza). Por otra parte, si se supone que la densidad es constante a 1.29 kg/m³ hasta cierta altura h y es cero sobre dicha altura, en tal caso h representaría la profundidad del océano de aire. (a) Use este modelo para determinar el valor de h que da una presión de 1.00 atm en la superficie de la Tierra. (b) ¿La cima del monte Everest se elevaría sobre la superficie de tal atmósfera?
38. Un parámetro común que puede utilizarse para predecir turbulencia en el flujo de un fluido es el llamado *número de Reynolds*. El número de Reynolds para el flujo de un fluido en una tubería es una cantidad adimensional definida por

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta}$$

donde ρ es la densidad del fluido, v es su rapidez, d es el diámetro interno de la tubería y η es la viscosidad del fluido. La viscosidad es una medida de la resistencia interna de un líquido al flujo y tiene unidades de Pa · s. El criterio para el tipo de flujo es como sigue:

- Si $Re < 2\,300$, el flujo es laminar.
- Si $2\,300 < Re < 4\,000$, el flujo está en una región de transición entre laminar y turbulento.
- Si $Re > 4\,000$, el flujo es turbulento.

(a) Sangre de densidad 1.06×10^3 kg/m³ y viscosidad 3.00×10^{-3} Pa · s se modela como un líquido puro, es decir, se ignora la presencia de los glóbulos rojos. Suponga que la sangre fluye en una gran arteria de radio 1.50 cm con una rapidez de 0.067 0 m/s. Demuestre que el flujo es laminar. (b) Imagine que la arteria finaliza en *un solo* capilar, así que el radio de la arteria se reduce a un valor mucho más pequeño. ¿Cuál es el radio del capilar que provocaría un flujo turbulento? (c) Los capilares reales tienen radios de aproximadamente 5-10 micrómetros, mucho más pequeños que el valor en el inciso (b). ¿Por qué el flujo en los capilares reales no se hace turbulento?

39. En 1983, Estados Unidos comenzó a acuñar la moneda de un centavo a partir de zinc revestido de cobre en lugar de cobre puro. La masa del antiguo penique de cobre es 3.083 g y el del nuevo centavo es de 2.517 g. La densidad del cobre es 8.960 g/cm³ y la del zinc es 7.133 g/cm³. Las monedas nueva y antigua tienen el mismo volumen. Calcule el porcentaje de zinc (por volumen) en el nuevo centavo.
40. **Problema de repaso.** Con referencia al dique estudiado en el ejemplo 14.4 y mostrado en la figura 14.5, (a) demuestre que el momento de torsión total ejercido por el agua detrás del dique respecto a un eje horizontal a través de O es $\frac{1}{6}\rho g w H^3$.

(b) Demuestre que la línea de acción efectiva de la fuerza total ejercida por el agua está a una distancia $\frac{1}{3}H$ arriba de O .

41. El *termómetro espíritu en vidrio*, inventado en Florencia, Italia, alrededor de 1654, consiste de un tubo de líquido (el espíritu) que contiene un cierto número de esferas de vidrio sumergidas con masas ligeramente distintas (figura P14.41). A temperaturas suficientemente bajas, todas las esferas flotan, pero conforme se eleva la temperatura, las esferas se hunden una tras otra. El dispositivo es un burdo pero interesante instrumento para medir la temperatura. Suponga que el tubo está lleno con alcohol etílico, cuya densidad es 0.789 45 g/cm³ a 20.0 °C y disminuye a 0.780 97 g/cm³ a 30.0 °C. (a) Suponga que una de las esferas tiene un radio de 1.000 cm y está en equilibrio a la mitad del tubo a 20.0 °C, determine su masa. (b) Cuando la temperatura se incrementa a 30.0 °C, ¿qué masa debe tener una segunda esfera del mismo radio para estar en equilibrio en el punto medio? (c) A 30.0 °C, la primera esfera ha caído al fondo del tubo. ¿Qué fuerza hacia arriba ejerce el fondo del tubo sobre esta esfera?



Figura P14.41

42. Una mujer drena el agua de su pecera mediante un sifón que va hacia un drenaje exterior, como se muestra en la figura P14.42. El tanque rectangular tiene área de planta A y profundidad h . El drenaje se ubica a una distancia d bajo la superficie del agua en el tanque, donde $d \gg h$. El área de sección transversal del tubo de sifón es A' . Modele el agua como flujo sin fricción. Demuestre que el intervalo de tiempo requerido para vaciar el tanque es

$$\Delta t = \frac{Ah}{A'\sqrt{2gd}}$$

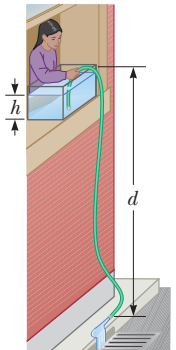
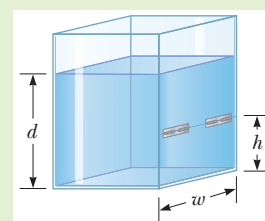


Figura P14.42

43. **Problema de repaso.** Usted y su padre están diseñando una cascada para la piscina de su patio trasero. En la parte superior de la cascada hay un tanque que contiene agua que se mantiene a una profundidad $d = 0.280$ m por una bomba. Como se muestra en la figura P14.43, hay una pequeña escotilla de altura $h = 0.100$ m y ancho $w = 0.150$ m, con bisagras en la parte superior, que se puede usar para abrir y cerrar el suministro de agua a la cascada. Desea conectar un pestillo simple en el centro de la parte inferior de la escotilla y está tratando de decidir qué tipo de pestillo comprar en su ferretería local. Para tomar esa decisión, debe determinar la fuerza que el pestillo debe poder soportar para mantener cerrada la escotilla.



P14.43 Problemas 43 y 44

44. Problema de repaso. Usted y su padre están diseñando una cascada para la piscina de su patio trasero. En la parte superior de la cascada hay un tanque que contiene agua que se mantiene a una profundidad d mediante una bomba. Como se muestra en la figura P14.43, hay una pequeña compuerta de altura h y ancho w , con bisagras en la parte superior, que se puede usar para abrir y cerrar el suministro de agua a la cascada. Desea conectar un pestillo simple en el centro de la parte inferior de la escotilla y está tratando de decidir qué tipo de pestillo comprar en su ferretería local. Para tomar esa decisión, debe determinar la fuerza que el pestillo debe poder soportar para mantener cerrada la escotilla.

45. Problema de repaso. Un disco uniforme de 10.0 kg de masa y 0.250 m de radio gira a 300 rev/min en un eje de baja fricción. Se debe detener en 1.0 min mediante un freno que hace contacto con el disco a una distancia promedio de 0.220 m del eje. El coeficiente de fricción entre el freno y el disco es 0.500. Un pistón en un cilindro de 5.00 cm de diámetro presiona el freno contra el disco. Encuentre la presión requerida para el fluido de frenos en el cilindro.

46. Problema de repaso. En una pistola de agua, un pistón impulsa el agua a través de un tubo grande de área A_1 hacia un tubo más pequeño de área A_2 , como se muestra en la figura P14.46. El radio del tubo grande es 1.00 cm y el del tubo pequeño es 1.00 mm. El tubo menor está 3.00 cm arriba del tubo mayor. (a) Si la pistola se dispara horizontalmente a una altura de 1.50 m, determine el intervalo de tiempo requerido para que el agua viaje desde la boquilla hasta el suelo. Desprecie la resistencia del aire y suponga presión atmosférica de 1.00 atm. (b) Si el alcance deseado del chorro es 8.00 m, ¿con qué rapidez v_2 debe salir el agua por la boquilla? (c) ¿A qué rapidez v_1 debe moverse el émbolo para lograr el alcance deseado? (d) ¿Cuál es la presión en la boquilla? (e) Encuentre la presión requerida en el tubo mayor. (f) Calcule la fuerza que se debe ejercer sobre el gatillo para lograr el alcance deseado. (La fuerza que se debe ejercer está arriba de la presión atmosférica.)

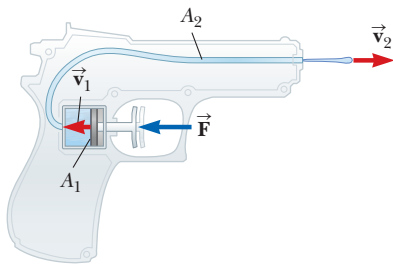


Figura P14.46

47. Un fluido incompresible, no viscoso, inicialmente en reposo en la parte vertical de la tubería que se muestra en la figura

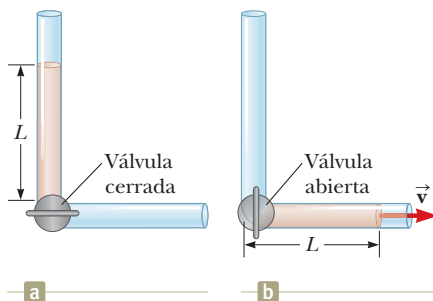


Figura P14.47

P14.47a, donde $L = 2.00$ m. Cuando la válvula se abre, el fluido circula a la sección horizontal de la tubería. ¿Cuál es la rapidez del fluido cuando está por completo en la sección horizontal, como se muestra en la figura P17.47b? Suponga que el área de sección transversal de toda la tubería es constante.

48. S El casco de un bote experimental se levantará sobre el agua mediante un aerodeslizador montado bajo su quilla, como se muestra en la figura P14.48. El aerodeslizador tiene forma de ala de avión. Su área proyectada sobre una superficie horizontal es A . Cuando el bote se remolca con una rapidez lo suficientemente alta, el agua se mueve en flujo laminar de modo que su rapidez de densidad ρ promedio en la parte superior del aerodeslizador es n veces mayor que su rapidez v_b bajo el aerodeslizador. (a) Si ignora la fuerza de flotación, demuestre que la fuerza de sustentación hacia arriba que el agua ejerce sobre el aerodeslizador tiene una magnitud

$$F \approx \frac{1}{2}(n^2 - 1)\rho v_b^2 A$$

(b) El bote tiene masa M . Demuestre que la rapidez de despegue es

$$v \approx \sqrt{\frac{2Mg}{(n^2 - 1)A\rho}}$$

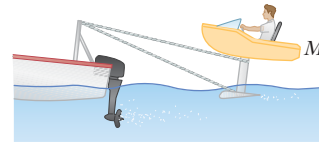


Figura P14.48

PROBLEMAS DE DESAFÍO

49. S Demuestre que la variación de presión atmosférica con la altitud está dada por $P = P_0 e^{-\alpha y}$, donde $\alpha = \rho_0 g / P_0$, P_0 es la presión atmosférica en algún nivel de referencia $y = 0$ y ρ_0 es la densidad atmosférica a este nivel. Suponga que la disminución en presión atmosférica sobre un cambio infinitesimal en altura (de modo que la densidad es aproximadamente uniforme) puede expresarse, de la ecuación 14.4, como $dP = -\rho g dy$. También suponga que la densidad de aire es proporcional a la presión, lo cual, como se verá en el capítulo 18, es equivalente a suponer que la temperatura del aire es la misma para toda altitud.

50. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Una barcaza transporta, a lo largo de un río, una carga de pequeños pedazos de hierro apilados. La pila de hierro tiene la forma de un cono cuyo radio r de la base es igual a su altura central h . La barcaza tiene forma cuadrada, con lados verticales de longitud $2r$, así que la pila de hierro llena justo los bordes de la barcaza. El navío se aproxima a un puente de baja altura, y el capitán observa que la parte superior de la pila no logrará pasar por debajo del puente. El capitán ordena a la tripulación que tire al agua pedazos de hierro para así disminuir la altura de la pila. Conforme el hierro se va tirando, la pila siempre mantiene su forma cónica cuyo diámetro es igual a la longitud lateral de la barcaza. Después de un cierto volumen de hierro lanzado al agua, la nave pasa bajo el puente sin que la parte superior de la pila pegue en el puente.



Oscilaciones y ondas mecánicas

En la Parte 1 de este texto, nos enfocamos en un término de transferencia de energía particular en la ecuación 8.2: trabajo W . En las Partes 2 a 5, enfocaremos nuestros esfuerzos en cada parte en un nuevo término en la ecuación 8.2. Aquí en la Parte 2, investigaremos el término T_{MW} : transferencia de energía por ondas mecánicas. Esta nueva parte del texto inicia con el estudio de una clase especial de movimiento llamado movimiento *periódico*, el movimiento repetitivo de un objeto en el que éste permanece para regresar a una posición conocida después de un intervalo de tiempo fijo. El movimiento repetitivo de tal objeto se llama *oscilación*. La atención se concentrará a un caso especial de movimiento periódico, llamado *movimiento armónico simple*. Todos los movimientos periódicos se representan como combinaciones de movimientos armónicos simples.

El movimiento armónico simple también forma la base para comprender las *ondas mecánicas*. Las ondas sonoras, las ondas sísmicas, las ondas sobre cuerdas estiradas y las ondas en el agua son producidas por alguna fuente de oscilación. A medida que una onda sonora viaja a través del aire, elementos del aire oscilan de atrás para adelante; conforme una onda en el agua viaja a través de un estanque, los elementos del agua oscilan arriba y abajo y hacia atrás y hacia adelante.

Para explicar muchos otros fenómenos en la naturaleza, se deben comprender los conceptos de oscilaciones y ondas. Por ejemplo, aunque los rascacielos y puentes parecen rígidos, en realidad oscilan, algo que deben tomar en consideración los arquitectos e ingenieros que los diseñan y construyen. Para entender cómo funcionan la radio y la televisión, debe comprender el origen y naturaleza de las ondas electromagnéticas y cómo se propagan a través del espacio. Por último, mucho de lo que han aprendido los científicos acerca de la estructura atómica viene de información aportada por las ondas. ■

Las gotas de agua que caen hacen que la superficie de agua oscile. Estas oscilaciones se asocian con ondas circulares que se alejan del punto en el cual caen las gotas. En la segunda parte del texto, exploraremos los principios relacionados con oscilaciones y ondas. (Ziga Camernik/Shutterstock)



15

Un reloj de péndulo marca el tiempo en una habitación. El mecanismo de sincronización depende del balanceo de un péndulo. Este balanceo repetitivo es un ejemplo de movimiento oscilatorio. (Antonio Gravante/Shutterstock)



Movimiento oscilatorio

- 15.1 Movimiento de un objeto unido a un resorte
- 15.2 Modelo de análisis: Partícula en movimiento armónico simple
- 15.3 Energía del oscilador armónico simple
- 15.4 Comparación de movimiento armónico simple con movimiento circular uniforme
- 15.5 El péndulo
- 15.6 Oscilaciones amortiguadas
- 15.7 Oscilaciones forzadas

IMAGINE En el capítulo anterior, despegaba en un avión desde

Denver, Colorado, a Boston, Massachusetts. Ahora está visitando a sus abuelos en Boston. Hay un antiguo reloj de péndulo que marca el tiempo en una de las habitaciones. El suave clic del péndulo oscilante es relajante para usted. Recuerda que sus abuelos solían vivir en Denver, igual que sus otros abuelos, y luego se mudaron de Denver a Boston, trayendo el reloj consigo. Su abuela entra a la habitación y usted menciona los recuerdos de su infancia con el reloj. Ella le dice que lo había calibrado profesionalmente en Denver y lo mantuvo en un tiempo perfecto durante años. Después de que lo trasladaron aquí a su casa de Massachusetts, no ha sido preciso. Funciona muy rápido y debe restablecerse a la hora correcta cada pocos días. Le pregunta a su abuela qué hizo la relojería en Denver para calibrar el reloj, pero ella no sabe. Se pregunta, ¿podría hacer algo para calibrar el reloj?

CONEXIONES Este es un capítulo de enlace. En su mayor parte hasta el momento, hemos considerado el movimiento que ocurre una vez y no se repite: una pelota que es lanzada, un automóvil que se acelera, una caja que es empujada. En la sección 4.4, vimos nuestro primer ejemplo de movimiento repetitivo: una partícula que se mueve en una trayectoria circular regresa al punto de partida y realiza el mismo movimiento una y otra vez. En este capítulo, aplicaremos los principios de la mecánica al caso especial de un objeto oscilante. Desde este punto de vista, este capítulo se basa en la comprensión de una situación nueva e importante fundamentada en el material que hemos estudiado

en capítulos anteriores. Por otro lado, las oscilaciones son la base para comprender todo tipo de ondas. Mencionamos brevemente ondas mecánicas y ondas electromagnéticas en la sección 8.1 y estudiaremos ondas mecánicas en los siguientes dos capítulos y ondas electromagnéticas en el capítulo 33. Por tanto, este capítulo, aunque se basa en principios del pasado, nos está preparando para nuestro estudio futuro de las ondas.

15.1 Movimiento de un objeto unido a un resorte

Como un modelo de movimiento armónico simple considere un bloque de masa m unido al extremo de un resorte, con el bloque libre de moverse sobre una superficie horizontal sin fricción (figura 15.1). Cuando el resorte no está estirado ni comprimido, el bloque queda en reposo, en la posición llamada *posición de equilibrio* del sistema, que se identifica como $x = 0$ (figura 15.1b). Se sabe por la experiencia que tal sistema oscila de atrás para adelante si se perturba desde su posición de equilibrio.

Se puede entender cualitativamente el movimiento oscilatorio del bloque en la figura 15.1 al recordar primero que, cuando el bloque se desplaza a una posición x , el resorte ejerce sobre el bloque una fuerza que es proporcional a la posición y está dada por la **ley de Hooke** (vea la sección 7.4):

$$F_s = -kx \quad (15.1)$$

◀ Ley de Hooke

A F_s se le llama **fuerza restauradora** porque siempre se dirige hacia la posición de equilibrio y, en consecuencia, es *opuesta* al desplazamiento del bloque desde el equilibrio. Es decir, cuando el bloque se desplaza hacia la derecha de $x = 0$ en la figura 15.1a, la posición es positiva y la fuerza restauradora se dirige hacia la izquierda. Cuando el bloque se desplaza a la izquierda de $x = 0$, como en la figura 15.1c, la posición es negativa y la fuerza restauradora se dirige hacia la derecha.

Cuando el bloque es desplazado desde el punto de equilibrio y se suelta, éste es una partícula bajo una fuerza neta y en consecuencia experimenta una aceleración. Al aplicar la segunda ley de Newton al movimiento del bloque, con la ecuación 15.1 que proporciona la fuerza neta en la dirección x , se obtiene

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x \rightarrow -kx = ma_x \\ a_x &= -\frac{k}{m}x \end{aligned} \quad (15.2)$$

Es decir, la aceleración del bloque es proporcional a su posición, y la dirección de la aceleración es opuesta a la dirección del desplazamiento del bloque desde el equilibrio. Se dice que los sistemas que se comportan de esta forma exhiben **movimiento armónico simple**. Un objeto se mueve con movimiento armónico simple siempre que su aceleración es proporcional a su posición y se dirige en sentido opuesto al desplazamiento desde el equilibrio.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 15.1

La orientación del resorte La figura 15.1 muestra un resorte *horizontal*, con un bloque unido que se desliza sobre una superficie sin fricción. Otra posibilidad es un bloque que cuelga de un resorte *vertical*. Todos los resultados que se explican para el resorte horizontal son los mismos para el resorte vertical, con una excepción: cuando el bloque se coloca en el resorte vertical, su peso hace que el resorte se extienda. Si la posición de reposo del bloque se define como $x = 0$, los resultados de este capítulo también se aplican a este sistema vertical.

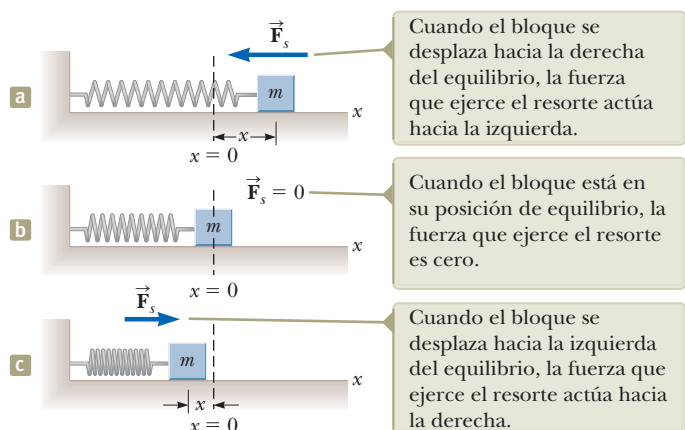


Figura 15.1 Un bloque unido a un resorte móvil sobre una superficie sin fricción.

Si el bloque en la figura 15.1 se desplaza a una posición $x = A$ y se libera desde el reposo, su aceleración inicial es $-kA/m$. Cuando el bloque pasa a través de la posición de equilibrio $x = 0$, su aceleración es cero. En este instante, su rapidez es un máximo porque la aceleración cambia de signo. Por tanto el bloque continúa viajando hacia la izquierda del equilibrio con una aceleración positiva y al final llega a $x = -A$, momento en el que su aceleración es $+kA/m$ y su rapidez de nuevo es cero, como se explicó en las secciones 7.4 y 7.9. El bloque termina un ciclo completo de su movimiento cuando regresa a la posición original y una vez más pasa por $x = 0$ con rapidez máxima. En consecuencia, el bloque oscila entre los puntos de retorno $x = \pm A$. En ausencia de fricción, este movimiento idealizado continuará por siempre porque la fuerza que ejerce el resorte es conservativa. Por lo general, los sistemas reales están sujetos a fricción, así que no oscilan por siempre. En la sección 15.6 se explorarán los detalles de la situación con la fricción.

E XAMEN RÁPIDO 15.1 Un bloque en el extremo de un resorte se jala a la posición $x = A$ y se libera desde el reposo. En un ciclo completo de su movimiento, ¿qué distancia total recorre? (a) $A/2$, (b) A , (c) $2A$, (d) $4A$.

15.2 Partícula en movimiento armónico simple

El movimiento descrito en la sección precedente se presenta con tanta frecuencia que se considera el modelo de **partícula en movimiento armónico simple** para representar tales situaciones. Para desarrollar una representación matemática para este modelo, por lo general se elegirá x como el eje a lo largo del que se presenta la oscilación; por eso, en esta explicación se eliminará la notación de subíndice x . Recuerde que, por definición, $a = dv/dt = d^2x/dt^2$, y así la ecuación 15.2 se puede expresar como

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (15.3)$$

Si la razón k/m se indica con el símbolo ω^2 (se elige ω^2 en lugar de ω para que la solución que se desarrolle a continuación sea más simple en forma), entonces

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (15.4)$$

y la ecuación 15.3 se puede escribir en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x \quad (15.5)$$

Ahora encuentre una solución matemática a la ecuación 15.5, esto es, una función $x(t)$ que satisfaga la ecuación diferencial de segundo orden y sea una representación matemática de la posición de la partícula como función del tiempo. Se busca una función cuya segunda derivada sea la misma que la función original con un signo negativo y multiplicada por ω^2 . Las funciones trigonométricas seno y coseno muestran este comportamiento, así que se puede construir una solución alrededor de una de ellas o de ambas. La función coseno que aparece en seguida es una solución a la ecuación diferencial:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (15.6)$$

donde A , ω y ϕ son constantes. Para mostrar explícitamente que esta solución satisface la ecuación 15.5, note que

$$\frac{dx}{dt} = A \frac{d}{dt} \cos(\omega t + \phi) = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (15.7)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega A \frac{d}{dt} \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \quad (15.8)$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 15.2

Una aceleración no constante La aceleración de una partícula en movimiento armónico simple no es constante. La ecuación 15.3 muestra que su aceleración varía con la posición x . Por tanto, en esta situación *no se pueden* aplicar las ecuaciones de cinemática del capítulo 2.

► Posición contra tiempo para una partícula en movimiento armónico simple



Al comparar las ecuaciones 15.6 y 15.8, es claro que $d^2x/dt^2 = -\omega^2x$ satisface la ecuación 15.5.

Los parámetros A , ω y ϕ son constantes del movimiento. Para dar un significado físico a dichas constantes, es conveniente formar una representación del movimiento al graficar x como función de t como en la figura 15.2a. Primero, A , llamada la **amplitud** del movimiento, es simplemente el máximo valor de la posición de la partícula en la dirección x positiva o negativa. La constante ω se llama **frecuencia angular** y tiene unidades¹ de rad/s. Es una medida de qué tan rápido se presentan las oscilaciones; mientras más oscilaciones por unidad de tiempo haya, más alto es el valor de ω . A partir de la ecuación 15.4, la frecuencia angular es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (15.9)$$

La cantidad $(\omega t + \phi)$ en la ecuación 15.6 se llama **fase** del movimiento. El ángulo constante ϕ se llama **constante de fase** (o ángulo de fase inicial) y, junto con la amplitud A , se determina de manera unívoca por la posición y la velocidad de la partícula en $t = 0$. Si la partícula está en su posición máxima $x = A$ en $t = 0$. Por tanto, A y ϕ son dos parámetros que definen las condiciones iniciales del movimiento de un objeto oscilante, al igual que x_i y v_i describe las condiciones iniciales de un objeto sometido a aceleración constante en la ecuación 2.16. Si la partícula está en su posición máxima $x = A$ en $t = 0$, la constante de fase es $\phi = 0$ y la representación gráfica del movimiento es como se muestra en la figura 15.2b. Observe que la función $x(t)$ es periódica y su valor es el mismo cada vez que ωt aumenta en 2π radianes.

Las ecuaciones 15.1, 15.5 y 15.6 forman la base de la representación matemática de la partícula en el modelo de movimiento armónico simple. Si usted analiza una situación y encuentra que la fuerza sobre una partícula tiene la forma matemática de la ecuación 15.1, usted sabrá que el movimiento es de un oscilador armónico simple y la posición de la partícula la describe la ecuación 15.6. Si analiza un sistema y logra su descripción mediante una ecuación diferencial de la forma de la ecuación 15.5, el movimiento es el de un oscilador armónico simple. Si analiza una situación y ubica la posición de una partícula mediante la ecuación 15.6, sabrá que la partícula experimenta un movimiento armónico simple.

E XAMEN RÁPIDO 15.2 Considere una representación gráfica (figura 15.3) de movimiento armónico simple, como se describe matemáticamente en la ecuación 15.6. Cuando el objeto está en el punto \textcircled{A} de la gráfica, ¿qué puede decir acerca de su posición y velocidad? (a) La posición y velocidad son positivas. (b) La posición y velocidad son negativas. (c) La posición es positiva y su velocidad es cero. (d) La posición es negativa y su velocidad es cero. (e) La posición es positiva y su velocidad es negativa. (f) La posición es negativa y su velocidad es positiva.

E XAMEN RÁPIDO 15.3 La figura 15.4 muestra dos curvas que representan el movimiento armónico simple al que se someten dos partículas. La descripción correcta de estos dos movimientos es que el movimiento armónico simple de la partícula B es, (a) de mayor frecuencia angular y mayor amplitud que el de la partícula A, (b) de mayor frecuencia angular y menor amplitud que el de la partícula A, (c) de menor frecuencia angular y mayor amplitud que el de la partícula A o (d) de menor frecuencia angular y menor amplitud que el de la partícula A.

Investigue un poco más la descripción matemática del movimiento armónico simple. El **periodo** T del movimiento es el intervalo de tiempo requerido para que la partícula pase a través de un ciclo completo de su movimiento (figura 15.2a). Es decir, los valores de x y v

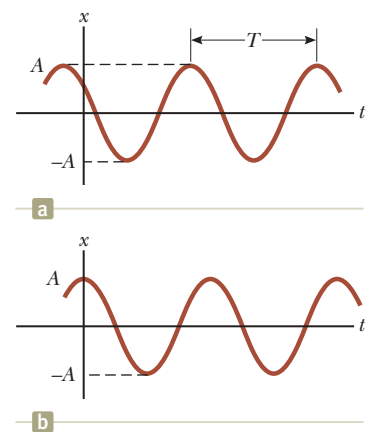


Figura 15.2 (a) Gráfica $x-t$ para una partícula que experimenta un movimiento armónico simple. La amplitud del movimiento es A , el periodo (definido en la ecuación 15.10) es T . (b) Gráfica $x-t$ en el caso especial en el que $x = A$ en $t = 0$ y por eso $\phi = 0$.

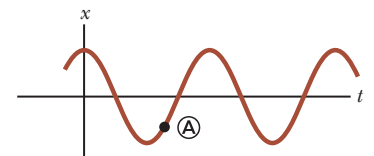


Figura 15.3 (Examen rápido 15.2) Gráfica $x-t$ para una partícula experimentando un movimiento armónico simple. En un tiempo particular, la posición de la partícula se indica por \textcircled{A} en la gráfica.

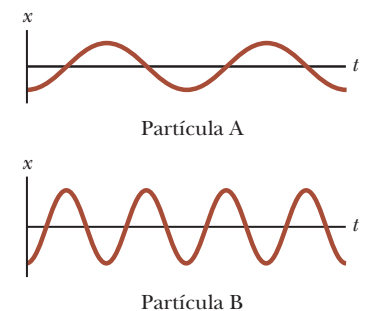


Figura 15.4 (Examen rápido 15.3) Dos gráficas $x-t$ para partículas experimentando movimiento armónico simple. Las amplitudes y frecuencias son diferentes para las dos partículas.

¹ En capítulos anteriores se vieron muchos ejemplos en los que se evalúa una función trigonométrica de un ángulo. El argumento de una función trigonométrica, como la función coseno en la ecuación 15.6, debe ser un número puro sin unidades. El radián es un número puro porque es un cociente de longitudes. Por tanto, ω debe expresarse en rad/s (y no, por ejemplo, en revoluciones por cada segundo) si t se expresa en segundos.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 15.3

Dos tipos de frecuencia Se identifican dos tipos de frecuencia para un oscilador armónico simple: f , llamada simplemente *frecuencia*, se mide en hertz, y ω , la frecuencia angular, se mide en radianes por segundo. Asegúrese de tener claridad acerca de cuál frecuencia se discute o solicita en un problema determinado. Las ecuaciones 15.11 y 15.12 muestran la relación entre las dos frecuencias.

para la partícula en el tiempo t son iguales a los valores de x y v en el tiempo $t + T$. Ya que la fase aumenta en 2π radianes en un intervalo de tiempo de T ,

$$[\omega(t + T) + \phi] - (\omega t + \phi) = 2\pi$$

Al simplificar esta expresión se obtiene $\omega T = 2\pi$, o

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (15.10)$$

El inverso del periodo se llama **frecuencia** f del movimiento. Mientras que el periodo es el intervalo de tiempo por oscilación, la frecuencia representa el número de oscilaciones que experimenta la partícula por unidad de intervalo de tiempo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (15.11)$$

Las unidades de f son ciclos por segundo, o hertz (Hz). Al reordenar la ecuación 15.11 se obtiene

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (15.12)$$

Las ecuaciones de la 15.9, a la 15.11 se usan para expresar el periodo y la frecuencia del movimiento para la partícula en movimiento armónico simple en términos de las características m y k del sistema como

Periodo de un oscilador armónico simple ▶

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (15.13)$$

Frecuencia de un oscilador armónico simple ▶

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (15.14)$$

De este modo el periodo y la frecuencia dependen *solamente* de la masa de la partícula y de la constante de fuerza del resorte y *no* de los parámetros del movimiento, como A o ϕ . Como es de esperar, la frecuencia es mayor para un resorte más rígido (mayor valor de k) y disminuye con la masa creciente de la partícula.

Es posible obtener la velocidad y la aceleración² de una partícula sometida a movimiento armónico simple a partir de las ecuaciones 15.7 y 15.8:

Velocidad como una función del tiempo para un oscilador armónico simple ▶

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (15.15)$$

Aceleración como una función del tiempo para un oscilador armónico simple ▶

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \quad (15.16)$$

A partir de la ecuación 15.15 se ve que, puesto que las funciones seno y coseno oscilan entre ± 1 , los valores extremos de la velocidad v son $\pm\omega A$. Del mismo modo, la ecuación 15.16 muestra que los valores extremos de la aceleración a son $\pm\omega^2 A$. En consecuencia, los valores *máximos* de las magnitudes de la velocidad y la aceleración son

Magnitudes máximas de la velocidad y aceleración en movimiento armónico simple ▶

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A \quad (15.17)$$

$$v_{\text{máx}} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A \quad (15.18)$$

²Ya que el movimiento de un oscilador armónico simple tiene lugar en una dimensión, la velocidad se indica como v y la aceleración como a , con la dirección indicada mediante un signo positivo o negativo, como en el capítulo 2.



La figura 15.5a grafica la posición con el tiempo para un valor arbitrario de la constante de fase. En las figuras 15.5b y 15.5c se ilustran respectivamente las curvas asociadas velocidad-tiempo y aceleración-tiempo. Las cuales muestran que la fase de la velocidad difiere de la fase de la posición en $\pi/2$ rad, o 90° . Es decir: cuando x es un máximo o un mínimo, la velocidad es cero. Del mismo modo, cuando x es cero, la rapidez es un máximo. Además, observe que la fase de la aceleración difiere de la fase de la posición en π radianes, o 180° . Por ejemplo, cuando x es un máximo, a tiene una magnitud máxima en la dirección opuesta.

E XAMEN RÁPIDO 15.4 Un objeto de masa m cuelga de un resorte y se pone en oscilación. El periodo de la oscilación se mide y registra como T . El objeto de masa m se retira y se sustituye con un objeto de masa $2m$. Cuando este objeto se pone en oscilación, ¿cuál es el periodo del movimiento? (a) $2T$, (b) $\sqrt{2} T$, (c) T , (d) $T/\sqrt{2}$, (e) $T/2$.

La ecuación 15.6 describe el movimiento armónico simple de una partícula en general. Ahora vea cómo evaluar las constantes del movimiento. La frecuencia angular ω se evalúa con la ecuación 15.9. Las constantes A y ϕ se evalúan a partir de las condiciones iniciales, es decir, del estado del oscilador en $t = 0$.

Suponga que la partícula se pone en movimiento al jalarla desde el equilibrio una distancia A y liberarla desde el reposo en $t = 0$, como en la figura 15.6. Después se deben requerir soluciones para $x(t)$ y $v(t)$ (ecuaciones 15.6 y 15.15) para obedecer las condiciones iniciales $x(0) = A$ y $v(0) = 0$:

$$x(0) = A \cos \phi = A$$

$$v(0) = -\omega A \sin \phi = 0$$

Estas condiciones se satisfacen si $\phi = 0$, lo que da $x = A \cos \omega t$ como solución. Si busca comprobar esta solución, note que satisface la condición $x(0) = A$ porque $\cos 0 = 1$.

La posición, velocidad y aceleración con el tiempo se grafican en la figura 15.7a para este caso especial. La aceleración alcanza valores extremos de $\mp \omega^2 A$ cuando la posición tiene valores extremos de $\pm A$. Además, la velocidad tiene valores extremos de $\pm \omega A$, que se presentan en $x = 0$. Por tanto, la solución cuantitativa concuerda con la descripción cualitativa de este sistema.

Considere otra posibilidad. Suponga que el sistema oscila y se define $t = 0$ como el instante cuando la partícula pasa a través de la posición no estirada del resorte mientras se mueve a la derecha (figura 15.8). En este caso, las soluciones para $x(t)$ y $v(t)$ deben obedecer las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $v(0) = v_i$:

$$x(0) = A \cos \phi = 0$$

$$v(0) = -\omega A \sin \phi = v_i$$

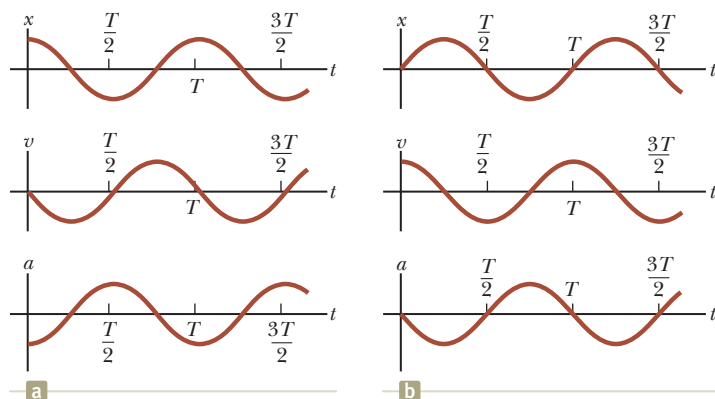


Figura 15.7 (a) Posición, velocidad y aceleración contra el tiempo para un bloque de la figura 15.6 bajo las condiciones iniciales $t = 0$, $x(0) = A$ y $v(0) = 0$. (b) Posición, velocidad y aceleración con el tiempo para un bloque de la figura 15.8 bajo las condiciones iniciales $t = 0$, $x(0) = 0$ y $v(0) = v_i$.

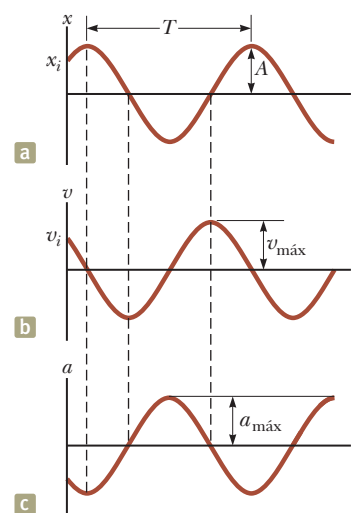


Figura 15.5 Representación gráfica de movimiento armónico simple. (a) Posición contra tiempo. (b) Velocidad contra tiempo. (c) Aceleración contra tiempo. Note que en cualquier tiempo especificado la velocidad está 90° fuera de fase con la posición y la aceleración está 180° fuera de fase con la posición.

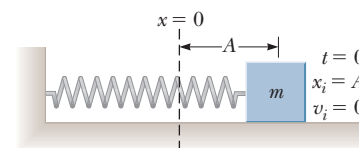


Figura 15.6 Un sistema bloque-resorte que inicia su movimiento desde el reposo con el bloque en $x = A$ en $t = 0$.

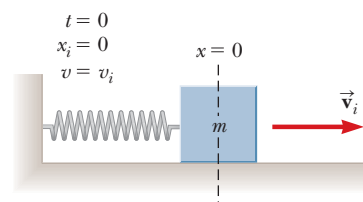


Figura 15.8 El sistema bloque-resorte experimentando oscilaciones y en $t = 0$ se define en un instante cuando el bloque pasa a través de la posición de equilibrio $x = 0$ y se mueve hacia la derecha con rapidez v_i .

La primera de estas condiciones dice que $\phi = \pm\pi/2$. Con estas opciones para ϕ , la segunda condición dice que $A = \mp v_i/\omega$. Ya que la velocidad inicial es positiva y la amplitud es positiva, se debe tener $\phi = -\pi/2$. En consecuencia, la solución es

$$x = \frac{v_i}{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Las gráficas de posición, velocidad y aceleración contra el tiempo para esta opción de $t = 0$ se muestran en la figura 15.7b. Note que estas curvas son las mismas que en la figura 15.7a, pero desplazadas a la derecha en un cuarto de ciclo. Este cambio se describe matemáticamente mediante la constante de fase $\phi = -\pi/2$, que es un cuarto de un ciclo completo de 2π .

MODELO DE ANÁLISIS Partículas en movimiento armónico simple

Imagine un objeto que está sujeto a una fuerza que es proporcional al negativo de la posición del objeto, $F = -kx$ (ecuación 15.1). Esta ecuación de fuerza se conoce como la ley de Hooke, y describe la fuerza aplicada a un objeto unido a un resorte ideal. El parámetro k de la ley de Hooke se llama la *constante elástica* o *constante de fuerza*. La posición de un objeto actuado sobre una fuerza descrita por la ley de Hooke está dada por

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (15.6)$$

donde A es la **amplitud** del movimiento, ω es la **frecuencia angular**, y ϕ es la **constante de fase**. Los valores de A y ϕ dependen de la posición inicial y la velocidad inicial de la partícula.

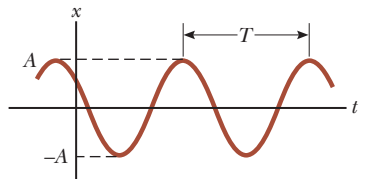
El **periodo** de la oscilación de la partícula es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (15.13)$$

y el inverso del periodo es la **frecuencia**.

Ejemplos:

- un saltador de *bungee* cuelga de una cuerda y oscila hacia arriba y abajo
- una cuerda de guitarra vibra hacia adelante y atrás en una onda estacionaria, con cada elemento de la cuerda moviéndose en movimiento armónico simple (capítulo 17)
- un pistón en un motor de gasolina oscila hacia arriba y hacia abajo dentro del cilindro del motor (capítulo 21)
- un átomo en una molécula diatómica vibra hacia adelante y atrás como si estuviera conectado por un resorte a otro átomo de la molécula (capítulo 42)



Ejemplo 15.1 Un sistema bloque-resorte

Un bloque de 200 g conectado a un resorte ligero tiene una constante de fuerza de 5.00 N/m y es libre de oscilar sobre una superficie horizontal sin fricción. El bloque se desplaza 5.00 cm desde el equilibrio y se libera del reposo como en la figura 15.6.

(A) Hallar el periodo de su movimiento.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie la figura 15.6 e imagine el bloque que se mueve hacia atrás y adelante en movimiento armónico simple una vez que se libera. Establezca un modelo experimental en la dirección vertical al colgar un objeto pesado, como una engrapadora, de una banda de hule resistente.

Categorizar El bloque se modela como una *partícula en movimiento armónico simple*.

Analizar

Aplique la ecuación 15.9 para hallar la frecuencia angular del sistema bloque-resorte:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5.00 \text{ N/m}}{200 \times 10^{-3} \text{ kg}}} = 5.00 \text{ rad/s}$$

Use la ecuación 15.13 para encontrar el periodo del sistema:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5.00 \text{ rad/s}} = 1.26 \text{ s}$$

15.1 continuación

(B) Determine la rapidez máxima del bloque.

SOLUCIÓN

Use la ecuación 15.17 para hallar $v_{\text{máx}}$:

$$v_{\text{máx}} = \omega A = (5.00 \text{ rad/s})(5.00 \times 10^{-2} \text{ m}) = 0.250 \text{ m/s}$$

(C) ¿Cuál es la máxima aceleración del bloque?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 15.18 para hallar $a_{\text{máx}}$:

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = (5.00 \text{ rad/s})^2(5.00 \times 10^{-2} \text{ m}) = 1.25 \text{ m/s}^2$$

(D) Exprese la posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo en unidades del SI.

SOLUCIÓN

Encuentre la constante de fase a partir de la condición inicial de que $x = A$ en $t = 0$:

$$x(0) = A \cos \phi = A \rightarrow \phi = 0$$

Aplique la ecuación 15.6 para escribir una expresión para $x(t)$:

$$x = A \cos(\omega t + \phi) = 0.0500 \cos 5.00t$$

Use la ecuación 15.15 para escribir una expresión para $v(t)$:

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \phi) = -0.250 \sin 5.00t$$

Aplique la ecuación 15.16 para escribir una expresión para $a(t)$:

$$a = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) = -1.25 \cos 5.00t$$

Finalizar Considere el inciso (a) de la figura 15.7, que muestra las representaciones gráficas del movimiento del bloque en este problema. Asegúrese de que las representaciones matemáticas encontradas anteriormente en el inciso (D) son consistentes con estas representaciones gráficas.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si el bloque se libera desde la misma posición inicial, $x_i = 5.00 \text{ cm}$, pero con una velocidad inicial de $v_i = -0.100 \text{ m/s}$? ¿Qué partes de la solución cambian y cuáles son las nuevas respuestas para éstas?

Respuestas La parte (A) no cambia porque el periodo es independiente de cómo se pone en movimiento el oscilador. Las partes (B), (C) y (D) cambiarán.

Escriba las expresiones de posición y velocidad para las condiciones iniciales:

$$(1) \quad x(0) = A \cos \phi = x_i$$

$$(2) \quad v(0) = -\omega A \sin \phi = v_i$$

Divida la ecuación (2) entre la ecuación (1) para encontrar la constante de fase:

$$\frac{-\omega A \sin \phi}{A \cos \phi} = \frac{v_i}{x_i}$$

$$\tan \phi = -\frac{v_i}{\omega x_i} = -\frac{-0.100 \text{ m/s}}{(5.00 \text{ rad/s})(0.0500 \text{ m})} = 0.400$$

$$\phi = \tan^{-1}(0.400) = 0.121\pi$$

Use la ecuación (1) para hallar A:

$$A = \frac{x_i}{\cos \phi} = \frac{0.0500 \text{ m}}{\cos(0.121\pi)} = 0.0539 \text{ m}$$

Encuentre la nueva rapidez máxima:

$$v_{\text{máx}} = \omega A = (5.00 \text{ rad/s})(5.39 \times 10^{-2} \text{ m}) = 0.269 \text{ m/s}$$

Encuentre la nueva magnitud de la aceleración máxima:

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = (5.00 \text{ rad/s})^2(5.39 \times 10^{-2} \text{ m}) = 1.35 \text{ m/s}^2$$

Encuentre nuevas expresiones para posición, velocidad y aceleración en unidades del SI:

$$x = 0.0539 \cos(5.00t + 0.121\pi)$$

$$v = -0.269 \sin(5.00t + 0.121\pi)$$

$$a = -1.35 \cos(5.00t + 0.121\pi)$$

Como aprendió en los capítulos 7 y 8, muchos problemas son más fáciles de resolver al aplicar una aproximación energética en lugar de usar uno en función de variables de movimiento. La condicional **¿Qué pasaría si?**, es más fácil de resolver a partir de una aproximación energética. Por tanto, en la siguiente sección se investigará la energía del oscilador armónico simple.



Ejemplo 15.2 Más detalles del sistema bloque-resorte

Considere nuevamente el sistema de muelles en bloque del ejemplo 15.1, cuya posición, velocidad y aceleración se dan en la parte (D) del problema. Encuentre una expresión general para todos los tiempos en que el bloque se encuentra en $x = +\frac{1}{2}A$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Un factor importante a tener en cuenta es que el bloque se ubicará en la posición solicitada dos veces durante cada ciclo. Nuestra expresión general debe reflejar ese hecho.

Categorizar Como en el ejemplo 15.1, el bloque se modela como una *partícula en movimiento armónico simple*.

Analizar Escriba una expresión para la posición $x = A \cos \omega t$ del bloque sabiendo que la constante de fase es igual a cero:

Ingrese la condición de que la posición sea la mitad de la amplitud y resuelva para t : $\frac{1}{2}A = A \cos \omega t \rightarrow t = \frac{1}{\omega} \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

Reconozca que hay dos ángulos en el primer ciclo en los cuales el coseno inverso es la mitad, más ángulos adicionales se pueden encontrar agregando múltiplos enteros de 2π :

$$\begin{cases} \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + 2\pi n = \frac{\pi}{3}(1 + 6n) & n = 0, 1, 2, \dots \\ \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n = \frac{\pi}{3}(5 + 6n) & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Sustituya estos ángulos en la expresión para t : $t = \frac{1}{5.00 \text{ s}^{-1}} \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{15.0 \text{ s}^{-1}}(1 + 6n) \quad \text{o} \quad \frac{\pi}{15.0 \text{ s}^{-1}}(5 + 6n) \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Finalizar Use estas expresiones para mostrar que las primeras dos veces en que el bloque está en esta posición son 0.209 s y 1.05 s. Estos instantes son poco después de que se libera el bloque y poco antes de que se complete un ciclo completo a 1.26 s.

¿QUÉ PASARÍA SI? Supongamos que medimos la velocidad del bloque en los instantes encontrados en el problema. En estos instantes, ¿la velocidad del bloque será la mitad de la velocidad máxima?

Respuesta La velocidad del bloque depende de la función sinusoidal. Los ángulos en los que la función del coseno es igual a la mitad no serán los mismos que los ángulos en los que la función sinusoidal es igual a la mitad. Por tanto, esperamos que la respuesta sea no. Tenga en cuenta que preguntamos sobre la velocidad del bloque, no la aceleración. Realice el cálculo y demuestre que hay cuatro expresiones para los tiempos en que la velocidad es la mitad de la velocidad máxima:

$$t = \frac{\pi}{30.0 \text{ s}^{-1}}(1 + 12n) \quad \text{o} \quad \frac{\pi}{30.0 \text{ s}^{-1}}(5 + 12n) \quad \text{o} \quad \frac{\pi}{30.0 \text{ s}^{-1}}(7 + 12n) \quad \text{o} \quad \frac{\pi}{30.0 \text{ s}^{-1}}(11 + 12n) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

15.3 Energía del oscilador armónico simple

Como ya lo hemos hecho antes, después de estudiar el modelado del movimiento de un objeto como una partícula en una situación nueva (como en el capítulo 2) e investigando las fuerzas implicadas que influyen en ese movimiento (como en el capítulo 5), trataremos a la *energía* (como en el capítulo 7). Examine la energía mecánica de un sistema en el cual una partícula experimenta movimiento armónico simple, como el sistema bloque-resorte que se ilustra en la figura 15.1. Ya que la superficie no tiene fricción, el sistema está aislado y es de esperar que la energía mecánica total del sistema sea constante. Ahora suponga un resorte sin masa, de modo que la energía cinética del sistema sólo corresponde a la del bloque; puede usar la ecuación 15.15 para expresar la energía cinética del bloque como

Energía cinética de un
oscilador armónico simple

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \quad (15.19)$$



La energía potencial elástica almacenada en el resorte para cualquier elongación x está dada por $\frac{1}{2}kx^2$ (vea la ecuación 7.22). Si usa la ecuación 15.6 produce

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \tag{15.20}$$

Se ve que K y U siempre son cantidades positivas o cero. Puesto que $\omega^2 = k/m$, la energía mecánica total del oscilador armónico simple se expresa como

$$E = K + U_s = \frac{1}{2}kA^2[\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)]$$

A partir de la identidad $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, se ve que la cantidad entre corchetes es la unidad. En consecuencia, esta ecuación se reduce a

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \tag{15.21}$$

Esto es: la energía mecánica total de un oscilador armónico simple es una constante del movimiento y es proporcional al cuadrado de la amplitud. La energía mecánica total es igual a la energía potencial máxima almacenada en el resorte cuando $x = \pm A$ porque $v = 0$ en estos puntos y no hay energía cinética. En la posición de equilibrio, donde $U = 0$ porque $x = 0$, la energía total, toda en forma de energía cinética, de nuevo es $\frac{1}{2}kA^2$.

En la figura 15.9a aparecen gráficas de las energías cinética y potencial en función del tiempo, donde se consideró $\phi = 0$. En todo momento, la suma de las energías cinética y potencial es una constante igual a $\frac{1}{2}kA^2$, la energía total del sistema.

Las variaciones de K y U con la posición x del bloque se grafican en la figura 15.9b. La energía se transforma continuamente entre energía potencial almacenada en el resorte y energía cinética del bloque.

La figura 15.10 (página 396) ilustra la posición, velocidad, aceleración, energía cinética y energía potencial del sistema bloque-resorte para un periodo completo del movimiento. La mayoría de las ideas explicadas hasta el momento se incorpora en esta importante figura. Estúdiela cuidadosamente.

La ecuación 15.15 da la velocidad de una partícula en oscilación armónica simple en función del tiempo t . Podemos obtener la velocidad del bloque en una posición arbitraria expresando la energía total del sistema en una posición arbitraria x como

$$E = K + U_s = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2} \tag{15.22}$$

Al comprobar la ecuación 15.22 para ver si concuerda con casos conocidos, se encuentra que verifica que la rapidez es un máximo en $x = 0$ y es cero en los puntos de retorno $x = \pm A$.

Es posible que se pregunte por qué se pasa tanto tiempo en el estudio de los osciladores armónicos simples. La respuesta es porque son buenos modelos de una amplia variedad de fenómenos físicos.

◀ Energía potencial de un oscilador armónico

◀ Energía total de un oscilador armónico

◀ La velocidad como una función de la posición para un oscilador armónico simple

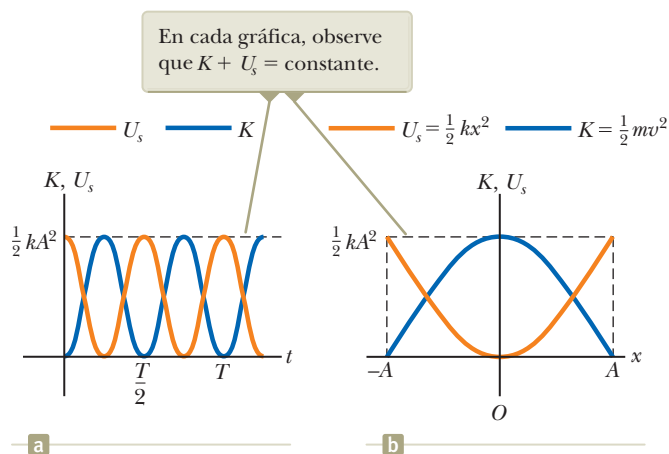
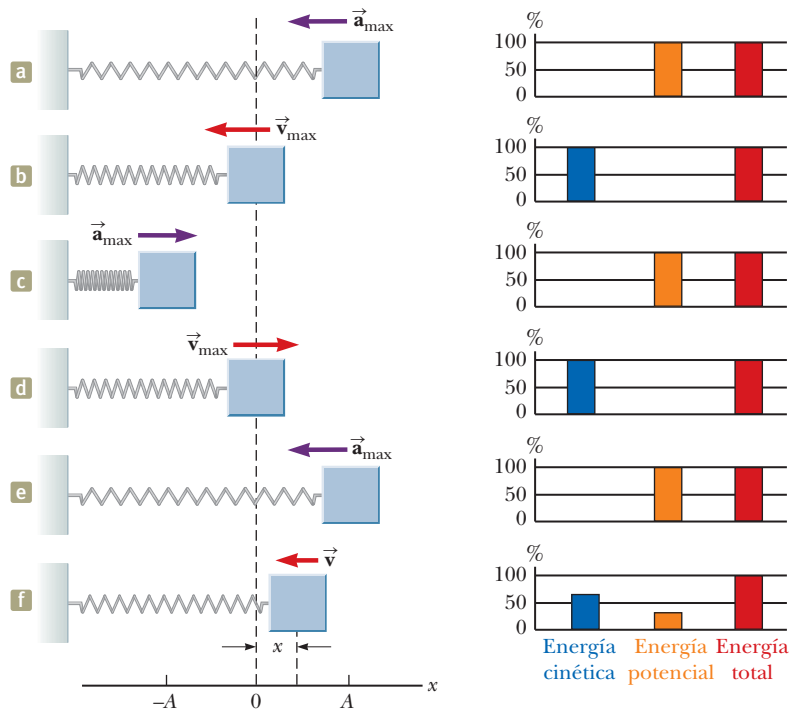


Figura 15.9 (a) Energía cinética y energía potencial contra tiempo de un oscilador armónico simple con $\phi = 0$. (b) La energía cinética y potencial de energía contra posición para un oscilador armónico simple.



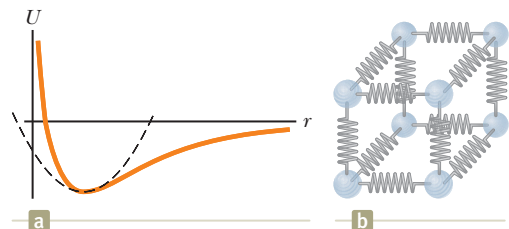
t	x	v	a	K	U_s
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{3T}{4}$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
t	x	v	$-\omega^2 x$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$

Figura 15.10 De la (a) a la (e) Varios instantes en el movimiento armónico simple para un sistema bloque-resorte. Las gráficas de barras de energía muestran la distribución de la energía del sistema en cada instante. Los parámetros en la tabla de la derecha se refieren al sistema bloque-resorte, si supone que en $t = 0, x = A$; por eso, $x = A \cos \omega t$. Por estos cinco momentos especiales, uno de los tipos de energía es cero. (f) Un punto arbitrario en el movimiento del oscilador. El sistema tiene energía cinética y energía potencial en este instante como se muestra en el gráfico de barras.

Por ejemplo, recuerde el potencial Lennard-Jones explicado en el ejemplo 7.9. Esta complicada función describe las fuerzas que mantienen unidos a los átomos. La figura 15.11a muestra que, para pequeños desplazamientos desde la posición de equilibrio, la curva de energía potencial para esta función se aproxima a una parábola, que representa la función de energía potencial para un oscilador armónico simple. Por tanto, las fuerzas complejas en un enlace atómico se modelan como debida a pequeños resortes, como se bosqueja en la figura 15.11b.

Las ideas presentadas en este capítulo no sólo se aplican a sistemas bloque-resorte y átomos, también funcionan con una amplia variedad de situaciones que incluyen el salto bungee, la sintonía en una estación de televisión y la vista de la luz emitida por un láser. Usted verá más ejemplos de osciladores armónicos simples mientras trabaja a lo largo de este libro.

Figura 15.11 (a) Si los átomos en una molécula no se mueven demasiado de sus posiciones de equilibrio, una gráfica de energía potencial con la distancia de separación entre átomos es similar a la gráfica de energía potencial con la posición para un oscilador armónico simple (curva negra discontinua). (b) Las fuerzas entre los átomos en un sólido se pueden modelar al imaginar resortes entre átomos vecinos.



Ejemplo 15.3 Oscilaciones sobre una superficie horizontal

Un carro de 0.500 kg conectado a un resorte ligero para el que la constante de fuerza es 20.0 N/m oscila sobre una pista de aire horizontal sin fricción.

(A) Calcule la energía total del sistema y la rapidez máxima del carro si la amplitud del movimiento es 3.00 cm.

15.3 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar El sistema oscila exactamente en la misma forma que el bloque de la figura 15.10, así utilice la figura en su imagen mental del movimiento.

Categorizar El carro se modela como una *partícula en movimiento armónico simple*.

Analizar Use la ecuación 15.21 para encontrar la energía total del sistema oscilador e igualela con la energía cinética del carro en $x = 0$:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2$$

Resuelva para la rapidez máxima y sustituya los valores numéricos:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \sqrt{\frac{20.0 \text{ N/m}}{0.500 \text{ kg}}}(0.030 \text{ m}) = 0.190 \text{ m/s}$$

(B) ¿Cuál es la velocidad del carro cuando la posición es 2.00 cm?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 15.22 para evaluar la velocidad:

$$\begin{aligned} v &= \pm \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} \\ &= \pm \sqrt{\frac{20.0 \text{ N/m}}{0.500 \text{ kg}}[(0.030 \text{ m})^2 - (0.020 \text{ m})^2]} \\ &= \pm 0.141 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Los signos positivo y negativo indican que el carro podría moverse hacia la derecha o a la izquierda en este instante.

(C) Calcule las energías cinética y potencial del sistema cuando la posición es 2.00 cm.

SOLUCIÓN

Use el resultado del inciso (B) para evaluar la energía cinética en $x = 0.020 \text{ m}$:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.500 \text{ kg})(0.141 \text{ m/s})^2 = 5.00 \times 10^{-3} \text{ J}$$

Evalúe la energía potencial elástica en $x = 0.020 \text{ m}$:

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(20.0 \text{ N/m})(0.020 \text{ m})^2 = 4.00 \times 10^{-3} \text{ J}$$

Finalizar La suma de las energías cinética y potencial en el inciso (C) es igual a la energía total que se encontró usando la ecuación 15.21. Esto debe ser cierto para *cualquier* posición del carro.

¿QUÉ PASARÍA SI?

El carro en este ejemplo pudo haberse puesto en movimiento al liberarlo desde el reposo en $x = 3.00 \text{ cm}$. ¿Y si el carro se libera desde la misma posición, pero con una velocidad inicial de $v = -0.100 \text{ m/s}$? ¿Cuáles son las nuevas amplitud y rapidez máxima del carro?

Respuesta Esta pregunta es del mismo tipo que se planteó al final del ejemplo 15.1, pero en este caso se aplica a una aproximación energética.

Primero calcule la energía total del sistema en $t = 0$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}(0.500 \text{ kg})(-0.100 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(20.0 \text{ N/m})(0.030 \text{ m})^2 \\ &= 1.15 \times 10^{-2} \text{ J} \end{aligned}$$

Igualé esta energía total con la energía potencial del sistema cuando el carro está en el punto final del movimiento:

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

Resuelva para la amplitud A:

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2(1.15 \times 10^{-2} \text{ J})}{20.0 \text{ N/m}}} = 0.0339 \text{ m}$$

Igualé la energía total a la energía cinética del sistema cuando el carro está en la posición de equilibrio:

$$E = \frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2$$

Resuelva para la rapidez máxima:

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.15 \times 10^{-2} \text{ J})}{0.500 \text{ kg}}} = 0.214 \text{ m/s}$$

La amplitud y velocidad máxima son mayores que los valores previos porque al carro se le dio una velocidad inicial en $t = 0$.





Figura 15.12 La parte inferior de una máquina de coser de pedal, de principios del siglo xx. El pedal es ancho y plano con rejillas metálicas.

15.4 Comparación de movimiento armónico simple con movimiento circular uniforme

Algunos dispositivos comunes en la vida cotidiana muestran una relación entre movimiento oscilatorio y movimiento circular. Por ejemplo, el mecanismo de manejo de una máquina de coser no eléctrica en la figura 15.12, el operador pone su pie sobre el pedal y lo acciona de atrás hacia delante. Este movimiento oscilatorio hace que una gran rueda a la derecha experimente un movimiento circular. La banda roja que se ve en la fotografía transfiere este movimiento circular al mecanismo de la máquina de coser (fotografía anterior) y causa el movimiento oscilatorio de la aguja de coser. En esta sección se explora esta interesante relación entre estos dos tipos de movimiento.

La figura 15.13 muestra una vista de un arreglo experimental que muestra esta relación. Una bola se une al borde de una tornamesa de radio A , que está iluminada desde arriba por una lámpara. La bola proyecta una sombra sobre una pantalla. A medida que la tornamesa da vueltas con rapidez angular constante, la sombra de la bola se mueve de atrás para adelante en movimiento armónico simple.

Considere una partícula ubicada en el punto P sobre la circunferencia de un círculo de radio A , como en la figura 15.14a, con la línea OP que forma un ángulo ϕ con el eje x en $t = 0$. A este círculo se le llama *círculo de referencia* para comparar el movimiento armónico simple con el movimiento circular uniforme, y se elige la posición de P en $t = 0$ como la posición de referencia. Si la partícula se mueve a lo largo del círculo con rapidez angular constante ω hasta que OP forma un ángulo ϕ con el eje x , como en la figura 15.14b, en algún tiempo $t > 0$ el ángulo entre OP y el eje x es $\theta = \omega t + \phi$. Conforme la partícula se mueve a lo largo del círculo, la proyección de P sobre el eje x , punto etiquetado Q , se mueve de atrás para adelante a lo largo del eje x entre los límites $x = \pm A$.

Note que los puntos P y Q siempre tienen la misma coordenada x . A partir del triángulo rectángulo OPQ se ve que esta coordenada x es

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (15.23)$$

Esta expresión es la misma que la ecuación 15.6 y muestra que el punto Q se mueve con movimiento de un objeto descrito por el análisis de modelo de una partícula en movimiento armónico simple a lo largo del eje x . Por tanto, el movimiento armónico simple a lo largo de una línea recta se puede representar mediante la proyección de movimiento circular uniforme a lo largo de un diámetro de un círculo de referencia.

Esta interpretación geométrica muestra que el intervalo de tiempo para una revolución completa del punto P sobre el círculo de referencia es igual al periodo de movimiento T para movimiento armónico simple entre $x = \pm A$. Es decir, la rapidez angular ω de P es la misma que la frecuencia angular ω del movimiento armónico simple a lo largo del eje

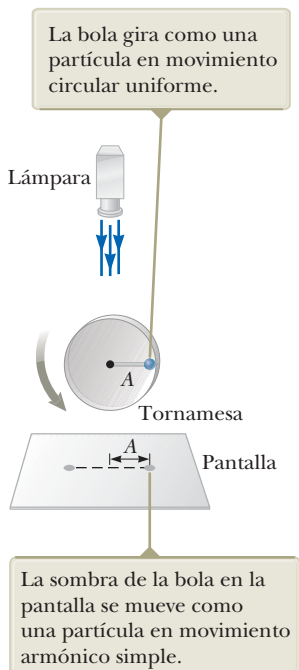


Figura 15.13 Un arreglo experimental para demostrar la conexión entre una partícula en movimiento armónico simple y una partícula correspondiente en movimiento circular uniforme.

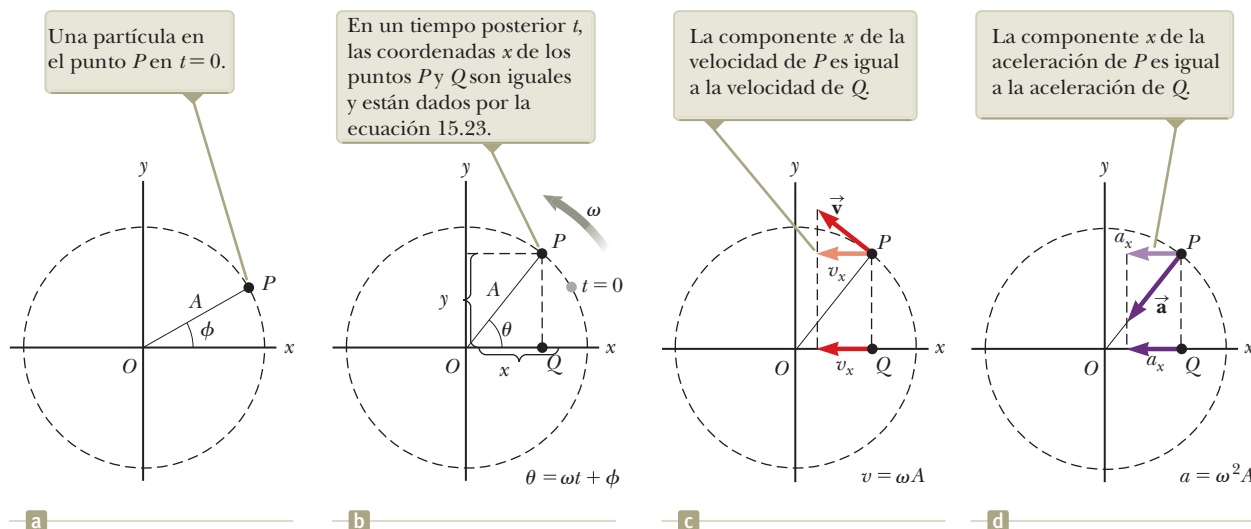


Figura 15.14 Relación entre el movimiento circular uniforme de un punto P y el movimiento armónico simple de un punto Q . Una partícula en P se mueve en un círculo de radio A con rapidez angular constante ω .

x (que es por lo que se usa el mismo símbolo). La constante de fase ϕ para movimiento armónico simple corresponde al ángulo inicial OP que forma con el eje x . El radio A del círculo de referencia es igual a la amplitud del movimiento armónico simple.

Ya que la correspondencia entre rapidez lineal y angular para el movimiento circular es $v = r\omega$ (vea la ecuación 10.10), la partícula móvil en el círculo de referencia de radio A tiene una velocidad de magnitud ωA . A partir de la geometría en la figura 15.14c, se ve que la componente x de esta velocidad es $-\omega A \sin(\omega t + \phi)$. Por definición, el punto Q tiene una velocidad dada por dx/dt . Derivando la ecuación 15.23 respecto al tiempo, se encuentra que la velocidad de Q es la misma que la componente x de la velocidad de P .

La aceleración de P en el círculo de referencia se dirige radialmente hacia adentro, hacia O , y tiene magnitud $v^2/A = \omega^2 A$. A partir de la geometría de la figura 15.14d, se ve que la componente x de esta aceleración es $-\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$. Este valor también es la aceleración del punto proyectado Q a lo largo del eje x , como se puede verificar al tomar la segunda derivada de la ecuación 15.23.

- EJEMPLO RÁPIDO 15.5** La bola en la figura 15.13 se mueve en un círculo de radio de 0.50 m. En $t = 0$, la bola está ubicada en el lado izquierdo del plato giratorio, exactamente opuesto a su posición en la figura 15.13. ¿Cuáles son los valores correctos para la *amplitud* y la *constante de fase* (en relación con un eje x a la derecha) del movimiento armónico simple de la sombra? (a) 0.50 m y 0, (b) 1.00 m y 0, (c) 0.50 m y π , (d) 1.00 m y π .

Ejemplo 15.4 Movimiento circular con rapidez angular constante

La bola de la figura 15.13 gira en contra las manecillas del reloj en un círculo de 3.00 m de radio, con una rapidez angular constante de 8.00 rad/s. En $t = 0$, su sombra tiene una coordenada x de 2.00 m y se mueve hacia la derecha.

(A) Determine la coordenada x de la sombra como función del tiempo en unidades SI.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Asegúrese de que comprende la relación entre movimiento circular de la bola y el movimiento armónico simple de su sombra, como se describe en la figura 15.13. Advierta que la sombra *no* está en su posición máxima en $t = 0$.

Categorizar La bola sobre la tornamesa es una *partícula en movimiento circular uniforme*. La sombra se modela como una *partícula en movimiento armónico simple*.

continúa

15.4 continuación

Analizar Use la ecuación 15.23 para escribir una expresión para la coordenada x de la bola girando:

Se resuelve la constante de fase:

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

Sustituya valores numéricos para las condiciones iniciales:

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{x}{A}\right) - \omega t$$

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{2.00 \text{ m}}{3.00 \text{ m}}\right) - 0 = \pm 48.2^\circ = \pm 0.841 \text{ rad}$$

Si tuviéramos que tomar $\phi = +0.841 \text{ rad}$ como nuestra respuesta, la sombra que se mueve hacia la izquierda en $t = 0$. Ya que la sombra se mueve hacia la derecha en $t = 0$, debemos elegir $\phi = -0.841 \text{ rad}$.

Escriba la coordenada x como una función del tiempo:

$$x = 3.00 \cos(8.00t - 0.841)$$

(B) Encuentre las componentes x de velocidad y aceleración de la sombra en cualquier tiempo t .

SOLUCIÓN

Derivando la coordenada x respecto al tiempo para encontrar la velocidad en cualquier tiempo en m/s:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = (-3.00 \text{ m})(8.00 \text{ rad/s}) \sin(8.00t - 0.841) \\ &= -24.0 \sin(8.00t - 0.841) \end{aligned}$$

Derivando la velocidad respecto al tiempo para encontrar la aceleración en cualquier tiempo en m/s^2 :

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = (-24.0 \text{ m/s})(8.00 \text{ rad/s}) \cos(8.00t - 0.841) \\ &= -192 \cos(8.00t - 0.841) \end{aligned}$$

Finalizar Observe que el valor de la constante de fase pone la bola en el cuarto cuadrante del sistema de coordenadas xy de figura 15.14, que es consistente con la sombra con un valor positivo para x y se mueven hacia la derecha.

15.5 El péndulo

El **péndulo simple** es otro sistema mecánico que muestra movimiento periódico. Consiste de una plomada parecida a una partícula de masa m suspendida de una cuerda ligera de longitud L que está fija en el extremo superior, como se muestra en la figura 15.15. El movimiento se presenta en el plano vertical y es impulsado por la fuerza gravitacional. Se demostrará que, siempre que el ángulo θ sea pequeño (menor que aproximadamente 10°), el movimiento es muy cercano al de un oscilador armónico simple.

Las fuerzas que actúan en la plomada son la fuerza \vec{T} que ejerce la cuerda y la fuerza gravitacional $m\vec{g}$. La componente tangencial $mg \sin \theta$ de la fuerza gravitacional siempre actúa hacia $\theta = 0$, opuesta al desplazamiento de la plomada desde la posición más baja. Por tanto, la componente tangencial es una fuerza restauradora y se puede aplicar la segunda ley de Newton del movimiento en la dirección tangencial:

$$F_t = ma_t \rightarrow -mg \sin \theta = m \frac{d^2s}{dt^2}$$

donde el signo negativo indica que la fuerza tangencial actúa hacia la posición de equilibrio (vertical) y s es la posición de la plomada medida a lo largo del arco. Hemos expresado la aceleración tangencial como la segunda derivada de la posición s . Ya que $s = L\theta$ (ecuación 10.1b con $r = L$) y L es constante, esta ecuación se reduce a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

Al considerar θ como la posición, compare esta ecuación con la ecuación 15.3. ¿Tiene la misma forma matemática? ¡No! El lado derecho es proporcional a $\sin \theta$ en vez de θ ; por eso, no se esperaría movimiento armónico simple porque esta expresión no tiene la forma de la ecuación 15.3. Sin embargo, si se supone que θ es pequeño (menor que apro-

Cuando θ es pequeño, el movimiento de un péndulo simple se puede modelar como un movimiento armónico simple sobre la posición de equilibrio $\theta = 0$.

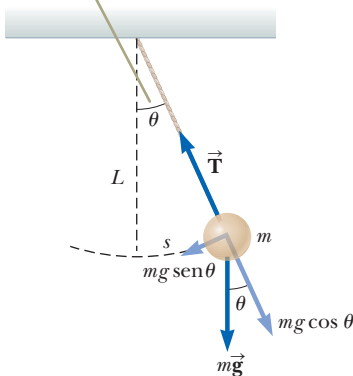


Figura 15.15 Un péndulo simple

ximadamente 10° o 0.2 rad), se puede usar la **aproximación de ángulo pequeño**, en la que $\sin \theta \approx \theta$, donde θ se mide en radianes. La tabla 15.1 muestra ángulos en grados y radianes y los senos de estos ángulos. En tanto θ sea menor que aproximadamente 10° , el ángulo en radianes y su seno son los mismos hasta dentro de una precisión menor de 1.0 por ciento. La tabla también muestra las tangentes de los ángulos, que usaremos en el próximo capítulo.

Por tanto, para ángulos pequeños, la ecuación de movimiento se convierte en

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \quad (\text{para valores pequeños de } \theta) \quad (15.24)$$

La ecuación 15.24 tiene la misma forma matemática que la ecuación 15.3, así se concluye que el movimiento para amplitudes de oscilación pequeñas se puede modelar como movimiento armónico simple. En consecuencia, la solución de la ecuación 15.24 es modelada después de la ecuación 15.6 y está dada por $\theta = \theta_{\text{máx}} \cos(\omega t + \phi)$, donde $\theta_{\text{máx}}$ es la *posición angular máxima* y la frecuencia angular ω es

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (15.25)$$

El periodo del movimiento es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (15.25)$$

◀ Frecuencia angular para un péndulo simple

◀ Periodo de un péndulo simple

En otras palabras, el periodo y la frecuencia de un péndulo simple sólo dependen de la longitud de la cuerda y de la aceleración debida a la gravedad. Ya que el periodo es independiente de la masa, se concluye que todos los péndulos simples que son de igual longitud y están en la misma ubicación (de modo que g es constante) oscilan con el mismo periodo.

El péndulo simple se puede usar como cronómetro porque su periodo sólo depende de su longitud y del valor local de g . También es un dispositivo conveniente para hacer mediciones precisas de la aceleración en caída libre. También es un dispositivo conveniente para realizar mediciones precisas de la aceleración de caída libre. Tales mediciones son importantes porque las variaciones en los valores locales de g pueden proporcionar información acerca de la ubicación de petróleo y otros recursos subterráneos valiosos.

- E XAMEN RÁPIDO 15.6** Un reloj de péndulo depende del periodo de un péndulo para mantener el tiempo correcto. (i) Suponga que un reloj de péndulo se calibra correctamente y luego un niño travieso desliza la plomada del péndulo hacia abajo sobre la barra oscilante. ¿El reloj se mueve (a) lento, (b) rápido, o (c) correctamente? (ii) Suponga que un reloj de péndulo se calibra correctamente a nivel del mar y luego se lleva a lo alto de una montaña muy alta. El reloj ahora se mueve, ¿(a) lento, (b) rápido, o (c) correctamente?

El inciso (b) del Examen rápido 15.6 se relaciona con el reloj del abuelo en la casa de tus abuelos en la historia inicial. El reloj ha sido transferido desde Denver, a una altura de

TABLA 15.1 Ángulos y senos de ángulos

Ángulo en grados	Ángulo en radianes	Seno de ángulo	Diferencia porcentual	Tangente del ángulo	Diferencia porcentual
0°	0.000 0	0.000 0	0.0%	0.000 0	0.0%
1°	0.017 5	0.017 5	0.0%	0.017 5	0.0%
2°	0.034 9	0.034 9	0.0%	0.034 9	0.0%
3°	0.052 4	0.052 3	0.0%	0.052 4	0.1%
5°	0.087 3	0.087 2	0.1%	0.087 5	0.3%
10°	0.174 5	0.173 6	0.5%	0.176 3	1.0%
15°	0.261 8	0.258 8	1.2%	0.267 9	2.3%
20°	0.349 1	0.342 0	2.1%	0.364 0	4.3%
30°	0.523 6	0.500 0	4.7%	0.577 4	10.3%

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 15.4

Movimiento armónico simple no verdadero El péndulo *no* presenta cierto movimiento armónico simple para cualquier *ángulo*. Si el ángulo es menor de 10° , el movimiento está cerca y se puede *modelar* como armónico simple.



una milla, a Boston, esencialmente al nivel del mar. Como resultado, el valor de g , la aceleración debida a la gravedad, ha aumentado. Como puede ver en la ecuación 15.26, esto disminuye el periodo del reloj para que funcione rápidamente. ¿Qué puede hacer para ajustar el reloj? ¿Puede ver el inciso (a) del Examen rápido 15.6! La oscilación del péndulo debe tener un mecanismo de ajuste que le permita mover la lengüeta hacia abajo para aumentar la longitud efectiva del péndulo y, por tanto, aumentar el período.

Ejemplo 15.5 Conexión entre longitud y tiempo

Christian Huygens (1629-1695), el mayor relojero de la historia, sugirió que se podía definir una unidad internacional de longitud como la longitud de un péndulo simple que tiene un periodo de exactamente 1 s. ¿Cuánta más corta sería la unidad de longitud actual si se hubiese seguido su sugerencia?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine un péndulo que se balancee de atrás para adelante en exactamente un segundo. De acuerdo con su experiencia al observar objetos que se balancean, ¿puede hacer una estimación de la longitud requerida? Cuelgue un objeto pequeño de una cuerda y simule el péndulo de 1 s.

Categorizar Este ejemplo es sobre un péndulo simple, así que se clasifica como una aplicación de los conceptos introducidos en esta sección.

Resuelva la ecuación 15.26 para la longitud y sustituya los valores conocidos:

$$L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(1.00 \text{ s})^2 (9.80 \text{ m/s}^2)}{4\pi^2} = 0.248 \text{ m}$$

La longitud del metro sería ligeramente menor que un cuarto de su longitud actual. Además, el número de cifras significativas sólo depende de cómo se conoce exactamente g , porque el tiempo se definió exactamente como 1 s.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si Huygens hubiera nacido en otro planeta? ¿Cuál tendría que ser el valor de g en dicho planeta para que el metro en función del péndulo de Huygens tuviera el mismo valor que el metro actual?

Respuesta Resuelva la ecuación 15.26 para g :

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} = \frac{4\pi^2 (1.00 \text{ m})}{(1.00 \text{ s})^2} = 4\pi^2 \text{ m/s}^2 = 39.5 \text{ m/s}^2$$

Ningún planeta en el sistema solar tiene una aceleración tan grande debida a la gravedad.

Péndulo físico

Suponga que usted equilibra un gancho de alambre de modo que la punta esté sostenida por su dedo índice extendido. Cuando usted da al gancho un pequeño desplazamiento angular, con su otra mano y luego lo libera, oscila. Si un objeto que cuelga oscila en torno a un eje fijo que no pasa a través de su centro de masa y el objeto no se puede aproximar como una masa puntual, no se puede tratar al sistema como un péndulo simple. En este caso, el sistema se llama **péndulo físico**.

Considere un objeto rígido con centro de eje en un punto O que está a una distancia d del centro de masa (figura 15.16). La fuerza gravitacional proporciona un momento de torsión en torno a un eje a través de O , y la magnitud de dicho momento de torsión es $mgd \sin \theta$, donde θ es como se muestra en la figura 15.16. El objeto se modela como un objeto rígido bajo un momento de torsión neto y usa la forma rotacional de la segunda ley de Newton, $\Sigma \tau_{\text{ext}} = I\alpha$, donde I es el momento de inercia del objeto en torno al eje a través de O . El resultado es

$$-mgd \sin \theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

El signo negativo indica que el momento de torsión en torno a O tiende a disminuir θ . Es decir, la fuerza gravitacional produce un momento de torsión restaurador. Si de nuevo se supone que θ es pequeño, la aproximación $\sin \theta \approx \theta$ es válida y la ecuación de movimiento se reduce a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right)\theta \quad (15.27)$$

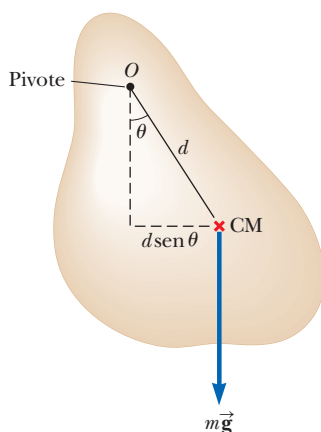


Figura 15.16 Un péndulo físico pivoteado en O .

Ya que esta ecuación es de la misma forma que la ecuación 15.3, su solución es la del oscilador armónico simple. Es decir: la solución de la ecuación 15.27 está dada por $\theta = \theta_{\text{máx}} \cos(\omega t + \phi)$, donde $\theta_{\text{máx}}$ es la máxima posición angular y

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

El periodo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad (15.28) \quad \leftarrow \text{Periodo de un péndulo físico}$$

Este resultado se puede usar para medir el momento de inercia de un objeto rígido plano. Si se conoce la posición del centro de masa y, por tanto, el valor de d , se obtiene el momento de inercia al medir el periodo. Por último, advierta que la ecuación 15.28 se reduce al periodo de un péndulo simple (ecuación 15.26) cuando $I = md^2$, es decir, cuando toda la masa se concentra en el centro de masa.

Ejemplo 15.6 Una barra que se balancea

Una barra uniforme de masa M y longitud L se articula en torno a un extremo y oscila en un plano vertical (figura 15.17).

(A) Encuentre el periodo de oscilación si la amplitud del movimiento es pequeña.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine una barra que se balancea de atrás para adelante cuando se articula en un extremo. Inténtelo con una regleta o una pieza de madera.

Categorizar Ya que la barra no es una partícula puntual, se le clasifica como un péndulo físico.

Analizar En el capítulo 10 se encontró que el momento de inercia de una barra uniforme en torno a un eje a través de un extremo es $\frac{1}{3}ML^2$. La distancia d desde el eje al centro de masa de la barra es $L/2$.

(B) Suponga que el pivote se mueve a un pequeño agujero perforado en la barra a una distancia $L/4$ del extremo superior. ¿Cuál es el periodo de oscilación de la barra cuando se cuelga de este punto de pivote y se balancea a través de pequeñas oscilaciones?

El momento de inercia en la ecuación 15.28 es ahora el del nuevo punto de pivote. Use el teorema del eje paralelo (ecuación 10.22):

Sustituya este momento de inercia y el nuevo valor de d en la ecuación 15.28:

$$I = I_{\text{CM}} + MD^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{1}{4}L\right)^2 = \frac{7}{48}ML^2$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{7}{48}ML^2}{Mg(L/4)}} = 2\pi \sqrt{\frac{7L}{12g}}$$

Finalizar En uno de los alunizajes, un astronauta que caminaba sobre la superficie de la Luna tenía un cinturón que colgaba de su traje espacial, y el cinturón osciló como un péndulo físico. Un científico en la Tierra observó este movimiento en televisión y lo usó para estimar la aceleración de caída libre en la Luna. ¿Cómo hizo este cálculo el científico?

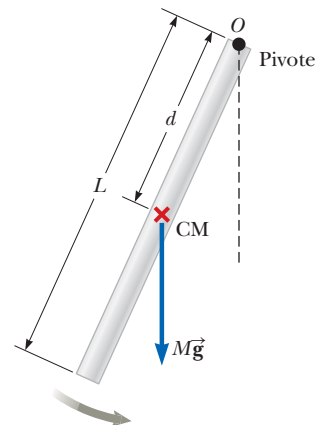
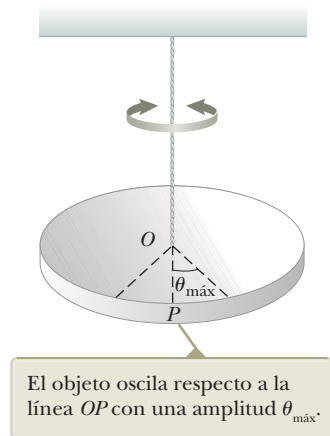


Figura 15.17 (Ejemplo 15.6) Una barra rígida que oscila en torno a un eje a través de un extremo es un péndulo físico con $d = L/2$.





El objeto oscila respecto a la línea OP con una amplitud $\theta_{\text{máx}}$.

Figura 15.18 Un péndulo de torsión

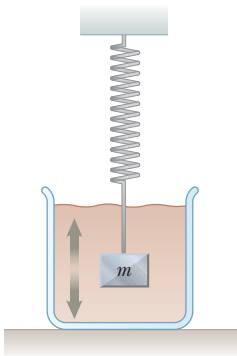


Figura 15.19 Un ejemplo de un oscilador amortiguado es un objeto unido a un resorte y sumergido en un líquido viscoso.



John W. Jewett, Jr.

Figura 15.20 El Puente del Milenio de Londres sobre el río Támesis en Londres. El día de la inauguración del puente, los peatones notaron un movimiento oscilante del puente, lo que le valió el nombre de "Puente tambaleante". El puente se cerró después de dos días y permaneció cerrado durante dos años. Se agregaron al puente más de 50 amortiguadores de masa sintonizados: los pares de estructuras accionadas por resorte en la parte superior de los miembros transversales (flecha).

Péndulo de torsión

La figura 15.18 muestra un objeto rígido suspendido mediante un alambre unido a lo alto de un soporte fijo. Cuando el objeto gira a través de cierto ángulo θ , el alambre que gira ejerce sobre el objeto un momento de torsión restaurador que es proporcional a la posición angular. Es decir,

$$\tau = -\kappa\theta$$

donde κ (letra griega kappa) se llama *constante de torsión* del alambre de soporte y es una rotación análoga a la fuerza constante κ para un resorte. El valor de κ se puede obtener al aplicar un momento de torsión conocido para girar el alambre a través de un ángulo mensurable θ . Al aplicar la segunda ley de Newton para movimiento rotacional, se encuentra que

$$\begin{aligned} \sum \tau = I\alpha &\rightarrow -\kappa\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\frac{\kappa}{I} \theta \end{aligned} \quad (15.29)$$

De nuevo, este resultado es la ecuación de movimiento para un oscilador armónico simple, con $\omega = \sqrt{\kappa/I}$ y un periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}} \quad (15.30)$$

Este sistema se llama *péndulo de torsión*. En esta situación no hay restricción de ángulo pequeño, en tanto no se supere el límite elástico del alambre.

15.6 Oscilaciones amortiguadas

Los movimientos oscilatorios considerados hasta el momento han sido para sistemas ideales: sistemas que oscilan indefinidamente sólo bajo la acción de una fuerza, una fuerza restauradora lineal. En muchos sistemas reales, fuerzas no conservativas como la fricción o la resistencia del aire retardan el movimiento del sistema. En consecuencia, la energía mecánica del sistema disminuye en el tiempo y se dice que el movimiento está *amortiguado*. La energía mecánica perdida se transforma en energía interna en el objeto y el medio retardador. La figura 15.19 bosqueja uno de tales sistemas: un objeto unido a un resorte y sumergido en un líquido viscoso. Otro ejemplo es un péndulo simple oscilando en el aire. Después de ponerse en movimiento, el péndulo va deteniendo su oscilación debido a la resistencia del aire. La figura 15.20 representa oscilaciones amortiguadas en la práctica. Los dispositivos basados en resortes de carga bajo el puente son amortiguadores que transforman la energía mecánica del puente oscilante en energía interna.

Un tipo común de fuerza retardadora es la que se explicó en la sección 6.4, donde la fuerza es proporcional a la rapidez del objeto en movimiento y actúa en la dirección opuesta a la velocidad del objeto respecto al medio. Con frecuencia, esta fuerza retardadora se observa cuando un objeto se mueve a través de aire, por ejemplo. Ya que la fuerza retardadora se puede expresar como $\vec{R} = -b\vec{v}$ (donde b es una constante llamada *coeficiente de amortiguamiento*) y la fuerza restauradora del sistema es $-kx$, se puede escribir la segunda ley de Newton como

$$\sum F_x = -kx - bv_x = ma_x$$

que, al sustituir las derivadas para la velocidad y la aceleración, puede escribirse como

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (15.31)$$

La solución a esta ecuación requiere matemática que tal vez no le sea familiar; en este caso simplemente se establece sin demostración. Cuando la fuerza retardadora es pequeña en



comparación con la fuerza restauradora máxima (es decir, cuando b es pequeña), la solución a la ecuación 15.31 es

$$x = Ae^{-(b/2m)t} \cos(\omega t + \phi) \quad (15.32)$$

donde la frecuencia angular de oscilación es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad (15.33)$$

Este resultado se puede verificar al sustituir la ecuación 15.32 en la ecuación 15.31. Es conveniente expresar la frecuencia angular de un oscilador amortiguado en la forma

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ representa la frecuencia angular en ausencia de una fuerza retardadora (el oscilador no amortiguado) y se llama **frecuencia natural** del sistema.

La figura 15.21 muestra la posición como función del tiempo para un objeto que oscila en presencia de una fuerza retardadora. Cuando la fuerza retardadora es pequeña, el carácter oscilatorio del movimiento se conserva pero la amplitud disminuye exponencialmente en el tiempo, con el resultado de que al final el movimiento cesa. Cualquier sistema que se comporte de esta forma se conoce como **oscilador amortiguado**. Las líneas negras discontinuas en la figura 15.21, que definen la *envoltura* de la curva oscilatoria, representan el factor exponencial de la ecuación 15.32. Esta envoltura muestra que la amplitud decae exponencialmente con el tiempo. Para movimiento con una constante de resorte y masa de cierto objeto dados, las oscilaciones se amortiguan más rápidamente para valores más grandes de la fuerza retardadora.

Cuando la magnitud de la fuerza retardadora es pequeña, tal que $b/2m < \omega_0$, se dice que el sistema está **sub amortiguado**. El movimiento resultante se representa mediante la curva azul de la figura 15.22. Conforme el valor de b aumenta, la amplitud de las oscilaciones disminuye más y más rápidamente. Cuando b alcanza un valor crítico b_c tal que $b_c/2m = \omega_0$, el sistema no oscila y se dice que está **críticamente amortiguado**. En este caso, el sistema, una vez liberado del reposo en alguna posición de no equilibrio, se aproxima pero no pasa a través de la posición de equilibrio. La gráfica de posición frente a tiempo para este caso es la curva roja en la figura 15.22.

Si el medio es tan viscoso que la fuerza retardadora es grande en comparación con la fuerza restauradora (es decir, si $b/2m > \omega_0$), el sistema está **sobre amortiguado**. De nuevo, el sistema desplazado, cuando tiene libertad para moverse, no oscila sino simplemente regresa a la posición de equilibrio. Conforme el amortiguamiento aumenta, el intervalo de tiempo requerido para que el sistema se aproxime al equilibrio también aumenta, como indica la curva negra en la figura 15.22. Para sistemas críticamente amortiguados y sobre amortiguados, no hay frecuencia angular ω y la solución en la ecuación 15.32 no es válida.

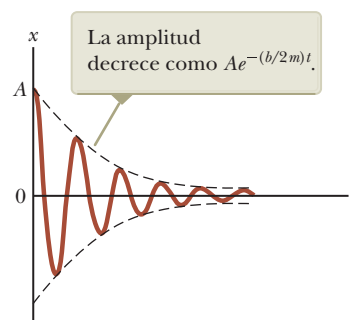


Figura 15.21 Gráfica de posición en función del tiempo para un oscilador amortiguado.

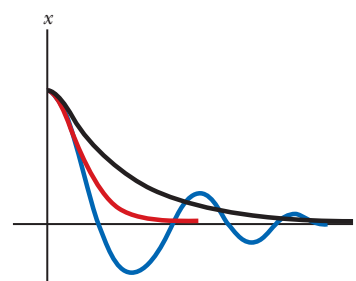


Figura 15.22 Gráficas de posición en función del tiempo para un oscilador subamortiguado (curva azul), un oscilador críticamente amortiguado (curva roja) y un oscilador sobre amortiguado (curva negra).

15.7 Oscilaciones forzadas

Se ha visto que la energía mecánica de un oscilador amortiguado disminuye en el tiempo como resultado de la fuerza retardadora. Es posible compensar esta disminución de energía al aplicar una fuerza externa que haga trabajo positivo sobre el sistema. En cualquier instante, se puede transferir energía al sistema mediante una fuerza aplicada que actúe en la dirección de movimiento del oscilador. Por ejemplo, un niño en un columpio se puede mantener en movimiento mediante “empujones” adecuadamente cronometrados. La amplitud del movimiento permanece constante si la entrada de energía por cada ciclo de movimiento iguala exactamente la disminución en energía mecánica en cada ciclo que resulta de las fuerzas retardadoras.

Un ejemplo común de un oscilador forzado es un oscilador amortiguado impulsado por una fuerza externa que varía periódicamente, como $F(t) = F_0 \sin \omega t$, donde F_0 es una constante y ω es la frecuencia angular de la fuerza impulsora. En general, la frecuencia ω

de la fuerza impulsora es variable, mientras que la frecuencia natural ω_0 del oscilador es fija por los valores de k y m . Al modelar un oscilador con fuerzas retardadoras e impulsoras como una partícula bajo una fuerza neta la segunda ley de Newton en esta situación produce

$$\sum F_x = ma_x \rightarrow F_0 \text{ sen } \omega t - b \frac{dx}{dt} - kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (15.34)$$

De nuevo, la solución de esta ecuación es más bien larga y no se presentará. Después de que comienza a actuar la fuerza impulsora en un objeto inicialmente estable, la amplitud de la oscilación aumentará. El sistema del oscilador y el medio circundante es un sistema no aislado: el trabajo es realizado por la fuerza impulsora, de manera que la energía vibracional del sistema (energía cinética del objeto, la energía potencial elástica en el resorte) y la energía interna del objeto y el medio crecen. Después de un periodo suficientemente largo, cuando la entrada de energía por cada ciclo de la fuerza impulsora sea igual a la cantidad de energía mecánica transformada a energía interna por cada ciclo, se alcanza una condición de estado estacionario en que las oscilaciones proceden con amplitud constante. En esta situación, la solución de la ecuación 15.34 es

$$x = A \cos (\omega t + \phi) \quad (15.35)$$

donde

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \quad (15.36)$$

Amplitud de un oscilador impulsado

y donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural del oscilador subamortiguado ($b = 0$).

Las ecuaciones 15.35 y 15.36 muestran que el oscilador forzado vibra a la frecuencia de la fuerza impulsora y que la amplitud del oscilador es constante para una fuerza impulsora determinada porque se impulsa en estado estacionario mediante una fuerza externa. Para amortiguamiento pequeño, la amplitud es grande cuando la frecuencia de la fuerza impulsora está cerca de la frecuencia natural de oscilación, o cuando $\omega \approx \omega_0$. El dramático aumento en amplitud cerca de la frecuencia natural se llama **resonancia**, y la frecuencia natural ω_0 también se llama la **frecuencia de resonancia** del sistema.

La explicación para oscilaciones de gran amplitud en la frecuencia de resonancia es que la energía se transfiere al sistema bajo las condiciones más favorables. Este concepto se comprende mejor si se considera la primera derivada de x en el tiempo en la ecuación 15.35, que produce una expresión para la velocidad del oscilador. Se encuentra que v es proporcional a $\text{sen}(\omega t + \phi)$, que es la misma función trigonométrica que la descrita por la fuerza impulsora. Por tanto, la fuerza aplicada \vec{F} está en fase con la velocidad. La rapidez a la que \vec{F} realiza trabajo sobre el oscilador es igual al producto punto $\vec{F} \cdot \vec{v}$; esta rapidez es la potencia entregada al oscilador. Ya que el producto $\vec{F} \cdot \vec{v}$ es un máximo cuando \vec{F} y \vec{v} están en fase, se concluye que, en resonancia, la fuerza aplicada está en fase con la velocidad y la potencia transferida al oscilador es un máximo.

La figura 15.23 es una gráfica de la amplitud como función de la frecuencia para un oscilador forzado con y sin amortiguamiento. Advierta que la amplitud aumenta con amortiguamiento decreciente ($b \rightarrow 0$) y que la curva de resonancia se ensancha a medida que aumenta el amortiguamiento. En ausencia de una fuerza de amortiguamiento ($b = 0$), se ve por la ecuación 15.36 que la amplitud en estado estacionario tiende a infinito conforme ω tiende a ω_0 . En otras palabras, si no hay pérdidas en el sistema y se continúa impulsando un oscilador inicialmente sin movimiento con una fuerza periódica que está en fase con la velocidad, la amplitud del movimiento se acumula sin límite (vea la curva café de la figura 15.23). Esta acumulación sin límite no se presenta en la práctica porque en realidad siempre hay presente algún amortiguamiento.

Más adelante en este libro se verá que la resonancia aparece en otras áreas de la física. Por ejemplo, ciertos circuitos eléctricos tienen frecuencias naturales y pueden entrar en fuerte resonancia al variar el voltaje aplicado a una frecuencia dada. Un puente tiene frecuencias naturales que se pueden poner en resonancia mediante una fuerza impulsora

Cuando la frecuencia ω de la fuerza impulsora es igual a la frecuencia natural ω_0 del oscilador, presenta resonancia.

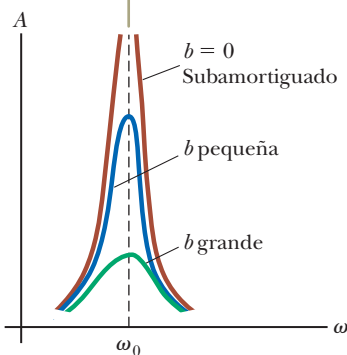


Figura 15.23 Gráfica de amplitud en función de la frecuencia para un oscilador amortiguado cuando está presente una fuerza impulsora periódica. Note que la forma de la curva de resonancia depende del tamaño del coeficiente de amortiguamiento b .

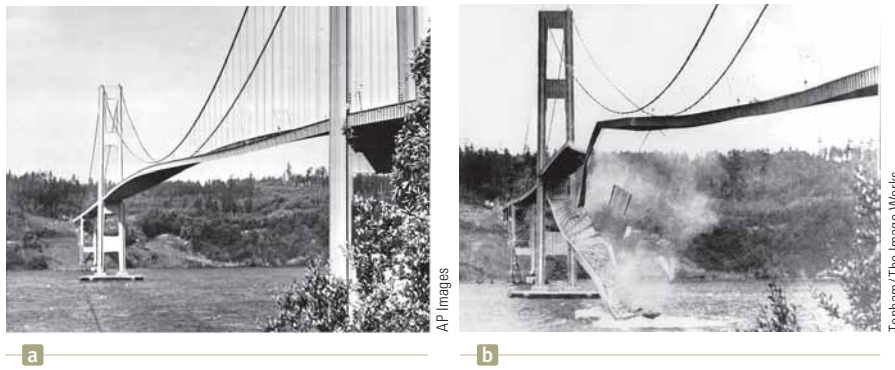


Figura 15.24 (a) En 1940 vientos turbulentos establecieron vibraciones de torsión en el puente Tacoma Narrows, haciendo que oscilara a una frecuencia cercana a una de las frecuencias naturales de la estructura del puente. (b) Una vez establecida, esta condición de resonancia condujo al colapso del puente. (Son un desafío para matemáticos y físicos algunos aspectos de esta interpretación).

adecuada. Un dramático ejemplo de tal resonancia se presentó en 1940, cuando el puente Tacoma Narrows, en el estado de Washington, fue destruido por vibraciones resonantes. Aunque los vientos no eran particularmente intensos en dicha ocasión, el “aleteo” del viento a través del camino (piense en el “aleteo” de una bandera frente a un viento fuerte) proporcionó una fuerza impulsora periódica cuya frecuencia emparejó con la del puente. Las oscilaciones resultantes del puente hicieron que a final de cuentas colapsara (figura 15.24) porque el diseño del puente tenía características inadecuadas de seguridad interna.

Se pueden citar muchos otros ejemplos de vibraciones resonantes. Una vibración resonante que puede haber experimentado el lector es el “canturreo” de los cables de teléfono en el viento. Las máquinas se rompen con frecuencia si una parte en vibración está en resonancia con alguna otra parte móvil. Se ha sabido de soldados que, al marchar en cadencia por un puente, establecieron vibraciones resonantes en la estructura y por ello causaron su colapso. Siempre que cualquier sistema físico real sea impulsado cerca de su frecuencia de resonancia, se pueden producir oscilaciones de amplitudes muy grandes.

Resumen

► Conceptos y principios

Las energías cinética y potencial para un objeto de masa m que oscila en el extremo de un resorte con constante de fuerza k varían con el tiempo y están dadas por

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \quad (15.19)$$

$$U_s = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi) \quad (15.20)$$

La energía total de un oscilador armónico simple es una constante del movimiento y está dada por

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad (15.21)$$

Un **péndulo simple** de longitud L puede modelarse si se mueve en movimiento armónico simple para desplazamientos angulares pequeños desde la vertical. Su periodo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (15.26)$$

Para desplazamientos angulares pequeños desde la vertical, un **péndulo físico** puede modelarse si se mueve en movimiento armónico simple en torno a un perno que no pasa a través del centro de masa. El periodo de este movimiento es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad (15.28)$$

donde I es el momento de inercia en torno a un eje a través del eje y d es la distancia desde el eje al centro de masa.

Si un oscilador experimenta una fuerza amortiguadora $\vec{R} = -b\vec{v}$, suposición para amortiguamiento pequeño está descrita por

$$x = Ae^{-(b/2m)t} \cos(\omega t + \phi) \quad (15.32)$$

donde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \quad (15.33)$$

Si un oscilador está sujeto a una fuerza impulsora sinusoidal $F(t) = F_0 \sin \omega t$, muestra **resonancia**, en la cual la amplitud es mayor cuando la frecuencia impulsora ω coincide con la frecuencia natural $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ del oscilador.



Modelos de análisis para resolver problemas

Partícula en movimiento armónico simple Si una partícula se somete a una fuerza de la forma de la ley de Hooke, $F = -kx$, la partícula muestra **movimiento armónico simple**. Su posición se describe mediante

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (15.6)$$

donde A es la **amplitud** del movimiento, ω es la **frecuencia angular** y ϕ es la **constante de fase**. El valor de ϕ depende de la posición y velocidad iniciales de la partícula.

El **periodo** de la oscilación de la partícula es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (15.13)$$

y el inverso del periodo es la **frecuencia**.

Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN**
From Cengage

- Dos bolas de acero idénticas, cada una con una masa $m = 67.4 \text{ g}$ y un diámetro $d = 25.4 \text{ mm}$, se mueven en direcciones opuestas, cada una a $v = 5.00 \text{ m/s}$. Chocan de frente y se separan elásticamente. (a) Divida a su grupo en dos y haga que cada mitad encuentre el intervalo de tiempo total en el que las bolas están en contacto, usando diferentes modelos. Grupo (i): modele una pelota dada como poseedor de energía cinética que luego se transforma por completo en energía potencial elástica en el instante en que las bolas se detienen momentáneamente. Suponga que la aceleración de la bola durante este intervalo de tiempo es constante y use la partícula en el modelo de aceleración constante para encontrar el intervalo de tiempo total en el que las bolas están en contacto. Grupo (ii): apretando una de las bolas en una prensa mientras se hacen mediciones precisas de la cantidad resultante de compresión, se ha descubierto que la ley de Hooke es un buen modelo del comportamiento elástico de la pelota. Una fuerza de $F = 16.0 \text{ kN}$ ejercida por cada mordaza del tornillo de banco reduce el diámetro en una distancia $s = 0.200 \text{ mm}$. El diámetro vuelve al valor original cuando se elimina la fuerza del tornillo de banco. Modele el movimiento de cada bola, mientras las bolas están en contacto, como la mitad de un ciclo de movimiento armónico simple. Encuentra el intervalo de tiempo total en el que las bolas están en contacto. (b) ¿Qué resultado es más exacto?
- ACTIVIDAD** Divida a su grupo en dos mitades. Cada subgrupo debería trabajar en una de las siguientes situaciones: (i) Un resorte colgante se estira en 35.0 cm cuando un objeto de masa 450 g se cuelga en reposo. En esta situación, definimos su posición como $x = 0$, con x positiva hacia arriba. El objeto se baja 18 cm adicionales y se libera del reposo para oscilar sin fricción. (ii) Otro resorte colgante se estira 35.5 cm cuando un objeto de masa 440 g se cuelga en reposo. Definimos esta nueva posición como $x = 0$. Este objeto se baja

18 cm adicionales y se libera del reposo para oscilar sin fricción. (a) Para cada una de estas situaciones, responda las dos preguntas siguientes: (1) ¿Cuál es la posición x del objeto en un momento 84.4 s después? (2) ¿Qué distancia total ha recorrido el objeto vibrante en el intervalo de tiempo de 84.4 s ? Cuando finalicen los cálculos, compare los resultados de las dos situaciones. (b) ¿Por qué las respuestas a la pregunta 1 son tan diferentes cuando los datos iniciales en las situaciones (i) y (ii) son muy similares y las respuestas a la pregunta 2 son relativamente similares? (c) ¿Esta circunstancia revela una dificultad fundamental para calcular el futuro?

- ACTIVIDAD** En línea, lee sobre un grupo de estudiantes de física que hacen una práctica de péndulo simple. Usaron un pequeño objeto unido al final de una cuerda para formar un péndulo simple. Los estudiantes midieron los intervalos de tiempo total para 50 oscilaciones de su movimiento armónico para pequeños desplazamientos angulares y tres longitudes. Publicaron sus datos en línea:

Longitud L (m)	Intervalo de tiempo para 50 oscilaciones (s)
1.000	99.8
0.750	86.6
0.500	71.1

Divida su grupo en dos mitades y haga que cada mitad encuentre un valor para g , la aceleración debida a la gravedad, usando diferentes enfoques. Grupo (i): determine el periodo de movimiento T para cada longitud del péndulo. A partir de esa longitud, use la ecuación 15.26 para encontrar un valor de g para cada longitud. Determine el valor medio de g obtenido a partir de estas tres mediciones independientes y compárelo con el valor aceptado. Grupo (ii): determine el periodo de movimiento T para cada longitud del péndulo. Trace T^2 contra longitud L y obtenga un valor para g de la pendiente de su gráfico de línea recta que mejor se ajuste, usando la ecuación 15.26. ¿Cómo se comparan los valores de g para los dos grupos?



Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage

Nota: Ignore la masa de cada resorte.

SECCIÓN 15.1 Movimiento de un objeto unido a un resorte

Los problemas 11, 12, 41 del capítulo 7 también se pueden asignar con esta sección.

- Un bloque de 0.60 kg unido a un resorte con fuerza constante de 130 N/m es libre de moverse sobre una superficie horizontal sin fricción como en la figura 15.1. El bloque se suelta a partir del reposo cuando el resorte se extiende de 0.13 m. En el instante en que se libera el bloque, (a) encuentre la fuerza en el bloque y (b) su aceleración.

SECCIÓN 15.2 Análisis de modelo: Partícula en movimiento armónico simple

- Un pistón en un motor a gasolina está en movimiento armónico simple. El motor está corriendo a razón de 3 600 rev/min. Si considera los extremos de su posición relativa con su punto central como ± 5.00 cm, encuentre las magnitudes de (a) la velocidad máxima y (b) la aceleración máxima del pistón.
- La posición de una partícula está dada por la expresión $x = 4.00 \cos(3.00\omega t + \pi)$, donde x está en metros y t en segundos. Determine: (a) la frecuencia y (b) el periodo del movimiento, (c) la amplitud del movimiento, (d) la constante de fase y (e) la posición de la partícula en $t = 0.250$ s.
- Un objeto de 7.00 kg cuelga del extremo inferior de un resorte vertical amarrado a una viga. El objeto se pone a oscilar verticalmente con un periodo de 2.60 s. Encuentre la constante de fuerza del resorte.
- Problema de repaso.** Una partícula se mueve a lo largo del eje x . Al inicio está en la posición 0.270 m, y se mueve con velocidad de 0.140 m/s y aceleración de -0.320 m/s². Suponga que se mueve como una partícula con aceleración constante durante 4.50 s. Encuentre (a) su posición y (b) su velocidad al final de este intervalo de tiempo. A continuación, suponga que se mueve con movimiento armónico simple durante 4.50 s y $x = 0$ es su posición de equilibrio. Encuentre (c) su posición y (d) su velocidad al final de este intervalo de tiempo.
- Se deja caer una bola desde una altura de 4.00 m que realiza una colisión elástica con el suelo. Si supone que no hay pérdida de energía mecánica debida a resistencia del aire, (a) demuestre que el movimiento resultante es periódico y (b) determine el periodo del movimiento. (c) ¿El movimiento es armónico simple? Explique.
- Una partícula que se mueve a lo largo del eje x en movimiento armónico simple parte de su posición de equilibrio, el origen, en $t = 0$ y se mueve a la derecha. La amplitud de su movimiento es de 2.00 cm y la frecuencia de 1.50 Hz. (a) Encuentre una expresión para la posición de la partícula como una función del tiempo. Determine (b) la rapidez máxima de la partícula y (c) el tiempo más temprano ($t > 0$) en el que la partícula tiene esta rapidez. Encuentre (d) la aceleración positiva máxima de la partícula y (e) el tiempo más temprano ($t > 0$) en el que la partícula tiene esta aceleración, y f) la distancia total recorrida entre $t = 0$ y $t = 1.00$ s.
- La posición inicial, velocidad y aceleración de un objeto que se mueve en movimiento armónico simple son x_p , v_i y a_i ; la

frecuencia angular de oscilación es ω . (a) Demuestre que la posición y velocidad del objeto para todos los tiempos se pueden escribir como

$$x(t) = x_i \cos \omega t + \left(\frac{v_i}{\omega}\right) \sin \omega t$$

$$v(t) = -x_i \omega \sin \omega t + v_i \cos \omega t$$

(b) Usando A para representar la amplitud del movimiento, demuestre que

$$v^2 - ax = v_i^2 - a_i x_i = \omega^2 A^2$$

- Usted une un objeto al extremo inferior de un resorte vertical que cuelga en reposo después de extender el resorte 18.3 cm. Luego pone el objeto a vibrar. (a) ¿Tiene suficiente información para encontrar su periodo? (b) Explique su respuesta y establezca lo que pueda acerca de su periodo.

SECCIÓN 15.3 Energía del oscilador armónico simple

- Para probar la resistencia de sus parachoques con colisiones de baja velocidad, se conduce un automóvil de 1 000 kg hacia una pared de ladrillos. Los parachoques del automóvil se comportan como un resorte con una constante de fuerza 5.00×10^6 N/m y se comprime 3.16 cm cuando el automóvil alcanza el reposo. ¿Cuál era la rapidez del automóvil antes del impacto, suponiendo que no se transforma o transfiere energía mecánica durante el impacto con la pared?
- Una partícula ejecuta movimiento armónico simple con una amplitud de 3.00 cm. ¿En qué posición su rapidez es igual a la mitad de su rapidez máxima?
- La amplitud de un sistema de movimiento en movimiento armónico simple se duplica. Determine el cambio en (a) la energía total, (b) la rapidez máxima, (c) la aceleración máxima y (d) el periodo.
- Un oscilador armónico simple de amplitud A tiene una energía total E . Determine (a) la energía cinética y (b) la energía potencial cuando la posición es un tercio de la amplitud. (c) ¿para qué valores de la posición de la energía cinética es igual a la mitad la energía potencial? (d) ¿hay algún valor de la posición donde la energía cinética es mayor que la máxima energía potencial? Explique.
- Problema de repaso** Una saltadora de bungee de 65.00 kg salta de un puente con una cuerda ligera amarrada a ella y al puente. La longitud no estirada de la cuerda es de 11.0 m. La saltadora alcanza el fondo de su movimiento 36.0 m abajo del puente antes de rebotar de regreso. Queremos encontrar el intervalo de tiempo entre que deja el puente y llega al fondo de su movimiento. Su movimiento total se puede separar en una caída libre de 11.0 m y una sección de 25.0 m de oscilación armónica simple. (a) Para la parte de caída libre, ¿cuál es el análisis de modelo adecuado para describir su movimiento? (b) ¿Durante qué intervalo de tiempo está en caída libre? (c) Para la parte de oscilación armónica simple de la caída, ¿es el sistema de la saltadora, la cuerda elástica y la Tierra aislado o no aislado? (d) A partir de su respuesta en el inciso (c) encuentre la constante elástica de la cuerda. (e) ¿Cuál es la ubicación del punto de equilibrio donde la fuerza del resorte equilibra la fuerza gravitacional ejercida sobre la saltadora? (f) ¿Cuál es la frecuencia angular de la oscilación? (g) ¿Qué intervalo de tiempo se requiere para que la cuerda se estire 25.0 m? (h) ¿Cuál es el intervalo de tiempo total para un salto de 36.0 m?

- 15. Problema de repaso.** Un bloque de 0.250 kg que descansa sobre una superficie horizontal sin fricción se une a un resorte cuya constante de fuerza es 83.8 N/m como en la figura P15.15. Una fuerza horizontal \vec{F} hace que el resorte se estire una distancia de 5.46 cm desde su posición de equilibrio. (a) Encuentre la magnitud de \vec{F} . (b) ¿Cuáles la energía total almacenada en el sistema cuando se estira el resorte? (c) Encuentre la magnitud de la aceleración del bloque justo después de que se retira la fuerza aplicada. (d) Encuentre la rapidez del bloque cuando éste primero alcanza la posición de equilibrio. (e) Si la superficie no es sin fricción, pero el bloque todavía alcanza la posición de equilibrio, sería su respuesta a la parte (d) ¿mayor o menor? (f) ¿Qué otra información necesitaría saber para encontrar la respuesta real del inciso (d) en este caso? (g) ¿Cuál es el valor más grande del coeficiente de fricción que permita el bloque alcanzar la posición de equilibrio?

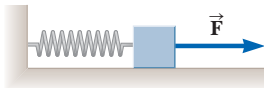


Figura P15.15

SECCIÓN 15.4 Comparación de movimiento armónico simple con movimiento circular uniforme

- 16.** Mientras viaja detrás de un automóvil a 3.00 m/s, nota que una de las llantas del automóvil tiene un pequeño chichón en el borde, como se muestra en la figura P15.16. (a) Explique por qué el chichón, desde su punto de vista detrás del automóvil, ejecuta movimiento armónico simple. (b) Si los radios de los neumáticos del automóvil son de 0.300 m, ¿cuál es el periodo de oscilación del chichón? (c) ¿Qué pasaría si? Usted cuelga un resorte con una constante de resorte $k = 100$ N/m desde el espejo retrovisor de su automóvil. ¿Cuál es la masa que debe ser colgada desde este resorte para producir un movimiento armónico simple con el mismo periodo que el chichón en el neumático? (d) ¿Cuál sería la velocidad máxima de la masa colgante en su automóvil si inicialmente jaló la masa 8.00 cm más allá del equilibrio antes de soltarla?

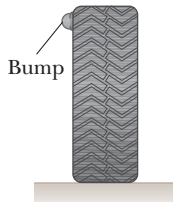


Figura P15.16

SECCIÓN 15.5 El péndulo

El problema 36 del capítulo 1 también se puede asignar en esta sección.

- 17.** Un péndulo simple hace 120 oscilaciones completas en 3.00 min en un lugar donde $g = 9.80$ m/s². Encuentre (a) el periodo del péndulo y (b) su longitud.
- 18.** Una partícula de masa m se desliza sin fricción dentro de un tazón hemisférico de radio R . Demuestre que, si la partícula parte del reposo con un pequeño desplazamiento desde el equilibrio, se mueve en movimiento armónico simple con una frecuencia angular igual al de un péndulo simple de longitud R . Es decir, $\omega = \sqrt{g/R}$.
- 19.** Un péndulo físico en forma de objeto plano se mueve en movimiento armónico simple con una frecuencia de 0.450 Hz. El péndulo tiene una masa de 2.20 kg y el eje se ubica a 0.350 m del centro de masa. Determine el momento de inercia del péndulo en torno al punto de giro.
- 20.** Un péndulo físico en forma de objeto plano se mueve en movimiento armónico simple con una frecuencia f . El péndulo tiene una masa de m y el eje se ubica a una distancia d del centro de masa. Determine el momento de inercia del péndulo en torno al punto de giro.

- 21.** Un péndulo simple tiene una masa de 0.250 kg y una longitud de 1.00 m. Se desplaza a través de un ángulo de 15.0° y luego se libera. Usando el análisis de modelo de partícula en movimiento armónico simple, ¿Cuáles son (a) la rapidez máxima, (b) la aceleración angular máxima y (c) la fuerza restauradora máxima? (d) ¿Qué pasaría si? Resuelva de nuevo los incisos del (a) al (c) usando el análisis de modelos introducidos en los capítulos anteriores. (e) Compare las respuestas.
- 22.** Considere el péndulo físico de la figura 15.16. (a) Represente su momento de inercia en torno a un eje que pasa a través de su centro de masa y paralelo al eje que pasa a través de su punto de giro como I_{CM} . Demuestre que su periodo es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{CM} + md^2}{mgd}}$$

donde d es la distancia entre el punto de giro y el centro de masa. (b) Demuestre que el periodo tiene un valor mínimo cuando d satisface $md^2 = I_{CM}$.

- 23.** El volante de un reloj (figura P15.23) tiene un periodo de oscilación de 0.250 s. La rueda está construida de modo que su masa de 20.0 g se concentra alrededor de un borde de 0.500 cm de radio. ¿Cuáles son (a) el momento de inercia del volante y (b) la constante de torsión del resorte unido?



Figura P15.23

SECCIÓN 15.6 Oscilaciones amortiguadas

- 24.** Demuestre que la rapidez de cambio con el tiempo de la energía mecánica para un oscilador amortiguado no impulsado está dada por $dE/dt = -bv^2$ y por eso siempre es negativa. Para hacerlo, derive la expresión para la energía mecánica de un oscilador, $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ y use la ecuación 15.31.
- 25.** Demuestre que la ecuación 15.32 es una solución de la ecuación 15.31 siempre que $b^2 < 4mk$.

SECCIÓN 15.7 Oscilaciones forzadas

- 26.** Cuando entra en un buen restaurante, se da cuenta que se ha traído de su casa accidentalmente un pequeño temporizador electrónico en vez de su teléfono celular. Frustrado, mete el temporizador en un bolsillo de su saco, sin darse cuenta de que el temporizador está funcionando. El brazo de la silla presiona la tela ligera de su abrigo contra su cuerpo en un punto. Tela con una longitud L cuelga libremente por debajo de ese punto, con el temporizador en la parte inferior. En algún momento durante la cena, el temporizador se apaga y un zumbador y un vibrador encienden y apagan con una frecuencia de 1.50 Hz. Esto hace que la parte que cuelga de su abrigo se mueva hacia adelante y hacia atrás oscilando con amplitud notablemente grande, llamando la atención de todo el mundo. Encuentre el valor de L .
- 27.** Un objeto de 2.00 kg unido a un resorte se mueve sin fricción ($b = 0$) y es impulsado por una fuerza externa dada por $F = 3.00$ N sen $(2\omega t)$. La constante de fuerza del resorte es de 20.0 N/m. Determine (a) la frecuencia angular de resonancia del

sistema, (b) la frecuencia angular del sistema conducido, y (c) la amplitud del movimiento.

28. S Si considera un oscilador forzado no amortiguado ($b = 0$), demuestre que la ecuación 15.35 es una solución de la ecuación 15.34, con una amplitud dada por la ecuación 15.36.

29. CE Ha obtenido un trabajo a tiempo parcial en una empresa que hace pequeñas sondas que son liberadas de los satélites para estudiar la atmósfera muy delgada en la ubicación de las órbitas de estos. Para mantener las sondas en una orientación adecuada en el espacio, se girarán alrededor de su eje antes de soltarse. Es importante conocer el momento de inercia de la sonda de forma extraña. Su jefe le pide que mida su momento de inercia. Configura un sistema como el de la figura

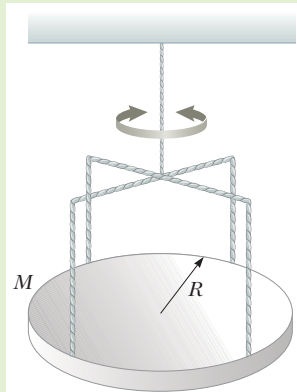


Figura P15.23

15.18, modificándolo añadiendo un marco muy liviano (figura P15.29) en el cual puede colocar objetos, centrándolos en el disco. El marco está unido a los bordes del disco. El cable de soporte está rígidamente conectado a la parte superior del marco para que no interfiera con los objetos que desea colocar en el disco. El disco es de masa $M = 5.25$ kg y tiene un radio de $R = 25.8$ cm. Gira el disco vacío desde su posición de equilibrio y lo deja funcionar como un péndulo de torsión. Mide cuidadosamente su periodo de oscilación para ser $T_{\text{vacío}} = 10.8$ s. A continuación, coloca la sonda en el disco y ajusta su posición hasta que el disco cuelgue exactamente en posición horizontal, para que sepa que el centro de masa de la sonda está directamente sobre el centro del disco. Gira el disco cargado desde su posición de equilibrio y lo deja funcionar como un péndulo de torsión. (a) Mida cuidadosamente el periodo de oscilación para $T_{\text{cargado}} = 18.7$ s, y de este resultado usted determina el momento de inercia de la sonda sobre su centro de masa. (b) Cuando presenta los resultados a su supervisora, ella le pregunta sobre el momento de inercia del marco que construyó. Vuelve a su escritorio y lo piensa. Cuando considera que el cuadro tiene algún momento de inercia, ¿el valor calculado en el inciso (a) es demasiado alto o demasiado bajo?

30. CE Asume una ayudantía de investigación con una física molecular. Ella está estudiando las vibraciones de las moléculas diatómicas. En estas vibraciones, los dos átomos de la molécula se mueven hacia adelante y hacia atrás a lo largo de la línea que los conecta (véase la figura 20.5c). Como introducción a su investigación, ella le pide que se familiarice con el potencial de Lennard-Jones (vea el ejemplo 7.9), que describe la función de energía potencial para una molécula diatómica. Ella le pide que determine la constante de resorte efectiva, en términos de los parámetros σ y ϵ , para el enlace que mantiene unidos a los átomos en la molécula para pequeñas vibraciones alrededor de la separación de equilibrio requerida r_{eq} . Después de quedarse perplejo por un tiempo, le pide una pista. Ella responde: “El ejemplo 7.9 proporciona la derivada de la función de energía potencial. Compare eso con la ecuación 7.29 para encontrar la fuerza entre los átomos. Desea mostrar que F tiene la forma $-kx$ y encontrar k . Sea la distancia de separación $r = r_{eq} + x$, donde x es pequeño y aproveche las

aproximaciones de la serie en la sección B.5 del Apéndice”. ¡Recórcholis, eso son varios indicios! Se sienta y se pone a trabajar.

PROBLEMAS ADICIONALES

31. C/C Un objeto de masa m se mueve en movimiento armónico simple con 12.0 cm de amplitud en un resorte ligero. Su aceleración máxima es 108 cm/s². Considere m como variable. (a) Encuentre el periodo T del objeto. (b) Encuentre su frecuencia f . (c) Halle la rapidez máxima $v_{\text{máx}}$ del objeto. (d) Localice la energía E del sistema objeto-resorte. (e) Encuentre la constante de fuerza k del resorte. (f) Describa el patrón de dependencia de cada una de las cantidades T , f , $v_{\text{máx}}$, E y k en m .

32. C/C **Problema de repaso.** Este problema extiende el razonamiento del problema 41 del capítulo 9. Dos deslizadores se ponen en movimiento sobre una pista de aire. El deslizador uno tiene masa $m_1 = 0.240$ kg y se mueve hacia la derecha con una rapidez 0.740 m/s. Tendrá una colisión posterior con el deslizador número dos, de masa $m_2 = 0.360$ kg, que tiene rapidez hacia la derecha 0.120 m/s. Un resorte ligero con constante de fuerza de 45.0 N/m se une al extremo posterior del deslizador dos, como se muestra en la figura P9.41. Cuando el deslizador uno toca el resorte, un súper pegamento hace que instantánea e inmediatamente se pegue a su extremo del resorte. (a) Encuentre la rapidez común que tienen los dos deslizadores cuando la compresión del resorte es un máximo. (b) Encuentre la distancia máxima de compresión de resorte. El movimiento después de que los planeadores se unen consiste en una combinación de (1) el movimiento de velocidad constante del centro de masa del sistema de los dos planeadores encontrados en el inciso (a) y (2) movimiento armónico simple de los planeadores con respecto al centro de masa. (c) Encuentre la energía del movimiento de centro de masa. (d) Encuentre la energía de oscilación.

33. Un objeto unido a un resorte vibra con movimiento armónico simple según lo descrito por la figura P15.33. Para este movimiento, encuentre (a) la amplitud, (b) el periodo, (c) la frecuencia angular, (d) la velocidad máxima (e) la aceleración máxima y (f) una ecuación para su posición x en función del tiempo.

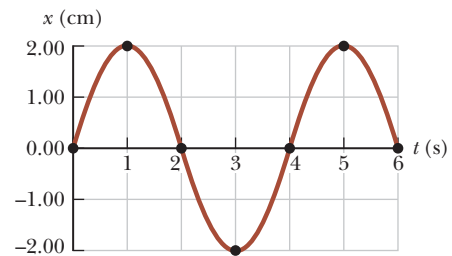


Figura P15.33

34. C/C **Problema de repaso.** Una roca descansa sobre una acera de concreto. Se presenta un terremoto, que mueve al suelo verticalmente en movimiento armónico con una frecuencia constante de 2.40 Hz y con amplitud gradualmente creciente. (a) ¿Con qué amplitud vibra el suelo cuando la roca comienza a perder contacto con la acera? Otra roca está asentada sobre el concreto en el fondo de una alberca llena con agua. El terremoto sólo produce movimiento vertical, así que el agua no salpica de lado a lado. (b) Presente un argumento convincente de que, cuando el suelo vibra con la amplitud encontrada en el inciso (a), la roca sumergida también apenas pierde contacto con el suelo de la alberca.

- 35. S** Un péndulo de longitud L y masa M tiene un resorte con constante de fuerza k conectado a él a una distancia h bajo su punto de suspensión (figura P15.35). Encuentre la frecuencia de vibración del sistema para pequeños valores de la amplitud (θ pequeño). Suponga que la barra de suspensión vertical de longitud L es rígida, pero ignore su masa.

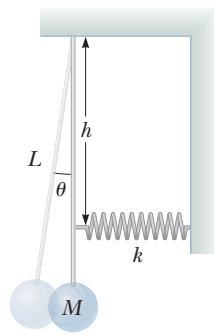


Figura P15.35

- 36. BIO** Considere la velocidad con que camina un animal bípedo o cuadrúpedo, modele una pierna que no está contactando a la tierra como una barra uniforme de longitud ℓ , que se hace pivotar como un péndulo físico a través de una mitad de un ciclo, en resonancia. Sea que $\theta_{\text{máx}}$ represente su amplitud. (a) Demuestre que la rapidez del animal está dada por la expresión

$$v = \frac{\sqrt{6g/\ell} \sin \theta_{\text{máx}}}{\pi}$$

Si $\theta_{\text{máx}}$ es lo suficientemente pequeño que el movimiento sea casi armónico simple. Una relación empírica que se basa en el mismo modelo y se aplica en un gran rango de ángulos es

$$v = \frac{\sqrt{6g/\ell} \cos(\theta_{\text{máx}}/2) \sin \theta_{\text{máx}}}{\pi}$$

(b) Evalúe la rapidez con que camina un ser humano con una pierna de longitud 0.850 m y una amplitud de balanceo de pierna de 28.0 °C. ¿Qué longitud de pierna daría el doble de la rapidez para la misma amplitud angular?

- 37. C/C** **Problema de repaso.** Una partícula de 4.00 kg de masa está unida a un resorte con una constante de fuerza de 100 N/m. Oscila sobre una superficie horizontal sin fricción con una amplitud de 2.00 m. Un objeto de 6.00 kg se deja caer verticalmente en la parte superior del objeto de 4.00 kg mientras pasa a través de su punto de equilibrio. Los dos objetos quedan pegados. (a) ¿Por cuánto cambia la amplitud del sistema en vibración como resultado de la colisión? (b) ¿Por cuánto cambia el periodo del sistema? (c) ¿Por cuánto cambia la energía del sistema como un resultado de la colisión? (d) Estime el cambio en energía.

- 38. C/C** Quienes viajan en motocicletas y bicicletas aprenden a prestar atención a los baches en el camino, y en especial a los lavaderos, una condición en la que muchos bordes igualmente espaciados se forman en el camino. ¿Qué es tan malo en los lavaderos? Una motocicleta tiene muchos resortes y amortiguadores en su suspensión, pero usted puede modelarla como un solo resorte que sostiene un bloque. Puede estimar la constante de fuerza al pensar en cuánto se comprime el resorte cuando un motociclista pesado conduce. Un motociclista que viaja con rapidez de carretera debe tener particular cuidado de los baches en forma de lavadero que están separados cierta distancia. ¿Cuál es el orden de magnitud de su distancia de separación?

- 39. S** Una bola de masa m se conecta a dos bandas de hule de longitud L , cada una bajo tensión T , como se muestra en la figura P15.39. La bola se desplaza una pequeña distancia y perpendicular a la longitud de las bandas de hule. Si supone que la tensión no cambia, demuestre que (a) la fuerza restauradora es $-(2T/L)y$ y (b) el sistema muestra movimiento armónico simple con una frecuencia angular $\omega = \sqrt{2T/mL}$.

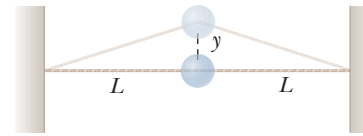


Figura P15.39

- 40.** Considere el oscilador amortiguado que se muestra en la figura 15.19. La masa del objeto es 375 g, la constante de resorte es 100 N/m y $b = 0.100 \text{ N} \cdot \text{s/m}$. (a) ¿Durante qué intervalo de tiempo la amplitud disminuye a la mitad de su valor inicial? (b) ¿Qué pasaría si? ¿Durante qué intervalo de tiempo la energía mecánica disminuye a la mitad de su valor inicial? (c) Demuestre que, en general, la relación fraccionaria a la cual la amplitud disminuye en un oscilador armónico amortiguado es la mitad de la relación fraccionaria a la que disminuye la energía mecánica.

- 41. S** **Problema de repaso.** Una boya de langostero es un cilindro de madera sólida de radio r y masa M , a la cual se le coloca peso en un extremo, de modo que flote vertical en agua de mar tranquila, que tiene densidad ρ . Un tiburón que pasa tensa la soga floja que amarra la boya a una trampa de langosta y jala la boya una distancia x desde su posición de equilibrio y la libera. (a) Demuestre que la boya ejecutará movimiento armónico simple si se ignoran los efectos resistivos del agua y (b) determine el periodo de las oscilaciones.

- 42. S** Su pulgar rechina en un plato que acaba de lavar. Sus zapatos tenis rechinan en el piso del gimnasio. Las llantas de los autos rechinan con un arranque o frenado abrupto. Usted puede hacer cantar una copa al secar su dedo humedecido alrededor de su borde. Cuando el gis rechina en un pizarrón, usted puede ver que hace una hilera de rayas regularmente espaciadas. Como sugieren estos ejemplos, la vibración comúnmente resulta cuando la fricción actúa sobre un objeto elástico en movimiento. La oscilación no es un movimiento armónico simple, sino que se llama *pegar y deslizar*. Este problema modela un movimiento de pegar y deslizar.

Un bloque de masa m se une a un soporte fijo mediante un resorte horizontal, con constante de fuerza k y masa despreciable (figura P15.42). La ley de Hooke describe el resorte tanto en extensión como en compresión. El bloque descansa sobre una larga tabla horizontal, con la que tiene coeficiente de fricción estático μ_s y un coeficiente de fricción cinética μ_k menor. La tabla se mueve hacia la derecha con rapidez constante v . Suponga que el bloque pasa la mayor parte de su tiempo pegado a la tabla y en movimiento hacia la derecha, de modo que la rapidez v es pequeña en comparación con la rapidez promedio que tiene el bloque mientras se desliza de regreso hacia la izquierda. (a) Demuestre que la máxima extensión del resorte, desde su posición no estirada, es muy cercana a la que se conoce mediante $\mu_s mg/k$. (b) Demuestre que el bloque oscila en torno a una posición de equilibrio en la que el resorte se estira en $\mu_k mg/k$. (c) Grafique la posición del bloque con el tiempo. (d) Demuestre que la amplitud del movimiento del bloque es

$$A = \frac{(\mu_s - \mu_k)mg}{k}$$

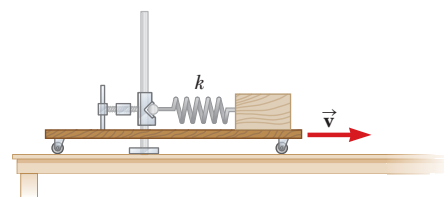


Figura P15.42

(e) Demuestre que el periodo del movimiento del bloque es

$$T = \frac{2(\mu_s - \mu_k)mg}{vk} + \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Este exceso de fricción estática sobre la fricción cinética es importante para la vibración. “La rueda chirriante obtiene la grasa” porque ni siquiera un fluido viscoso no puede ejercer una fuerza de fricción estática.

- 43. CE** Su padre está preparando el patio trasero para la instalación de césped nuevo. Él ha terminado de limpiar el suelo de raíces y rocas, lo ha rastrillado hasta los contornos correctos, y ahora debe jalar un rodillo pesado, que se muestra en la figura P15.43a, sobre el suelo varias veces para aplanar y compactar la tierra. Él está cansado después de todo su trabajo y le pide que termine el rodado. Su padre le dice que cada sección del patio debe ser repasada más de diez veces con el rodillo. Está cansado de estar estudiando física, pero decide que puede usar su comprensión de la física para facilitar el trabajo. Usted fija el rodillo a un resorte como se muestra en la figura P15.43b, con el otro extremo unido a un poste clavado en el suelo. A continuación, tira del rodillo una vez y deja que oscile sobre cada parte del patio durante diez pasadas mientras se sienta y se relaja. Antes de comenzar, se pregunta cuánto tiempo tendrá que relajarse en cada ubicación antes de tener que mover el poste y el rodillo a un nuevo sitio. La masa del rodillo es $M = 400$ kg, y la constante del resorte es $k = 3\,500$ N/m. El suelo plano y liso proporciona suficiente fricción para que el rodillo ruede en lugar de deslizarse, pero la fricción de rodamiento es insignificante.

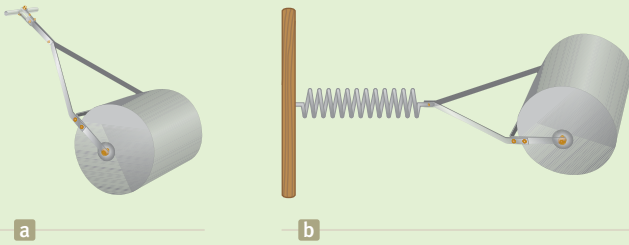


Figura P15.43

- 44.** ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Su trabajo implica la construcción de osciladores amortiguados muy pequeños. Uno de sus diseños consiste en un oscilador de resorte-objeto con un resorte de constante de fuerza $k = 10.0$ N/m y un objeto de masa $m = 1.00$ g. El objetivo del diseño es que el oscilador experimente muchas oscilaciones conforme su amplitud disminuye a 25.0% de su valor inicial en un cierto intervalo de tiempo. Las mediciones en su más reciente diseño demuestran que la amplitud cae al valor de 25.0% en 23.1 ms. Este intervalo de tiempo es demasiado largo para lo que necesita en su proyecto. Para acortar el intervalo de tiempo, se duplica la constante b de amortiguamiento para el oscilador. Esta duplicación permite alcanzar su objetivo de diseño.
- 45. S** Un bloque de masa m se conecta a dos resortes con constantes de fuerza k_1 y k_2 en dos formas, como se muestra en la figura P15.45. En ambos casos el bloque se mueve sobre una mesa sin fricción después de desplazarse desde el equilibrio y liberarse. Demuestre que en los dos casos el bloque muestra movimiento armónico simple con periodos

(a) $T = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$ y (b) $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$

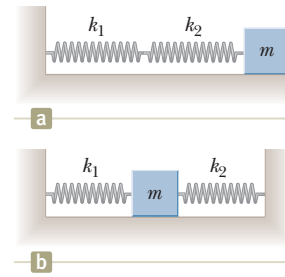


Figura P15.45

- 46. Problema de repaso.** Un globo ligero lleno de helio de densidad 0.179 kg/m³ está atado a una cuerda ligera de longitud $L = 3.00$ m. La cuerda está atada a la tierra formando un péndulo simple “invertido” (figura 15.46a). Si el balón se desplaza ligeramente del equilibrio como en la figura P15.46b y se libera, (a) demuestre que el movimiento es armónico simple y (b) determine el periodo del movimiento. Tome la densidad del aire de 1.20 kg/m³. *Sugerencia:* Utilice una analogía con el péndulo simple y vea el capítulo 14. Suponga que el aire aplica una fuerza de flotación en el globo que no afecta su movimiento.

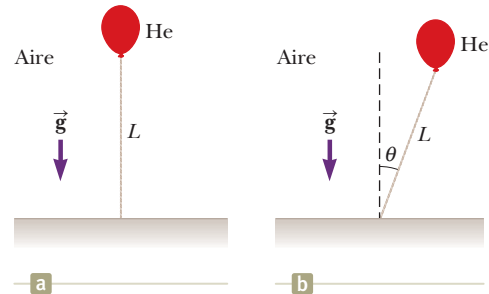


Figura P15.46

- 47.** Una partícula con una masa de 0.500 kg está unida a un resorte con una constante de fuerza de 50.0 N/m. En el momento en que $t = 0$, la partícula tiene su rapidez máxima de 20.0 m/s y se mueve hacia la izquierda. (a) Determine la ecuación de movimiento de la partícula y especifique su posición como función del tiempo. (b) ¿Dónde, en el movimiento la energía potencial, es tres veces la energía cinética? (c) Encuentre el intervalo de tiempo mínimo requerido para que la partícula se mueva de $x = 0$ a $x = 1.00$ m. (d) Encuentre la longitud de un péndulo simple con el mismo periodo.

PROBLEMAS DE DESAFÍO

- 48. S** Un pequeño disco de radio r y masa m se pega rigidamente a la cara de un segundo disco más grande de radio R y masa M , como se muestra en la figura P15.48. El centro del disco pequeño se ubica en el borde del disco grande. El disco grande se monta en su centro en un eje sin fricción. El ensamble da vueltas a través de un pequeño ángulo θ desde su posición de equilibrio y

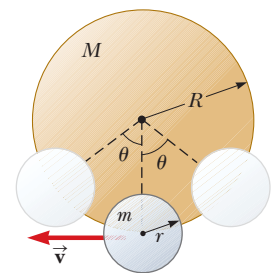


Figura P15.48

se libera. (a) Demuestre que mientras pasa a través de la posición de equilibrio la rapidez del centro del disco pequeño es

$$v = 2 \left[\frac{Rg(1 - \cos \theta)}{(M/m) + (r/R)^2 + 2} \right]^{1/2}$$

(b) Demuestre que el periodo del movimiento es

$$T = 2\pi \left[\frac{(M + 2m)R^2 + mr^2}{2mgR} \right]^{1/2}$$

- 49. Problema de repaso.** Un sistema consta de un resorte con constante de fuerza $k = 1\,250\text{ N/m}$, longitud $L = 1.50\text{ m}$ y un objeto de masa $m = 5.00\text{ kg}$ unido al extremo (figura P15.49). El objeto se coloca en el nivel del punto de fijación con el resorte sin estirar, en posición $y_i = L$, y luego se libera de modo que balancea como un péndulo. (a) Encuentre la posición y del objeto en el punto más bajo. (b) ¿El periodo del péndulo será mayor o menor que el periodo de un péndulo simple con la misma masa m y longitud L ? Explique.

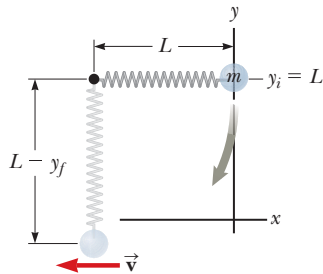


Figura P15.49

- 50. Problema de repaso.** ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Usted está en el negocio de entrega de paquetes con alta rapidez. Su competidor en el edificio contiguo adquiere el derecho de construir un túnel evacuado que pasa justo encima del piso alrededor de la Tierra. Enviando los paquetes en el túnel a la rapidez correcta, su competidor es capaz de enviar los paquetes en la órbita alrededor de la Tierra en este túnel para que lleguen al lado opuesto exacto en un intervalo de tiempo muy corto. Usted tiene con una idea para competir. Pensando que la distancia *a través* de la Tierra es más corta que la distancia *alrededor* de la Tierra, obtiene permisos

para construir un túnel evacuado a través del centro de la Tierra (figura P15.50). Para simplemente al soltar los paquetes en este túnel, caen hacia abajo y llegan en el otro extremo de su túnel, que se encuentra en un edificio justo al lado del otro extremo del túnel de su competidor. Puesto que los paquetes llegan al otro lado de la Tierra en un intervalo de tiempo corto, usted gana el concurso y su negocio florece. *Nota:* Un objeto a una distancia r del centro de la Tierra es jalado hacia el centro de la Tierra solamente por la masa dentro de la esfera de radio r (la región rojiza en la figura P15.50). La Tierra tiene densidad uniforme.

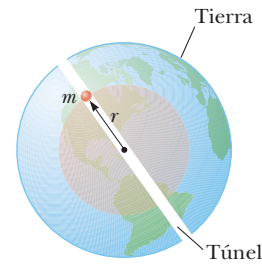


Figura P15.50

- 51. S** Un contenedor ligero, cúbico de volumen a^3 inicialmente está lleno de un líquido de densidad de masa ρ como se muestra en la figura P15.51a. El cubo es soportado inicialmente por una cuerda ligera para formar un péndulo simple de longitud L_i , medido desde el centro de la masa del recipiente lleno, donde $L_i \gg a$. El líquido puede fluir desde el fondo del recipiente a razón constante (dM/dt). En cualquier tiempo t , el nivel del líquido en el recipiente es h y la longitud del péndulo es L (medida con respecto del centro de masa instantánea) como se muestra en la figura P15.51b. (a) Encuentre el periodo del péndulo en función del tiempo. (b) ¿Cuál es el periodo del péndulo después de que el líquido salga completamente del recipiente?

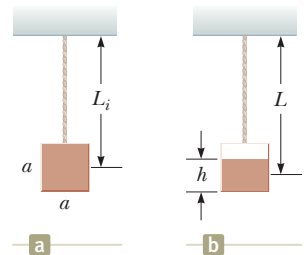


Figura P15.51

Movimiento ondulatorio

16



IMAGINE Durante su visita a la casa de sus abuelos en Boston, usted y su

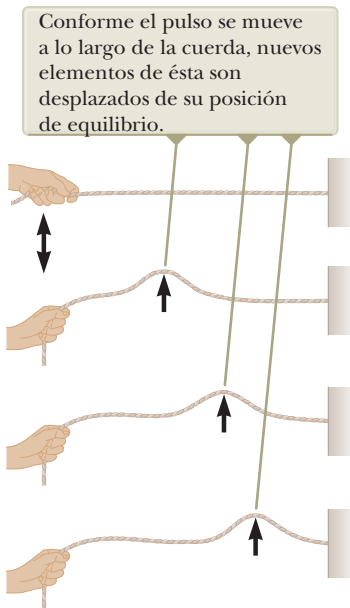
abuelo realizan un viaje de un día. Se detiene en la Reserva de Quincy Quarries, donde hay grandes áreas planas entre los acantilados. Durante su visita, nota que puede aplaudir y escuchar un eco distintivo desde un acantilado distante. Usted dice: “Mire esto, abuelo, déjeme mostrarle algo sobre los teléfonos celulares”. Saca su teléfono inteligente y activa la aplicación de grabación digital. Le pide a su abuelo que aplauda una vez, justo después de que comienza a grabar. Usted detiene la grabación luego de que llega el eco del acantilado. Al ver los pulsos en la pantalla de la aplicación que representan tanto el aplauso como el eco, usted determina el intervalo de tiempo para que el sonido de la palmada viaje hacia el acantilado y de regreso. A continuación, usa el sistema GPS en su teléfono para determinar sus coordenadas de latitud y longitud. En este punto, exclama: “¡Abuelo, vamos a caminar!”. Camina por el antiguo lago hasta la base del acantilado que proporcionó el eco y determina sus coordenadas otra vez. En función de los dos conjuntos de coordenadas, utiliza un sitio web para hallar la distancia entre el acantilado y su posición original. Desde esta distancia y el intervalo de tiempo que midió para la llegada del eco, realiza un cálculo razonablemente preciso de la velocidad del sonido. Su abuelo está bastante impresionado con usted.

CONEXIONES En este capítulo, continuaremos con el enlace que mencionamos al comienzo del capítulo 15. El *movimiento de onda* representa fenómenos en los que una *perturbación* se propaga a través de un medio. La perturbación lleva energía de un punto a otro. Pero no hay materia que se mueva a esa distancia. Por ejemplo, suponga que va a jugar boliche. Puede golpear los pinos rodando la bola de boliche contra ellos. Eso *no* es movimiento ondulatorio. La energía es transportada por la bola de boliche; hay una transferencia de materia. Pero suponga que puede *gritar* lo suficientemente fuerte como

En la Reserva de Quarries en Quincy, Massachusetts, el agua de lluvia llenó una antigua cantera de granito, de modo que el agua estaba rodeada de rocas y acantilados. Cuando Boston emprendió la Gran Excavación, en la cual se removieron grandes cantidades de tierra de debajo de la ciudad para dar paso a los túneles subterráneos, el agua de Quincy Quarries se llenó con esa tierra. En consecuencia, ahora hay grandes áreas planas entre los acantilados de granito. (© Cengage)

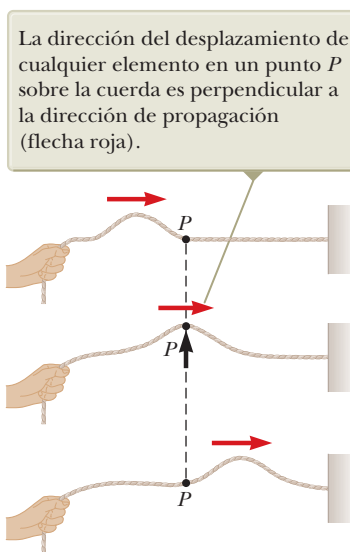
- 16.1 Propagación de una perturbación
- 16.2 Modelo de análisis: onda viajera
- 16.3 La rapidez de ondas sobre cuerdas
- 16.4 Rapidez de transferencia de energía mediante ondas sinusoidales sobre cuerdas
- 16.5 La ecuación de onda lineal
- 16.6 Ondas sonoras
- 16.7 Rapidez de ondas sonoras
- 16.8 Intensidad de ondas sonoras periódicas
- 16.9 El efecto Doppler





Conforme el pulso se mueve a lo largo de la cuerda, nuevos elementos de ésta son desplazados de su posición de equilibrio.

Figura 16.1 Una mano, mueve una vez, hacia arriba y hacia abajo, el extremo de una cuerda estirada (flecha negra de doble punta), generando un pulso que viaja a lo largo de la cuerda.



La dirección del desplazamiento de cualquier elemento en un punto P sobre la cuerda es perpendicular a la dirección de propagación (flecha roja).

Figura 16.2 Desplazamiento de un elemento particular de la cuerda para un pulso transversal viajando en una cuerda estirada.

para derribar los pinos. (¡No intente esto!) Eso sería transferencia de energía por ondas. La energía es transportada por la onda de sonido de su voz, sin importar las transferencias de su boca a los pinos. En nuestras explicaciones en este capítulo y el siguiente, analizamos las ondas *mecánicas*. Estas ondas requieren un *medio*. Por ejemplo, estudiaremos ondas unidimensionales que viajan en una cuerda. La cuerda es el medio. También consideraremos las ondas mecánicas en tres dimensiones: las ondas pueden viajar en cualquier dirección a través de un medio a granel. Cuando el medio es aire, lo llamamos ondas *mecánicas*. Relacionaremos los fenómenos asociados con las ondas sonoras con nuestro sentido del oído. Utilizaremos nuestra información de este capítulo para estudiar las ondas bajo condiciones de frontera en el capítulo 17, lo que conducirá a una comprensión de los instrumentos musicales. Además, el material de este capítulo formará la base de nuestro estudio de las ondas electromagnéticas en los capítulos 33-37 y la física cuántica en los capítulos 39-44.

16.1 Propagación de una perturbación

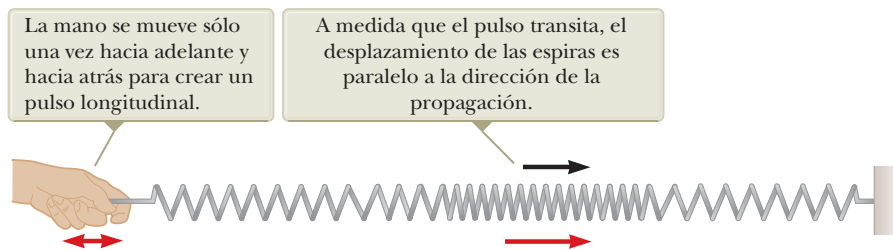
En la introducción a este capítulo se aludió a la esencia del movimiento ondulatorio: la transferencia de energía a través del espacio sin el acompañamiento de transferencia de materia. En la lista de mecanismos de transferencia de energía en la ecuación 8.2, dos mecanismos, ondas mecánicas T_{MW} y radiación electromagnética T_{ER} , dependen de las ondas. En contraste, en otro mecanismo, la transferencia de materia T_{MT} , la transferencia de energía está acompañada por un movimiento de materia a través del espacio sin algún carácter ondulatorio en el proceso.

Todas las ondas mecánicas requieren (1) alguna fuente de perturbación, (2) un medio que contenga elementos que puedan ser perturbados y (3) algún mecanismo físico a partir del cual los elementos del medio puedan influirse mutuamente. Una forma de demostrar el movimiento ondulatorio es sacudir un extremo de una larga cuerda que esté bajo tensión y tenga su extremo opuesto fijo como se muestra en la figura 16.1. De esta manera, se forma un solo chichón (llamado *pulso*) que viaja a lo largo de la cuerda con una rapidez definida. La figura 16.1 representa cuatro “instantáneas” consecutivas de la creación y propagación del pulso progresivo. La mano es la fuente de la perturbación. La cuerda es el medio a través del cual viaja el pulso, los elementos individuales de la cuerda son perturbados de su posición de equilibrio. Aún más, los elementos de la cuerda están conectados entre sí, de modo que se influyen mutuamente. El pulso tiene una altura y una rapidez de propagación definidas a lo largo del medio. La forma del pulso cambia muy poco a medida que viaja a lo largo de la cuerda.¹

A medida que viaja el pulso de la figura 16.1, cada elemento perturbado de la cuerda se mueve en una dirección *perpendicular* a la dirección de propagación. La figura 16.2 ilustra este punto para un elemento particular, etiquetado P . Observe que nunca alguna parte de la cuerda se mueve en la dirección de propagación. Una onda viajera o pulso que hace que los elementos del medio perturbado se muevan perpendiculares a la dirección de propagación se llama **onda transversal**.

Compare esta onda con otro tipo de pulso, uno que se mueve por un largo resorte estirado, como se muestra en la figura 16.3. El extremo izquierdo del resorte recibe un ligero empuje hacia la derecha y después recibe un ligero jalón hacia la izquierda. Este movimiento crea una súbita compresión de una región de las espiras. La región comprimida viaja a lo largo del resorte (a la derecha en la figura 16.3). Observe que la dirección del desplazamiento de las espiras es *paralela* a la dirección de propagación de la región comprimida. Una onda viajera o pulso que mueve a los elementos del medio en paralelo a la dirección de propagación se llama **onda longitudinal**.

¹ En realidad, el pulso cambia de forma y gradualmente se dispersa durante el movimiento. Este efecto, llamado *dispersión*, es común a muchas ondas mecánicas, así como a ondas electromagnéticas. En este capítulo no se considera la dispersión.



La mano se mueve sólo una vez hacia adelante y hacia atrás para crear un pulso longitudinal.

A medida que el pulso transita, el desplazamiento de las espiras es paralelo a la dirección de la propagación.

Si el final de la cuerda en la figura 16.1 fuera movido arriba y abajo continuamente, la mano generaría una serie de pulsos llamada **onda transversal**. Estudiaremos los detalles de las ondas como esta en la sección 16.2. Las ondas sonoras, que veremos más adelante en este capítulo, son un ejemplo de **ondas longitudinales**. La perturbación en una onda de sonido es una serie de regiones de alta presión y baja presión que viajan por el aire, como veremos en la sección 16.6.

Algunas ondas en la naturaleza presentan una combinación de desplazamientos transversales y longitudinales. Las ondas en la superficie del agua son un buen ejemplo. Cuando una onda acuática viaja sobre la superficie del agua profunda, los elementos del agua en la superficie se mueven en trayectorias casi circulares, como se muestra en la figura 16.4. La perturbación tiene componentes tanto transversales como longitudinales. Los desplazamientos transversales que se ven en la figura 16.4 representan las variaciones en posición vertical de los elementos del agua. Un punto en la figura 16.4 en el que el desplazamiento del elemento desde su posición normal es el más alto se denomina **cresta** de la onda. El punto más bajo se llama **canal**.

Un terremoto representa una perturbación que resulta en **ondas sísmicas**. Las ondas tridimensionales que viajan desde un punto debajo de la superficie de la Tierra donde se presenta un terremoto, son de dos tipos, transversales y longitudinales. Las ondas longitudinales son las más rápidas de las dos y viajan con magnitudes de rapidez en el rango de 7 a 8 km/s cerca de la superficie. Se llaman **ondas P**, donde “P” es por *primarias*, porque viajan más rápido que las ondas transversales y llegan primero a un sismógrafo (dispositivo empleado para detectar ondas debidas a terremotos). Las ondas transversales más lentas, llamadas **ondas S**, donde “S” es para *secundarias*, viajan a través de la Tierra a 4 o 5 km/s cerca de la superficie. Al registrar en un sismógrafo el intervalo de tiempo entre las llegadas de estos dos tipos de ondas, se determina la distancia desde el sismógrafo al punto de origen de las ondas. Esta distancia es el radio de una esfera imaginaria centrada en el sismógrafo. El origen de las ondas se localiza en alguna parte sobre dicha esfera. Las esferas imaginarias desde tres o más estaciones de monitoreo, ubicadas muy separadas entre sí, se intersecan en una región de la Tierra, y esta región es donde ocurrió el terremoto.

- E XAMEN RÁPIDO 16.1** (i) En una larga fila de personas que esperan comprar boletos, la primera persona sale y un pulso de movimiento se presenta a medida que la gente avanza para llenar el hueco. A medida que cada persona avanza, el hueco se mueve a través de la fila. La propagación de este hueco es, ¿(a) transversal o (b) longitudinal? (ii) Considere la “ola” en un juego de beisbol: las personas se ponen de pie y levantan sus brazos a medida que la ola llega a sus posiciones, y el pulso resultante se mueve alrededor del estadio. Esta onda es, ¿(a) transversal o (b) longitudinal?

Considere un pulso que viaja hacia la derecha en una cuerda larga, como se muestra en la figura 16.5. En este instante, la forma del pulso, cualquiera que sea, se puede representar mediante alguna función matemática que se escribirá como $y(x,t)$. En $t = 0$ como en la figura 16.5a, escribimos esto como $y(x,0) = f(x)$ donde $f(x)$ describe la forma del pulso en el espacio.

La función $y(x,t)$, algunas veces llamada **función de onda**, depende de las dos variables x y t . Por esta razón, con frecuencia se escribe $y(x,t)$, que se lee “y como una función de x y t ”.

Es importante entender el significado de y . Considere un elemento de la cuerda en el punto P de la figura 16.5, identificado mediante un valor particular de su coordenada x .

Figura 16.3 Un pulso longitudinal a lo largo de un resorte estirado.

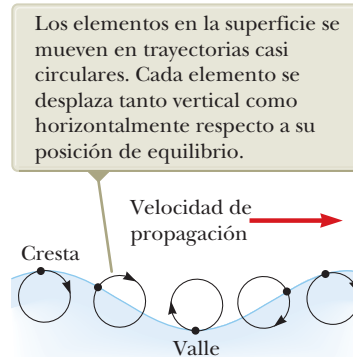


Figura 16.4 El movimiento de los elementos del agua sobre la superficie del agua profunda, en la que una onda se propaga es una combinación de desplazamientos transversales y longitudinales.

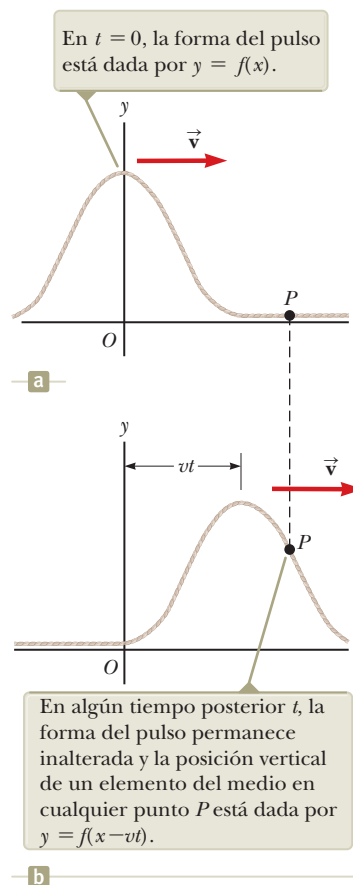


Figura 16.5 Un pulso unidimensional que viaja, con rapidez v , hacia la derecha en una cuerda.

Mientras el pulso pasa por P , la coordenada y de este elemento aumenta, llega a un máximo y luego disminuye a cero. La función de onda $y(x,t)$ representa la coordenada y , la posición transversal, de cualquier elemento ubicado en la posición x en cualquier tiempo t . Si tuviéramos que ver el pulso en un instante particular de tiempo, como en el caso de tomar una instantánea del pulso, veríamos algo como la figura 16.5a o 16.5b. La forma geométrica $f(x)$ del pulso en un instante particular se llama **forma de onda**.

Ya que la rapidez del pulso es v , la cresta del pulso viajó hacia la derecha una distancia vt en el tiempo t (figura 16.5b). Se supone que la forma del pulso no cambia con el tiempo. Por tanto, al tiempo t , la forma del pulso es la misma que tenía en $t = 0$, como en la figura 16.5a. En consecuencia, un elemento de la cuerda en x en este tiempo tiene la misma posición y que un elemento ubicado en $x - vt$ tenía en $t = 0$:

$$y(x, t) = y(x - vt, 0)$$

En general, entonces, se puede representar la posición transversal y para todas las posiciones y tiempos, medida en un marco estacionario con el origen en O , como

$$y(x, t) = f(x - vt) \tag{16.1}$$

De igual modo, si el pulso viaja hacia la izquierda, las posiciones transversales de los elementos de la cuerda se describen mediante:

$$y(x, t) = f(x + vt) \tag{16.2}$$

Ejemplo 16.1 Un pulso que se mueve hacia la derecha

Un pulso que se mueve hacia la derecha a lo largo del eje x se representa mediante la función de onda

$$y(x, t) = \frac{2}{(x - 3.0t)^2 + 1}$$

donde x y y se miden en centímetros y t en segundos. Encuentre expresiones para la función de onda en $t = 0$, $t = 1.0$ s y $t = 2.0$ s.

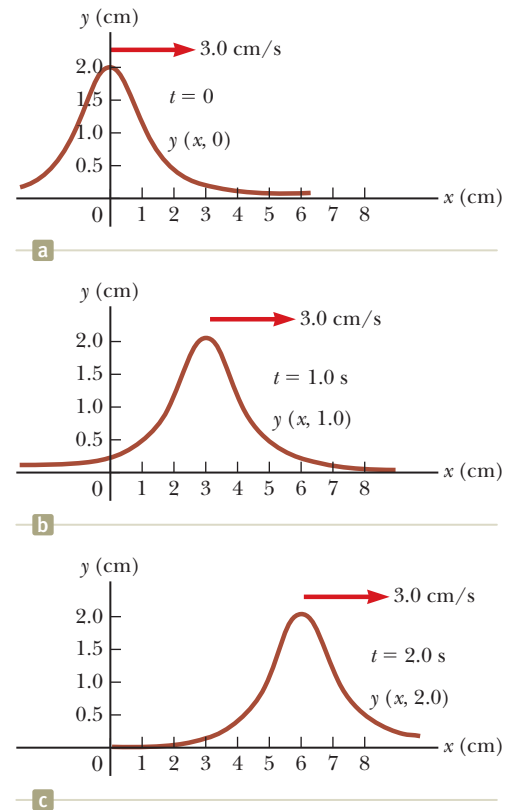
SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 16.6a muestra el pulso representado por esta función de onda en $t = 0$. Imagine que este pulso se mueve hacia la derecha con una rapidez de 3.0 cm/s y mantiene su forma como sugieren las figuras 16.6b y 16.6c.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de análisis relativamente simple en el que se interpreta la representación matemática de un pulso.

Analizar La función de onda es de la forma $y = f(x - vt)$. La inspección de la expresión para $y(x,t)$ y la comparación con la ecuación 16.1 revela que la rapidez de la onda es $v = 3.0$ cm/s. Además, al hacer se puede maximizar el valor de y haciendo $x - 3.0t = 0$, se encuentra que $y_{\text{máx}} = 2.0$ cm.

Figura 16.6 (Ejemplo 16.1) Gráficas de la función $y(x,t) = 2/[(x - 3.0t)^2 + 1]$ en (a) $t = 0$, (b) $t = 1.0$ s y (c) $t = 2.0$ s.



Escriba la expresión para la función de onda en $t = 0$:

$$y(x, 0) = \frac{2}{x^2 + 1}$$

Escriba la expresión para la función de onda en $t = 1.0$ s:

$$y(x, 1.0) = \frac{2}{(x - 3.0)^2 + 1}$$

Escriba la expresión para la función de onda en $t = 2.0$ s:

$$y(x, 2.0) = \frac{2}{(x - 6.0)^2 + 1}$$

16.1 continuación

Para cada una de estas expresiones, se pueden sustituir diversos valores de x y trazar la gráfica de la función de onda. Este procedimiento genera las funciones de onda mostradas en las tres partes de la figura 16.6.

Finalizar Estas instantáneas muestran que el pulso se mueve hacia la derecha sin cambiar su forma y que tiene una rapidez constante de 3.0 cm/s.

¿QUÉ PASARÍA SI? Si la función de onda fuese

$$y(x, t) = \frac{4}{(x + 3.0t)^2 + 1}$$

¿Cómo cambiaría la situación?

Respuesta Una nueva característica en esta expresión es el signo más en el denominador en lugar del signo menos. La nueva expresión representa un pulso con la misma forma que en la figura 16.6, pero que se mueve hacia la izquierda a medida que avanza el tiempo. Otra nueva característica en este caso es el numerador 4 en vez de 2. Por tanto, la nueva expresión representa un pulso con el doble de alto que en la figura 16.6.

16.2 Modelo de análisis: onda viajera

Para generar el pulso en la cuerda de la figura 16.1, sacudimos el extremo de la cuerda hacia arriba y hacia abajo *una vez*. En esta sección se introduce una función de onda importante cuya forma se muestra en la figura 16.7 y es producida al agitar el extremo de la cuerda arriba y abajo de *manera continua* en movimiento armónico simple. La onda representada por esta curva se llama **onda sinusoidal** porque la curva es la misma que en la función $\sin \theta$ contra θ . Ya que al agitar el extremo de la cuerda arriba y abajo produce una onda sinusoidal, vemos que hay una estrecha relación entre el movimiento armónico simple y las ondas sinusoidales.

La onda sinusoidal es el ejemplo más simple de una onda periódica continua y se puede usar para construir ondas más complejas (véase la sección 17.8). La curva café en la figura 16.7 representa una instantánea de una onda sinusoidal viajera en $t = 0$, y la curva azul representa una instantánea de la onda en algún tiempo posterior t . Imagine dos tipos de movimiento que pueden ocurrir. Primero, la forma de onda completa en la figura 16.7 se mueve hacia la derecha de modo que la curva café se mueve hacia la derecha y eventualmente llega a la posición de la curva azul. Este es el movimiento de la *onda*. Si se concentra en un elemento del medio, como el elemento en $x = 0$, observará que cada elemento se mueve hacia arriba y hacia abajo a lo largo del eje y y en movimiento armónico simple. Este es el movimiento de los *elementos del medio*. Es importante diferenciar entre el movimiento de la onda y el movimiento de los elementos del medio. Un elemento del medio es descrito por la partícula en el modelo de movimiento armónico simple. Un punto en la onda, como la cresta, se puede describir con la partícula bajo el modelo de velocidad constante.

En capítulos anteriores de este libro se elaboraron varios modelos de análisis basados en tres modelos de simplificación: la partícula, el sistema y el objeto rígido. Con la introducción a las ondas se puede diseñar un nuevo modelo de simplificación, el **modelo de onda**, que permitirá explorar más modelos de análisis para resolver problemas. En seguida se desarrollarán las características principales y representaciones matemáticas del análisis de modelo de una **onda viajera**. Este modelo se emplea cuando una onda se mueve a través del espacio sin interactuar con otras ondas o partículas.

La figura 16.8a (página 420) muestra una instantánea de una onda móvil a través de un medio. La figura 16.8b muestra una gráfica de la posición de un elemento del medio como función del tiempo. Recuerde de la sección 16.1 que el punto más alto en una onda se llama **cresta** de la onda y el punto más bajo se llama **valle**. La distancia de una cresta a la siguiente se llama **longitud de onda** λ (letra griega lambda). De manera más general, la longitud de onda es la distancia mínima entre dos puntos idénticos cualesquiera en ondas adyacentes, como se muestra en la figura 16.8a.

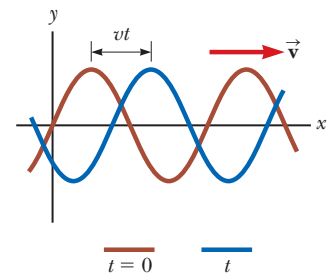


Figura 16.7 Una onda sinusoidal unidimensional que viaja hacia la derecha con una rapidez v . La curva café representa una instantánea de la onda en $t = 0$, y la curva azul representa una instantánea en algún tiempo posterior t .



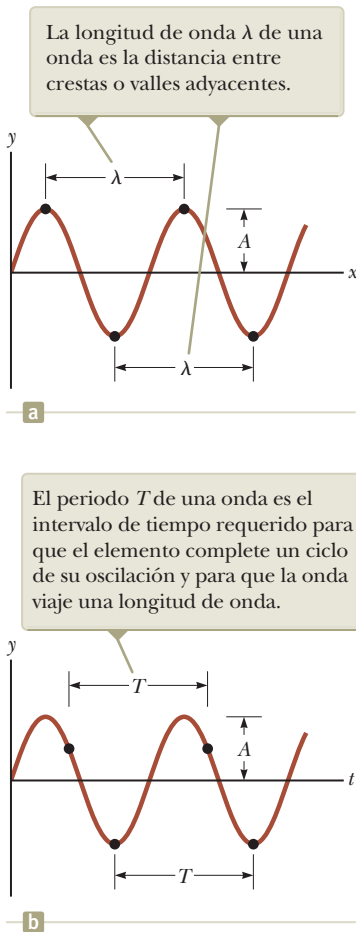


Figura 16.8 (a) Una instantánea de una onda sinusoidal. (b) Posición de un elemento del medio como función del tiempo.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 16.1

¿Cuál es la diferencia entre las figuras 16.8a y 16.8b? Observe la similitud visual entre las figuras 16.8a y 16.8b. Las formas son iguales, pero (a) es una gráfica de posición vertical comparada con posición horizontal, mientras que (b) es posición vertical en función del tiempo. La figura 16.8a es una representación pictórica de la onda para una serie de elementos del medio; es lo que vería en un instante de tiempo. La figura 16.8b es una representación gráfica de la posición de un elemento del medio como función del tiempo. Que ambas figuras tengan forma idéntica representa la ecuación 16.1: una onda es la misma función tanto de x como de t .

Si usted cuenta el número de segundos entre las llegadas de dos crestas adyacentes en un punto dado en el espacio, debe medir el **periodo** T de las ondas. En general, el periodo es el intervalo de tiempo requerido para que dos puntos idénticos de ondas adyacentes pasen por un punto, como se muestra en la figura 16.8b. El periodo de la onda es el mismo que el periodo de la oscilación armónica simple de un elemento del medio.

Es más frecuente que la misma información se dé mediante el inverso del periodo, que se llama **frecuencia** f . En general, la frecuencia de una onda periódica es el número de crestas (o valles, o cualquier otro punto sobre la onda) que pasa un punto determinado en un intervalo de tiempo unitario. La frecuencia de una onda sinusoidal se relaciona con el periodo mediante la expresión

$$f = \frac{1}{T} \quad (16.3)$$

La frecuencia de la onda es la misma que la frecuencia de la oscilación armónica simple de un elemento del medio. La unidad de frecuencia más común, como se aprendió en el capítulo 15, es s^{-1} , o **hertz** (Hz). La correspondiente unidad para T es segundos.

Una partícula ideal tiene un tamaño cero. Podemos construir objetos físicos con un tamaño distinto de cero como combinaciones de partículas. Por tanto, la partícula se puede considerar un bloque de construcción básico. Una onda ideal tiene una sola frecuencia y es infinitamente larga; es decir, la ola existe en todo el Universo. (Una onda de longitud finita debe necesariamente tener una mezcla de frecuencias.) Cuando se explora este concepto en la sección 17.8, encontraremos que las ondas ideales se pueden combinar para construir ondas complejas, del mismo modo que combinamos partículas: la onda es un componente básico.

La máxima posición de un elemento del medio relativo a su posición de equilibrio se llama **amplitud** A de la onda como se ve en la figura 16.8. Considere la onda sinusoidal de la figura 16.8a, que muestra la posición de la onda en $t = 0$. Ya que la onda es sinusoidal, se espera que la función de onda en este instante se exprese como $y(x,0) = A \sin ax$, donde A es la amplitud y a es una constante a determinar. En $x = 0$, se ve que $y(0,0) = A \sin a(0) = 0$, consistente con la figura 16.8a. El siguiente valor de x para el que y es cero es $x = \lambda/2$. Por tanto,

$$y\left(\frac{\lambda}{2}, 0\right) = A \sin\left(a \frac{\lambda}{2}\right) = 0$$

Para que esta ecuación sea cierta, debe tener $a\lambda/2 = \pi$ o $a = 2\pi/\lambda$. En consecuencia, la función que describe las posiciones de los elementos del medio a través del que viaja la onda sinusoidal se puede escribir

$$y(x, 0) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \quad (16.4)$$

donde la constante A representa la amplitud de la onda y la constante λ es la longitud de onda. Observe que la posición vertical de un elemento del medio es la misma siempre que x aumente por un múltiplo entero de λ . De acuerdo al análisis de la ecuación 16.1, si la onda se mueve hacia la derecha con una rapidez v , la función de onda en algún tiempo posterior t es

$$y(x, t) = A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt)\right] \quad (16.5)$$

Si la onda viajara hacia la izquierda, la cantidad $x - vt$ se sustituiría por $x + vt$ como aprendió cuando se desarrollaron las ecuaciones 16.1 y 16.2.

Por definición, la onda viaja a través de un desplazamiento Δx igual a una longitud de onda λ en un intervalo de tiempo Δt de un periodo T . Por tanto, la rapidez de onda, la longitud de onda y el periodo se relacionan mediante la expresión

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} \quad (16.6)$$



Al sustituir esta expresión para v en la ecuación 16.5 se obtiene

$$y(x, t) = A \operatorname{sen} \left[2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] \quad (16.7)$$

Esta forma de la función de onda muestra la naturaleza *periódica* de y . Advierta que con frecuencia se utilizará y en lugar de $y(x, t)$ como una notación abreviada. En cualquier tiempo dado t , y tiene el *mismo* valor en las posiciones x , $x + \lambda$, $x + 2\lambda$, y así sucesivamente. Además, en cualquier posición dada x , el valor de y es el mismo en los tiempos t , $t + T$, $t + 2T$, y así sucesivamente.

La función de onda se puede expresar en una forma conveniente al definir otras dos cantidades, el **número de onda angular** k (por lo general simplemente llamado **número de onda**) y la *frecuencia angular* ω :

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \quad (16.8) \quad \leftarrow \text{Número de onda angular}$$

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (16.9) \quad \leftarrow \text{Frecuencia angular}$$

Al usar estas definiciones, la ecuación 16.7 se puede escribir en la forma más compacta

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t) \quad (16.10) \quad \leftarrow \text{Función de onda para una onda sinusoidal}$$

Al utilizar las ecuaciones 16.3, 16.8 y 16.9, la rapidez de onda v originalmente dada en la ecuación 16.6 se expresa en las formas alternativas siguientes:

$$v = \frac{\omega}{k} \quad (16.11)$$

$$v = \lambda f \quad (16.12) \quad \leftarrow \text{Rapidez de una onda sinusoidal}$$

La función de onda dada en la ecuación 16.10 supone que la posición vertical y de un elemento del medio es cero en $x = 0$ y $t = 0$. Este no necesita ser el caso. Si no lo es, la función de onda por lo general se expresa en la forma

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi) \quad (16.13) \quad \leftarrow \text{Expresión general para una onda sinusoidal}$$

donde ϕ es la **constante de fase**, como aprendió en el estudio del movimiento periódico en el capítulo 15. Esta constante se determina a partir de las condiciones iniciales. Las ecuaciones principales en la representación matemática del análisis de modelo de onda viajera son las ecuaciones 16.3, 16.10 y 16.12.

- E XAMEN RÁPIDO 16.2** Una onda sinusoidal de frecuencia f viaja a lo largo de una cuerda estirada. La cuerda llega al reposo, y en la cuerda se establece una segunda onda viajera de frecuencia $2f$. (i) ¿Cuál es la rapidez de onda de la segunda onda? (a) el doble de la primera onda (b) la mitad de la primera onda (c) igual que la de la primera onda (d) imposible determinar (ii) A partir de las mismas opciones, describa la longitud de onda de la segunda onda. (iii) A partir de las mismas opciones, describa la amplitud de la segunda onda.

Ejemplo 16.2 Una onda sinusoidal viajera

Una onda sinusoidal viajera en la dirección x positiva tiene una amplitud de 15.0 cm, longitud de onda de 40.0 cm y frecuencia de 8.00 Hz. La posición vertical de un elemento del medio en $t = 0$ y $x = 0$ también es de 15.0 cm, como se muestra en la figura 16.9 (página 422).

(A) Encuentre el número de onda k , periodo T , frecuencia angular ω y rapidez v de la onda.

16.2 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 16.9 muestra la onda en $t = 0$. Imagine que esta onda se mueve hacia la derecha y mantiene su forma.

Categorizar De la descripción en el enunciado del problema, se observa que se está estudiando una onda mecánica que se mueve a través de un medio, así este problema se clasifica con el modelo de *onda viajera*.

Analizar

De la ecuación 16.8, evalúe el número de onda:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \text{ rad}}{40.0 \text{ cm}} = 15.7 \text{ rad/m}$$

De la ecuación 16.3, obtenga el periodo de la onda:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8.00 \text{ s}^{-1}} = 0.125 \text{ s}$$

Con la ecuación 16.9, determine la frecuencia angular de la onda:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(8.00 \text{ s}^{-1}) = 50.3 \text{ rad/s}$$

Mediante la ecuación 16.12, evalúe la rapidez de onda:

$$v = \lambda f = (40.0 \text{ cm})(8.00 \text{ s}^{-1}) = 3.20 \text{ m/s}$$

(B) Determine la constante de fase ϕ y escriba una expresión general para la función de onda.

SOLUCIÓN

Sustituya $A = 15.0 \text{ cm}$, $y = 15.0 \text{ cm}$, $x = 0$ y $t = 0$ en la ecuación 16.13:

$$15.0 = (15.0)\text{sen } \phi \rightarrow \text{sen } \phi = 1 \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

Escriba la función de onda:

$$y(x, t) = A \text{sen} \left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = A \cos(kx - \omega t)$$

Sustituya los valores para A , k y ω en unidades SI en esta expresión:

$$y(x, t) = 0.150 \cos(15.7x - 50.3t)$$

Finalizar Revise los resultados cuidadosamente para asegurarse que los entiende. ¿Cómo cambiaría la gráfica de la figura 16.9 si el ángulo de fase fuera cero? ¿Cómo cambiaría la gráfica si la amplitud fuera 30.0 cm? ¿Cómo cambiaría la gráfica si la longitud de onda fuera 10.0 cm?

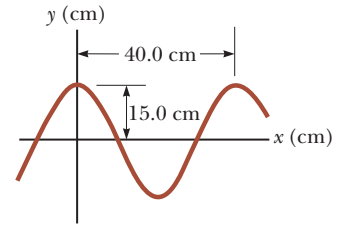


Figura 16.9 (Ejemplo 16.2) Una onda sinusoidal con longitud de onda $\lambda = 40.0 \text{ cm}$ y amplitud $A = 15.0 \text{ cm}$.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 16.2

Dos tipos de rapidez/velocidad

No confunda v , la rapidez de la onda mientras se propaga a lo largo de la cuerda, con v_y , la velocidad transversal de un punto en la cuerda. La rapidez v es constante para un medio uniforme, mientras que v_y varía sinusoidalmente.

Ondas sinusoidales en cuerdas

En la figura 16.1 se demostró cómo crear un pulso al sacudir una cuerda tensa hacia arriba y hacia abajo una vez. Para crear una serie de tales pulsos, una onda, sustituya la mano con una varilla oscilatoria que vibre en movimiento armónico simple. La figura 16.10 representa instantáneas de la onda creada de esta forma a intervalos de $T/4$. Ya que el extremo de la varilla oscila en movimiento armónico simple, cada elemento de la cuerda, como el que está en P , también oscila verticalmente con movimiento armónico simple. Por tanto, todo elemento de la cuerda se puede tratar como un oscilador armónico simple que vibra con una frecuencia igual a la frecuencia de oscilación de la varilla.² Advierta que, aún cuando cada elemento oscila en la dirección y , la onda viaja en la dirección $+x$ con una rapidez v .

Si se define $t = 0$ como el instante en que la configuración de la cuerda es como la mostrada en la figura 16.10a, la función de onda se puede escribir a partir de la ecuación 16.10 como

$$y = A \text{sen}(kx - \omega t)$$

donde simplificamos $y(x, t)$ escribiéndolo simplemente como y . Se puede usar esta expresión para describir el movimiento de cualquier elemento de la cuerda. Un elemento en

² En este arreglo, se supone que un elemento de cuerda siempre oscila en una línea vertical. La tensión en la cuerda varía si a un elemento se le permitiera moverse hacia los lados. Tal movimiento haría el análisis muy complejo.

el punto P (o cualquier otro elemento de la cuerda) se mueve sólo verticalmente, y así su coordenada x permanece constante. Por tanto, **la rapidez transversal** v_y (no confundir con la rapidez de onda (v)) y **la aceleración transversal** a_y de los elementos de la cuerda son

$$v_y = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{x = \text{constante}} = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t) \quad (16.14)$$

$$a_y = \left. \frac{dv_y}{dt} \right|_{x = \text{constante}} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\omega^2 A \text{sen}(kx - \omega t) \quad (16.15)$$

Estas expresiones incorporan derivadas parciales porque y depende tanto de x como de t . En la operación $\partial y/\partial t$, por ejemplo, se toma una derivada respecto a t mientras se mantiene x constante. Los valores máximos de la rapidez transversal y la aceleración transversal son simplemente los valores absolutos de los coeficientes de las funciones coseno y seno:

$$v_{y, \text{max}} = \omega A \quad (16.16)$$

$$a_{y, \text{max}} = \omega^2 A \quad (16.17)$$

La rapidez transversal y la aceleración transversal de los elementos de la cuerda no llegan simultáneamente a sus valores máximos. La rapidez transversal logra su valor máximo (ωA) cuando $y = 0$, mientras que la magnitud de la aceleración transversal llega a su valor máximo ($\omega^2 A$) cuando $y = \pm A$. Por último, las ecuaciones 16.16 y 16.17 son idénticas en forma matemática a las correspondientes ecuaciones para movimiento armónico simple, ecuaciones 15.17 y 15.18.

- E XAMEN RÁPIDO 16.3** La amplitud de una onda se duplica, sin que se hagan otros cambios a la onda. Como resultado de esta duplicación, ¿cuál de los siguientes enunciados es correcto? (a) La rapidez de la onda cambia, (b) La frecuencia de la onda cambia. (c) La máxima rapidez transversal de un elemento del medio cambia. (d) Los enunciados del inciso (a) al (c) son todos verdaderos. (e) Ninguno de los enunciados del inciso (a) al (c) es verdadero.

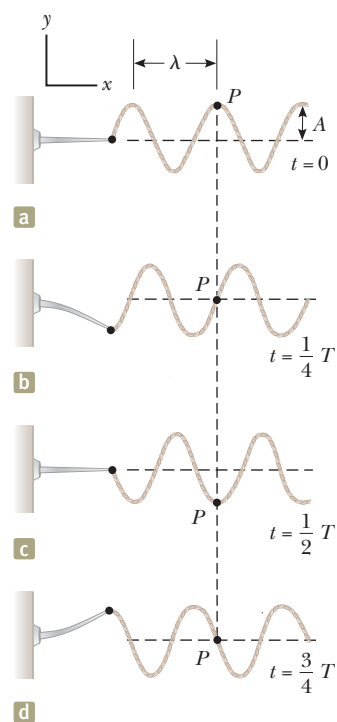


Figura 16.10 Un método para producir una onda sinusoidal sobre una cuerda. El extremo izquierdo de la cuerda se conecta a una varilla que se pone a oscilar. Cada elemento de la cuerda, como el que está en el punto P , oscila con movimiento armónico simple en la dirección vertical.

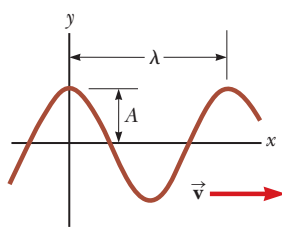
MODELO DE ANÁLISIS Onda viajera

Imagine una fuente en vibración que logra influenciar el medio con el que hace contacto. Tal fuente crea una perturbación que se propaga a través del medio. Si la fuente vibra en movimiento armónico simple con periodo T , ondas sinusoidales se propagan por el medio con una rapidez dada por

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad (16.6, 16.12)$$

donde λ es la **longitud de onda** de la onda y f es su **frecuencia**. Una onda sinusoidal puede expresarse como

$$y(x, t) = A \text{sen}(kx - \omega t) \quad (16.10)$$



donde A es la **amplitud** de la onda, k es su **número de onda** y ω es su **frecuencia angular**.

Ejemplos:

- una varilla vibratoria unida a una cuerda, genera en ésta una onda sinusoidal
- un pistón vibra hacia adelante y hacia atrás, emitiendo ondas sonoras en un tubo lleno de gas (sección 16.6)
- una guitarra vibra y emite ondas sonoras en el aire (capítulo 17)
- una carga eléctrica en vibración crea una onda electromagnética que se propaga en el espacio con la rapidez de la luz (capítulo 33)

16.3 La rapidez de ondas en cuerdas

Un aspecto del comportamiento de las ondas mecánicas *lineales* es que la rapidez de onda sólo depende de las propiedades del medio en el que viaja la onda. Las ondas con amplitud A pequeña respecto a la longitud de onda λ se pueden representar como ondas lineales. (vea la sección 16.5.) En esta sección, se determina la rapidez de una onda transversal que viaja en una cuerda tensa.

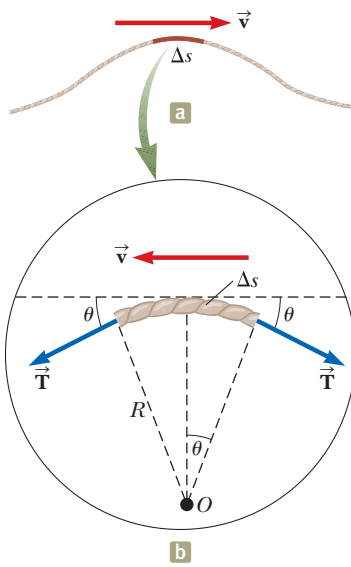


Figura 16.11 (a) En el marco de referencia de la Tierra, un pulso se mueve, con rapidez v , hacia la derecha sobre una cuerda. (b) En un marco de referencia moviéndose hacia la derecha junto con el pulso, el pequeño elemento de longitud Δs se mueve hacia la izquierda con rapidez v .

Se utilizará un análisis mecánico para deducir la expresión para la rapidez de un pulso que se desplaza en una cuerda sujeta a una tensión T . Considere un pulso que se mueve hacia la derecha con una rapidez uniforme v , medida respecto a un marco inercial estacionario (respecto a la Tierra), como se muestra en la figura 16.11a. Las leyes de Newton son válidas en cualquier marco de referencia inercial. Por tanto, este pulso se observará desde un diferente marco de referencia inercial, uno que se mueve junto con el pulso y con la misma rapidez que éste, de modo que el pulso está en reposo en este nuevo marco, como en la figura 16.11b. En este marco de referencia, el pulso permanece fijo y cada elemento de la cuerda se mueve hacia la izquierda a través de la forma del pulso.

Un pequeño elemento de la cuerda, de longitud Δs , forma un arco aproximado de un círculo de radio R , como se muestra en la vista ampliada de la figura 16.11b. En el marco de referencia móvil, el elemento de la cuerda se mueve hacia la izquierda con rapidez v . Conforme viaja a través del arco, el elemento se puede modelar como una partícula en movimiento circular uniforme. Este elemento tiene una aceleración centrípeta igual a v^2/R , que es proporcionada por las componentes de la fuerza \vec{T} cuya magnitud es la tensión en la cuerda. La fuerza \vec{T} actúa a cada lado del elemento, tangente al arco, como en la figura 16.11b. Las componentes horizontales de \vec{T} se cancelan entre sí, y cada componente vertical $T \sin \theta$ actúa hacia abajo. Así, la magnitud de la fuerza radial total sobre el elemento es $2T \sin \theta$.

Ya que el elemento es pequeño, θ es pequeño y puede usarse la aproximación de ángulo pequeño $\sin \theta \approx \theta$. Por tanto, la magnitud de la fuerza radial total es

$$F_r = 2T \sin \theta \approx 2T\theta$$

El elemento tiene una masa $m = \mu \Delta s$, donde μ es la masa por unidad de longitud de la cuerda. Como el elemento forma parte de un círculo y subtiende un ángulo de 2θ en el centro, $\Delta s = R(2\theta)$, y

$$m = \mu \Delta s = 2\mu R\theta$$

El elemento de la cuerda se modela como una partícula bajo una fuerza neta. Por tanto, la aplicación de la segunda ley de Newton a este elemento en la dirección radial da

$$F_r = \frac{mv^2}{R} \rightarrow 2T\theta = \frac{2\mu R\theta v^2}{R} \rightarrow T = \mu v^2$$

Al resolver para v se obtiene

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (16.18)$$

Observe que esta deducción se apoya en la suposición de que la altura del pulso es pequeña respecto a la longitud del pulso. Esta suposición permitió emplear la aproximación $\sin \theta \approx \theta$. Además, el modelo supone que la tensión T no es afectada por la presencia del pulso, así T es la misma en todos los puntos sobre el pulso. Finalmente, esta demostración no supone alguna forma particular para el pulso. Por tanto, se concluye que un pulso de *cualquier forma* viaja a lo largo de la cuerda con rapidez $v = \sqrt{T/\mu}$, sin que se altere la forma del pulso.

- E XAMEN RÁPIDO 16.4** Suponga que con la mano crea un pulso al mover una vez el extremo libre de una cuerda tensa hacia arriba y hacia abajo, comience en $t = 0$. La cuerda se une en su otro extremo a una pared distante. El punto alcanza la pared en el tiempo t . ¿Cuál de las siguientes acciones, tomada por sí misma, disminuye el intervalo de tiempo requerido para que el pulso llegue a la pared? Puede ser correcta más de una opción. (a) Mover la mano más rápidamente, pero sólo hacia arriba o hacia abajo una vez en la misma cantidad, (b) mover la mano más lentamente, pero sólo hacia arriba y hacia abajo por la misma cantidad, (c) mover la mano una mayor distancia hacia arriba y hacia abajo en la misma cantidad de tiempo, (d) mover la mano una menor distancia hacia arriba y hacia abajo en la misma cantidad de tiempo, (e) usar una cuerda más pesada de la misma longitud y bajo la misma tensión, (f) usar una cuerda más ligera de la misma longitud y bajo la misma tensión, (g) usar una cuerda de la misma densidad de masa lineal pero bajo tensión decreciente, (h) usar una cuerda de la misma densidad de masa lineal pero bajo tensión creciente.

Rapidez de una onda sobre una cuerda estirada ▶

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 16.3

Múltiples Ts No confunda la T en la ecuación 16.18 para la tensión con el símbolo T empleado en el capítulo para el periodo de una onda. El contexto de la ecuación debe ayudarlo a identificar a cuál cantidad se hace referencia. ¡Simplemente no hay suficientes letras en el alfabeto para asignar una letra única a cada variable!



Ejemplo 16.3 La rapidez de un pulso en una cuerda

Una cuerda uniforme tiene una masa de 0.300 kg y una longitud de 6.00 m. La cuerda pasa sobre una polea y soporta un objeto de 2.00 kg (figura 16.12). Encuentre la rapidez de un pulso que viaje a lo largo de esta cuerda.

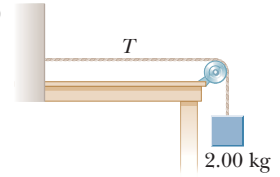
SOLUCIÓN

Conceptualizar En la figura 16.12, el bloque colgante establece una tensión en la cuerda horizontal. Esta tensión determina la rapidez con la que se mueve la onda sobre la cuerda.

Categorizar Para encontrar la tensión en la cuerda, modele el bloque colgante como una *partícula en equilibrio*. Después use la tensión para evaluar la rapidez de la onda sobre la cuerda, aplicando la ecuación 16.18.

Figura 16.12 (Ejemplo 16.3)

La tensión T en la cuerda se mantiene mediante el objeto suspendido. La rapidez de cualquier onda que viaje a lo largo de la cuerda está dada por $v = \sqrt{T/\mu}$.



Analizar Aplique al bloque el modelo de partícula en equilibrio:

$$\sum F_y = T - m_{\text{bloque}}g = 0$$

Resuelva para la tensión en la cuerda:

$$T = m_{\text{bloque}}g$$

Aplique la ecuación 16.18 para encontrar la rapidez de la onda, utilice $\mu = m_{\text{cuerda}}/\ell$ para la densidad de masa lineal de la cuerda:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{m_{\text{bloque}}g\ell}{m_{\text{cuerda}}}}$$

Evalúe la rapidez de la onda:

$$v = \sqrt{\frac{(2.00 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(6.00 \text{ m})}{0.300 \text{ kg}}} = 19.8 \text{ m/s}$$

Finalizar El cálculo de la tensión desprecia la pequeña masa de la cuerda. En sentido estricto, la cuerda nunca puede ser exactamente recta; por tanto, la tensión no es uniforme.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si el bloque se balancea de atrás para adelante respecto a la vertical como un péndulo? ¿Cómo afectaría a la rapidez de onda en la cuerda?

Respuesta El bloque en balanceo se clasifica como una *partícula bajo una fuerza neta*. La magnitud de una de las fuerzas sobre el bloque es la tensión en la cuerda, la cual determina la rapidez de la onda. A medida que el bloque se balancea, la tensión cambia, así que cambia la rapidez de la onda.

Cuando el bloque está en la parte baja del balanceo, la cuerda está vertical y la tensión es mayor que el peso del bloque porque la fuerza neta debe ser hacia arriba para proporcionar la aceleración centrípeta del bloque. Por tanto, la rapidez de la onda debe ser mayor que 19.8 m/s.

Cuando el bloque está en su punto más alto al final de un balanceo, está en reposo momentáneo, así que no existe aceleración centrípeta en dicho instante. El bloque es una partícula en equilibrio en la dirección radial. La tensión se equilibra mediante una componente de la fuerza gravitacional sobre el bloque. Entonces, la tensión es más pequeña que el peso y la rapidez de la onda es menor que 19.8 m/s. ¿Con qué frecuencia varía la rapidez de la onda? ¿Es la misma frecuencia que tiene el péndulo?

Ejemplo 16.4 Rescate del excursionista

Un excursionista de 80.0 kg queda atrapado en la saliente de una montaña después de una tormenta. Un helicóptero rescata al excursionista, se mantiene sobre él y le baja un cable. La masa del cable es 8.00 kg y su longitud es de 15.0 m. El cable se amarra a un cabestrillo de 70.0 kg de masa. El excursionista se ata al cabestrillo y después el helicóptero acelera hacia arriba. Aterrorizado por colgar del cable a mitad del aire, el excursionista intenta enviar señales al piloto lanzando pulsos transversales por el cable. Un pulso tarda 0.250 s en recorrer la longitud del cable. ¿Cuál es la aceleración del helicóptero? Suponga que en el cable la tensión es uniforme.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine el efecto de la aceleración del helicóptero sobre el cable. Mientras mayor sea la aceleración hacia arriba, mayor será la tensión en el cable. A su vez, a mayor tensión, mayor la rapidez de los pulsos en el cable.

Categorizar Este problema es una combinación de uno involucrando la rapidez de los pulsos en una cuerda y de uno en donde el excursionista y el cabestrillo son modelados como una *partícula bajo una fuerza neta*.

continúa



16.4 continuación

Analizar Resuelva la ecuación 16.18 para la tensión en el cable:

Modele al excursionista y el cabestrillo como una partícula bajo una fuerza neta, y note que la aceleración de esta partícula de masa m es la misma que la aceleración del helicóptero:

Resuelva para la aceleración y sustituya la tensión de la ecuación (1):

Sustituya valores numéricos:

$$(1) \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \rightarrow T = \mu v^2$$

$$\sum F = ma \rightarrow T - mg = ma$$

$$a = \frac{T}{m} - g = \frac{\mu v^2}{m} - g = \frac{m_{\text{cable}} v^2}{\ell_{\text{cable}} m} - g = \frac{m_{\text{cable}}}{\ell_{\text{cable}} m} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 - g$$

$$a = \frac{(8.00 \text{ kg})}{(15.0 \text{ m})(150.0 \text{ kg})} \left(\frac{15.0 \text{ m}}{0.250 \text{ s}}\right)^2 - 9.80 \text{ m/s}^2 = 3.00 \text{ m/s}^2$$

Finalizar Un cable real tiene rigidez además de tensión. La rigidez tiende a regresar un alambre a su forma recta original incluso cuando no esté bajo tensión. Por ejemplo, una cuerda de piano se endereza si se libera de una forma curva; las cuerdas de embalaje no.

La rigidez representa una fuerza restauradora además de la tensión y aumenta la rapidez de la onda. En consecuencia, para un cable real, la rapidez de 60.0 m/s que se determinó muy probablemente se asocia con una aceleración menor del helicóptero.

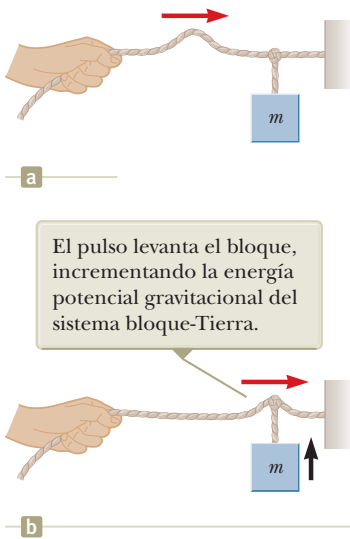


Figura 16.13 (a) Un pulso viaja hacia la derecha sobre una cuerda estirada, llevando energía con él. (b) La energía del pulso llega al bloque colgante.

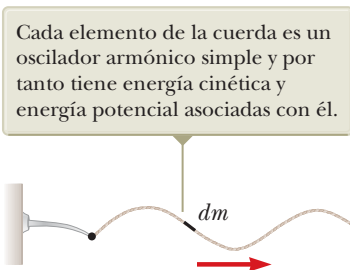


Figura 16.18 Una onda sinusoidal que viaja a lo largo del eje x sobre una cuerda estirada.

16.4 Rapidez de transferencia de energía mediante ondas sinusoidales sobre cuerdas

Las ondas transportan energía T_{MW} a través de un medio mientras se propagan. Por ejemplo, suponga que un objeto cuelga de una cuerda estirada y se envía un pulso por la cuerda, como en la figura 16.13a. Cuando el pulso llega al objeto suspendido, éste se desplaza momentáneamente hacia arriba, como en la figura 16.13b. En el proceso, se transfirió energía al objeto que aparece como un aumento en la energía potencial gravitacional del sistema objeto-Tierra. Esta sección examina la rapidez a la que se transporta la energía a lo largo de una cuerda. Se supondrá una onda sinusoidal unidimensional en el cálculo de la energía transferida.

Considere una onda sinusoidal que viaja sobre una cuerda (figura 16.18). La fuente de la energía es algún agente externo en el extremo izquierdo de la cuerda. Se puede considerar que la cuerda es un sistema no aislado. A medida que el agente externo realiza trabajo sobre el extremo de la cuerda, moviéndola hacia arriba y hacia abajo, entra energía al sistema de la cuerda y se propaga a lo largo de su longitud. Concentre su atención en un elemento infinitesimal de la cuerda de longitud dx y masa dm . Por tanto, cada elemento de la cuerda se puede modelar como una partícula en movimiento armónico simple, con la oscilación en la dirección y . Todos los elementos tienen la misma frecuencia angular ω y la misma amplitud A . La energía cinética K asociada con una partícula móvil es $K = \frac{1}{2}mv^2$. Si esta ecuación se aplica al elemento infinitesimal, la energía cinética dK asociada con el movimiento de subir y bajar de este elemento es

$$dK = \frac{1}{2}(dm)v_y^2$$

donde v_y es la rapidez transversal del elemento. Si μ es la masa por unidad de longitud de la cuerda, la masa dm del elemento de longitud dx es igual a μdx . Por tanto, la energía cinética de un elemento de la cuerda se expresa como

$$dK = \frac{1}{2}(\mu dx)v_y^2 \tag{16.19}$$

Al sustituir, con la ecuación 16.14, para la rapidez transversal general de un elemento del medio se obtiene

$$dK = \frac{1}{2}\mu[-\omega A \cos(kx - \omega t)]^2 dx = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t) dx$$

Si se toma una instantánea de la onda al tiempo $t = 0$, la energía cinética de un elemento dado es

$$dK = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2 kx dx$$

Al integrar esta ecuación sobre todos los elementos de cuerda en una longitud de onda de la onda resulta la energía cinética total K_λ en una longitud de onda:

$$\begin{aligned} K_\lambda &= \int dK = \int_0^\lambda \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cos^2 kx dx = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \int_0^\lambda \cos^2 kx dx \\ &= \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4k} \sin 2kx \right]_0^\lambda = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \left[\frac{1}{2}\lambda \right] = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda \end{aligned}$$

Además de la energía cinética, hay energía potencial asociada con cada elemento de la cuerda debido a su desplazamiento de la posición de equilibrio y las fuerzas restauradoras de elementos vecinos. Un análisis similar al anterior para la energía potencial total U_A en una longitud de onda da exactamente el mismo resultado:

$$U_\lambda = \frac{1}{4}\mu\omega^2 A^2 \lambda$$

La energía total en una longitud de onda de la onda es la suma de las energías potencial y cinética:

$$E_\lambda = U_\lambda + K_\lambda = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda \quad (16.20)$$

A medida que la onda se mueve a lo largo de la cuerda, esta cantidad de energía pasa por un punto determinado en la cuerda durante un intervalo de tiempo de un periodo de la oscilación. Por tanto, la potencia P , o rapidez de transferencia de energía T_{MW} asociada con la onda mecánica, es

$$P = \frac{T_{MW}}{\Delta t} = \frac{E_\lambda}{T} = \frac{\frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \lambda}{T} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \left(\frac{\lambda}{T} \right)$$

$$P = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 v \quad (16.21)$$

◀ Potencia de una onda

La ecuación 16.21 muestra que la rapidez de transferencia de energía por una onda sinusoidal en una cuerda es proporcional a (a) el cuadrado de la frecuencia, (b) el cuadrado de la amplitud y (c) la rapidez de la onda.

- E XAMEN RÁPIDO 16.5** ¿Cuál de los siguientes, tomado por sí mismo, sería más efectivo para aumentar la rapidez a la que se transfiere la energía mediante una onda que viaja a lo largo de una cuerda? (a) reducir a la mitad la densidad de masa lineal de la cuerda, (b) duplicar la longitud de onda de la onda, (c) duplicar la tensión en la cuerda, (d) duplicar la amplitud de la onda.

Ejemplo 16.5 Potencia suministrada a una cuerda en vibración

Una onda tensa para la que $\mu = 5.00 \times 10^{-2}$ kg/m está bajo una tensión de 80.0 N. ¿Cuánta potencia se debe suministrar a la cuerda para generar ondas sinusoidales a una frecuencia de 60.0 Hz y una amplitud de 6.00 cm?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Considere una vez más la figura 16.14 y observe que la varilla vibratoria suministra energía a la cuerda con cierta rapidez. Entonces esta energía se propaga hacia la derecha a lo largo de la cuerda.

Categorizar Se evalúan cantidades de las ecuaciones desarrolladas en el capítulo, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.



continúa

16.5 continuación

Use la ecuación 16.21 para evaluar la potencia:

$$P = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v$$

Aplique las ecuaciones 16.9 y 16.18 para sustituir ω y v :

$$P = \frac{1}{2} \mu (2\pi f)^2 A^2 \left(\sqrt{\frac{T}{\mu}} \right) = 2\pi^2 f^2 A^2 \sqrt{\mu T}$$

Sustituya valores numéricos:

$$P = 2\pi^2 (60.0 \text{ Hz})^2 (0.0600 \text{ m})^2 \sqrt{(0.0500 \text{ kg/m})(80.0 \text{ N})} = 512 \text{ W}$$

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si la cuerda debe transferir energía a una rapidez de 1 000 W? ¿Cuál debe ser la amplitud requerida si todos los otros parámetros permanecen iguales?

Respuesta Establezca una razón entre las potencias nueva y la anterior, que sólo refleje un cambio en la amplitud:

$$\frac{P_{\text{nueva}}}{P_{\text{anterior}}} = \frac{\frac{1}{2} \mu \omega^2 A_{\text{nueva}}^2 v}{\frac{1}{2} \mu \omega^2 A_{\text{anterior}}^2 v} = \frac{A_{\text{nueva}}^2}{A_{\text{anterior}}^2}$$

Al resolver para la nueva amplitud se obtiene:

$$A_{\text{nueva}} = A_{\text{anterior}} \sqrt{\frac{P_{\text{nueva}}}{P_{\text{anterior}}}} = (6.00 \text{ cm}) \sqrt{\frac{1000 \text{ W}}{512 \text{ W}}} = 8.39 \text{ cm}$$

16.5 La ecuación de onda lineal

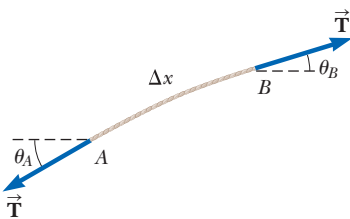


Figura 16.15 Un elemento de cuerda bajo tensión T .

En la sección 16.1 se introdujo el concepto de función de onda para representar ondas que viajan sobre una cuerda. Todas las funciones de onda $y(x,t)$ representan soluciones de una ecuación llamada *ecuación de onda lineal*. Esta ecuación da una descripción completa del movimiento ondulatorio, y a partir de ella se puede deducir una expresión para la rapidez de onda. Además, la ecuación de onda lineal es básica para muchas formas de movimiento ondulatorio. En esta sección se deduce esta ecuación cuando se aplica a ondas sobre cuerdas.

Suponga que una onda viajera se propaga a lo largo de una cuerda que está bajo una tensión T . Considere un pequeño elemento de cuerda de longitud Δx (figura 16.15). Los extremos del elemento forman pequeños ángulos θ_A y θ_B con el eje x . Las fuerzas actúan sobre la cuerda en sus extremos donde ella conecta a los elementos vecinos. Por tanto, el modelo se modela como una partícula bajo una fuerza neta. La fuerza neta actuando sobre el elemento en la dirección vertical es

$$\sum F_y = T \sin \theta_B - T \sin \theta_A = T(\sin \theta_B - \sin \theta_A)$$

Ya que los ángulos son pequeños, se puede emplear la aproximación $\sin \theta \approx \tan \theta$ para expresar la fuerza neta como

$$\sum F_y \approx T(\tan \theta_B - \tan \theta_A) \quad (16.22)$$

Imagine experimentar un desplazamiento infinitesimal hacia afuera del extremo derecho del elemento de cuerda en la figura 16.19 a lo largo de la línea azul que representa la fuerza \vec{T} . Este desplazamiento tiene componentes x y y infinitesimales y puede ser representado por el vector $\hat{i} + dy\hat{j}$. La tangente del ángulo respecto al eje x para este desplazamiento es dy/dx . Ya que esta tangente se evalúa en un instante particular de tiempo, se le debe expresar en forma parcial como $\partial y/\partial x$. Al sustituir para las tangentes en la ecuación 16.22 se obtiene

$$\sum F_y \approx T \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_A \right] \quad (16.23)$$

Ahora, del modelo de partícula bajo una fuerza neta, se aplica la segunda ley de Newton al elemento, con la masa del elemento dada por $m = \mu \Delta x$:

$$\sum F_y = m a_y = \mu \Delta x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \quad (16.24)$$



Al combinar la ecuación 16.23 con la ecuación 16.24 resulta

$$\begin{aligned}\mu \Delta x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) &= T \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_B - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_A \right] \\ \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{(\partial y / \partial x)_B - (\partial y / \partial x)_A}{\Delta x}\end{aligned}\quad (16.25)$$

El lado derecho de la ecuación 16.25 se expresa en una forma diferente si nota que la derivada parcial de cualquier función se define como

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Al asociar $f(x + \Delta x)$ con $(\partial y / \partial x)_B$ y $f(x)$ con $(\partial y / \partial x)_A$, se ve que, en el límite $\Delta x \rightarrow 0$, la ecuación 16.25 se convierte en

$$\frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (16.26)$$

◀ Ecuación de onda lineal para una cuerda

Esta expresión es la ecuación de onda lineal cuando se aplica a ondas sobre una cuerda.

La ecuación de onda lineal (ecuación 16.26) con frecuencia se escribe en la forma

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (16.27)$$

◀ Ecuación de onda lineal general

En general la ecuación 16.27 se aplica a diferentes tipos de ondas viajeras. Para ondas sobre cuerdas y representa la posición vertical de los elementos de la cuerda. Para ondas sonoras propagándose en un gas, y corresponde a la posición longitudinal de los elementos de gas desde el equilibrio o variaciones en presión o en densidad del gas. En el caso de ondas electromagnéticas, y corresponde a las componentes de campo eléctrico o magnético.

Se demostró que la función de onda sinusoidal (ecuación 16.10) es una solución de la ecuación de onda lineal (ecuación 16.27). Aunque no se probó aquí, la ecuación de onda lineal es satisfecha por *cualquier* función de onda de la forma $y = f(x \pm vt)$.

16.6 Ondas sonoras

Ahora centraremos nuestra atención en las **ondas sonoras**, que viajan en cualquier material, pero es más común experimentarlas como ondas mecánicas propagándose a través del aire para generar la percepción humana de la audición. A medida que las ondas sonoras viajan a través del aire, los elementos de éste son perturbados de sus posiciones de equilibrio. Estos movimientos son acompañados por cambios en densidad y presión del aire a lo largo de la dirección de propagación de la onda. Si la fuente de las ondas sonoras vibra sinusoidalmente, las variaciones de densidad y presión también son sinusoidales. La descripción matemática de las ondas sonoras sinusoidales es muy similar a las ondas sinusoidales en cuerdas.

Las ondas sonoras se dividen en tres categorías que cubren diferentes intervalos de frecuencia. (1) Las *ondas audibles* se encuentran dentro del rango de sensibilidad del oído humano. Es posible generarlas en una variedad de formas, mediante instrumentos musicales, voces humanas o bocinas. (2) Las *ondas infrasónicas* tienen frecuencias por abajo del intervalo audible. Los elefantes utilizan ondas infrasónicas para comunicarse entre ellos, aun cuando estén separados por varios kilómetros. (3) Las *ondas ultrasónicas* tienen frecuencias por arriba del alcance audible. Es posible que usted haya empleado silbatos “silenciosos” para llamar a su perro. Los perros escuchan con facilidad el sonido ultrasónico que emite este silbato, pero los humanos no pueden detectarlo. Las ondas ultrasónicas también se aplican en la formación de imágenes médicas.

El capítulo se inició el estudio de ondas al imaginar la creación de un pulso individual viajando por una cuerda (figura 16.1) o por un resorte (figura 16.3). Se hará algo similar para el sonido. Se describe gráficamente el movimiento de un pulso sonoro longitudi-



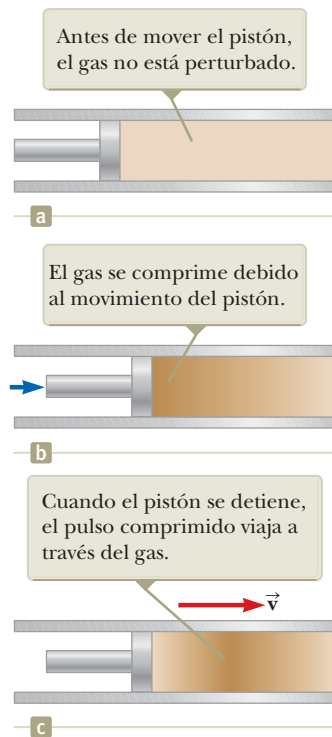


Figura 16.16 Movimiento de un pulso longitudinal a través de un gas compresible. La compresión (región más oscura) se debe al pistón móvil.

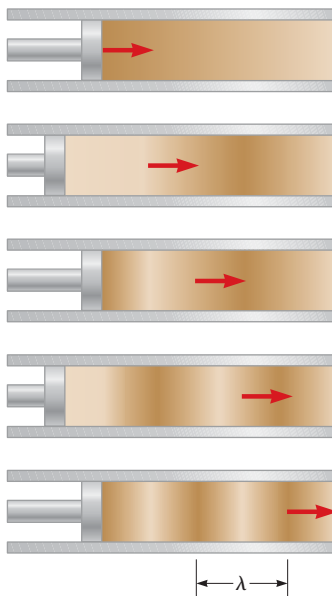


Figura 16.17 Una onda longitudinal se propaga en un tubo que contiene gas. La fuente de la onda es un pistón oscilatorio en el extremo izquierdo.

nal unidimensional a través de un tubo largo que contiene un gas compresible como se muestra en la figura 16.16. Un pistón en el extremo izquierdo se mueve rápidamente hacia la derecha para comprimir el gas y crear el pulso. Antes de mover el pistón, el gas no está perturbado y tiene densidad uniforme, como se representa mediante la región uniformemente coloreada en la figura 16.16a. Cuando el pistón se empuja hacia la derecha (figura 16.16b), el gas justo enfrente de él se comprime (indicado por la región más sombreada); la presión y la densidad en esta región ahora son mayores que sus valores antes de mover el pistón. Cuando el pistón se detiene (figura 16.16c), la región comprimida del gas continúa moviéndose hacia la derecha, lo que corresponde a un pulso longitudinal que viaja a través del tubo con rapidez v .

En el tubo con gas de la figura 16.16 se puede producir una onda sonora *periódica* unidimensional, haciendo que el pistón se mueva en movimiento armónico simple. Los resultados se muestran en la figura 16.17. En esta figura, las partes más oscuras de las áreas coloreadas representan regiones en donde el gas está comprimido y la densidad y presión están por arriba de sus valores de equilibrio. Una región comprimida se forma siempre que el pistón se empuje en el tubo. Esta región comprimida, llamada **compresión**, se mueve a través del tubo, y comprime continuamente la región justo enfrente de ella misma. Cuando el pistón se jala hacia atrás, el gas frente a él se expande y la presión y la densidad en esta región disminuyen por debajo de sus valores de equilibrio (representada por las partes más claras de las áreas coloreadas en la figura 16.17). Estas regiones de baja presión, llamadas **enrarecimientos**, también se propagan a lo largo del tubo, siguiendo las compresiones. Ambas regiones se mueven a la rapidez del sonido en el medio.

A medida que el pistón realiza oscilaciones sinusoidales, se establecen continuamente regiones de compresión y enrarecimiento. La distancia entre dos compresiones sucesivas (o dos enrarecimientos sucesivos) coincide con la longitud de onda λ de la onda sonora. Como la onda sonora es longitudinal, conforme las compresiones y enrarecimientos viajan por el tubo, cualquier elemento pequeño del medio ejecuta un movimiento armónico simple paralelo a la dirección de la onda. Si $s(x, t)$ es la posición de un pequeño elemento respecto a su posición de equilibrio,³ se puede expresar esta función de posición armónica como

$$s(x, t) = s_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t) \quad (16.28)$$

donde $s_{\text{máx}}$ es la posición máxima del elemento respecto al equilibrio. Es frecuente que este parámetro se llame **amplitud de desplazamiento** de la onda. El parámetro k es el número de onda, y ω es la frecuencia angular de la onda. Observe que el desplazamiento del elemento es a lo largo de x , en la dirección de propagación de la onda sonora.

La variación en la presión del gas ΔP , medida respecto al valor de equilibrio, también es periódica con el mismo número de onda e idéntica frecuencia angular que el desplazamiento en la ecuación 16.28. Por tanto, se puede escribir

$$\Delta P = \Delta P_{\text{máx}} \sin(kx - \omega t) \quad (16.29)$$

donde **la amplitud de presión** $\Delta P_{\text{máx}}$ es el cambio máximo en presión respecto al valor de equilibrio.

Observe que el desplazamiento y la presión se han expresado mediante funciones coseno y seno, respectivamente. En el procedimiento que sigue se justificará esta elección y se relacionará la amplitud de presión $\Delta P_{\text{máx}}$ con la amplitud de desplazamiento $s_{\text{máx}}$. Otra vez, considere el arreglo pistón-tubo de la figura 16.16. En la figura 16.18a, se pone atención a un pequeño elemento cilíndrico de gas no perturbado de longitud Δx y área A . El volumen de este elemento es $V_i = A\Delta x$.

La figura 16.8b muestra este elemento de gas después de que la onda sonora se ha movido a una nueva posición. Las dos caras planas del cilindro se mueven distancias diferentes s_1 y s_2 . El cambio en volumen ΔV del elemento en la nueva posición es igual a $A\Delta s$, donde $\Delta s = s_1 - s_2$.

³ Aquí se utiliza $s(x, t)$ en lugar de $y(x, t)$ porque el desplazamiento de los elementos del medio no es perpendicular a la dirección x .

De la definición de módulo volumétrico (vea la ecuación 12.8), la variación de la presión en el elemento de gas se puede expresar en función de su cambio en volumen:

$$\Delta P = -B \frac{\Delta V}{V_i}$$

Se sustituye para el volumen inicial y el cambio en volumen del elemento:

$$\Delta P = -B \frac{A \Delta s}{A \Delta x}$$

Ahora la longitud Δx del cilindro tiende a cero de manera que la razón $\Delta s/\Delta x$ se aproxima a una derivada parcial:

$$\Delta P = -B \frac{\partial s}{\partial x} \tag{16.30}$$

Se sustituye la función de posición dada por la ecuación 16.28:

$$\Delta P = -B \frac{\partial}{\partial x} [s_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t)] = Bs_{\text{máx}} k \sin(kx - \omega t)$$

De este resultado, se observa que un desplazamiento descrito por una función coseno conduce a la presión descrita por una función seno. También se encuentra que las amplitudes de desplazamiento y de presión están relacionadas por

$$\Delta P_{\text{máx}} = Bs_{\text{máx}} k \tag{16.31}$$

Esta relación depende del módulo volumétrico del gas, el cual no es fácilmente disponible como lo es la densidad del gas. En la sección 16.7 se determinará la rapidez del sonido en un gas, entonces será posible aportar una expresión que relaciona $\Delta P_{\text{máx}}$ con $s_{\text{máx}}$ en términos de la densidad del gas.

Esta discusión muestra que una onda sonora puede ser descrita en términos de la presión o del desplazamiento. La comparación de las ecuaciones 16.28 y 16.29 indica que la onda de presión está 90° fuera de fase respecto a la onda de desplazamiento. En la figura 16.19 se muestran gráficas de estas funciones. La variación de presión tiene un máximo cuando es cero el desplazamiento respecto al equilibrio, y el desplazamiento relativo al equilibrio es máximo cuando es nula la variación de presión.

E XAMEN RÁPIDO 16.6 Si usted sopla a través de la parte superior de una botella de refresco vacía, un pulso de sonido viaja a través del aire en la botella. En el momento cuando el pulso llega al fondo de la botella, ¿cuál es la descripción correcta del desplazamiento de elementos de aire desde sus posiciones de equilibrio y la presión del aire en este punto? (a) El desplazamiento y la presión están en un máximo. (b) El desplazamiento y la presión están en un mínimo. (c) El desplazamiento es cero y la presión es un máximo. (d) El desplazamiento es cero y la presión es un mínimo.

16.7 Rapidez de ondas sonoras

Ahora el estudio iniciado en la sección 16.6 se amplía para evaluar la rapidez del sonido en un gas. En la figura 16.20a (página 432), considere el elemento cilíndrico de gas entre el pistón y la línea segmentada. Este elemento de gas está en equilibrio bajo la influencia de fuerzas de igual magnitud, del pistón a la izquierda y del resto del gas a la derecha. La magnitud de estas fuerzas es PA , donde P es la presión en el gas y A es el área de sección transversal del tubo. Para la longitud del elemento de gas no perturbado se selecciona $v\Delta t$, donde v es la rapidez del sonido en el gas y Δt es el intervalo de tiempo entre las configuraciones de las figuras 16.20a y 16.20b.

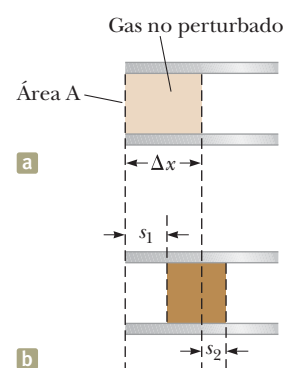


Figura 16.18 (a) Un elemento de gas no perturbado de longitud Δx en un tubo de área de sección transversal A . (b) Cuando una onda sonora se propaga a través del gas, el elemento es transferido a una nueva posición y tiene diferente longitud. Los parámetros s_1 y s_2 describen los desplazamientos de los extremos del elemento respecto a sus posiciones de equilibrio.

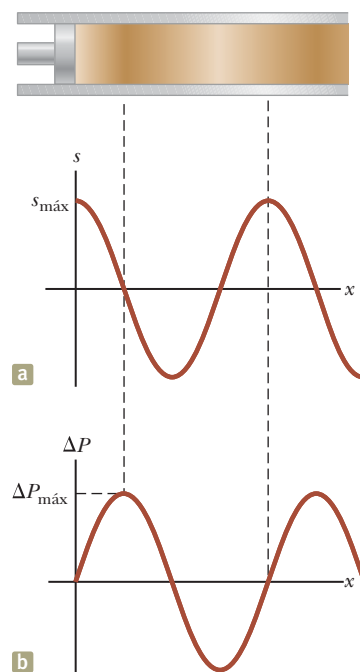


Figura 16.19 (a) Amplitud de desplazamiento y (b) amplitud de presión vs posición para una onda longitudinal sinusoidal en un gas.

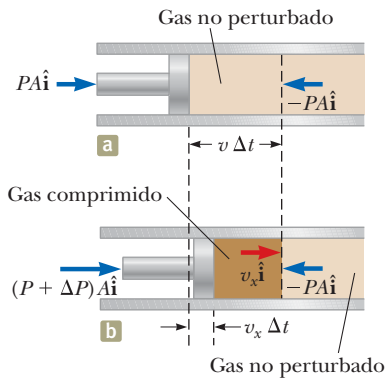


Figura 16.20 (a) Un elemento de gas no perturbado de longitud $v\Delta t$ en un tubo de área de sección transversal A . El elemento está en equilibrio entre fuerzas en los extremos. (b) Cuando el pistón se mueve hacia adentro con velocidad constante v_x debido a una fuerza incrementada a la izquierda, el elemento también se mueve con la misma velocidad.

La figura 16.20b muestra la situación después de un intervalo de tiempo Δt durante el cual el pistón se mueve hacia la derecha con rapidez constante v_x , esto debido a una fuerza desde la izquierda sobre el pistón que en magnitud se ha incrementado a $(P + \Delta P)A$. Debido a que la velocidad del sonido es v , la onda de sonido simplemente alcanzará el extremo derecho del elemento cilíndrico de gas al final del intervalo de tiempo Δt . El gas a la derecha del elemento no se altera porque la onda de sonido aún no lo ha alcanzado. En este momento, cada parte de gas en el elemento se mueve con la velocidad v_x . En general, eso no será cierto para un elemento macroscópico de gas, pero sí será correcto si la longitud del elemento se reduce a un valor infinitesimal.

El elemento de gas se modela como un sistema no aislado en términos de cantidad de movimiento. La fuerza del pistón ha proporcionado un impulso al elemento, que a su vez exhibe un cambio en cantidad de movimiento. Por tanto, se evalúan ambos lados del teorema impulso-cantidad de movimiento, ecuación 9.13:

$$\Delta \vec{p} = \vec{I} \quad (16.32)$$

A la derecha, el impulso es proporcionado por la fuerza constante debida al incremento de presión sobre el pistón:

$$\vec{I} = \sum \vec{F} \Delta t = (A \Delta P \Delta t) \hat{i}$$

El cambio de presión ΔP se puede relacionar con el cambio de volumen y a su vez con las magnitudes de velocidad v y v_x vía el módulo volumétrico:

$$\Delta P = -B \frac{\Delta V}{V_i} = -B \frac{(-v_x A \Delta t)}{v A \Delta t} = B \frac{v_x}{v}$$

Así, el impulso queda

$$\vec{I} = \left(AB \frac{v_x}{v} \Delta t \right) \hat{i} \quad (16.33)$$

En el lado izquierdo del teorema impulso-cantidad de movimiento, ecuación 16.32, el cambio en cantidad de movimiento del elemento de gas de masa m es como sigue:

$$\Delta \vec{p} = m \Delta \vec{v} = (\rho V_i)(v_x \hat{i} - 0) = (\rho v v_x A \Delta t) \hat{i} \quad (16.34)$$

Al sustituir las ecuaciones 16.33 y 16.34 en la ecuación 16.32, se obtiene

$$\rho v v_x A \Delta t = AB \frac{v_x}{v} \Delta t$$

que se reduce a una expresión para la rapidez del sonido en un gas:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (16.35)$$

Es interesante comparar esta expresión con la ecuación 16.18 para la rapidez de las ondas transversales en una cuerda, $v = \sqrt{T/\mu}$. En ambos casos, la rapidez de la onda depende de una propiedad elástica del medio (módulo volumétrico B o tensión en la cuerda T) y de una propiedad inercial del medio (densidad volumétrica ρ o densidad lineal μ). En efecto, la rapidez de todas las ondas mecánicas sigue una expresión de la forma general

$$v = \sqrt{\frac{\text{propiedad elástica}}{\text{propiedad inercial}}}$$

Para ondas sonoras longitudinales en una barra sólida de material, por ejemplo, la rapidez del sonido depende del módulo de Young Y y de la densidad ρ . La tabla 16.1 proporciona la rapidez del sonido en varios materiales diferentes.



TABLA 17.1 Rapidez del sonido en diversos medios

Medio	v (m/s)	Medio	v (m/s)	Medio	v (m/s)
Gases		Líquidos a 25 °C		Sólidos^a	
Hidrógeno(0 °C)	1 286	Glicerol	1 904	Vidrio Pyrex	5 640
Helio (0 °C)	972	Agua de mar	1 533	Hierro	5 950
Aire(20 °C)	343	Agua	1 493	Aluminio	6 420
Aire (0 °C)	331	Mercurio	1 450	Latón	4 700
Oxígeno(0 °C)	317	Queroseno	1 324	Cobre	5 010
		Alcohol metílico	1 143	Oro	3 240
		Tetracloruro de carbono	926	Lucita	2 680
				Plomo	1 960
				Caucho	1 600

^a Los valores dados son para la propagación de ondas longitudinales en medios volumétricos. Las magnitudes de velocidad para ondas longitudinales en barras delgadas son menores, y las magnitudes de velocidad de ondas transversales en volumen son aún más pequeñas.

La rapidez del sonido también depende de la temperatura del medio. Para el sonido propagándose en el aire, la relación entre rapidez de la onda y la temperatura del aire es

$$v = 331 \sqrt{1 + \frac{T_C}{273}} \quad (16.36)$$

donde v está en metros/segundo, 331 m/s es la rapidez del sonido en aire a 0 °C y T_C es la temperatura del aire en grados Celsius. Con esta ecuación, se encuentra que, a 20 °C, la rapidez del sonido en aire es aproximadamente 343 m/s.

Debido a que la velocidad del sonido es constante en un medio uniforme, podemos relacionar la velocidad con la distancia y el tiempo al modelar un pulso de sonido como una partícula a velocidad constante. Por ejemplo, este modelo proporciona una forma conveniente de estimar la distancia a una tormenta. Primero cuente el número de segundos entre ver el destello del relámpago y escuchar el trueno. Dividir este intervalo de tiempo entre 3 da la distancia aproximada al relámpago en kilómetros, porque 343 m/s es aproximadamente $\frac{1}{3}$ km/s. Dividir el intervalo de tiempo en segundos entre 5 da la distancia aproximada al relámpago en millas, porque la rapidez del sonido es aproximadamente $\frac{1}{5}$ mi/s.

Del mismo modo, la partícula bajo el modelo de velocidad constante permite el cálculo descrito en la semblanza de apertura. Las coordenadas GPS le permiten encontrar la distancia entre usted y el acantilado. El sonido de la palmada resuena desde el acantilado y vuelve hacia usted. Entonces, la distancia recorrida por el sonido es el doble de la distancia al acantilado. Al dividir esa distancia por el intervalo de tiempo medido por el teléfono inteligente se obtiene la velocidad del sonido.

Al tener una expresión (ecuación 16.35) para la rapidez del sonido, entonces se puede dar la conexión entre la amplitud de presión y la amplitud de desplazamiento para una onda sonora (ecuación 16.31):

$$\Delta P_{\text{máx}} = B s_{\text{máx}} k = (\rho v^2) s_{\text{máx}} \left(\frac{\omega}{v} \right) = \rho v \omega s_{\text{máx}} \quad (16.37)$$

Esta expresión es un poco más útil que la ecuación 16.31 porque la densidad de un gas es más disponible que el módulo volumétrico.

16.8 Intensidad de ondas sonoras

En la sección 16.4 se demostró que una onda que viaja sobre una cuerda tensa transporta energía, consistente con la noción de transferencia de energía T_{MW} mediante ondas mecánicas en la ecuación 8.2. Es natural esperar que las ondas sonoras también representen una transferencia de energía. Considere el elemento de gas bajo la acción del pistón en la figura 16.20. Imagine que el pistón se mueve hacia adelante y hacia atrás en movimiento



armónico simple con frecuencia angular ω . También imagine que la longitud del elemento se hace muy pequeña de manera que el elemento completo se mueve con la misma velocidad que el pistón. Entonces el elemento se puede modelar como una partícula sobre la cual el pistón realiza trabajo. La razón con la que el pistón efectúa trabajo sobre el elemento en cualquier instante de tiempo está dada por la ecuación 8.18:

$$\text{Potencia} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_x$$

donde se ha utilizado Potencia en lugar de P para así no confundir la potencia P con la presión P ! La fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ sobre el elemento de gas está relacionado a la presión, y a la velocidad $\vec{\mathbf{v}}_x$ del elemento es la derivada de la función de desplazamiento, así se encuentra que

$$\begin{aligned} \text{Potencia} &= [\Delta P(x, t)A] \hat{\mathbf{i}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} [s(x, t) \hat{\mathbf{i}}] \\ &= [\rho v \omega A s_{\text{máx}} \text{sen}(kx - \omega t)] \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [s_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t)] \right\} \\ &= [\rho v \omega A s_{\text{máx}} \text{sen}(kx - \omega t)] [\omega s_{\text{máx}} \text{sen}(kx - \omega t)] \\ &= \rho v \omega^2 A s_{\text{máx}}^2 \text{sen}^2(kx - \omega t) \end{aligned}$$

Ahora se determina la potencia promedio en el tiempo durante un periodo de la oscilación. para cualquier valor dado de x se puede seleccionar $x = 0$ para calcular el valor promedio de $\text{sen}^2(kx - \omega t)$ en un periodo T :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \text{sen}^2(0 - \omega t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \text{sen}^2 \omega t dt = \frac{1}{T} \left(\frac{t}{2} + \frac{\text{sen} 2\omega t}{2\omega} \right) \Big|_0^T = \frac{1}{2}$$

Por tanto,

$$(\text{Potencia})_{\text{prom}} = \frac{1}{2} \rho A \omega^2 s_{\text{máx}}^2 v$$

Compare esta ecuación con la de la potencia transmitida en una cuerda, ecuación 16.21. ¡Las dos ecuaciones tienen la misma forma! Pero observe que: A en la ecuación 16.21 es la amplitud de la onda en la cuerda, mientras que A aquí es el área del pistón de la figura 16.20.

Se define la **intensidad** I de una onda, o la potencia por unidad de área, como la rapidez con la cual la energía transportada por la onda se transfiere a través de una unidad de área A perpendicular a la dirección de viaje de la onda:

Intensidad de una onda sonora ►

$$I \equiv \frac{(\text{Potencia})_{\text{prom}}}{A} \quad (16.38)$$

Por tanto, en este caso la intensidad es

$$I = \frac{1}{2} \rho \omega^2 s_{\text{máx}}^2 v$$

En consecuencia, la intensidad de una onda sonora periódica es proporcional al cuadrado de la amplitud de desplazamiento y al cuadrado de la frecuencia angular. Esta expresión también puede escribirse en términos de la amplitud de presión $\Delta P_{\text{máx}}$; en este caso, se emplea la ecuación 16.37 para obtener

$$I = \frac{(\Delta P_{\text{máx}})^2}{2\rho v} \quad (16.39)$$

Las ondas sonoras estudiadas en las figuras de la 16.16 a la 16.18, y en la 16.20 están restringidas a moverse en una dimensión a lo largo de la longitud del tubo. Sin embargo, las ondas sonoras pueden desplazarse a través de medios tridimensionales con estructura volumétrica, así que al aire libre coloque una fuente sonora y estudie los resultados.

Considere el caso especial de una fuente puntual que emite ondas sonoras por igual en todas direcciones. Si el aire alrededor de la fuente es perfectamente uniforme, la poten-



cia sonora radiada es la misma en todas direcciones, y también la rapidez del sonido es la misma en todas direcciones. En esta situación, resulta una **onda esférica**. La figura 16.21 muestra estas ondas esféricas como una serie de arcos circulares concéntricos con la fuente. Cada arco representa una superficie sobre la cual es constante la fase de la onda. A tal superficie de fase constante se le llama **frente de onda**. La distancia radial entre frentes de onda adyacentes que tienen la misma fase es la longitud de onda λ de la onda. Las líneas radiales que se dirigen hacia afuera desde la fuente, que representan la dirección de propagación de las ondas, se llaman **rayos**.

La potencia promedio emitida por la fuente debe estar distribuida uniformemente sobre cada frente de onda esférico de área $4\pi r^2$. Por tanto, la intensidad de la onda a una distancia r de la fuente es

$$I = \frac{(\text{Potencia})_{\text{prom}}}{A} = \frac{(\text{Potencia})_{\text{prom}}}{4\pi r^2} \quad (16.40)$$

La intensidad disminuye como el cuadrado de la distancia a la fuente. Esta ley inversa del cuadrado recuerda el comportamiento de la gravedad, capítulo 13.

Los rayos son líneas radiales perpendiculares a los frentes de onda alejándose de la fuente

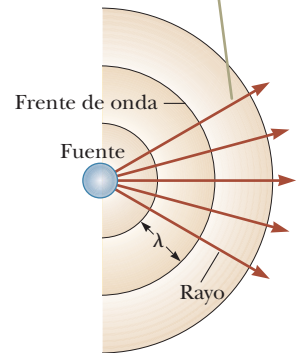


Figura 16.21 Ondas esféricas emitidas por una fuente puntual. Los arcos circulares representan los frentes de onda esféricos que son concéntricos con la fuente.

- EJEMPLO RÁPIDO 16.7** Una cuerda de guitarra que vibra hace muy poco sonido si no está montada en el cuerpo de una guitarra. ¿Por qué el sonido tiene mayor intensidad si la cuerda se une al cuerpo de la guitarra? (a) La cuerda vibra con más energía. (b) La energía abandona la guitarra a mayor rapidez. (c) La potencia del sonido se dispersa sobre un área más grande en la posición del escucha. (d) La potencia del sonido se concentra en un área más pequeña en la posición del escucha. (e) La rapidez del sonido es mayor en el material del cuerpo de la guitarra. (f) Ninguna de estas respuestas es correcta.

Ejemplo 16.6 Límites auditivos

Los sonidos más débiles que el oído humano puede detectar a una frecuencia de 1 000 Hz corresponden a una intensidad de aproximadamente $1.00 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2$, que se llama *umbral de audición*. Los sonidos más fuertes que el oído tolera a esta frecuencia corresponden a una intensidad de aproximadamente 1.00 W/m^2 , el *umbral de dolor*. Determine la amplitud de presión y la amplitud de desplazamiento asociadas con estos dos límites.

¡ SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en el ambiente más tranquilo que haya experimentado alguna vez. Es probable que la intensidad del sonido, incluso en este ambiente tan tranquilo, sea mayor que el umbral de audición.

Categorizar Se dan las intensidades y se pide calcular las amplitudes de presión y desplazamiento, entonces este problema es de análisis y requiere los conceptos discutidos en esta sección.

Para obtener la amplitud de la variación de presión en el umbral de audición, utilice la ecuación 16.39, tome la rapidez de las ondas sonoras en aire como $v = 343 \text{ m/s}$ y la densidad del aire $\rho = 1.20 \text{ kg/m}^3$:

Con la ecuación 16.37 calcule la correspondiente amplitud de desplazamiento, y recuerde que $\omega = 2\pi f$ (ecuación 16.9):

$$\begin{aligned} \Delta P_{\text{máx}} &= \sqrt{2\rho v I} \\ &= \sqrt{2(1.20 \text{ kg/m}^3)(343 \text{ m/s})(1.00 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2)} \\ &= 2.87 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2 \\ s_{\text{máx}} &= \frac{\Delta P_{\text{máx}}}{\rho v \omega} = \frac{2.87 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2}{(1.20 \text{ kg/m}^3)(343 \text{ m/s})(2\pi \times 1000 \text{ Hz})} \\ &= 1.11 \times 10^{-11} \text{ m} \end{aligned}$$

De manera similar, se encuentra que los sonidos más fuertes que puede tolerar el oído humano (el umbral de dolor) corresponden a una amplitud de presión de 28.7 N/m^2 y una amplitud de desplazamiento igual a $1.11 \times 10^{-5} \text{ m}$.

Ya que la presión atmosférica es casi 10^5 N/m^2 , el resultado para la amplitud de presión dice que el oído es sensible a fluctuaciones de presión ¡tan pequeñas como 3 partes en 10^{10} ! La amplitud de desplazamiento también es un número notablemente pequeño! Si este resultado para $s_{\text{máx}}$ se compara con el tamaño de un átomo (aproximadamente 10^{-10} m), se concluye que el oído es un detector extremadamente sensible de ondas sonoras.



Ejemplo 16.7 Variaciones de intensidad de una fuente puntual

Una fuente puntual emite ondas sonoras con una salida de potencia promedio de 80.0 W.

(A) Encuentre la intensidad a 3.00 m de la fuente.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine una pequeña bocina que envía sonido con rapidez promedio de 80.0 W de manera uniforme en todas direcciones. Usted está de pie a 3.00 m de distancia de las bocinas. A medida que el sonido se propaga, la energía de las ondas sonoras se dispersa sobre una esfera siempre en expansión, así la intensidad del sonido disminuye con la distancia.

Categorizar Si evalúa la intensidad mediante una ecuación deducida en esta sección, entonces este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Ya que una fuente puntual emite energía en la forma de ondas esféricas, use la ecuación 17.13 para encontrar la intensidad:

$$I = \frac{(\text{Potencia})_{\text{prom}}}{4\pi r^2} = \frac{80.0 \text{ W}}{4\pi (3.00 \text{ m})^2} = 0.707 \text{ W/m}^2$$

Esta intensidad es cercana al umbral del dolor.

(B) Hallar la distancia a la cual la intensidad del sonido es $1.00 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2$.

SOLUCIÓN

Resuelva para r en la ecuación 16.40 y utilice el valor dado para I :

$$r = \sqrt{\frac{(\text{Potencia})_{\text{prom}}}{4\pi I}} = \sqrt{\frac{80.0 \text{ W}}{4\pi (1.00 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2)}} = 2.52 \times 10^4 \text{ m}$$

Nivel sonoro en decibeles

El ejemplo 16.6 ilustra el amplio rango de intensidades que puede detectar el oído humano. Como este intervalo es muy amplio, es conveniente emplear una escala logarítmica, donde el **nivel sonoro** β (letra griega beta) se define mediante la ecuación

$$\beta \equiv 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (16.41)$$

Este proceso comprime el rango de audición en una escala más estrecha de números. La constante I_0 es la *intensidad de referencia*, considerada como el umbral de audición ($I_0 = 1.00 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2$) e I es la intensidad en watts por metro cuadrado a la que corresponde el nivel de sonido β , donde β se mide⁴ en **decibeles** (dB). En esta escala, el umbral de dolor ($I = 1.00 \text{ W/m}^2$) corresponde a un nivel sonoro de $\beta = 10 \log[(1 \text{ W/m}^2)/(10^{-12} \text{ W/m}^2)] = 10 \log(10^{12}) = 120 \text{ dB}$, y el umbral de audición corresponde a $\beta = 10 \log[(10^{-12} \text{ W/m}^2)/(10^{-12} \text{ W/m}^2)] = 0 \text{ dB}$.

La exposición prolongada a niveles sonoros altos puede dañar seriamente el oído humano. Siempre que los niveles sonoros superen los 90 dB, se recomienda emplear tapones de oídos. Evidencia reciente sugiere que la “contaminación acústica” puede ser un factor que contribuye a la presión arterial alta, ansiedad y nerviosismo. La tabla 16.2 da algunos niveles sonoros típicos.

Tabla 16.2 Niveles sonoros

Fuente de sonido	β (dB)
Avión jet cercano	150
Martillo neumático; ametralladora	130
Sirena; concierto de rock	120
Transporte subterráneo; podadora potente	100
Congestionamiento de tráfico	80
Aspiradora	70
Conversación normal	60
Zumbido de mosquito	40
Susurro	30
Hojas meciéndose	10
Umbral de audición	0

E XAMEN RÁPIDO 16.8 Aumentar la intensidad de un sonido en un factor de 100 ocasiona que el nivel sonoro aumente, ¿en qué cantidad? (a) 100 dB, (b) 20 dB, (c) 10 dB, (d) 2 dB.

⁴ La unidad *bel* recibe su nombre por el inventor del teléfono, Alexander Graham Bell (1847-1922). El prefijo *deci-* es el prefijo del SI que representa 10^{-1} .

Ejemplo 16.8 Niveles sonoros

Dos máquinas idénticas se colocan a la misma distancia de un trabajador. La intensidad del sonido entregado por cada máquina en funcionamiento es la posición del trabajador es de $2.0 \times 10^{-7} \text{ W/m}^2$.

(A) Hallar el nivel sonoro que escucha el trabajador cuando una máquina está funcionando.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine una situación en la cual una fuente de sonido está activa y se une a una segunda fuente idéntica, como una persona que habla y entonces una segunda persona habla al mismo tiempo o un instrumento musical toca y después se le une un segundo instrumento.

Categorizar Este ejemplo es un problema de análisis relativamente simple que requiere la ecuación 16.41

Aplique la ecuación 16.41 para calcular el nivel sonoro en la posición del trabajador con una máquina en funcionamiento:

$$\beta_1 = 10 \log \left(\frac{2.0 \times 10^{-7} \text{ W/m}^2}{1.00 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2} \right) = 10 \log (2.0 \times 10^5) = 53 \text{ dB}$$

(B) Hallar el nivel sonoro que escucha el trabajador cuando dos máquinas están en funcionamiento.

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 16.41 para calcular el nivel sonoro en la posición del trabajador, con el doble de intensidad:

$$\beta_2 = 10 \log \left(\frac{4.0 \times 10^{-7} \text{ W/m}^2}{1.00 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2} \right) = 10 \log (4.0 \times 10^5) = 56 \text{ dB}$$

Estos resultados demuestran que, cuando se duplica la intensidad, el nivel sonoro aumenta sólo en 3 dB. Ese incremento de 3 dB es independiente del nivel sonoro original. (¡Demuéstrelo!)

¿QUÉ PASARÍA SI? La *sonoridad* es una respuesta psicológica a un sonido. Depende tanto de la intensidad como de la frecuencia del sonido. Como regla empírica, una sonoridad duplicada se asocia aproximadamente con un aumento en el nivel sonoro de 10 dB. (Esta regla empírica es relativamente imprecisa a frecuencias muy bajas o muy altas.) Si la sonoridad de las máquinas en este ejemplo se duplica, ¿cuántas máquinas a la misma distancia del trabajador deben estar en funcionamiento?

Respuesta Con la regla empírica, un doble de sonoridad corresponde a un aumento en el nivel sonoro de 10 dB. Por tanto,

$$\begin{aligned} \beta_2 - \beta_1 &= 10 \text{ dB} = 10 \log \left(\frac{I_2}{I_0} \right) - 10 \log \left(\frac{I_1}{I_0} \right) = 10 \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right) \\ \log \left(\frac{I_2}{I_1} \right) &= 1 \rightarrow I_2 = 10I_1 \end{aligned}$$

Así, deben estar en funcionamiento diez máquinas para duplicar la sonoridad.

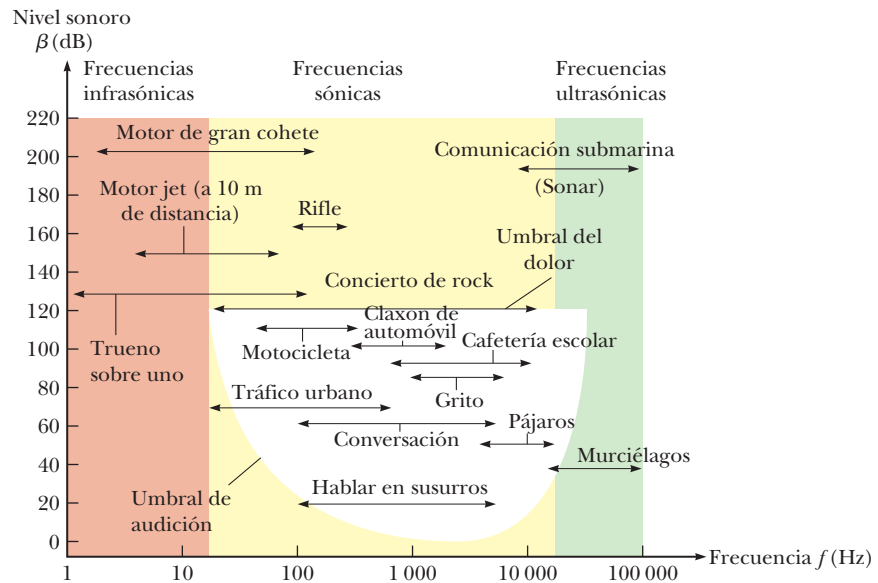
Sonoridad y frecuencia

La explicación del nivel sonoro en decibeles se relaciona con una medición *física* de la intensidad del sonido. Ahora se extenderá la explicación de la sección **¿Qué pasaría si?** del ejemplo 16.8 concerniente a la “medición” *psicológica* de la intensidad de un sonido.

De hecho, no se tienen instrumentos en el cuerpo que puedan desplegar valores numéricos de las reacciones a los estímulos. Se tienen que “calibrar” las reacciones de algún modo para comparar diferentes sonidos con un sonido de referencia, pero esto no es fácil de lograr. Por ejemplo, antes se mencionó que la intensidad umbral es 10^{-12} W/m^2 , que corresponde a un nivel de intensidad de 0 dB. En realidad, este valor es el umbral sólo para un sonido con frecuencia de 1 000 Hz, que es una frecuencia de referencia estándar en acústica. Si se realiza un experimento para medir la intensidad umbral a otras frecuencias, se encuentra una variación distinta de este umbral como función de la frecuencia. Por ejemplo, a 100 Hz, un sonido apenas audible debe tener una intensidad de [aproxima-



Figura 16.22 Intervalos aproximados de frecuencia y nivel sonoro de varias fuentes y la audición humana normal, mostrada por el área blanca. (Tomado de R.L. Reese, *University Physics*, Pacific Grove, Brooks/Cole, 2000.)



damente 30 dB! Por desgracia, no existe una correspondencia simple entre las mediciones físicas y las “mediciones” psicológicas. El sonido de 100 Hz y 30 dB es psicológicamente “igual” al sonido de 1 000 Hz y 0 dB (ambos son apenas audibles), pero no son físicamente iguales a nivel sonoro ($30 \text{ dB} \neq 0 \text{ dB}$).

Mediante sujetos de prueba se ha estudiado la respuesta humana al sonido, y los resultados se muestran en el área blanca de la figura 16.22, junto con la frecuencia aproximada y los rangos de nivel sonoro de otras fuentes sonoras. La curva inferior del área blanca corresponde al umbral de audición. A partir de este diagrama, es clara su variación con la frecuencia. Note que los humanos son sensibles a frecuencias en el intervalo de casi 20 Hz hasta aproximadamente 20 000 Hz. La frontera superior del área blanca es el umbral del dolor. Aquí la frontera del área blanca parece recta porque la respuesta psicológica es relativamente independiente de la frecuencia a este elevado nivel sonoro.

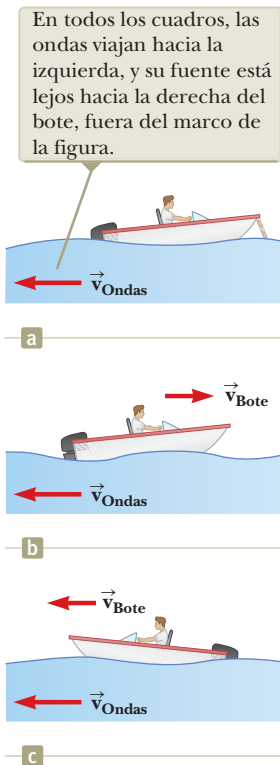


Figura 16.23 (a) Ondas moviéndose hacia una bote estacionario. (b) El bote se mueve hacia la fuente de ondas. (c) El bote se mueve alejándose de la fuente de ondas.

16.9 El efecto Doppler

Tal vez haya notado cómo varía el sonido del claxon de un vehículo a medida que éste se aleja. La frecuencia del sonido que escucha mientras el vehículo se aproxima a usted es más alta que la frecuencia que escucha mientras se aleja. Esta experiencia es un ejemplo del **efecto Doppler**.⁵

Para comprender qué causa este aparente cambio de frecuencia, imagínese en un bote anclado en un mar tranquilo donde las ondas tienen un periodo $T = 3.0 \text{ s}$. Así, cada 3.0 s una cresta golpea su bote. La figura 17.8a muestra esta situación, con las ondas acuáticas moviéndose hacia la izquierda. Si usted pone su reloj en $t = 0$ justo cuando una cresta golpea, la lectura en el reloj es 3.0 s cuando llegue la siguiente cresta, 6.0 s cuando la tercera cresta golpea, y así sucesivamente. A partir de estas observaciones, concluye que la frecuencia de la onda es $f = 1/T = 1/(3.0 \text{ s}) = 0.33 \text{ Hz}$. Ahora suponga que enciende su motor y se dirige directamente hacia las ondas que se acercan, como en la figura 16.23b. Una vez más pone su reloj en $t = 0$ cuando una cresta golpea el frente (la proa) de su bote. Sin embargo, ahora, ya que se mueve hacia la cresta de onda siguiente mientras ella se mueve hacia usted, lo golpea a menos de 3.0 s después del primer golpe. En otras palabras, el periodo que ahora observa es más corto que el periodo de 3.0 s que observó cuando estaba estacionario. Ya que $f = 1/T$, observa una frecuencia ondulatoria mayor que cuando estaba en reposo.

⁵ Llamado en honor del físico austriaco Christian Johann Doppler (1803-1853), quien predijo en 1842 el efecto tanto para ondas sonoras como para ondas luminosas.

Si usted da vuelta y se mueve en la misma dirección que las ondas (figura 16.23c), se observa el efecto opuesto. Pone su reloj en $t = 0$ cuando una cresta golpea la parte trasera del bote (la popa). Ya que ahora se mueve alejándose de la siguiente cresta, en su reloj transcurren más de 3.0 s cuando lo alcanza dicha cresta. Por tanto, observa una frecuencia más baja que cuando estaba en reposo.

Estos efectos se presentan porque la rapidez *relativa* entre su bote y las ondas depende de la dirección de viaje y de la rapidez de su bote. (Vea la sección 4.6.) Cuando se mueve hacia la derecha en la figura 16.23b, esta rapidez relativa es mayor que la rapidez de la onda, lo cual conduce a la observación de una frecuencia aumentada. Al dar vuelta y moverse hacia la izquierda, la rapidez relativa es menor, como lo es la frecuencia observada de las ondas acuáticas.

Ahora examine una situación análoga con ondas sonoras en la cual las ondas de agua se convierten en ondas sonoras, el agua se convierte en aire, y la persona en el bote ahora es un observador que escucha el sonido. En este caso, un observador O se mueve con una rapidez v_0 y una fuente sonora S está estacionaria respecto al medio, aire (figura 16.24).

Si una fuente puntual emite ondas sonoras y el medio es uniforme, las ondas se mueven con la misma rapidez en todas direcciones, se alejan radialmente de la fuente; el resultado es una onda esférica, como se mencionó en la sección 16.8. La distancia entre frentes de onda adyacentes es igual a la longitud de onda λ . En la figura 16.24, los círculos son las intersecciones de estos frentes de onda tridimensionales con el papel en dos dimensiones.

Sean f la frecuencia de la fuente, λ la longitud de onda y v la rapidez del sonido en la figura 16.24. Cuando el observador se mueve hacia la fuente, la rapidez de las ondas relativa al observador es $v' = v + v_0$, como en el caso del bote en la figura 16.23, pero la longitud de onda λ no se altera. Por tanto, al emplear la ecuación 16.12, $v = \lambda f$, puede decirse que la frecuencia f' que escucha el observador está *aumentada* y está dada por

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v + v_0}{\lambda}$$

Ya que $\lambda = v/f$, f' se puede expresar como

$$f' = \left(\frac{v + v_0}{v} \right) f \quad (\text{observador en movimiento hacia fuente}) \quad (16.42)$$

Si el observador se aleja de la fuente, la rapidez de la onda relativa al observador es $v' = v - v_0$. En este caso la frecuencia escuchada por el observador queda *reducida* y está dada por

$$f' = \left(\frac{v - v_0}{v} \right) f \quad (\text{observador alejándose de la fuente}) \quad (16.43)$$

Estas últimas dos ecuaciones se pueden reducir a una sola ecuación si se adopta una convención de signo. Si un observador se mueve con rapidez v_0 respecto a una fuente estacionaria, la frecuencia escuchada por el observador está dada por la ecuación 16.42, con v_0 interpretada como sigue: se emplea un valor positivo para v_0 cuando el observador se mueve hacia la fuente, y se utiliza un valor negativo cuando el observador se aleja de la fuente.

Ahora suponga que la fuente está en movimiento y que el observador queda en reposo. Si la fuente avanza directo hacia el observador A en la figura 16.25a, cada nueva onda es emitida desde una posición a la derecha del origen de la onda previa. Como resultado, los frentes de onda escuchados por el observador están más juntos de lo que estarían si la fuente no se moviera. (La figura 16.25b muestra este efecto para ondas moviéndose en la superficie del agua.) Así, la longitud de onda λ' medida por el observador A es más corta que la longitud de onda λ de la fuente. Durante cada vibración, que dura un intervalo de tiempo T (el periodo), la fuente se mueve una distancia $v_s T = v_s / f$ la longitud de onda se acorta en esta cantidad. Por tanto, la longitud de onda observada λ' es

$$\lambda' = \lambda - \Delta\lambda = \lambda - \frac{v_s}{f}$$

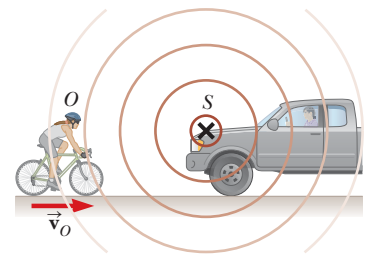


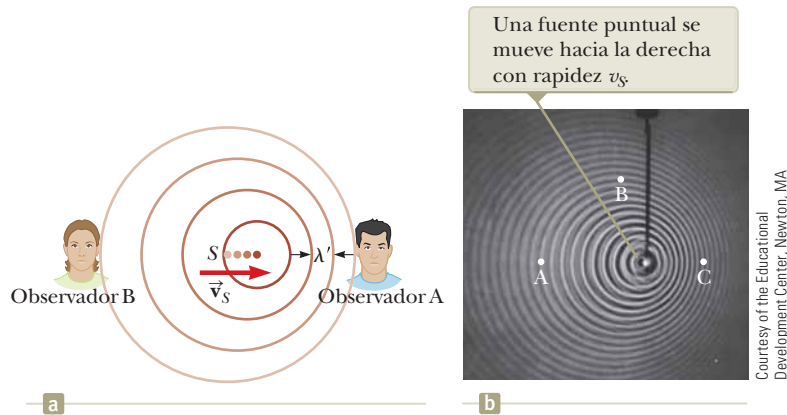
Figura 16.24 Un observador O (el ciclista) se mueve con una rapidez v_0 hacia una fuente puntual estable S , el claxon de una camioneta estacionada. El observador escucha una frecuencia f' mayor que la frecuencia de la fuente f .

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 16.4

El efecto Doppler no depende de la distancia Algunas personas creen que el efecto Doppler depende de la distancia entre la fuente y el observador. Aunque la *intensidad* de un sonido varía a medida que la distancia cambia, la *frecuencia* aparente sólo depende de la rapidez relativa de la fuente y el observador. Cuando usted escucha una fuente que se aproxima, detectará intensidad creciente, pero frecuencia constante. Mientras la fuente pasa, escuchará que la frecuencia cae súbitamente a un nuevo valor constante y la intensidad comienza a disminuir.



Figura 16.25 (a) Una fuente S se mueve con una rapidez v_s hacia un observador estacionario A y se aleja de un observador estable B . El observador A escucha una frecuencia aumentada, y el observador B escucha una frecuencia reducida. (b) El efecto Doppler en el agua, observado en un tanque de ondas. Las letras mostradas en la fotografía se refieren al examen rápido 16.9.



Como $\lambda = v/f$, la frecuencia f' que escucha el observador A es

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{\lambda - (v_s/f)} = \frac{v}{(v/f) - (v_s/f)}$$

$$f' = \left(\frac{v}{v - v_s} \right) f \quad (\text{fuente móvil hacia el observador}) \quad (16.44)$$

Es decir, la frecuencia observada *aumenta* siempre que la fuente se mueva hacia el observador.

Cuando la fuente se aleja de un observador estacionario, como es el caso del observador B en la figura 16.25a, el observador mide una longitud de onda λ' que es *mayor* que λ y escucha una frecuencia *reducida*:

$$f' = \left(\frac{v}{v + v_s} \right) f \quad (\text{fuente alejándose del observador}) \quad (16.45)$$

La relación general, para la frecuencia observada cuando una fuente es móvil y un observador está en reposo, se puede expresar mediante la ecuación 16.44, con la misma convención de signo aplicada a v_s como se aplicó a v_o : se emplea un valor positivo para v_s cuando la fuente se mueve hacia el observador, y un valor negativo si la fuente se aleja del observador.

Por último, al combinar las ecuaciones 16.42 y 16.44 se obtiene la siguiente relación general para la frecuencia observada que incluye las cuatro condiciones descritas en las ecuaciones 16.42 a la 16.45:

Expresión general de **►**
corrimiento Doppler

$$f' = \left(\frac{v + v_o}{v - v_s} \right) f \quad (16.46)$$

En esta expresión los signos para los valores sustituidos para v_o y v_s dependen de la dirección de la velocidad. Se emplea un valor positivo para movimiento del observador o la fuente *hacia* el otro (asociado con un *aumento* en la frecuencia observada), y un valor negativo se utiliza para movimiento de uno *alejándose* del otro (asociado con una disminución en la frecuencia observada).

Aunque el efecto Doppler se experimenta más comúnmente con ondas sonoras, es un fenómeno típico a todas las ondas. Por ejemplo, el movimiento relativo de la fuente y el observador produce un corrimiento de frecuencia en las ondas luminosas. El efecto Doppler se usa en los sistemas de radar policiares para medir la rapidez de los vehículos automotores. Del mismo modo, los astrónomos emplean el efecto para determinar la rapidez de estrellas, galaxias y otros objetos celestes en relación con la Tierra.



- E XAMEN RÁPIDO 16.9** Considere los detectores de ondas acuáticas en tres posiciones A, B y C de la figura 17.9b. ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero? (a) La rapidez de onda es mayor en la posición A. (b) La rapidez de onda es mayor en la posición C. (c) La longitud de onda detectada es mayor en la posición B. (d) La longitud de onda detectada es mayor en la posición C. (e) La frecuencia detectada es mayor en la posición C. (f) La frecuencia detectada es mayor en la posición A.

- E XAMEN RÁPIDO 16.10** Usted está de pie sobre una plataforma en una estación de tren y escucha un tren que se aproxima a la estación con velocidad constante. Mientras el tren se aproxima, pero antes de que llegue, ¿qué escucha? (a) la intensidad y la frecuencia del sonido aumentan, (b) la intensidad y la frecuencia del sonido disminuyen, (c) la intensidad aumenta y la frecuencia disminuye, (d) la intensidad disminuye y la frecuencia aumenta, (e) la intensidad aumenta y la frecuencia permanece igual, (f) la intensidad disminuye y la frecuencia permanece igual.

Ejemplo 16.9 El radio-reloj descompuesto

Su radio-reloj lo despierta con un sonido estable e irritante de 600 Hz de frecuencia. Una mañana, funciona mal y no se puede apagar. Frustrado, arroja el radio-reloj por la ventana de su dormitorio en el cuarto piso, a 15.0 m del suelo. Suponga que la rapidez del sonido es de 343 m/s. Mientras escucha el radio-reloj que cae, ¿qué frecuencia escucha justo antes de que lo oiga chocar con el suelo?

SOLUCIÓN

Conceptualizar La rapidez del radio-reloj aumenta mientras cae. Por tanto, es una fuente de sonido móvil alejándose de usted con una rapidez creciente, de modo que la frecuencia que escucha debe ser menor que 600 Hz.

Categorizar Este problema se clasifica como uno en el que se combina el modelo de *partícula bajo una aceleración constante* para el radio en caída con la comprensión del corrimiento en frecuencia del sonido debido al efecto Doppler.

Analizar Ya que el radio-reloj se modela como una partícula bajo aceleración constante debida a la gravedad, use la ecuación 2.13 para expresar la rapidez de la fuente de sonido:

$$(1) \quad v_s = v_{yi} + a_y t = 0 - gt = -gt$$

Mediante la ecuación 2.16, obtenga el tiempo en el que el reloj golpea el suelo:

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 + 0 - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \sqrt{-\frac{2y_f}{g}}$$

Sustituya en la ecuación (1):

$$v_s = (-g) \sqrt{-\frac{2y_f}{g}} = -\sqrt{-2gy_f}$$

Aplique la ecuación 16.46 para determinar la frecuencia de corrimiento Doppler que se escucha del radio-reloj en caída:

$$f' = \left[\frac{v + 0}{v - (-\sqrt{-2gy_f})} \right] f = \left(\frac{v}{v + \sqrt{-2gy_f}} \right) f$$

Sustituya valores numéricos:

$$f' = \left[\frac{343 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} + \sqrt{-2(9.80 \text{ m/s}^2)(-15.0 \text{ m})}} \right] (600 \text{ Hz}) \\ = 571 \text{ Hz}$$

Finalizar La frecuencia es menor que la frecuencia real de 600 Hz porque el radio-reloj se aleja. Si cayera desde un piso superior, de modo que pasara por debajo de $y = -15.0 \text{ m}$, el radio-reloj continuaría acelerando y la frecuencia seguiría disminuyendo.

Ejemplo 16.10 Submarinos Doppler

Un submarino (sub A) viaja a través del agua con una rapidez de 8.00 m/s y emite una onda de sonar con una frecuencia de 1 400 Hz. La rapidez del sonido en el agua es de 1 533 m/s. Un segundo submarino (sub B) se localiza de modo que ambos submarinos viajan directamente uno hacia el otro. El segundo submarino se mueve a 9.00 m/s.

- (A) ¿Qué frecuencia detecta un observador que viaja en el sub B mientras los submarinos se aproximan entre sí?

continúa

16.10 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar Aun cuando el problema involucra submarinos móviles en agua, hay un efecto Doppler como existe cuando usted está en un automóvil en movimiento y escucha un sonido que se mueve a través del aire desde otro auto.

Categorizar Ya que ambos submarinos se mueven, este problema se clasifica como uno que involucra el efecto Doppler para una fuente móvil y un observador en movimiento.

Analizar Aplique la ecuación 16.45 para hallar la frecuencia de corrimiento Doppler que escucha el observador en el sub B y tenga cuidado con los signos de las rapidezces de la fuente y el observador:

$$f' = \left(\frac{v + v_o}{v - v_s} \right) f$$

$$f' = \left[\frac{1\,533 \text{ m/s} + (+9.00 \text{ m/s})}{1\,533 \text{ m/s} - (+8.00 \text{ m/s})} \right] (1\,400 \text{ Hz}) = 1\,416 \text{ Hz}$$

(B) Los submarinos apenas evitan el choque. ¿Qué frecuencia detecta un observador en el sub B mientras los submarinos se alejan uno del otro?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 16.46 para encontrar la frecuencia de corrimiento Doppler que escucha el observador en el sub B, y de nuevo sea cuidadoso con los signos asignados a las rapidezces de la fuente y el observador:

$$f' = \left(\frac{v + v_o}{v - v_s} \right) f$$

$$f' = \left[\frac{1\,533 \text{ m/s} + (-9.00 \text{ m/s})}{1\,533 \text{ m/s} - (-8.00 \text{ m/s})} \right] (1\,400 \text{ Hz}) = 1\,385 \text{ Hz}$$

Note que la frecuencia disminuye de 1 416 Hz a 1 385 Hz conforme los submarinos se pasan. Este efecto es similar a la caída en frecuencia que usted escucha cuando un automóvil pasa a su lado mientras suena el claxon.

(C) Mientras los submarinos se aproximan mutuamente, algo del sonido desde el sub A se refleja desde el sub B y regresa al sub A. Si este sonido lo detectara un observador en el sub A, ¿cuál sería su frecuencia?

SOLUCIÓN

El sonido de frecuencia aparente de 1 416 Hz que encontró en la parte (A) se refleja de una fuente móvil (sub B) y después lo detecta un observador móvil (sub A). Determine la frecuencia detectada por el sub A:

$$f'' = \left(\frac{v + v_o}{v - v_s} \right) f'$$

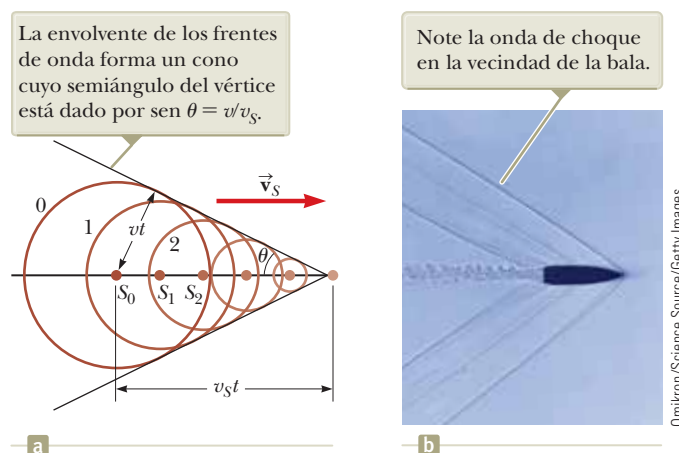
$$= \left[\frac{1\,533 \text{ m/s} + (+8.00 \text{ m/s})}{1\,533 \text{ m/s} - (+9.00 \text{ m/s})} \right] (1\,416 \text{ Hz}) = 1\,432 \text{ Hz}$$

Finalizar Esta técnica la utilizan los oficiales de policía para medir la rapidez de un auto en movimiento. Desde la patrulla se emiten microondas que se reflejan en el auto en movimiento. Al detectar la frecuencia de corrimiento Doppler de las microondas reflejadas, el oficial de policía puede obtener la rapidez del auto.

Ondas de choque

Considere ahora lo que sucede cuando la rapidez v_s de una fuente *supera* la rapidez de onda v . Esta situación se muestra gráficamente en la figura 16.26a. Los círculos representan frentes de onda esféricos emitidos por la fuente en diferentes momentos durante su movimiento. En $t = 0$, la fuente está en S_0 con desplazamiento hacia la derecha. En tiem-

Figura 16.26 (a) Una representación de una onda de choque producida cuando una fuente se mueve de S_0 hacia la derecha con una rapidez v_s que es mayor que la rapidez de onda v en el medio. (b) Fotografía estroboscópica de una bala moviéndose con rapidez supersónica a través del aire caliente sobre una vela.



pos posteriores, la fuente está en S_1 , y luego en S_2 , y así sucesivamente. En el tiempo t , el frente de onda con centro en S_0 alcanza un radio vt . En este mismo intervalo de tiempo, la fuente recorre una distancia $v_s t$. En la figura 16.27a observe que puede dibujarse una línea tangente a todos los frentes de onda generados en varios instantes. Por tanto, la envolvente de estos frentes de onda es un cono cuyo semiángulo de vértice θ (el “ángulo Mach”) está dado por

$$\text{sen } \theta = \frac{vt}{v_s t} = \frac{v}{v_s}$$

La razón v_s/v se conoce como *número de Mach*, y el frente de onda cónico que se produce cuando $v_s > v$ (rapidez supersónica) se conoce como *onda de choque*. Una analogía interesante a las ondas de choque son los frentes de onda en forma de V producidos por un bote (la onda de proa) cuando la rapidez de éste supera la rapidez de las ondas en la superficie del agua (figura 16.27).

Los aviones jet que viajan a velocidades supersónicas producen ondas de choque, que son responsables del fuerte “estampido sónico” que uno escucha. La onda de choque lleva una gran cantidad de energía concentrada en la superficie del cono, con grandes variaciones de presión correspondientes. Tales ondas de choques son desagradables de escuchar y pueden causar daño a los edificios cuando los aviones vuelan supersónicamente a bajas altitudes. En efecto, un avión que vuela con rapidez supersónica produce un doble estampido porque se forman dos ondas de choque, una desde la nariz del avión y otra desde la cola.



© Robert Holland/Stone/Getty Images

Figura 16.27 La onda de proa con forma en V de un bote se presenta porque la rapidez de éste es mayor que la rapidez de las ondas acuáticas que él genera. Una onda de proa es análoga a una onda de choque formada por un avión que viaja más rápido que el sonido.

- E XAMEN RÁPIDO 3.1** Un avión volando con una velocidad constante se mueve de
- una masa de aire frío a una masa de aire caliente. ¿El número Mach (a) aumenta (b)
 - disminuye o (c) permanece constante?

Resumen

Definiciones

Una **onda transversal** es aquella en la que los elementos del medio se mueven en una dirección *perpendicular* a la dirección de propagación.

Una **onda sinusoidal** unidimensional es aquella para la cual las posiciones de los elementos del medio varían en forma sinusoidal. Una onda sinusoidal que viaja hacia la derecha se puede expresar con una **función de onda**

$$y(x, t) = A \text{sen} \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) \right] \quad (16.5)$$

donde A es la **amplitud**, λ es la **longitud de onda** y v es la **rapidez de onda**.

El **número de onda angular** k y la **frecuencia angular** ω de una onda se definen como sigue:

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (16.8, 16.9)$$

donde T es el **periodo** de la onda y f es su **frecuencia**.

Una **onda longitudinal** es aquella en la que los elementos del medio se mueven en una dirección *paralela* a la dirección de propagación.

La **intensidad** de una onda sonora periódica, que es la potencia por unidad de área, es

$$I \equiv \frac{(\text{Potencia})_{\text{prom}}}{A} = \frac{(\Delta P_{\text{máx}})^2}{2\rho v} \quad (16.38, 16.39)$$

El **nivel sonoro** de una onda sonora en decibeles es

$$\beta \equiv 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (16.41)$$

La constante I_0 es una intensidad de referencia, que usualmente se considera como el umbral de audición ($1.00 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2$), e I es la intensidad de la onda sonora en watts por metro cuadrado.



► Conceptos y principios

Cualquier onda unidimensional que viaja con una rapidez v en la dirección x se representa mediante una función de onda de la forma

$$y(x, t) = f(x \pm vt) \quad (16.1, 16.2)$$

donde el signo positivo se aplica a una onda que viaja en la dirección x negativa y el signo negativo se aplica a una onda que viaja en la dirección x positiva. La forma de la onda en cualquier instante en el tiempo (una instantánea de la onda) se obtiene al mantener t constante.

La rapidez de una onda que viaja sobre una cuerda tensa de masa por unidad de longitud μ y tensión T es

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (16.18)$$

La **potencia** transmitida por una onda sinusoidal sobre una cuerda estirada es

$$P = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 v \quad (16.21)$$

Las funciones de onda son soluciones a una ecuación diferencial llamada **ecuación de onda lineal**:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (16.27)$$

Las ondas sonoras son longitudinales y viajan a través de un medio comprensible con una rapidez que depende de las propiedades elásticas e inerciales de dicho medio. La rapidez del sonido en un gas con un módulo volumétrico B y una densidad ρ es

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (16.35)$$

Para ondas sonoras sinusoidales, la variación en la posición de un elemento del medio es

$$s(x, t) = s_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t) \quad (16.28)$$

y la variación en presión respecto al valor de equilibrio es

$$\Delta P = \Delta P_{\text{máx}} \sin(kx - \omega t) \quad (16.29)$$

donde $\Delta P_{\text{máx}}$ es la **amplitud de presión**. La onda de presión está 90° fuera de fase con la onda de desplazamiento. La relación entre $s_{\text{máx}}$ y $\Delta P_{\text{máx}}$ es

$$\Delta P_{\text{máx}} = \rho v \omega s_{\text{máx}} \quad (16.37)$$

El cambio en la frecuencia escuchada por un observador siempre que hay movimiento relativo entre una fuente de ondas sonoras y el observador se llama **efecto Doppler**. La frecuencia observada es

$$f' = \left(\frac{v + v_o}{v - v_s} \right) f \quad (16.46)$$

En esta expresión, los signos para los valores sustituidos para v_o y v_s dependen de la dirección de la velocidad. Un valor positivo para la rapidez del observador o fuente se sustituye si la velocidad de uno es hacia el otro, mientras que un valor negativo representa una velocidad de uno alejándose del otro.

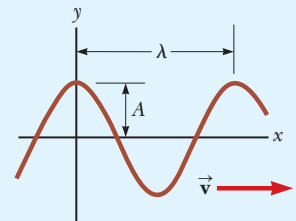
► Modelo de análisis para resolver problemas

Onda viajera. La rapidez de onda de una onda sinusoidal es

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f \quad (16.6, 16.12)$$

Una onda sinusoidal se expresa como

$$y = A \sin(kx - \omega t) \quad (16.10)$$



Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a WEBASSIGN. From Cengage

1. Usted y sus amigos están trabajando para la Administración Nacional Oceánica y Atmosférica (NOAA) y están aprendiendo sobre tsunamis para prepararse y poder ayudar en el Centro de Alerta de Tsunami del Pacífico en Hawái. Su instructor le dice que un tsunami típico en el océano abierto podría tener una velocidad de 800 km/h, una longitud

de onda de 200 m y una amplitud de 1.0 m. (a) Si estuviera en un barco en mar abierto viajando a su posición en Hawái y un tsunami atravesara el agua alrededor de su barco, ¿qué efectos experimentaría? (b) Si estuvo en la playa de Hawái y vio que el agua del océano retrocedía a una distancia mucho mayor debido a la actividad normal de las olas, representando la depresión de un tsunami, ¿cuánto tiempo tendría para advertir a todos que salgan de la playa? Tenga en cuenta que la frecuencia de una onda de agua sigue siendo la misma a medida que pasa a través de diferentes profundidades de

agua. Sin embargo, la amplitud y la velocidad de la onda cambian. (c) Suponga que la energía del tsunami se conserva. Es decir, ignore cualquier reflejo de energía a medida que la onda de agua se transmite a aguas poco profundas, donde su velocidad cambia. En ese caso, de la ecuación 16.21, expresamos el poder de la ola como

$$P \sim \omega^2 A^2 v$$

Con base en nuestra suposición de que no hay reflejo de energía, ¿cuál sería la amplitud de la ola descrita anteriormente cuando está pasando por una región poco profunda donde la velocidad de la ola es de 75 km/h? (d) Si la mitad de la energía de la ola se refleja cuando ingresa a las aguas poco profundas, ¿cuál sería la amplitud de la ola en las aguas poco profundas descritas en el inciso (c)?

- Un emprendedor está diseñando una nueva sala de conciertos al aire libre. Quiere adquirir altavoces que proporcionen un nivel de sonido de 83 dB en una ubicación a 100 m de ellos. (a) ¿Qué salida de potencia de sonido se requiere para los altavoces? Suponga que el sonido se irradia como una onda esférica y que no hay reflejos del suelo. (b) Después de hacer que alguien realice el cálculo en el inciso (a) para él, el empresario va a la tienda de artículos electrónicos y compra un altavoz que el vendedor le dice que tiene una potencia de 150 W, y cree que debe hacer claramente lo que necesita. Sin embargo, cuando prueba el altavoz en el lugar y gira el sonido hasta el máximo que el altavoz puede manejar, el nivel de sonido a 100 m es solo de 70.8 dB. El empresario enojado

corre hacia su abogado, quien contrata a su equipo como testigos expertos para ver si el litigio es apropiado contra el vendedor. ¿Cuál es la salida de potencia del altavoz, basada en los datos del nivel de sonido? (c) Después de realizar algunas investigaciones sobre altavoces, argumente que el litigio *no* debe iniciarse contra el vendedor.

- ACTIVIDAD** El epicentro de un terremoto puede localizarse al observar la diferencia en los tiempos de llegada entre las ondas P y S en un sismógrafo. Una estación sismológica única puede determinar qué tan lejos se produce el terremoto. Con los datos de tres estaciones de sismógrafo, la triangulación se puede utilizar para determinar la ubicación exacta. Para los terremotos cercanos, las ondas sísmicas viajan a través de la corteza de la Tierra a velocidades típicas de 4.00 km/s para las ondas S y 8.00 km/s para las ondas P. La siguiente tabla muestra las horas del día para la primera llegada de las ondas P y S en tres diferentes estaciones sismográficas de California. (a) Imprima un mapa de California desde internet y use los datos a continuación para determinar qué gran ciudad de California representa el epicentro del terremoto. (b) ¿A qué hora ocurrió el terremoto?

Estación sísmica	Hora de llegada de la onda P (h:min:s)	Hora de llegada de la onda S (h:min:s)
Sacramento	3:21:34.4 PM	3:22:04.8 PM
San Francisco	3:21:35.9 PM	3:22:07.8 PM
Los Ángeles	3:21:52.1 PM	3:22:40.2 PM

Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN** From Cengage

SECCIÓN 16.1 Propagación de una perturbación

- Una estación sismográfica recibe ondas S y P de un terremoto, separadas 17.3 s. Suponga que las ondas viajaron sobre la misma trayectoria con magnitudes de velocidad de 4.50 km/s y 7.80 km/s. Encuentre la distancia desde el sismógrafo al foco del terremoto.

- Dos puntos A y B sobre la superficie de la Tierra están a la misma longitud y 60.0° separados en latitud, como se muestra en la figura P16.2. Suponga que un terremoto en el punto A crea una onda P que llega al punto B viajando en línea recta a través del cuerpo de la Tierra con una rapidez constante de 7.80 km/s. El terremoto también genera una onda Rayleigh que viaja a 4.50 km/s. Además de las ondas P y S, las ondas Rayleigh son un tercer tipo de onda sísmica que viaja sobre la *superficie* de la Tierra en lugar de hacerlo a través de su *volumen*. (a) ¿Cuál de estas dos ondas sísmicas llega primero a B? (b) ¿Cuál es la diferencia de tiempo entre las llegadas de estas dos ondas a B?

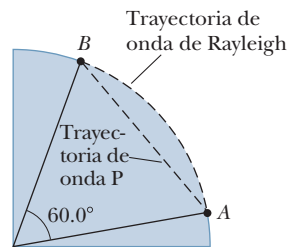


Figura P16.2

de las secciones con una cinta métrica. Sugiere una forma más rápida de medir la longitud. Usted sabe que la velocidad de una onda de compresión unidimensional que viaja a lo largo de una tubería de cobre es de 3.56 km/s. Usted sugiere que un trabajador dé un golpe fuerte con un martillo en un extremo de la tubería. Usando una aplicación de osciloscopio en su teléfono inteligente, medirá el intervalo de tiempo Δt entre la llegada de las dos ondas de sonido debido al golpe: una a través del aire de 20.0 °C y la otra a través de la tubería. (a) Para medir la longitud, deduzca una ecuación que relacione la longitud L de la tubería numéricamente con el intervalo de tiempo Δt . (b) Mida un intervalo de tiempo de $\Delta t = 127$ ms entre las llegadas de los impulsos y, a partir de este valor, determine la longitud de la tubería. (c) La aplicación de su teléfono inteligente afirma una precisión de 1.0% en intervalos de tiempo de medición. Entonces calcule por cuántos centímetros puede haber un error en el cálculo de la longitud.

- CE** Trabaja en un proyecto de graduación y está analizando una "ola" humana en un estadio deportivo como la que se muestra en la figura P16.4 (página 446). Intente determinar el efecto de la ola en las ventas de concesiones porque las personas se ponen de pie y se sientan mientras participan en la ola, en lugar de comprar alimentos o bebidas. Ha realizado observaciones en un estadio local y ha tomado datos en una ola particularmente estable. Esta ola tomó 47.4 s para viajar alrededor de una fila específica del estadio que consiste en un anillo circular de 974 asientos. También descubre que un intervalo de tiempo típico para que los espectadores se levanten y se sienten es de 0.95 s. En esta ola, ¿cuántas personas en la fila específica estaban fuera de sus asientos en un instante dado?





JOE KLAMAR/AFP/Getty Images

Figura P16.4 Problemas 4 y 44

SECCIÓN 16.2 Análisis de modelo: onda viajera

5. Cuando un alambre particular vibra con una frecuencia de **V** 4.00 Hz, se produce una onda transversal con longitud de onda de 60.0 cm. Determine la rapidez de las ondas a lo largo del alambre.
6. **CIC** (a) Trace la gráfica y contra t en $x = 0$ para una onda sinusoidal de la forma $y = 0.150 \cos(15.7x - 50.3t)$, donde x y y están en metros y t en segundos. (b) Determine el periodo de vibración. (c) Argumente cómo su resultado se compara con el valor encontrado en el ejemplo 16.2.
7. Considere la onda sinusoidal del ejemplo 16.2 con la función de onda

$$y = 0.150 \cos(15.7x - 50.3t)$$

donde x y y están en metros y t en segundos. En cierto instante, el punto A está en el origen y el punto B es el punto más cercano a A sobre el eje x donde la onda está 60.0° fuera de fase con A . ¿Cuál es la coordenada de B ?

8. **PG** Una onda sinusoidal que viaja en la dirección x negativa (hacia la izquierda) tiene una amplitud de 20.0 cm, una longitud de onda de 35.0 cm y una frecuencia de 12.0 Hz. La posición transversal de un elemento del medio en $t = 0$, $x = 0$ es $y = -3.00$ cm, y el elemento tiene una velocidad positiva en dicha ubicación. Se desea encontrar una expresión para la función de onda que describe a esta onda. (a) Bosqueje la onda en $t = 0$. (b) Encuentre el número de onda angular k a partir de la longitud de onda. (c) Encuentre el periodo T a partir de la frecuencia. Encuentre (d) la frecuencia angular ω y (e) la rapidez de onda v . (f) Con la información en $t = 0$, encuentre la constante de fase ϕ . (g) Escriba una expresión para la función de onda $y(x, t)$.
9. (a) Escriba la expresión para y como función de x y t en unidades SI para una onda sinusoidal que viaja a lo largo de una cuerda en la dirección x negativa con las siguientes características: $A = 8.00$ cm, $\lambda = 80.0$ cm, $f = 3.00$ Hz y $y(0, t) = 0$ en $t = 0$. (b) ¿Qué pasaría si? Escriba la expresión para y como función de x y t para la onda en el inciso (a) si supone que $y(x, 0) = 0$ en el punto $x = 10.0$ cm.

SECCIÓN 16.3 La rapidez de ondas sobre cuerdas

10. **T** **Problema de repaso.** El límite elástico de un alambre de acero es 2.70×10^8 Pa. ¿Cuál es la máxima rapidez a la que pulsos de onda transversales pueden propagarse a lo largo de este alambre sin exceder este esfuerzo? (La densidad del acero es 7.86×10^3 kg/m³.)
11. Ondas transversales viajan con una rapidez de 20.0 m/s sobre una cuerda bajo una tensión de 6.00 N. ¿Qué tensión se requiere para una rapidez de onda de 30.0 m/s sobre la misma cuerda?

12. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Un astronauta en la Luna está estudiando movimiento ondulatorio mediante el aparato analizado en el ejemplo 16.3 y mostrado en la figura 16.12. Él mide el intervalo de tiempo empleado por los pulsos para viajar a lo largo del alambre horizontal. Suponga que el alambre horizontal tiene una masa de 4.00 g, una longitud de 1.60 m y que un objeto de 3.00 kg está suspendido de su extensión alrededor de la polea. El astronauta encuentra que un pulso requiere 26.1 ms para recorrer la longitud del alambre.

13. **AMT** En una cuerda, la tensión se establece de acuerdo a la figura P16.13. La rapidez de onda observada es $v = 24.0$ m/s cuando la masa suspendida es $m = 3.00$ kg. (a) ¿Cuál es la masa por unidad de longitud de la cuerda? (b) ¿Cuál es la rapidez de onda cuando la masa suspendida es $m = 2.00$ kg?

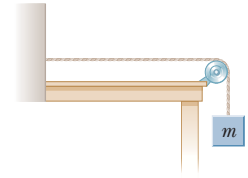


Figura P16.13 Problemas 13 y 43.

14. **V** Pulsos transversales viajan con una rapidez de 200 m/s a lo largo de un alambre de cobre tenso cuyo diámetro es de 1.50 mm. ¿Cuál es la tensión en el alambre? (La densidad del cobre es 8.92 g/cm³.)

SECCIÓN 16.5 Rapidez de transferencia de energía mediante ondas sinusoidales sobre cuerdas

15. En una cuerda bajo tensión se generan ondas transversales. ¿En qué factor aumenta o disminuye la potencia requerida si (a) la longitud de la cuerda se duplica y la frecuencia angular permanece constante, (b) la amplitud se duplica y la frecuencia angular se reduce a la mitad, (c) se duplican tanto la longitud de onda como la amplitud y (d) se reducen a la mitad tanto la longitud de la cuerda como la longitud de onda?
16. **CIC** En una región lejana del epicentro de un terremoto, una onda sísmica se modela como transporte de energía en una sola dirección sin absorción, como lo hace una onda en una cuerda. Suponga que la onda sísmica se mueve de granito a fango con densidad similar, pero con un módulo volumétrico mucho menor. Suponga que la rapidez de la onda cae gradualmente en un factor de 25.0, con reflexión despreciable de la onda. (a) Explique si la amplitud del suelo que se agita aumentará o disminuirá. (b) ¿Cambia en un factor predecible? (Este fenómeno condujo al colapso de parte de la autopista Nimitz en Oakland, California, durante el terremoto de Loma Prieta en 1989.)
17. **AMT** Un alambre largo transporta una onda; un segmento de 6.00 m de la cuerda contiene cuatro longitudes de onda completas y tiene una masa de 180 g. La cuerda vibra sinusoidalmente con una frecuencia de 50.0 Hz y un desplazamiento de cresta a valle de 15.0 cm. (La distancia "cresta a valle" es la distancia vertical desde la posición positiva más lejana hasta la posición negativa más lejana.) (a) Escriba la función que describe esta onda que viaja en la dirección x positiva. (b) Determine la potencia a suministrar a la cuerda.
18. **S** Una onda acuática en dos dimensiones se dispersa en ondulaciones circulares. Demuestre que la amplitud A a una distancia r desde la perturbación inicial es proporcional a $1/\sqrt{r}$. *Sugerencia:* Considere la energía que porta una ondulación que se mueve hacia afuera.
19. **S** Una cuerda horizontal puede transmitir una potencia máxima P_0 (sin romperse) si por ella viaja una onda con amplitud A y frecuencia angular ω . Para aumentar esta potencia máxima, un estudiante dobla la cuerda y usa esta "cuerda doble" como medio. Determine la potencia máxima que se puede transmitir a lo largo de la "cuerda doble", si supone



que la tensión en las dos hebras juntas es la misma que la tensión original en la cuerda individual, y también que la frecuencia angular de la onda permanece constante.

SECCIÓN 16.6 La ecuación de onda lineal

- 20.** Demuestre que la función de onda $y = \ln [b(x-vt)]$ es una solución de la ecuación 16.27, donde b es una constante.
- 21.** Demuestre que la función de onda $y = e^{b(x-vt)}$ es una solución de la ecuación de onda lineal (ecuación 16.27), donde b es una constante.
- 22.** (a) Demuestre que la función $y(x,t) = x^2 + v^2 t^2$ es una solución a la ecuación de onda. (b) Demuestre que la función en el inciso (a) se puede escribir como $f(x+vt) + g(x-vt)$ y determine las formas funcionales para f y g . (c) **¿Qué pasaría si?** Repita los incisos (a) y (b) para la función $y(x,t) = \sin(x) \cos(vt)$.

Nota: En el resto de este capítulo, para los problemas que involucran ondas sonoras, las variaciones de presión ΔP se miden respecto a la presión atmosférica, 1.013×10^5 Pa.

SECCIÓN 16.6 Ondas sonoras

- 23.** Una onda sonora sinusoidal se mueve a través de un medio y se describe mediante la función de onda de desplazamiento

$$s(x, t) = 2.00 \cos(15.7x - 858t)$$

donde s está en micrómetros, x en metros y t en segundos. Encuentre (a) la amplitud, (b) la longitud de onda y (c) la rapidez de esta onda. (d) Determine el desplazamiento instantáneo del equilibrio de los elementos del medio en la posición $x = 0.050$ m en $t = 3.00$ ms. (e) Determine la rapidez máxima del movimiento oscilatorio del elemento.

SECCIÓN 16.7 Rapidez de ondas sonoras

Nota: En lo que resta de este capítulo, a menos que se especifique otra cosa, la densidad de equilibrio del aire es $\rho = 1.20$ kg/m³ y la rapidez del sonido en aire es $v = 343$ m/s. Utilice la tabla 16.1 para encontrar la rapidez del sonido en otros medios.

- 24.** Los terremotos en líneas de falla en la corteza terrestre crean ondas sísmicas, las cuales son longitudinales (ondas P) o transversales (ondas S). Las ondas P tienen una rapidez de aproximadamente 7 km/s. Estime el módulo volumétrico promedio de la corteza terrestre dado que la densidad de la roca es alrededor de 2 500 kg/m³.
- 25.** Un experimentador quiere generar en aire una onda sonora que tenga una amplitud de desplazamiento de 5.50×10^{-6} m. La amplitud de presión estará limitada a 0.840 Pa. ¿Cuál es la longitud de onda mínima que puede tener la onda sonora?
- 26.** Una onda sonora se propaga en aire a 27 °C con frecuencia de 4.00 kHz. Pasa a través de una región donde la temperatura cambia gradualmente y luego se mueve a través de aire a 0 °C. Dé respuestas numéricas a las siguientes preguntas en la medida de lo posible y establezca su razonamiento sobre lo que sucede físicamente con la onda. (a) ¿Qué ocurre con la rapidez de la onda? (b) ¿Qué sucede con su frecuencia? (c) ¿Qué ocurre con su longitud de onda?

- 27.** Está en la Reserva de Quincy Quarries con su abuelo, realizando la actividad descrita en la semblanza de apertura. Las coordenadas de su posición cuando su abuelo aplaude son N 42.244 348, W 71.033 788. El cronómetro de su teléfono inte-

ligente le dice que el intervalo de tiempo entre el aplauso y el eco es 0.47 s. Cuando camina hacia el acantilado, sus coordenadas son N 42.244 068, W 71.034 668. ¿Qué velocidad de sonido le dice a su abuelo? (*Sugerencia:* utilice un recurso en línea para calcular la distancia entre las coordenadas).

- 28.** Un avión de rescate vuela horizontalmente con rapidez constante en busca de un bote averiado. Cuando el avión está directamente arriba del bote, la tripulación del bote suena una gran sirena. Cuando el detector sonoro del avión recibe el sonido de la sirena, el avión ya recorrió una distancia igual a la mitad de su altura sobre el océano. Si supone que el sonido tarda 2.00 s en llegar al avión, determine (a) la rapidez del avión y (b) su altura.
- 29.** La rapidez del sonido en el aire (en metros por segundo) depende de la temperatura, de acuerdo con la expresión aproximada

$$v = 331.5 + 0.607T_C$$

donde T_C es la temperatura Celsius. En aire seco, la temperatura disminuye casi 1 °C por cada 150 m de aumento en altura. (a) Suponga que este cambio es constante hasta una altura de 9 000 m. ¿Qué intervalo de tiempo se requiere para que el sonido de un avión que vuela a 9 000 m llegue al suelo en un día cuando la temperatura del suelo es de 30 °C? (b) **¿Qué pasaría si?** Compare su respuesta con el intervalo de tiempo requerido si el aire estuviese uniformemente a 30 °C. ¿Qué intervalo de tiempo es más largo?

- 30.** Una onda sonora se mueve en un cilindro, como en la figura 16.17. Demuestre que la variación de la presión de la onda es descrita por $\Delta P = \pm \rho v \omega \sqrt{s_{\text{máx}}^2 - s^2}$, donde $s = s(x,t)$ está dada por la ecuación 16.28.

SECCIÓN 16.8 Intensidad de ondas sonoras

- 31.** La intensidad de una onda sonora a una distancia fija de una bocina que vibra a 1.00 kHz es de 0.600 W/m². (a) Determine la intensidad que resulta si la frecuencia se aumenta a 2.50 kHz mientras se mantiene una amplitud de desplazamiento constante. (b) Calcule la intensidad si la frecuencia se reduce a 0.500 kHz y se duplica la amplitud de desplazamiento.
- 32.** La intensidad de una onda sonora a una distancia fija de una bocina que vibra a una frecuencia f es I . (a) Determine la intensidad que resulta si la frecuencia se aumenta a f' mientras se mantiene una amplitud de desplazamiento constante. (b) Calcule la intensidad si la frecuencia se reduce a $f/2$ y se duplica la amplitud de desplazamiento.
- 33.** La potencia de salida de cierta bocina pública es de 6.00 W. Suponga que transmite por igual en todas direcciones. (a) ¿Desde la bocina a qué distancia el sonido sería doloroso al oído? (b) ¿A qué distancia desde la bocina, el sonido sería apenas audible?
- 34.** Un cohete explota a una altura de 100 m sobre el suelo. Un observador en el suelo, directamente debajo de la explosión, experimenta una intensidad sonora promedio de 7.00×10^{-2} W/m² durante 0.200 s. (a) ¿Cuál es la energía sonora total de la explosión? (b) ¿Cuál es el nivel sonoro (en decibeles) que escucha el observador?

- 35.** Está trabajando en un anfiteatro al aire libre, donde los conciertos de rock ocurren regularmente. El lugar tiene potentes altavoces montados en columnas de 10.6 m de altura en varios lugares que rodean al público. Los altavoces emiten sonido uniformemente en todas las direcciones. Hay algunos peldaños que sobresalen de las columnas para ayudar a los trabajadores a reparar los altavoces. Muchas veces, los miembros de la audiencia rompen la valla protectora alrede-

dor de las columnas y trepan hacia arriba sobre las columnas para tener una mejor vista de los artistas. El próximo concierto será dado por un grupo que afirma que varios pulsos de sonido de muy alto volumen ocurren en sus conciertos, y estos sonidos son parte de su expresión artística. A los propietarios del anfiteatro les preocupa que las personas trepan las columnas y estén demasiado cerca de los altavoces cuando se emitan estos sonidos máximos. No quieren ser responsables de las lesiones de los oídos de los miembros de la audiencia. En función de las actuaciones anteriores del grupo, se determina que el nivel de sonido máximo es de 150 dB medido a 20.0 cm de los altavoces de las columnas. Los propietarios le piden determinar la altura sobre las columnas a la que hay que montar barricadas intransitables para evitar que la gente se acerque demasiado a los altavoces de sonido y escuchar por encima del umbral del dolor.

36. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Temprano, un sábado en la mañana, y para su desagrado, su vecino adyacente decide cortar el césped. Cuando usted intenta dormir, su vecino del otro lado también comienza a cortar el césped con una podadora idéntica; ambos vecinos están a la misma distancia de usted. Esta situación le es muy molesta porque ahora el sonido total tiene el doble de sonoridad que cuando sólo un vecino corta el césped.
37. Demuestre que la diferencia entre los niveles de decibels β_1 y β_2 de un sonido se relaciona con la razón de las distancias r_1 y r_2 desde la fuente de sonido mediante

$$\beta_2 - \beta_1 = 20 \log \left(\frac{r_1}{r_2} \right)$$

SECCIÓN 16.9 El efecto Doppler

38. El submarino A viaja horizontalmente a 11.0 m/s a través del agua en el océano. Emite una señal de sonar de frecuencia $f = 5.27 \times 10^3$ Hz en dirección hacia adelante. El submarino B está enfrente del submarino A y viaja a 3.00 m/s, respecto al agua, en la misma dirección que el submarino A. Un tripulante en el submarino B utiliza su equipo para detectar las ondas sonoras ("sonidos metálicos") del submarino A. Se desea determinar qué escucha el tripulante en el submarino B. (a) Un observador sobre qué submarino detecta una frecuencia f' como descrita por la ecuación 16.46? (b) En la ecuación 16.46, ¿el signo de v_s es positivo o negativo? (c) en la ecuación 16.46, ¿el signo de v_o es positivo o negativo? (d) En la ecuación 16.46, ¿qué rapidez de sonido debería emplearse? (e) Encuentre la frecuencia del sonido detectada por el tripulante en el submarino B.

39. Cuando partículas cargadas de alta energía se mueven a través de un medio transparente con una rapidez mayor que la rapidez de la luz en dicho medio, se produce una onda de choque, u onda de proa, de luz. Este fenómeno se llama *efecto Cerenkov*. Cuando un reactor nuclear se blindado mediante una gran alberca de agua, la radiación Cerenkov puede verse como un brillo azul en la vecindad del núcleo del reactor debido a electrones de alta rapidez moviéndose a través del agua (figura 16.39). En



Figura P16.39

U.S. Department of Energy/Science Source

un caso particular, la radiación Cerenkov produce un frente de onda con un semiángulo de vértice de 53.0° . Calcule la rapidez de los electrones en el agua. La rapidez de la luz en el agua es 2.25×10^8 m/s.

40. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* En los Juegos Olímpicos de Verano, una atleta corre con rapidez constante en línea recta mientras que un espectador cerca del extremo de la pista toca una nota con el silbato de frecuencia fija. Cuando la atleta rebasa el silbato, ella escucha que cae la frecuencia del silbato a la tercera menor. Es decir, la frecuencia que ella capta disminuye a cinco sextos de su valor original.

41. **Problema de repaso.** Un bloque con una bocina atornillada a él se conecta a un resorte que tiene una constante de resorte $k = 20.0$ N/m y oscila, como se muestra en la figura P16.41. La masa total del bloque y la bocina es de 5.00 kg, y la amplitud de movimiento de esta unidad es 0.500 m. La bocina emite ondas sonoras de frecuencia 440 Hz. Determine (a) la frecuencia más alta y (b) la frecuencia más baja escuchadas por la persona a la derecha de la bocina. (c) Si el nivel sonoro máximo que escucha la persona es 60.0 dB cuando está más cerca de la bocina a una distancia $d = 1.00$ m, ¿cuál es el nivel sonoro mínimo que escucha el observador?

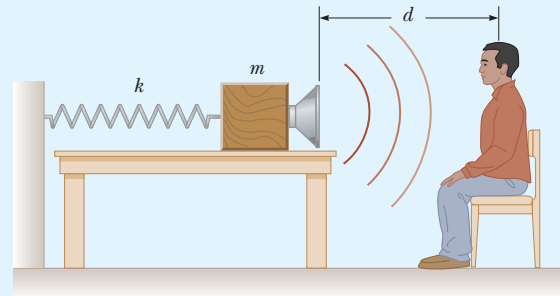


Figura P16.41 Problemas 41 y 42

42. **Problema de repaso.** Un bloque con una bocina atornillada a él se conecta a un resorte que tiene una constante de resorte k y oscila, como se muestra en la figura P16.41. La masa total del bloque y la bocina es m , y la amplitud de movimiento de esta unidad es A . La bocina emite ondas sonoras de frecuencia f . Determine (a) la frecuencia más alta y (b) la frecuencia más baja escuchadas por la persona a la derecha de la bocina. (c) Si el nivel sonoro máximo que escucha la persona es β cuando está más cerca de la bocina a una distancia d , ¿cuál es el nivel sonoro mínimo que escucha el observador?

PROBLEMAS ADICIONALES

43. Una onda sinusoidal en una cuerda se describe mediante la función de onda

$$y = 0.20 \sin(0.75\pi x + 18\pi t)$$

donde x y y están en metros y t en segundos. La cuerda tiene una densidad de masa lineal de 0.250 kg/m. La tensión en la cuerda la proporciona un arreglo como el que se ilustra en la figura P16.13. ¿Cuál es la masa del objeto suspendido?

44. La "ola" es un tipo particular de pulso que se puede propagar a través de una gran multitud reunida en un estadio deportivo (figura P16.4). Los elementos del medio son los espectadores, con posición cero cuando están sentados y posición máxima cuando están de pie y elevan sus brazos. Si una gran cantidad de espectadores participa en el movimiento ondulatorio, se desarrolla una forma de pulso estable. La rapidez de la onda depende del tiempo de reacción de las personas, que

por lo general es del orden de 0.1 s. Estime el orden de magnitud, en minutos, del intervalo de tiempo requerido para que tal pulso dé una vuelta completa en torno a un gran estadio deportivo. Establezca las cantidades que mida o estime y sus valores.

45. BIO Algunos estudios sugieren que el límite superior de frecuencia de audición está determinado por el diámetro del tímpano. El diámetro del tímpano es aproximadamente igual a la mitad de la longitud de onda de la onda sonora en este límite superior. Si esta relación es válida exactamente, ¿cuál es el diámetro del tímpano de una persona capaz de escuchar 20 000 Hz? (Suponga una temperatura corporal de 37.0 °C.)

46. C/C Un terremoto bajo el mar o un deslizamiento de Tierra puede producir una onda oceánica de corta duración transportando gran energía, llamada tsunami. Cuando su longitud de onda es grande comparada con la profundidad del océano d , la rapidez de una onda acuática está dada aproximadamente por $v = \sqrt{gd}$. Suponga que un terremoto ocurre a lo largo de la frontera de una placa tectónica que corre de norte a sur y produce una cresta de onda tsunami recta que en todas partes se mueve hacia el oeste. (a) ¿Qué cantidad física puede considerarse constante en el movimiento de cualquier cresta de onda? (b) Explique por qué la amplitud de la onda se incrementa conforme la onda se aproxima a la orilla. (c) Si la onda tiene una amplitud de 1.80 m cuando su rapidez es de 200 m/s, ¿cuál será su amplitud donde el agua tenga 9.00 m de profundidad? (d) Explique por qué se debe esperar que la amplitud sea mayor en la orilla, pero no se puede predecir significativamente mediante su modelo.

47. C/C Una onda sinusoidal en una cuerda se describe mediante la función de onda

$$y = 0.150 \text{ sen}(0.800x - 50.0t)$$

donde x y y están en metros y t en segundos. La masa por longitud de la cuerda es 12.0 g/m. (a) Encuentre la máxima aceleración transversal de un elemento de esta cuerda. (b) Determine la máxima fuerza transversal sobre un segmento de cuerda de 1.00 cm. (c) Establezca cómo se compara esta fuerza con la tensión en la cuerda.

48. S Una cuerda de masa total m y longitud L se suspende verticalmente. Un análisis muestra que para pulsos transversales cortos, las ondas a una corta distancia arriba del extremo libre se pueden representar, con buena aproximación, mediante la ecuación de onda lineal estudiada en la sección 16.5. Demuestre que un pulso transversal recorre la longitud de la cuerda en un intervalo de tiempo dado aproximadamente por $\Delta t \approx 2\sqrt{L/g}$. *Sugerencia:* Primero encuentre una expresión para la rapidez de onda en cualquier punto a una distancia x del extremo inferior, al considerar la tensión en la cuerda como resultado del peso del segmento debajo de dicho punto.

49. Un alambre de densidad ρ se afila de modo que su área de sección transversal varía con x de acuerdo con

$$A = 1.00 \times 10^{-5} x + 1.00 \times 10^{-6}$$

donde A está en metros cuadrados y x en metros. La tensión en el alambre es T . (a) Deduzca una relación para la rapidez de una onda como función de la posición. (b) ¿Qué pasaría si? Suponga que el alambre es de aluminio y está bajo una tensión $T = 24.0$ N. Determine la rapidez de onda en el origen y en $x = 10.0$ m.

50. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Los tsunamis son ondas en el océano que tienen enormes longitudes de onda (100 a 200 km), y la rapidez de propagación para estas ondas

es $v \approx \sqrt{gd_{\text{prom}}}$, donde d_{prom} es la profundidad promedio del agua. Un terremoto en el lecho marino en el Golfo de Alaska produce un tsunami que llega a Hilo, Hawái, a una distancia de 4 450 km, en un intervalo de tiempo de 5.88 h. (Este método se utilizó en 1856 para estimar la profundidad promedio del Océano Pacífico antes de las determinaciones directas acústicas.)

51. S Un pulso que viaja a lo largo de una cuerda con densidad de masa lineal μ se describe mediante la función de onda

$$y = [A_0 e^{-bx}] \text{ sen}(kx - \omega t)$$

donde el factor entre corchetes se dice que es la amplitud. (a) ¿Cuál es la potencia $P(x)$ que porta esta onda en un punto x ? (b) ¿Cuál es la potencia $P(0)$ que porta esta onda en el origen? (c) Calcule la razón $P(x)/P(0)$.

52. El silbato de un tren ($f = 400$ Hz) suena más alto o más bajo en frecuencia dependiendo de si se aproxima o se aleja. (a) Demuestre que la diferencia en frecuencia del silbato, si se acerca o se aleja es

$$\Delta f = \frac{2u/v}{1 - u^2/v^2} f$$

donde u es la rapidez del tren y v es la rapidez del sonido. (b) Calcule esta diferencia para un tren moviéndose con una rapidez de 130 km/s. Considere que la rapidez del sonido en aire es 340 m/s.

53. AMT C/C **Problema de repaso.** Un deslizador de 150 g se mueve a $v_1 = 2.30$ m/s sobre un riel de aire hacia un deslizador de 200 g originalmente estacionario, como se muestra en la figura P16.53. Los deslizadores experimentan una colisión completamente inelástica y quedan unidos durante un intervalo de tiempo de 7.00 ms. Un estudiante sugiere que aproximadamente la mitad de la energía mecánica perdida del sistema de dos deslizadores se transfiere al ambiente en forma de sonido. ¿Esta sugerencia es razonable? Para evaluar la idea, encuentre el nivel sonoro implicado en una posición 0.800 m de los deslizadores. Si la idea del estudiante no es razonable, sugiera una mejor idea.

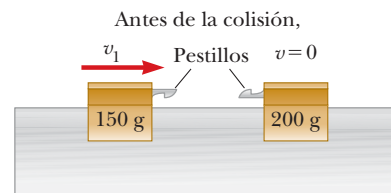


Figura P16.53

54. C/C Considere la siguiente función de onda en unidades SI:

$$\Delta P(r, t) = \left(\frac{25.0}{r}\right) \text{ sen}(1.36r - 2030t)$$

Explique cómo esta función de onda puede aplicarse a una onda que radia desde una fuente pequeña, con r como la distancia radial desde el centro de la fuente hasta cualquier punto afuera de la fuente. Dé la descripción más detallada que pueda de la onda. Incluya respuestas a preguntas como las siguientes y dé valores representativos para cualesquiera cantidades que puedan ser evaluadas. (a) ¿La onda se mueve más hacia la derecha o la izquierda? (b) Mientras se aleja de la fuente, ¿qué sucede con su amplitud?, (c) ¿su rapidez?, (d) ¿su frecuencia?, (e) ¿su longitud de onda?, (f) ¿su potencia?, (g) ¿su intensidad?



55. Con métodos experimentales particulares, es posible producir y observar en una larga barra delgada tanto una onda transversal cuya rapidez depende principalmente de la tensión en la barra como una onda longitudinal cuya rapidez está determinada por el módulo de Young y la densidad del material de acuerdo a la expresión $v = \sqrt{Y/\rho}$. La onda transversal se puede modelar como una onda en una cuerda estirada. Una barra metálica particular tiene 150 cm de largo y un radio de 0.200 cm y una masa de 50.9 g. El módulo Young para el material es 6.80×10^{10} N/m². ¿Cuál debe ser la tensión en la barra si la razón de la rapidez de las ondas longitudinales a la rapidez de las ondas transversales es 8.00?

56. Un gran conjunto de gradas de fútbol desocupadas tiene asientos sólidos y elevadores. Usted está de pie en el campo enfrente de las gradas y aplaude bruscamente una vez con dos tableros de madera. El pulso sonoro que produce no tiene frecuencia ni longitud de onda definidas. El sonido que escucha reflejado de las gradas tiene una frecuencia identificable y puede recordarle una breve nota de trompeta, de un zumbador o flauta de un solo agujero. (a) Explique este sonido. Calcule una estimación del orden de magnitud para (b) la frecuencia, (c) la longitud de onda y (d) la duración del sonido, sobre la base de los datos que especifique.

PROBLEMAS DE DESAFÍO

57. Una cuerda en un instrumento musical se mantiene bajo tensión T y se extiende desde el punto $x = 0$ hasta el punto $x = L$. La cuerda está devanada con alambre de forma que su masa por unidad de longitud $\mu(x)$ aumenta uniformemente de μ_0 en $x = 0$ a μ_L en $x = L$. (a) Encuentre una expresión para $\mu(x)$ como una función de x sobre el intervalo $0 \leq x \leq L$. (b) Encuentre una expresión para el intervalo de tiempo requerido para que un pulso transversal recorra la longitud de la cuerda.

58. Suponga que un objeto de masa M está suspendido de la parte baja de la cuerda de masa m y longitud L del problema 48. (a) Demuestre que el intervalo de tiempo para que un pulso transversal recorra la longitud de la cuerda es

$$\Delta t = 2 \sqrt{\frac{L}{mg}} (\sqrt{M+m} - \sqrt{M})$$

b) ¿Qué pasaría si? Demuestre que la expresión en el inciso (a) se reduce al resultado del problema 48 cuando $M = 0$. (c) Demuestre que para $m \ll M$, la expresión en el inciso (a) se reduce a

$$\Delta t = \sqrt{\frac{mL}{Mg}}$$

59. La ecuación 16.40 afirma que a una distancia r de una fuente puntual con potencia (*Potencia*)_{prom}, la intensidad de onda es

$$I = \frac{(\text{Potencia})_{\text{prom}}}{4\pi r^2}$$

Estudie la figura 16.25 y demuestre que a una distancia r justo enfrente de una fuente puntual con potencia (*Potencia*)_{prom} que se mueve con rapidez constante v_s , la intensidad de onda es

$$I = \frac{(\text{Potencia})_{\text{prom}}}{4\pi r^2} \left(\frac{v - v_s}{v} \right)$$

60. En la sección 16.7, se dedujo la rapidez del sonido en un gas mediante el teorema impulso-momento aplicado al cilindro de gas en la figura 16.20. Ahora se encontrará la rapidez del sonido en un gas empleando un distinto enfoque basado en el elemento de gas en la figura 16.18. Proceda como sigue. (a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para este elemento que muestre las fuerzas ejercidas sobre las superficies izquierda y derecha debido a la presión del gas sobre cualquier lado del elemento. (b) Aplique la segunda ley de Newton al elemento para demostrar que

$$-\frac{\partial(\Delta P)}{\partial x} A \Delta x = \rho A \Delta x \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

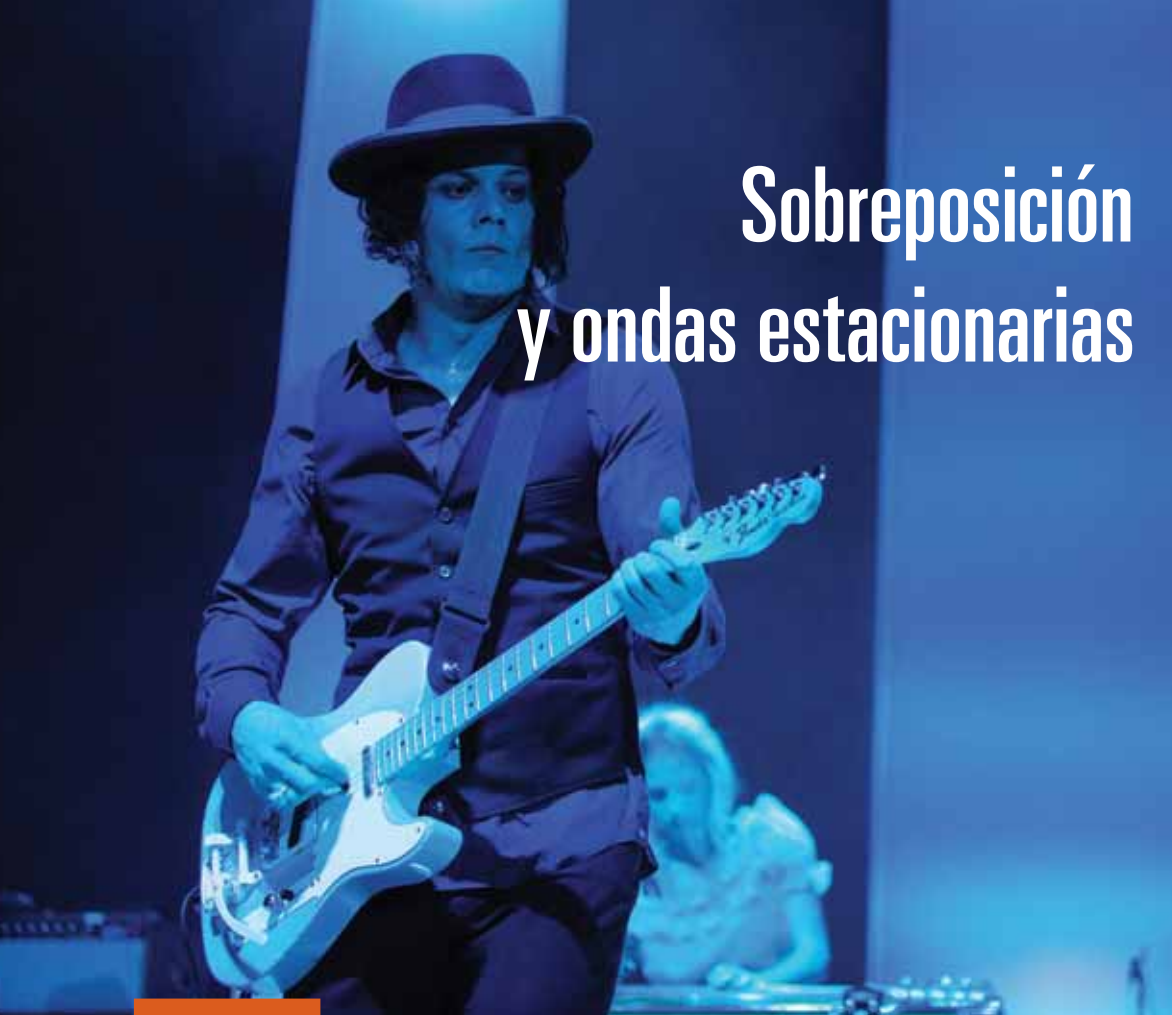
(c) Sustituya $\Delta P = -(B \partial s / \partial x)$ (ecuación 16.30), y obtenga la siguiente ecuación de onda para el sonido

$$\frac{B}{\rho} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

(d) Para un físico matemático, esta ecuación demuestra la existencia de ondas sonoras y determina su rapidez. Como estudiante de física, usted debe dar otro paso o dos. Sustituya en la ecuación de onda la solución de prueba $s(x,t) = s_{\text{máx}} \cos(kx - \omega t)$. Demuestre que esta función satisface la ecuación de onda, siempre que $\omega/k = v = \sqrt{B/\rho}$.



Sobreposición y ondas estacionarias



El guitarrista Jack White aprovecha las ondas estacionarias sobre las cuerdas. Cambia a notas más altas en la guitarra empujando las cuerdas contra los trastes en el diapasón, acortando las longitudes de las partes de las cuerdas que vibran. (Mat Hayward/Shutterstock.com)

IMAGINE Su compañera de habitación anterior se mudó para vivir en un departamento. Usted acaba de conocer a su nueva compañera de cuarto. Una noche, su compañera de habitación le muestra la guitarra que usa cuando se presenta en un grupo musical. No tiene idea de cómo tocar la guitarra, pero sí sabe sobre la música de sus experiencias en el coro de la escuela secundaria. Intuitivamente, empieza a tocar las cuerdas mientras su compañera de cuarto comienza a revisar su libro de texto de física. Ha visto guitarristas presionando sus dedos en los trastes, como hace Jack White arriba, así que hace lo mismo. Durante sus exploraciones, observa lo siguiente. Puntea una cuerda abierta y luego coloca su dedo *ligeramente* en el punto medio de la cuerda. Cuando puntea la cuerda ahora, la nota está una octava por encima de la cuerda abierta. Y hay algo diferente sobre la naturaleza del sonido, aparte de que es una octava más alta. Continúa experimentando y descubre que puede generar notas más altas que tienen una relación musical con la cuerda abierta al tocar ligeramente en otros puntos, como un tercio de la longitud de la cuerda y un cuarto de la longitud. Le pregunta a su compañera de habitación sobre este fenómeno. Ella menciona algo sobre “armónicos” y le dice que lea el capítulo 17 en su libro de texto.

CONEXIONES Este capítulo continúa nuestros estudios de las ondas que comenzaron en el capítulo 16. Hemos visto que las ondas son muy diferentes de las partículas. Una partícula de tamaño cero, mientras que una onda tiene un tamaño característico, su longitud de onda. Otra diferencia importante entre las ondas y las partículas es que podemos explorar la posibilidad de que dos o más ondas se combinen en un punto en el mismo medio. Las partículas se pueden combinar para formar objetos extendidos, pero las partículas deben estar en *diferentes* posiciones. Por el contrario, dos ondas pueden estar presentes en el mismo lugar. Las ramificaciones de esta posibilidad se exploran en este capítulo. Cuando las ondas se combinan en sistemas con condiciones de fron-

- 17.1 Modelo de análisis:
Ondas en interferencia
- 17.2 Ondas estacionarias
- 17.3 Efectos de frontera:
Reflexión y transmisión
- 17.4 Modelo de análisis:
Ondas bajo
condiciones de
frontera
- 17.5 Resonancia
- 17.6 Ondas estacionarias en
columnas de aire
- 17.7 Batimientos:
interferencia en el
tiempo
- 17.8 Patrones de onda no
sinusoidales



tera, solo pueden existir ciertas frecuencias permitidas y decimos que las frecuencias están *cuantizadas*. La cuantización es una noción que está en el corazón de la mecánica cuántica, un tema introducido formalmente en el capítulo 40. En los capítulos 40-44, mostramos que el análisis de las ondas bajo condiciones de frontera explica muchos de los fenómenos cuánticos estudiados allí. En este capítulo, utilizamos la cuantización para comprender el comportamiento de la amplia gama de instrumentos musicales que se basan en cuerdas y columnas de aire.

17.1 Modelo de análisis: Ondas en interferencia

Muchos fenómenos ondulatorios interesantes en la naturaleza no se pueden describir mediante una sola onda viajera. En vez de ello, se debe analizar estos fenómenos en términos de una combinación de ondas viajeras. Como se señaló en la introducción, las ondas tienen una diferencia notable de las partículas en que las ondas se pueden combinar en el *mismo* lugar en el espacio. Para analizar tales combinaciones de onda, hacemos uso del **principio de sobreposición**:

Principio de sobreposición ►

Si dos o más ondas viajeras se mueven a través de un medio, el valor resultante de la función de onda en cualquier punto es la suma algebraica de los valores de las funciones de onda de las ondas individuales.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 17.1

¿Las ondas realmente interfieren? En el uso popular el término *interferir* implica que un agente afecta una situación en alguna forma, de modo que evita que algo ocurra. Por ejemplo, en el fútbol americano, *interferencia de pase* significa que un jugador defensivo afectó al receptor de modo que el receptor fue incapaz de atrapar el balón. Este uso es muy diferente del dado en física, donde las ondas pasan una a través de otra e interfieren, pero no se afectan mutuamente en forma alguna. En física, *interferencia* es similar al *concepto de combinación*, como se describe en este capítulo.

Las ondas que obedecen a este principio se llaman *ondas lineales*. (Vea la sección 16.5). En el caso de ondas mecánicas, las ondas lineales generalmente se caracterizan por tener las amplitudes mucho menores que sus longitudes de onda. Las ondas que violan el principio de sobreposición se llaman *ondas no lineales* y con frecuencia se caracterizan por grandes amplitudes. En este libro, sólo se tratará con ondas lineales.

Una consecuencia del principio de la sobreposición es que dos ondas viajeras pueden pasar a través de la otra sin destruirse o alterarse. Por ejemplo, cuando se lanzan dos piedras en un estanque y golpean la superficie en diferentes lugares, las ondas circulares superficiales que se expanden de dos ubicaciones simplemente pasan una sobre otra sin efecto permanente. El patrón complejo resultante se puede considerar como dos conjuntos independientes de círculos en expansión.

La figura 17.1 es una representación pictórica de la sobreposición de dos pulsos. La función de onda para el pulso móvil hacia la derecha es y_1 , y la función de onda para el pulso moviéndose hacia la izquierda es y_2 . Los pulsos tienen la misma rapidez, pero diferentes formas, y el desplazamiento de los elementos del medio está en la dirección positiva y para ambos pulsos. Cuando las ondas se traslapan (figura 17.1b), la función de onda de la onda compleja resultante está dada por $y_1 + y_2$. Cuando las crestas de los pulsos coinciden (figura 17.1c), la onda resultante dada por $y_1 + y_2$ tiene una amplitud mayor que la de los pulsos individuales. Finalmente los dos pulsos se separan y se continúan moviendo en sus direcciones originales (figura 17.1 d). Advierta que las formas de pulso permanecen sin cambios después de la interacción, como si los dos pulsos no se hubiesen encontrado.

La combinación de ondas separadas en la misma región del espacio para producir una onda resultante se denomina **interferencia**. Cuando los desplazamientos causados por los dos pulsos están en la misma dirección, como en la figura 17.1, nos referimos a esta sobreposición como **interferencia constructiva**.

Ahora considere dos pulsos que viajan en direcciones opuestas en una cuerda tensa donde un pulso se invierte en relación con el otro como se ilustra en figura 17.2. Cuando estos pulsos se sobreponen, el pulso resultante está dada por $y_1 + y_2$, pero los valores de la función y_2 son negativos. Por tanto, en el instante que se muestra en la figura 17.2c, la amplitud de las ondas combinadas es menor que la de las ondas individuales. Otra vez, los dos pulsos pasan uno a través del otro; sin embargo, ya que los desplazamientos causados por los dos pulsos están en direcciones opuestas, nos referimos a su sobreposición como **interferencia destructiva**.

El principio de la sobreposición es la composición central del análisis de modelo llamado **ondas en interferencia**. En muchas situaciones, tanto en acústica como en óptica,

Interferencia constructiva ►

Interferencia destructiva ►



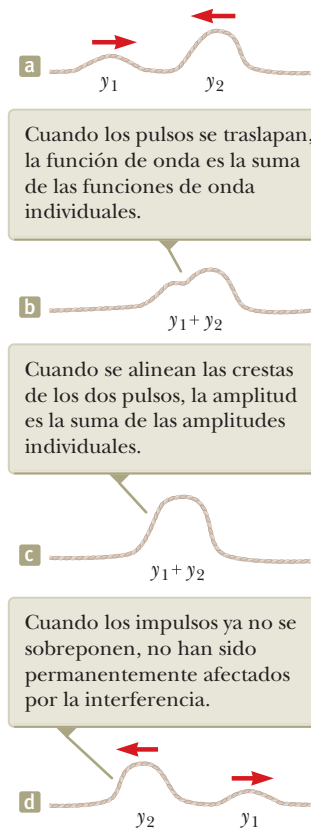


Figura 17.1 Interferencia constructiva. Dos pulsos positivos viajan sobre una cuerda estirada en direcciones opuestas y se traslapan.

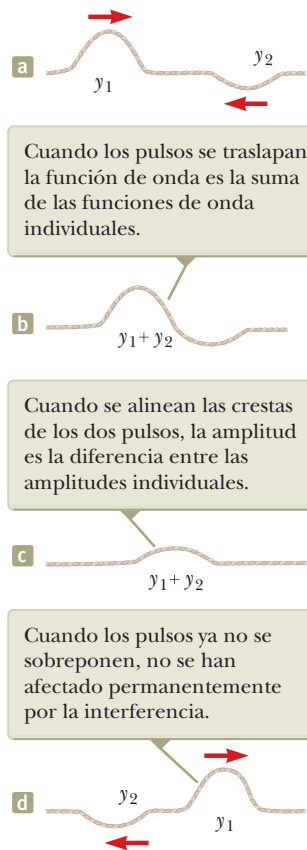


Figura 17.2 Interferencia destructiva. Dos pulsos, uno positivo y uno negativo, viajan con una cuerda estirada en direcciones opuestas y se traslapan.

las ondas se combinan de acuerdo con este principio y presentan fenómenos interesantes con aplicaciones prácticas.

- E XAMEN RÁPIDO 17.1** Dos pulsos se mueven en direcciones opuestas sobre una cuerda y son idénticos en forma, excepto que uno tiene desplazamientos positivos de los elementos de la cuerda y el otro tiene desplazamientos negativos. En el momento en que los dos pulsos se traslapan por completo en la cuerda, ¿qué sucede? (a) La energía asociada con los pulsos desaparece. (b) La cuerda no es móvil. (c) La cuerda forma una línea recta. (d) Los pulsos desaparecen y no reaparecerán.

Sobreposición de ondas sinusoidales

Ahora se aplicará el principio de sobreposición de dos ondas sinusoidales viajando en la misma dirección en un medio lineal. La figura 17.3 muestra un dispositivo simple que podría crear esta situación para las ondas de sonido. El sonido de un altavoz S se envía a un tubo en el punto P, donde hay una unión en forma de T. La mitad de la energía del sonido viaja en una dirección, y la mitad viaja en la dirección opuesta. Por tanto, las ondas de sonido que llegan al receptor R pueden viajar a lo largo de cualquiera de las dos trayectorias. La distancia a lo largo de cualquier camino desde el altavoz al receptor se denomina *longitud de trayectoria* r . La longitud de trayectoria inferior r_1 es fija, pero la longitud de trayectoria superior r_2 puede variarse deslizando el tubo en forma de U, que es similar al de un trombón deslizante. Esta capacidad nos permite variar la diferencia de fase entre las ondas que llegan a Q. Después de que las ondas de sonido llegan a Q, se combinan y viajan juntas hacia la derecha desde ese punto hasta el receptor R.

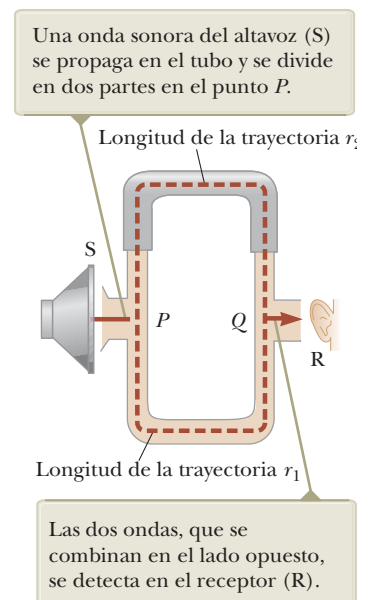


Figura 17.3 Un sistema acústico para la demostración de interferencia de ondas sonoras. Puede variar la trayectoria superior de longitud r_2 deslizando la parte superior.

Si las dos ondas están viajando hacia la derecha y tienen la misma frecuencia, longitud de onda y amplitud, pero difieren en fase, podemos expresar sus funciones de onda individuales como

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t) \quad y_2 = A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

donde, como de costumbre, $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi f$ y ϕ es la constante de fase como se analizó en la sección 16.2. Por tanto, es la función de onda resultante

$$y = y_1 + y_2 = A [\sin(kx - \omega t) + \sin(kx - \omega t + \phi)]$$

Para simplificar esta expresión, utilizamos la identidad trigonométrica

$$\sin a + \sin b = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Haciendo $a = kx - \omega t$ y $b = kx - \omega t + \phi$, encontramos que la función de onda resultante y se reduce a

$$y = 2A \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

Resultante de dos ondas sinusoidales progresivas ▶

Este resultado tiene varias características importantes. La función de onda resultante y también es sinusoidal y tiene la misma frecuencia y longitud de onda que las ondas individuales debido a que la función seno incorpora los mismos valores de k y ω que aparecen en las funciones de onda originales. La amplitud de la onda resultante es $2A \cos(\phi/2)$, y su constante de fase es $\phi/2$. Investiguemos los resultados para diferentes valores de ϕ . Si la constante de fase ϕ de la onda original es igual a 0, entonces $\cos(\phi/2) = \cos 0 = 1$ y la amplitud de la onda resultante es $2A$, dos veces la amplitud de cada onda individual. Esto puede ocurrir en la figura 17.3 cuando la diferencia en las longitudes de trayectoria $\Delta r = |r_2 - r_1|$ es cero o un múltiplo entero de la longitud de onda λ (es decir, $\Delta r = n\lambda$, donde $n = 0, 1, 2, 3, \dots$). En este caso, las crestas de las dos ondas están en las mismas ubicaciones en el espacio y se dice que las ondas se están en todas partes *en fase* y por tanto interfieren constructivamente. Las ondas individuales y_1 y y_2 se combinan para formar la curva rojo marrón y de amplitud $2A$ que se muestra en la figura 17.4a. Puesto que las ondas individuales están en fase, son indistinguibles en la figura 17.4a, donde aparecen como una sola curva azul. En general, se produce interferencia constructiva cuando $\cos(\phi/2) = \pm 1$. Es cierto, por ejemplo, que cuando $\phi = 0, 2\pi, 4\pi$, rad, es decir, cuando ϕ es un múltiplo *par* de π .

Cuando ϕ es igual a π rad o cualquier múltiplo *impar* de π , entonces $\cos(\phi/2) = \cos(\pi/2) = 0$ y las crestas de una onda se producen en las mismas posiciones como los canales

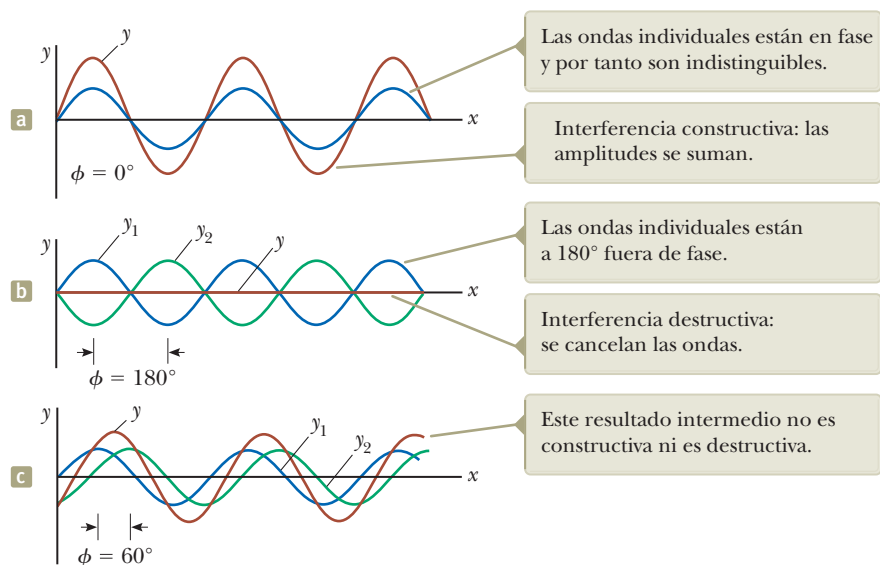


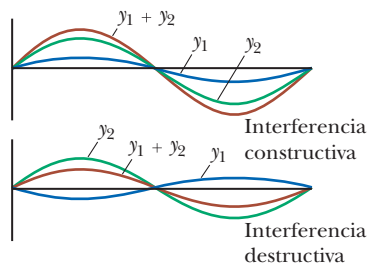
Figura 17.4 La sobreposición de dos ondas idénticas y_1 y y_2 (azul y verde, respectivamente) para producir una onda resultante (rojizo).

de la segunda onda como se muestra con las curvas azul y verde en la figura 17.4b. Esto se puede establecer en la figura 17.3 cuando la longitud del camino r_2 se ajusta de modo que la diferencia de trayectoria sea $\Delta r = \lambda/2, 3\lambda/2, \dots, n\lambda/2$ (para n impar). En este caso, como consecuencia de la interferencia destructiva, la onda resultante tiene amplitud cero en todas partes como se muestra con la línea roja marrón en la figura 17.4b. Finalmente, cuando la constante de fase tiene un valor distinto de 0 o un múltiplo entero arbitrario de π rad (figura 17.4 c), la onda resultante tiene una amplitud cuyo valor está entre 0 y $2A$.

En el caso más general en el cual las ondas tienen la misma longitud de onda, pero diferentes amplitudes, los resultados son similares con las siguientes excepciones. En el caso en fase, la amplitud de la onda resultante no es dos veces el de una sola onda, sino más bien es la suma de las amplitudes de las dos ondas. (Consulte la figura en el cuadro de Modelo de análisis a continuación). Cuando las ondas están π rad fuera de fase, no se cancelan completamente como en la figura 17.4b. El resultado es una onda cuya amplitud es la diferencia entre las amplitudes de las ondas individuales.

MODELO DE ANÁLISIS Ondas en interferencia

Imagine dos ondas que viajan en el mismo lugar a través de un medio. El desplazamiento de los elementos del medio se ve afectado por dos ondas. De acuerdo con el **principio de superposición**, el desplazamiento es la suma de los desplazamientos individuales que podría ser causado por cada onda. Cuando las olas están en fase, se produce **interferencia constructiva** y el desplazamiento resultante es más grande que los desplazamientos individuales. Se produce **interferencia destructiva** cuando las ondas están desfasadas.



Ejemplos:

- un afinador de pianos escucha una cuerda de piano y un diapasón vibrando juntos y observa el ritmo (sección 17.7)
- se combinan ondas de luz de dos fuentes coherentes para formar un patrón de interferencia en una pantalla (capítulo 36)
- una delgada película de aceite sobre agua muestra remolinos de color (capítulo 36)
- los rayos x pasando a través de un sólido cristalino se combinan para formar un patrón de Laue (capítulo 37)

Ejemplo 17.1 Dos bocinas accionadas por la misma fuente

Dos bocinas idénticas colocadas con una separación de 3.00 m son accionadas por el mismo oscilador (figura 17.5). Un escucha está originalmente en el punto O , situado a 8.00 m del centro de la recta que conecta a los dos bocinas. Luego el escucha se traslada al punto P , que está a una distancia perpendicular de 0.350 m de O , y experimenta el *primer mínimo* de intensidad del sonido. ¿Cuál es la frecuencia del oscilador?

SOLUCIÓN

Conceptualizar En la figura 17.3, una onda sonora entra en un tubo y después *acústicamente* se divide en dos trayectorias diferentes antes de recombinarse en el otro extremo. En este ejemplo, una señal que representa el sonido está *eléctricamente* dividida y sale a dos bocinas diferentes. Después de salir de los altavoces, las ondas sonoras se recombinan en la posición del escucha. A pesar de la diferencia en cómo se produce la división, en este caso aplica la explicación de la diferencia de trayectoria vista en la figura 17.3.

Categorizar Ya que las ondas sonoras de dos fuentes separadas se combinan, aplicamos el análisis de modelo de *ondas en interferencia*.

Analizar La figura 17.5 muestra la disposición física de las bocinas, junto con dos triángulos rectángulos sombreados que pueden dibujarse sobre la base de las longitudes descritas en el problema. El primer mínimo se produce cuando las dos ondas llegan al escucha en el punto P están a 180° fuera de fase, en otras palabras, cuando su diferencia de trayectoria Δr es igual a $\lambda/2$.

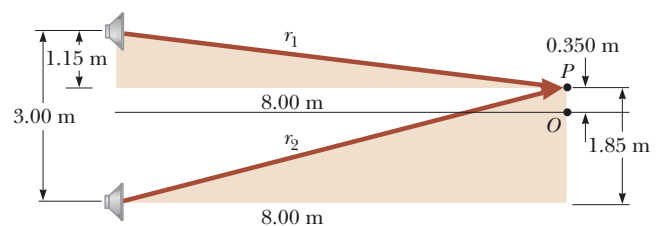


Figura 17.5 (Ejemplo 17.1) Dos bocinas idénticas emiten ondas sonoras para un escucha en P .

continúa

17.1 continuación

A partir de los triángulos sombreados, determine las longitudes de trayectoria de las bocinas al escucha:

$$r_1 = \sqrt{(8.00 \text{ m})^2 + (1.15 \text{ m})^2} = 8.08 \text{ m}$$

$$r_2 = \sqrt{(8.00 \text{ m})^2 + (1.85 \text{ m})^2} = 8.21 \text{ m}$$

Por eso, la diferencia de trayectoria es $r_2 - r_1 = 0.13 \text{ m}$. Ya que esta diferencia de trayectoria debe ser igual a $\lambda/2$ para el primer mínimo, $\lambda = 0.26 \text{ m}$.

Para obtener la frecuencia del oscilador, utilice ecuación 16.12, $v = \lambda f$, donde v es la rapidez del sonido en el aire, 343 m/s :

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{343 \text{ m/s}}{0.26 \text{ m}} = 1.3 \text{ kHz}$$

Finalizar Este ejemplo permite entender por qué se deben conectar correctamente los alambres de un sistema estéreo de bocinas. Cuando se conectan al revés, es decir, cuando el cable positivo (o rojo) está conectado al borne negativo (o negro) en una de las bocinas y la otra está conectado correctamente, se dice que las bocinas están “fuera de fase”, con una bocina moviéndose hacia afuera mientras que la otra se mueve hacia el interior. En consecuencia, la onda sonora que proviene de

una bocina destructivamente interfiere con la onda proveniente de la otra en el punto O de la figura 17.5. Una región de enrarecimiento debida a una bocina se sobrepone en una región de compresión de la otra bocina. Aunque los dos sonidos probablemente no se cancelan totalmente entre sí (porque generalmente no son idénticas las señales estereofónicas derecha e izquierda), se presenta una pérdida sustancial de la calidad sonora en el punto O .

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si las bocinas se conectaran fuera de fase? ¿Qué sucede en el punto P en la figura 18.5?

Respuesta En esta situación, la diferencia de trayectoria de $\lambda/2$ se combina con una diferencia de fase de $\lambda/2$ debido al cableado incorrecto para dar una diferencia de fase completa de λ . Como resultado, las ondas están en fase y hay una intensidad *máxima* en el punto P .

17.2 Ondas estacionarias



Figura 17.6 Dos bocinas idénticas emiten ondas sonoras una hacia otra. Cuando se traslapan, las ondas idénticas que viajan en direcciones opuestas se combinarán para formar ondas estacionarias.

Las ondas sonoras del par de bocinas del ejemplo 17.1 salen de las bocinas hacia adelante, y hacen interferencia en un punto enfrente de las bocinas. Suponga que gira 90° las bocinas de modo que una quede frente a la otra, como en la figura 17.6 y luego hace que emitan sonido a la misma frecuencia y amplitud. En esta situación dos ondas idénticas viajan en direcciones opuestas en el mismo medio. Dichas ondas se combinan de acuerdo con el modelo de ondas en interferencia.

Se puede analizar esta situación considerando funciones de onda para dos ondas sinusoidales transversales que tengan la misma amplitud, frecuencia y longitud de onda pero que viajen en direcciones opuestas en el mismo medio:

$$y_1 = A \sin(kx - \omega t) \quad y_2 = A \sin(kx + \omega t)$$

donde y_1 representa una onda que viaja en la dirección $+x$ y y_2 representa una que viaja en la dirección $-x$. Al sumar estas dos funciones da la función de onda resultante y :

$$y = y_1 + y_2 = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t)$$

Cuando se usa la identidad trigonométrica $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$, esta expresión se reduce a

$$y = (2A \sin kx) \cos \omega t \quad (17.1)$$

La ecuación 17.1 representa la función de onda de una **onda estacionaria**. Una onda estacionaria, como la de una cuerda que se muestra en la figura 17.7, es un patrón de oscilación *con un contorno estacionario* que resulta de la sobreposición de dos ondas idénticas que viajan en direcciones opuestas.

Observe que la ecuación 17.1 no contiene una función de $kx - \omega t$. Por tanto, no es una expresión para una sola onda viajera. Cuando usted observa una onda estacionaria, no hay sentido de movimiento en la dirección de propagación de cualquier onda original. Si observara el movimiento de la cuerda en la figura 17.7, no vería ningún movimiento hacia la izquierda o hacia la derecha. Solo vería el movimiento hacia arriba y hacia abajo



La amplitud de la oscilación vertical de cualquier elemento de la cuerda depende de la posición horizontal del elemento. Cada elemento vibra dentro de los límites de la función de envolvente $2A \sin kx$.

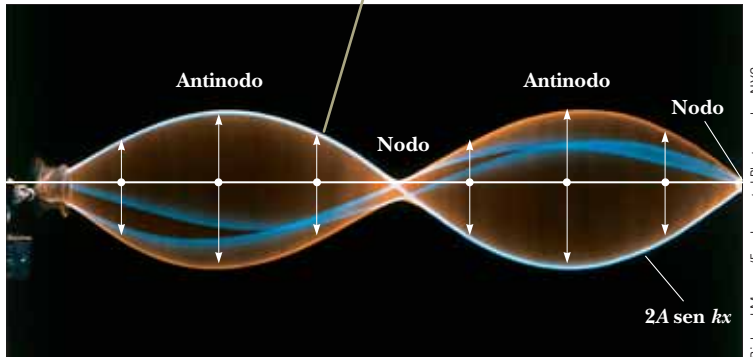


Figura 17.7 Fotografía multi-flash de una onda estacionaria en una cuerda. Los límites de movimiento de la cuerda se ven como ondas sinusoidales de color azul claro y naranja, mientras que dos posiciones intermedias de la cuerda se ven como azul más oscuro. El comportamiento temporal del desplazamiento vertical del equilibrio de un elemento individual de la cuerda viene dado por $\cos \omega t$. Es decir, cada elemento vibra a una frecuencia angular ω .

de los elementos de la cuerda. Al comparar la ecuación 17.1 con la ecuación 15.6, es clara la descripción de una clase especial de movimiento armónico simple. Cada elemento del medio oscila en movimiento armónico con la misma frecuencia angular ω (de acuerdo con el factor $\cos \omega t$ en la ecuación). Sin embargo, la amplitud del movimiento armónico simple de un elemento (dada por el factor $2A \sin kx$, el coeficiente de la función coseno) depende de la ubicación x del elemento en el medio.

Si puede hacer un teléfono con un cordón enrollado conecte el auricular con una unidad base, puede ver la diferencia entre una onda permanente y una onda viajera. Estire el cordón enrollado y chasquéelo con un dedo. Verá que un pulso viaja a lo largo de la cuerda. Ahora sacuda el auricular arriba y abajo y ajuste su frecuencia de sacudida hasta que cada rollo sobre la cuerda suba al mismo tiempo y luego baje. Está una onda estacionaria, formada por la combinación de las ondas que se alejan de su mano y que se reflejan de la unidad base hacia su mano. Observe que no hay ningún sentido del viaje a lo largo del cordón como lo había para el pulso. Sólo ve altibajos del movimiento de los elementos del cordón.

La ecuación 17.1 muestra que la amplitud del movimiento armónico simple de un elemento del medio tiene un valor mínimo de cero cuando x satisface la condición $\sin kx = 0$, es decir, cuando

$$kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

Ya que $k = 2\pi/\lambda$, estos valores para kx producen

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots = \frac{n\lambda}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17.2)$$

Estos puntos de amplitud cero se llaman **nodos**. Mire si puede sacudir el cable de teléfono enrollado a una frecuencia más alta para generar una onda con un nodo en medio, como se muestra en la figura 17.7

El elemento del medio con el *mayor* desplazamiento posible desde el equilibrio tiene una amplitud de $2A$, que se define como la amplitud de la onda estacionaria. Las posiciones en el medio donde se presenta este desplazamiento máximo se llaman **antinodos**. Los antinodos se ubican en posiciones que satisfacen la condición $\sin kx = \pm 1$ de la coordenada x , es decir, cuando

$$kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

Por tanto, las posiciones de los antinodos están dadas por valores impares de n :

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots = \frac{n\lambda}{4} \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (17.3)$$

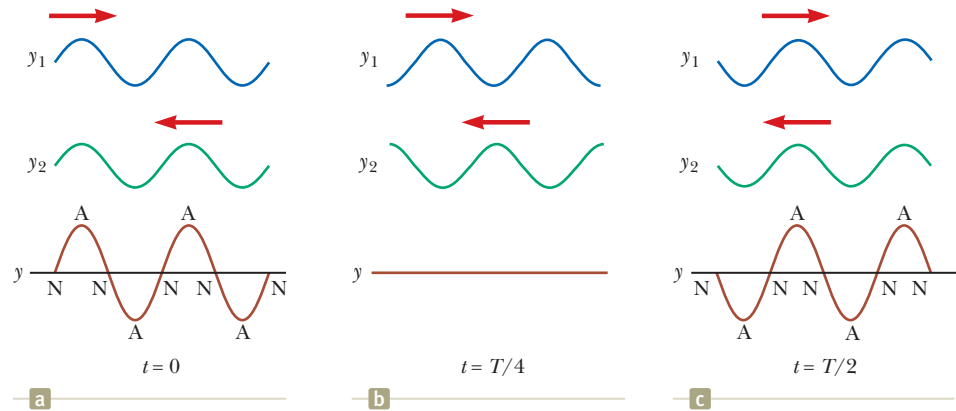
PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 17.2

Tres tipos de amplitud Es necesario distinguir con claridad entre la **amplitud de las ondas individuales**, que es A , y la **amplitud del movimiento armónico simple de los elementos del medio**, que es $2A \sin kx$. Un elemento determinado en una onda estacionaria vibra dentro de las restricciones de la función *envolvente* $2A \sin kx$, donde x es la posición en el medio de dicho elemento. Tal vibración está en contraste con las ondas sinusoidales viajeras, en las que todos los elementos oscilan con la misma amplitud y la misma frecuencia y la amplitud A de la onda es la misma que la amplitud A del movimiento armónico simple de los elementos. Además, se puede identificar la **amplitud de la onda estacionaria** como $2A$

◀ Posición de nodos

◀ Posiciones de antinodos

Figura 17.8 Patrones de onda estacionaria producidos en diferentes momentos por dos ondas de igual amplitud que viajan en direcciones opuestas. Para la onda resultante y , los nodos (N) son puntos de desplazamiento cero y los antinodos (A) son puntos de desplazamiento máximo. Se reconocen dos longitudes de onda para cada onda progresiva, por lo que los patrones de ondas estacionarias muestran el doble de antinodos que el de la figura 17.7.



En la figura 17.7 se etiquetan dos nodos y dos antinodos en la onda estacionaria. La curva azul claro etiquetada $2A \sin kx$ en la figura 17.7 representa una longitud de onda de las ondas viajeras que se combinan para formar la onda estacionaria. La figura 17.7 y las ecuaciones 17.2 y 17.3 proporcionan las siguientes características de las ubicaciones de nodos y antinodos:

- La distancia entre antinodos adyacentes es igual a $\lambda/2$.
- La distancia entre nodos adyacentes es igual a $\lambda/2$.
- La distancia entre un nodo y un antinodo adyacente es $\lambda/4$.

En la fotografía de la figura 17.7, la frecuencia de las ondas es tan alta que se producen varias oscilaciones de los elementos de la cuerda durante el intervalo de tiempo durante el cual el obturador de la cámara está abierto. Reduzcamos las cosas un poco. Los patrones de onda de los elementos del medio producidos en varios momentos durante medio ciclo de oscilación para dos ondas transversales que se mueven en direcciones opuestas se muestran en las figuras 17.8a-c. Las curvas azul y verde son los patrones de onda para las ondas viajeras individuales y las curvas café son los patrones de onda para la onda estacionaria resultante cuando se combinan. En $t = 0$ (figura 17.8a), las dos ondas viajeras están en fase, lo que da un patrón de onda en el que cada elemento del medio está en reposo y experimenta su máximo desplazamiento desde el equilibrio. Un cuarto de periodo después, en $t = T/4$ (figura 17.8b), las ondas viajeras se movieron un cuarto de longitud de onda (una a la derecha y la otra a la izquierda). En este momento, las ondas viajeras están fuera de fase y cada elemento del medio pasa a través de la posición de equilibrio en su movimiento armónico simple. El resultado es desplazamiento cero para los elementos en todos los valores de x ; es decir, el patrón de onda es una línea recta. En $t = T/2$ (figura 17.8c), las ondas viajeras de nuevo están en fase, lo que produce un patrón de onda que está invertido relativo con el patrón $t = 0$. En la onda estacionaria, los elementos del medio alternan en tiempo entre los extremos que se muestran en la figura 18.7a y 17.8c.

- E XAMEN RÁPIDO 17.2** Considere las ondas en la figura 17.8 como ondas sobre una cuerda estirada. Defina la velocidad de los elementos de la cuerda como positiva si se mueven hacia arriba en la figura. (i) En el momento en que la cuerda tiene la forma que se muestra mediante la curva café en la figura 17.8a, ¿cuál es la velocidad instantánea de los elementos a lo largo de la cuerda? (a) cero para todos los elementos, (b) positiva para todos los elementos, (c) negativa para todos los elementos, (d) varía con la posición del elemento. (ii) A partir de las mismas opciones, en el momento en que la cuerda tiene la forma que se muestra mediante la curva café en la figura 17.8b, ¿cuál es la velocidad instantánea de los elementos a lo largo de la cuerda?



Ejemplo 17.2 Formación de una onda estacionaria

Dos ondas que viajan en direcciones opuestas producen una onda estacionaria. Las funciones de onda individuales son

$$\begin{aligned}y_1 &= 4.0 \text{ sen } (3.0x - 2.0t) \\y_2 &= 4.0 \text{ sen } (3.0x + 2.0t)\end{aligned}$$

donde x y y se miden en centímetros y t en segundos.

(A) Encuentre la amplitud del movimiento armónico simple del elemento del medio ubicado en $x = 2.3$ cm.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Las ondas descritas por las ecuaciones conocidas son idénticas excepto por sus direcciones de viaje, así que de hecho se combinan para formar una onda estacionaria como se explicó en esta sección. Podemos representar gráficamente las ondas por las curvas azules y verdes en la figura 17.8.

Categorizar Se sustituirán valores en las ecuaciones por desarrollar en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

A partir de las ecuaciones para las ondas $A = 4.0$ cm, $k = 3.0$ rad/cm y $\omega = 2.0$ rad/s. Use la ecuación 17.1 para escribir una expresión para la onda estacionaria:

$$y = (2A \text{ sen } kx) \cos \omega t = 8.0 \text{ sen } 3.0x \cos 2.0t$$

Encuentre la amplitud del movimiento armónico simple del elemento en la posición $x = 2.3$ cm al evaluar el coeficiente de la función coseno en esta posición:

$$\begin{aligned}y_{\text{máx}} &= (8.0 \text{ cm}) \text{ sen } 3.0x \Big|_{x=2.3} \\ &= (8.0 \text{ cm}) \text{ sen } (6.9 \text{ rad}) = 4.6 \text{ cm}\end{aligned}$$

(B) Encuentre las posiciones de los nodos y antinodos si un extremo de la cuerda está en $x = 0$.

SOLUCIÓN

Encuentre la longitud de onda de las ondas viajeras:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 3.0 \text{ rad/cm} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{3.0} \text{ cm}$$

Aplique la ecuación 17.2 para hallar las posiciones de los nodos:

$$x = n \frac{\lambda}{2} = n \left(\frac{\pi}{3.0} \right) \text{ cm} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Utilice la ecuación 17.3 para encontrar las posiciones de los antinodos:

$$x = n \frac{\lambda}{4} = n \left(\frac{\pi}{6.0} \right) \text{ cm} \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots$$

17.3 Efectos de frontera: Reflexión y transmisión

Hasta ahora en nuestro estudio de las ondas, hemos considerado principalmente las ondas que viajan a través de un medio sin interactuar con los límites del medio. Las únicas excepciones han sido las referencias a reflexiones de ondas, como los ecos de los acantilados en la semblanza de apertura del capítulo 16 y el reflejo de las ondas en el cable telefónico enrollado a la base de la unidad en la sección 17.2. Ahora abordamos los detalles de las interacciones de las ondas con los límites. Por ejemplo, considere un pulso que viaja en una cuerda que está rígidamente unida a un soporte en un extremo, como en la figura 17.9. Cuando el pulso llega al soporte, ocurre un severo cambio en el medio: la cuerda termina. Como resultado, el pulso experimenta **reflexión**; es decir, el pulso se mueve de regreso a lo largo de la cuerda en la dirección opuesta.

Observe que el pulso reflejado está *invertido*. Esta inversión se explica como sigue. Cuando el pulso alcanza el extremo fijo de la cuerda, ésta produce una fuerza hacia arriba sobre el soporte. Por la tercera ley de Newton, el soporte debe ejercer sobre la cuerda una fuerza de reacción de igual magnitud y con dirección opuesta (hacia abajo). Esta fuerza hacia abajo hace que el pulso se invierta en la reflexión.

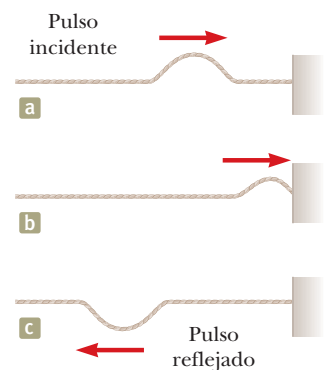


Figura 17.9 Reflexión de un pulso viajero en el extremo fijo de una cuerda estirada. El pulso reflejado está invertido, pero su forma no cambia de otra manera.



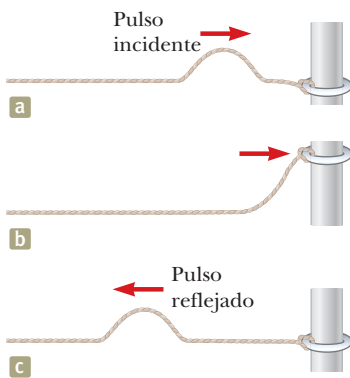


Figura 17.10 Reflexión de un pulso viajero en el extremo libre de una cuerda estirada. El pulso reflejado no está invertido.

Ahora considere otro caso. Esta vez, el pulso llega al final de una cuerda que es libre de moverse verticalmente, como en la figura 17.10. La tensión en el extremo libre se mantiene porque la cuerda está amarrada a un anillo de masa despreciable que tiene libertad para deslizarse verticalmente sobre un poste uniforme sin fricción. De nuevo, el pulso se refleja, pero esta vez no se invierte. Cuando llega al poste, el pulso ejerce una fuerza sobre el extremo libre de la cuerda, y esto hace que el anillo acelere hacia arriba. El anillo se eleva tan alto como el pulso entrante, y luego la componente hacia debajo de la fuerza de tensión jala el anillo de vuelta hacia abajo. Este movimiento del anillo produce un pulso reflejado que no se invierte y que tiene la misma amplitud que el pulso entrante.

Por último, considere una situación en la que la frontera es intermedia entre estos dos extremos. En este caso, parte de la energía en el pulso incidente se refleja y parte experimenta **transmisión**; es decir, algo de la energía pasa a través de la frontera. Por ejemplo, suponga que una cuerda ligera se une a una cuerda más pesada, como en la figura 17.11. Cuando un pulso que viaja sobre la cuerda ligera llega a la frontera entre las dos cuerdas, parte del pulso se refleja e invierte y parte se transmite a la cuerda más pesada. El pulso reflejado se invierte por las mismas razones descritas en el caso de la cuerda unida rígidamente a un soporte.

El pulso reflejado tiene una amplitud menor que el pulso incidente. En la sección 16.4, se demostró que la energía que porta una onda se relaciona con su amplitud. De acuerdo con el principio de conservación de la energía, cuando el pulso se descompone en un pulso reflejado y un pulso transmitido en la frontera, la suma de las energías de estos dos pulsos debe ser igual a la energía del pulso incidente. Ya que el pulso reflejado sólo contiene parte de la energía del pulso incidente, su amplitud debe ser menor.

Cuando un pulso que viaja sobre una cuerda pesada golpea la frontera entre la cuerda pesada y una ligera, como en la figura 17.12, de nuevo, parte se refleja y parte se transmite. En este caso, el pulso reflejado no se invierte.

De acuerdo con la ecuación 16.18, la rapidez de una onda sobre una cuerda aumenta a medida que disminuye la masa por unidad de longitud de la cuerda. En otras palabras, una onda viaja más rápidamente sobre una cuerda ligera que sobre una pesada, si ambas están bajo la misma tensión. Las siguientes reglas generales se aplican a las ondas reflejadas: cuando una onda o pulso viaja del medio A al medio B y $v_A > v_B$ (es decir, cuando B es más denso que A, se invierte en la reflexión. Cuando una onda o pulso viaja del medio A al medio B y $v_A < v_B$ (es decir, cuando A es más denso que B, no se invierte en la reflexión.

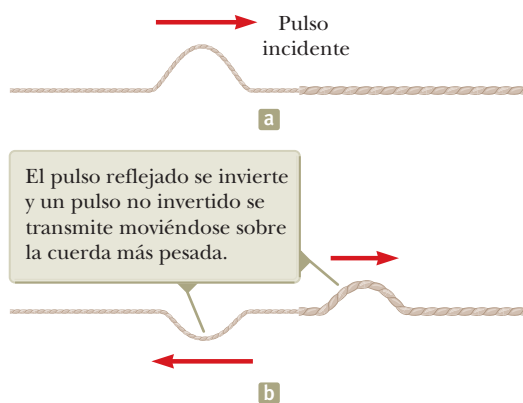


Figura 17.11 (a) Un pulso que viaja hacia la derecha sobre una cuerda ligera se aproxima a la frontera con una cuerda más pesada. (b) La situación después de que el pulso llega a la frontera.

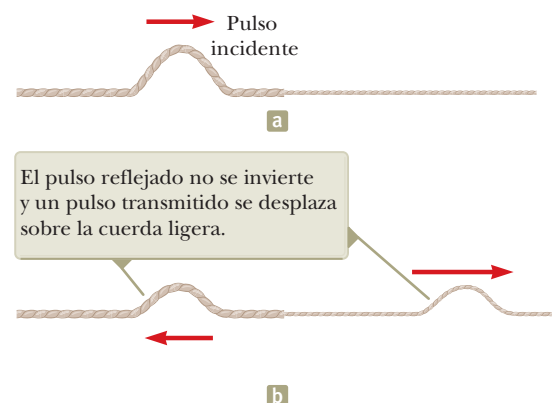


Figura 17.12 (a) Pulso que viaja hacia la derecha sobre una cuerda pesada se aproxima a la frontera con una cuerda ligera. (b) La situación después de que el pulso llega a la frontera.



17.4 Modelo de análisis: Ondas bajo condiciones de frontera

En la sección 17.2, estudiamos las ondas estacionarias en un medio sin límites. En la sección 17.3, investigamos el efecto de un límite rígido sobre las ondas en un medio: las ondas se reflejan desde el límite. En esta sección, combinaremos estas ideas para ver cómo la existencia de límites afecta la onda estacionaria.

Considere una cuerda de longitud L fija en ambos extremos, como se muestra en la figura 17.13. Este sistema se usará como modelo para una cuerda de guitarra o piano. Las ondas pueden viajar en ambos sentidos en la cuerda. Por tanto en la cuerda se pueden establecer ondas estacionarias mediante una superposición continua de ondas incidentes y reflejadas desde los extremos. Observe que hay una *condición de frontera* para las ondas en la cuerda. Ya que los extremos de la cuerda están fijos, necesariamente tienen desplazamiento cero y, por ende, son nodos por definición. La condición es que ambos extremos de la cuerda deben ser nodos fija la longitud de onda de la onda estacionaria en la cuerda: en el extremo derecho de la cuerda, donde $x = L$, la ecuación 17.2 nos da

$$L = \frac{n\lambda_n}{2} \quad (17.4)$$

donde el subíndice en λ indica que diferentes valores de n darán como resultado diferentes valores de la longitud de onda. La longitud de onda, a su vez, determina la frecuencia de la onda de acuerdo con la ecuación 16.12. Esta condición de frontera resulta en que la cuerda tenga un número de patrones de oscilación naturales discretos, llamados **modos normales**, cada uno con una frecuencia característica que se calcula con facilidad. Esta situación en la que sólo se permiten ciertas frecuencias de oscilación se llama **cuantización**; la cual es un acontecimiento común cuando las ondas se someten a condiciones de frontera y es una característica central para las explicaciones de física cuántica en la versión extendida de este texto. Note que en la figura 17.8 no hay condiciones de frontera, así que se pueden establecer ondas estacionarias de *cualquier* frecuencia; no hay cuantización sin condiciones de frontera. Ya que las condiciones de frontera se presentan con tanta frecuencia para las ondas, para la explicación que sigue se identifica un análisis de modelo llamado modelo de **ondas bajo condiciones de frontera**.

Los modos de oscilación normales para la cuerda de la figura 17.13 se describen al imponer las condiciones de frontera de que los extremos sean nodos y que los nodos estén separados por un medio de longitud de onda con los antinodos a la mitad entre los nodos. El primer modo normal que es consistente con estos requisitos, que se muestra en la figura 17.14a, tiene nodos en sus extremos y un antinodo en medio: es el modo de longitud de onda más larga que es consistente con las condiciones de frontera. El primer modo normal se presenta cuando la longitud de onda λ_1 es igual al doble de la longitud de la cuerda, o $\lambda_1 = 2L$. La sección de una onda estacionaria de un nodo al siguiente se llama *bucle*. En el primer modo normal, la cuerda vibra en un bucle. En el segundo modo normal (vea la figura 17.14b), la cuerda vibra en dos bucles. Cuando la mitad izquierda de la cuerda se mueve hacia adelante, la mitad derecha lo hace hacia atrás. En este caso, la lon-

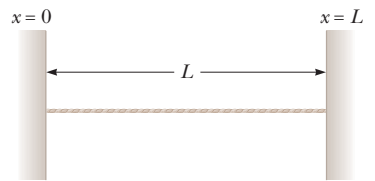


Figura 17.13 Una cuerda de longitud L fija en ambos extremos.

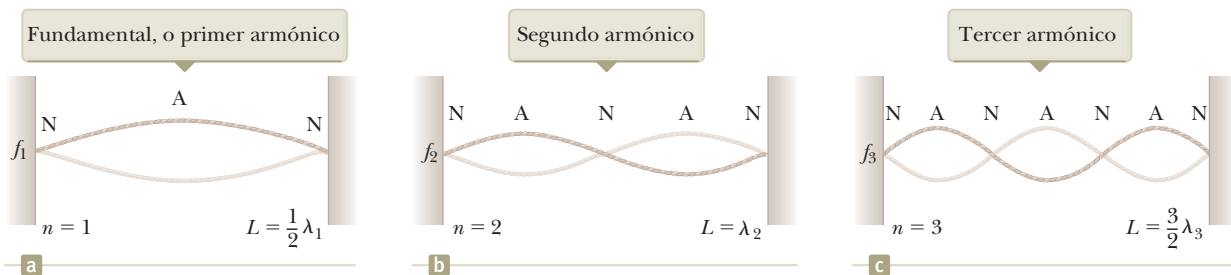


Figura 17.14 Los modos normales de vibración de la cuerda de la figura 17.13 forman una serie armónica. La cuerda vibra entre los extremos como se muestra.



gitud de onda λ_2 es igual a la longitud de la cuerda, como se expresa por $\lambda_2 = L$. El tercer modo normal (vea la figura 17.14c) corresponde al caso en que $\lambda_3 = 2L/3$ y la cuerda vibra en tres bucles. En general, las longitudes de onda de los diferentes modos normales para una cuerda de longitud L fija en ambos extremos puede determinarse reacomodando la ecuación 17.4:

Longitudes de onda de modos normales ▶

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.5)$$

donde el índice n se refiere al n -ésimo modo normal de oscilación. Estos modos son los *posibles*. Se discuten brevemente los modos *reales* que se excitan en una cuerda.

Las frecuencias naturales asociadas con los modos de oscilación se obtienen de la ecuación 16.12, $f = v/\lambda$, donde la rapidez de onda v es la misma para todas las frecuencias. Al usar la ecuación 17.5 se encuentra que las frecuencias naturales f_n de los modos normales son

Frecuencias naturales de modos normales como funciones de la rapidez de onda y la longitud de la cuerda ▶

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.6)$$

Estas frecuencias naturales también se llaman *frecuencias cuantizadas* asociadas con la cuerda oscilante fija en ambos extremos.

Ya que $v = \sqrt{T/\mu}$ (vea la ecuación 16.18) para ondas sobre una cuerda, donde T es la tensión en la cuerda y μ es su densidad de masa lineal, también se expresan las frecuencias naturales de una cuerda tensa como

Frecuencia natural de modos normales como funciones de la tensión en la cuerda y la densidad de masa lineal ▶

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.7)$$

La frecuencia más baja de todas, f_1 , que corresponde a $n = 1$, se llama **fundamental** o **frecuencia fundamental** y está dada por

Frecuencia fundamental de una cuerda tensa ▶

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (17.8)$$

Las frecuencias de los modos restantes son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental (ecuación 17.6). Las frecuencias de los modos normales que exhiben una correspondencia de múltiplo entero como ésta forman una **serie armónica**, y los modos normales se llaman **armónicos**. La frecuencia fundamental f_1 es la frecuencia del primer armónico, la frecuencia $f_2 = 2f_1$ es la frecuencia del segundo armónico y la frecuencia $f_n = nf_1$ es la frecuencia del n -ésimo armónico. Otros sistemas oscilatorios, como un parche de tambor, muestran modos normales, pero las frecuencias no se relacionan como múltiplos enteros de una fundamental. Por tanto, no se usa el término armónico en asociación con estos tipos de sistemas.

Examine un poco más cómo se crean en una cuerda los diferentes armónicos. Para excitar únicamente un solo armónico, la cuerda se debe distorsionar en una forma que corresponda a la del armónico deseado. Después de liberarse, la cuerda vibra a la frecuencia de dicho armónico. Sin embargo, esta maniobra es difícil de realizar y no es como se excita la cuerda de un instrumento musical. Si la cuerda se distorsiona de modo que su forma no sea sólo de un armónico, la vibración resultante incluye una combinación de diferentes armónicos. Tal distorsión se presenta en instrumentos musicales cuando la cuerda se puntea (como en una guitarra), se arquea (como en un chelo) o se golpea (como en un piano). La particular mezcla de armónicos en la cuerda se puede cambiar al tocar la cuerda de la guitarra o doblar la cuerda del violonchelo en diferentes lugares.

La frecuencia de una cuerda que define la nota musical que se toca es la fundamental aún cuando estén otros armónicos presentes. Los armónicos adicionales determinan la *calidad*, o el *timbre*, del sonido sin alterar su frecuencia, como se analiza más adelante en la sección 17.8. La calidad del sonido es parte de lo que le permite identificar instrumentos que tocan la misma nota. Por ejemplo, puede diferenciar entre una guitarra, un banjo o un sitar tocando la misma nota.

La frecuencia de la cuerda se varía al cambiar la tensión de la cuerda o su longitud. Por ejemplo, la tensión en las cuerdas de guitarra y violín se varía mediante un mecanismo



de ajuste de tornillo o clavijas de afinación ubicadas en el diapason del instrumento. A medida que aumenta la tensión, la frecuencia de los modos normales aumenta en concordancia con la ecuación 17.7. Una vez que el instrumento se “afina”, los intérpretes varían la frecuencia al mover sus dedos a lo largo del diapason, lo que por tanto cambia la longitud de la porción oscilatoria de la cuerda. A medida que la longitud se acorta, la frecuencia aumenta porque, como especifica la ecuación 17.7, las frecuencias de modo normal son inversamente proporcionales a la longitud de la cuerda.

En el “Imagine” de apertura, cuando pulsa una cuerda abierta en la guitarra de su compañera de cuarto, el modo fundamental es el que se muestra en la figura 17.4a. Luego, coloca el dedo ligeramente en el punto medio de la cuerda. Debido a que su dedo presiona ligeramente la cuerda, toda la cuerda aún puede vibrar cuando la pulsa, pero su dedo impone un nodo en el centro de la cuerda. Por tanto, el modo fundamental de vibración ahora se parece a la figura 17.4b. Este es el armónico $n = 2$ de la cuerda abierta, por lo que la frecuencia es dos veces más alta: una octava.

- E XAMEN RÁPIDO 17.3** Cuando una onda estacionaria se establece en una cuerda fija en ambos extremos, ¿cuál de los siguientes enunciados es verdadero? (a) El número de nodos es igual al número de antinodos. (b) La longitud de onda es igual a la longitud de la cuerda dividida por un entero. (c) La frecuencia es igual al número de nodos por la frecuencia fundamental. (d) La forma de la cuerda en cualquier instante muestra una simetría en torno al punto medio de la cuerda.

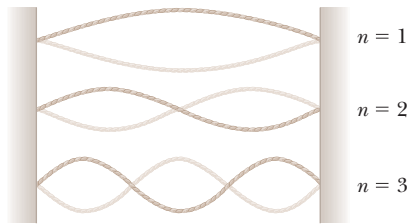
MODELO DE ANÁLISIS Ondas bajo condiciones de frontera

Imagine una onda que no es libre de viajar a lo largo de todo el espacio como en el modelo de la onda viajera. Si la onda está sujeta a condiciones de frontera, deben cumplirse ciertos requisitos en localizaciones específicas en el espacio, la onda se limita a un conjunto de modos normales con longitudes de onda cuantizadas y frecuencias naturales cuantizadas.

Para ondas sobre una cuerda fija de ambos extremos, las frecuencias naturales son

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.7)$$

donde T es la tensión en la cuerda y m es su densidad lineal de masa.



Ejemplos:

- ondas que viajan de ida y vuelta en una cuerda de guitarra se combinan para formar una onda estacionaria
- ondas sonoras viajan de ida y vuelta en un clarinete se combinan para formar ondas estacionarias (sección 17.6)
- una partícula microscópica confinada en una pequeña región del espacio es modelada como una onda y presenta energías cuantizadas (capítulo 40)
- la energía de Fermi de un metal está determinada por el modelado de electrones como ondas-partículas en una caja (capítulo 42)

Ejemplo 17.3 ¡Dame un Do!

El Do medio en un piano tiene una frecuencia fundamental de 262 Hz, y la primera La sobre el Do medio tiene una frecuencia fundamental de 440 Hz.

(A) Calcule las frecuencias de los siguientes dos armónicos de la cuerda Do.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Recuerde que los armónicos de una cuerda vibrante tienen frecuencias que se relacionan mediante múltiplos enteros de la fundamental.

continúa



17.3 continuación

Categorizar Esta primera parte del ejemplo es un simple problema de sustitución.

Al saber que la frecuencia fundamental es $f_1 = 262$ Hz, encuentre las frecuencias de los siguientes armónicos al multiplicar por enteros:

$$f_2 = 2f_1 = 524 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 3f_1 = 786 \text{ Hz}$$

(B) Si las cuerdas La y Do tienen la misma densidad de masa lineal μ y longitud L , determine la razón de tensiones en las dos cuerdas.

SOLUCIÓN

Categorizar Esta parte del ejemplo es más un problema de análisis que el inciso (A), y utiliza las ondas bajo el modelo de *ondas bajo condiciones de frontera*.

Analizar Use la ecuación 17.8 para escribir expresiones para las frecuencias fundamentales de las dos cuerdas:

$$f_{1A} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_A}{\mu}} \quad \text{y} \quad f_{1C} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_C}{\mu}}$$

Divida la primera ecuación entre la segunda y resuelva para la razón de tensiones:

$$\frac{f_{1A}}{f_{1C}} = \sqrt{\frac{T_A}{T_C}} \rightarrow \frac{T_A}{T_C} = \left(\frac{f_{1A}}{f_{1C}}\right)^2 = \left(\frac{440 \text{ Hz}}{262 \text{ Hz}}\right)^2 = 2.82$$

Finalizar Si las frecuencias de las cuerdas de piano estuvieran determinadas exclusivamente por la tensión, este resultado sugiere que la razón de tensiones de la cuerda más baja a la cuerda más alta en el piano sería enorme. Tales tensiones tan grandes harían difícil diseñar un marco para sostener las cuerdas. En realidad, las frecuencias de las cuerdas de piano varían debido a parámetros adicionales, incluidas la masa por unidad de longitud y la longitud de la cuerda. El siguiente **¿Qué pasaría si?** explora una variación de longitud.

¿QUÉ PASARÍA SI? Si usted observa el interior de un piano real, verá que la suposición hecha en el inciso (B) sólo es parcialmente verdadera. Es probable que las cuerdas no tengan la misma longitud. Las densidades de las cuerdas son iguales, pero suponga que la longitud de la cuerda La sólo es 64% de la longitud de la cuerda Do. ¿Cuál es la razón de sus tensiones?

Respuesta Una vez más con la ecuación 17.8 se establece la razón de frecuencias:

$$\frac{f_{1A}}{f_{1C}} = \frac{L_C}{L_A} \sqrt{\frac{T_A}{T_C}} \rightarrow \frac{T_A}{T_C} = \left(\frac{L_A}{L_C}\right)^2 \left(\frac{f_{1A}}{f_{1C}}\right)^2$$

$$\frac{T_A}{T_C} = (0.64)^2 \left(\frac{440 \text{ Hz}}{262 \text{ Hz}}\right)^2 = 1.16$$

Note que este resultado sólo representa 16% de aumento en tensión, comparado con 182% de aumento en el inciso (B).

Ejemplo 17.4 Cambio en la vibración de una cuerda con agua

Un extremo de una cuerda horizontal se amarra a una varilla oscilante y el otro extremo pasa sobre una polea, como en la figura 17.15a. Una esfera de 2.00 kg de masa cuelga en el extremo de la cuerda. La cuerda oscila en su segundo armónico. Un contenedor de agua se eleva bajo la esfera de modo que ésta se sumerge por completo. En esta configuración, la cuerda vibra en su quinto armónico, como se muestra en la figura 17.15b. ¿Cuál es el radio de la esfera?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine lo que sucede cuando la esfera se sumerge en el agua. La fuerza de flotación actúa hacia arriba sobre la esfera, lo que reduce la tensión en la cuerda. El cambio en tensión causa un cambio en la rapidez de las ondas sobre la cuerda, que a su vez ocasiona un cambio en la longitud de onda. Esta longitud de onda alterada provoca que la cuerda vibre en su quinto modo normal en lugar de hacerlo en el segundo.

Categorizar La esfera colgante se modela como una *partícula en equilibrio*. Una de las fuerzas que actúan sobre ella es la fuerza de flotación del agua. También se aplica el modelo de *ondas bajo condiciones de frontera* a la cuerda.

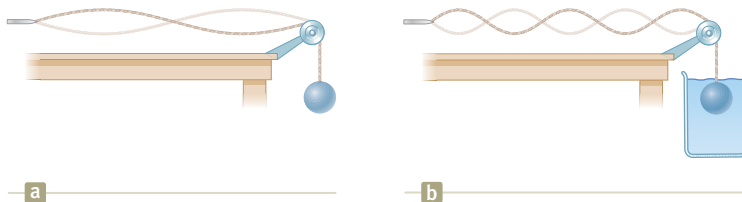


Figura 17.15 (Ejemplo 17.4)

(a) Cuando la esfera cuelga en aire, la cuerda vibra en su segundo armónico. (b) Cuando la esfera se sumerge en agua, la cuerda vibra en su quinto armónico.

17.4 continuación

Analizar Aplique el modelo de partícula en equilibrio a la esfera de la figura 17.15a e identifique a T_1 como la tensión en la cuerda mientras la esfera cuelga en aire:

Aplique el modelo de partícula en equilibrio a la esfera de la figura 17.15b, donde T_2 es la tensión en la cuerda mientras la esfera se sumerge en agua:

La cantidad deseada, el radio de la esfera, aparecerá en la expresión para la fuerza de flotación B . No obstante, antes de proceder en esta dirección, debe evaluar T_2 a partir de la información acerca de la onda estacionaria.

Escriba la ecuación para la frecuencia de una onda estacionaria sobre una cuerda (ecuación 17.7) dos veces, una vez antes de que la esfera se sumerja y otra después. Note que la frecuencia f es la misma en ambos casos porque está determinada por la varilla oscilante. Además, la densidad de masa lineal μ y la longitud L de la porción oscilante de la cuerda son las mismas en ambos casos. Divida las ecuaciones:

Resuelva para T_2 :

Sustituya este resultado en la ecuación (1):

Con la ecuación 14.5, exprese la fuerza de flotación en términos del radio de la esfera:

Resuelva para el radio de la esfera y sustituya de la ecuación (2):

Sustituya valores numéricos:

$$\sum F = T_1 - mg = 0$$

$$T_1 = mg$$

$$T_2 + B - mg = 0$$

$$(1) \quad B = mg - T_2$$

$$f = \frac{n_1}{2L} \sqrt{\frac{T_1}{\mu}} \rightarrow 1 = \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

$$f = \frac{n_2}{2L} \sqrt{\frac{T_2}{\mu}}$$

$$T_2 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 T_1 = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 mg$$

$$(2) \quad B = mg - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 mg = mg \left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\right]$$

$$B = \rho_{\text{agua}} g V_{\text{esfera}} = \rho_{\text{agua}} g \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$r = \left(\frac{3B}{4\pi\rho_{\text{agua}}g}\right)^{1/3} = \left\{\frac{3m}{4\pi\rho_{\text{agua}}}\left[1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\right]\right\}^{1/3}$$

$$r = \left\{\frac{3(2.00 \text{ kg})}{4\pi(1000 \text{ kg/m}^3)}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2\right]\right\}^{1/3}$$

$$= 0.0737 \text{ m} = 7.37 \text{ cm}$$

Finalizar Note que sólo ciertos radios de la esfera resultarán en que la cuerda vibre en un modo normal; la rapidez de las ondas en la cuerda debe cambiar a un valor tal que la longitud de la cuerda sea un múltiplo entero de medias longitudes de onda. Esta limitación es una característica de la *cuantización* que se introdujo en este capítulo: los radios de la esfera que hacen vibrar la cuerda en un modo normal están *cuantizados*.

17.5 Resonancia

Se vio que un sistema como una cuerda tensa es capaz de oscilar en uno o más modos de oscilación normales. Encontramos que si se aplica una fuerza periódica a tal sistema, la amplitud del movimiento resultante es mayor cuando la frecuencia de la fuerza aplicada es igual a una de las frecuencias naturales del sistema. Este fenómeno, conocido como *resonancia*, se explicó en la sección 15.7. Aunque un sistema bloque-resorte o un péndulo simple sólo tienen una frecuencia natural, los sistemas de onda estacionaria tienen todo un conjunto de frecuencias naturales, como las dadas por la ecuación 17.7 para una cuerda. Ya que un sistema en oscilación muestra una gran amplitud cuando se activa a cualquiera de sus frecuencias naturales, a estas frecuencias por lo general se les refiere como **frecuencias de resonancia**.

Considere la figura 17.16, que muestra una cadena impulsada por una cuchilla vibratoria. Cuando la frecuencia de la cuchilla es igual a una de las frecuencias naturales de

Cuando la hoja vibra a una de las frecuencias naturales de la cuerda, se crean ondas estacionarias de gran amplitud.



Figura 17.16 En una cuerda se establecen ondas estacionarias cuando un extremo se conecta a una hoja vibrante.

la cuerda, se producen ondas estacionarias y la cuerda oscila con una gran amplitud. En este caso de resonancia, la onda generada por la hoja oscilante está en fase con la onda reflejada y la cuerda absorbe energía de la varilla. Si la cuerda es impulsada a una frecuencia que no es una de sus frecuencias naturales, las oscilaciones son de baja amplitud y no muestran un patrón estable.

La resonancia es muy importante en la excitación de los instrumentos musicales en función de columnas de aire. Esta aplicación de la resonancia se explicará en la sección 17.6.

17.6 Ondas estacionarias en columnas de aire

El modelo de ondas bajo condiciones de frontera también se aplica a ondas sonoras en una columna de aire como la que se encuentra en el interior de un órgano de tubos o en un clarinete. Las ondas estacionarias son resultado de la interferencia entre ondas sonoras longitudinales que viajan en direcciones opuestas.

En un tubo cerrado en un extremo, dicho extremo es un **nodo de desplazamiento** porque la barrera rígida en este extremo no permite el movimiento longitudinal del aire. Ya que la onda de presión está 90° fuera de fase con la onda de desplazamiento (vea la sección 16.6), el extremo cerrado de una columna de aire corresponde a un **antinodo de presión** (es decir, un punto de máxima variación de presión).

El extremo abierto de una columna de aire es aproximadamente un **antinodo de desplazamiento**¹ y un nodo de presión. Se puede entender por qué no se presenta variación de presión en un extremo abierto al notar que el extremo de la columna de aire está abierto a la atmósfera; por tanto, la presión en este extremo debe permanecer constante a presión atmosférica.

Acaso se pregunte cómo una onda sonora se refleja de un extremo abierto y por qué al parecer no ha habido cambio en el medio en este punto: el medio a través del que se mueve la onda sonora es aire, tanto dentro como fuera del tubo. Sin embargo, el sonido es una onda de presión, y una región de compresión de la onda sonora está restringida por los lados del tubo en tanto la región esté dentro del tubo. A medida que la región de compresión sale en el extremo abierto del tubo, la restricción del tubo se retira y el aire comprimido es libre de expandirse en la atmósfera. En consecuencia, hay un cambio *distintivo* del medio entre el interior del tubo y el exterior, aun cuando no haya cambio en el *material* del medio. Este cambio distintivo es suficiente para permitir cierta reflexión.

Con las condiciones de frontera de nodos o antinodos en los extremos de la columna de aire, se tiene un conjunto de modos normales de oscilación, como es el caso para la cuerda fija en ambos extremos. Por tanto, la columna de aire tiene frecuencias cuantizadas.

En la figura 17.17a se muestran los primeros tres modos normales de oscilación de un tubo abierto en ambos extremos. Los diagramas en la columna izquierda muestran representaciones gráficas del *desplazamiento* de elementos de aire desde sus posiciones de equilibrio. La segunda columna muestra representaciones pictóricas de la *presión* en el aire en varios lugares del tubo, siguiendo la técnica utilizada en la figura 16.17. Hay una gran cantidad de información en la figura 17.17. Estúdielos con cuidado.

Note que ambos extremos del tubo en la figura 17.17a son antinodos de desplazamiento (aproximadamente) o nodos de presión. En el primer modo normal, la onda estacionaria se extiende entre dos antinodos adyacentes, que es una distancia de media longitud de onda. En consecuencia, la longitud de onda tiene el doble de largo que el tubo, y la frecuencia fundamental es $f_1 = v/2L$. Como muestra la figura 17.17a, las frecuencias de los

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 17.3

Las ondas sonoras en el aire son longitudinales, no transversales

Las ondas longitudinales permanentes se representan gráficamente a la izquierda en la figura 17.17a con lo que parecen funciones transversales sinusoidales. Tenga en cuenta que los desplazamientos reales de los elementos de aire, representados por $s(x,t)$ en la ecuación 16.28, son longitudinales. Sin embargo, en una representación gráfica, debemos usar ejes perpendiculares, por lo que el desplazamiento se representa gráficamente en un eje vertical a pesar de que la dirección real del desplazamiento es horizontal. Los diagramas de presión a la derecha en la figura 17.17a son representaciones pictóricas y demuestran la naturaleza longitudinal de las ondas de sonido.

¹ En sentido estricto, el extremo abierto de una columna de aire no es exactamente un antinodo de desplazamiento. Alcanzar una compresión en el extremo abierto no se refleja hasta que pasa más allá del extremo. A la longitud de la columna de aire para un tubo de sección transversal circular, se debe agregar una corrección terminal aproximadamente igual a $0.6R$, donde R es el radio del tubo. Por eso, la longitud efectiva de la columna de aire es un poco mayor que la verdadera longitud L . En esta explicación se ignora esta corrección terminal.



En un tubo abierto en ambos extremos, los extremos son antinodos de desplazamiento y nodos de presión. La serie armónica contiene todos los múltiplos enteros del fundamental.

En un tubo cerrado en un extremo, el extremo abierto es un antinodo de desplazamiento y un nodo de presión. El extremo cerrado es un nodo de desplazamiento y un antinodo de presión. La serie armónica contiene múltiplos impares del fundamental.

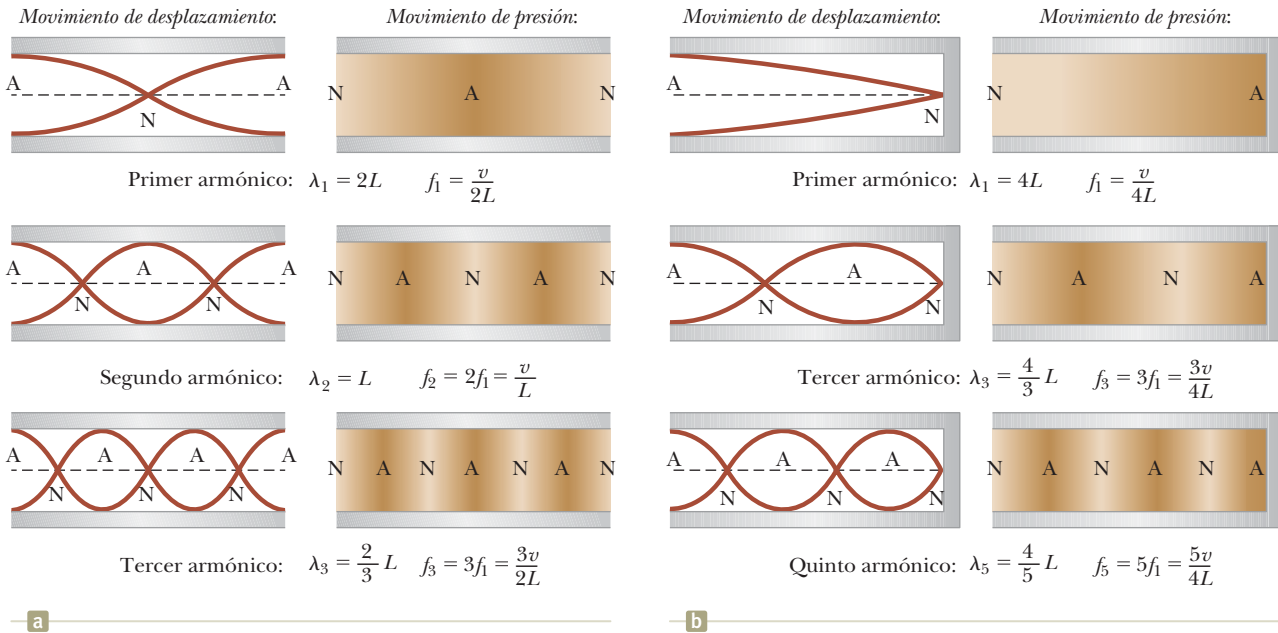


Figura 17.17 Ondas sonoras longitudinales de pie en columnas de aire, que muestran los patrones de onda para las tres frecuencias más bajas. (a) En una columna abierta, las ondas estacionarias son simétricas alrededor del punto medio de la columna. A la izquierda hay representaciones gráficas del desplazamiento de elementos del aire. A la derecha hay representaciones gráficas de la presión en varios puntos de la onda. (b) En una columna cerrada en un extremo, las ondas estacionarias no son simétricas. Nuevamente, los diagramas de la izquierda muestran representaciones gráficas del desplazamiento de elementos del aire, mientras que los diagramas de la derecha son representaciones gráficas de la presión.

armónicos superiores son $2f_1, 3f_1, \dots$

En un tubo abierto en ambos extremos, las frecuencias naturales de oscilación forman una serie armónica que incluye todos los múltiplos enteros de la frecuencia fundamental.

Ya que la frecuencia fundamental se conoce por la misma expresión que en la cuerda (vea la ecuación 17.6), las frecuencias de oscilación naturales se expresan como

$$f_n = n \frac{v}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.9)$$

◀ Frecuencias naturales de un tubo abierto en ambos extremos

A pesar de la similitud entre las ecuaciones 17.6 y 17.9, debe recordar que v en la ecuación 17.6 es la rapidez de las ondas en la cuerda, mientras que v en la ecuación 17.9 es la rapidez del sonido en el aire.

Si un tubo está cerrado en un extremo y abierto en el otro, el extremo cerrado es un nodo de desplazamiento (vea la figura 17.17b). En este caso, la onda estacionaria para el modo fundamental se extiende desde un antinodo hasta el nodo adyacente, que es un cuarto de una longitud de onda. Por tanto, la longitud de onda para el primer modo normal es $4L$, y la frecuencia fundamental es $f_1 = v/4L$. Como muestra la figura 17.17b, las ondas de frecuencia más alta que satisfacen las condiciones son aquellas que tienen un nodo en el extremo cerrado y un antinodo en el extremo abierto; en consecuencia, los armónicos superiores no incluyen todos los múltiplos enteros de la frecuencia fundamental, sino que solo tienen

las frecuencias de múltiplos impares $3f_1, 5f_1, \dots$

En un tubo cerrado en un extremo, las frecuencias de oscilación naturales forman una serie armónica que incluye sólo múltiplos enteros impares de la frecuencia fundamental.

Este resultado se expresa matemáticamente como

$$f_m = m \frac{v}{4L} \quad m = 1, 3, 5, \dots \quad \text{o} \quad f_n = (2n - 1) \frac{v}{4L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.10)$$

Frecuencias naturales
de un tubo cerrado en un
extremo y abierto en el otro

Es interesante investigar qué sucede con las frecuencias de los instrumentos en función de columnas de aire y cuerdas durante un concierto mientras sube la temperatura. Por ejemplo, el sonido emitido por una flauta se vuelve más agudo (eleva su frecuencia) ya que ésta se calienta porque la rapidez del sonido aumenta en el aire cada vez más caliente en su interior (considere la ecuación 17.9). El sonido producido por un violín se vuelve plano (disminuye en frecuencia) a medida que las cuerdas se expanden térmicamente porque la expansión hace que su tensión disminuya (vea la ecuación 17.7).

Los instrumentos musicales en función de columnas de aire por lo general se excitan mediante resonancia. La columna de aire recibe una onda sonora que es rica en muchas frecuencias. En tal caso la columna de aire responde con una oscilación de mayor amplitud a las frecuencias que coinciden con las frecuencias cuantizadas en su conjunto de armónicos. En muchos instrumentos de viento hechos con madera, el rico sonido inicial lo proporciona una lengüeta que vibra. En los instrumentos metálicos, dicha excitación la proporciona el sonido proveniente de la vibración de los labios del intérprete. En una flauta, la excitación inicial proviene de soplar sobre un borde en la boca del instrumento, en forma similar a soplar a través de la abertura de una botella con un cuello estrecho. El sonido del aire que corre a través del borde tiene muchas frecuencias, incluida una que pone en resonancia la cavidad de aire en la botella.

E XAMEN RÁPIDO 17.4 Un tubo abierto en ambos extremos resuena a una frecuencia fundamental f_{abierto} . Cuando un extremo se cubre y de nuevo se hace resonar el tubo, la frecuencia fundamental es f_{cerrado} . ¿Cuál de las siguientes expresiones describe cómo se comparan estas dos frecuencias resonantes? (a) $f_{\text{cerrado}} = f_{\text{abierto}}$, (b) $f_{\text{cerrado}} = \frac{1}{2}f_{\text{abierto}}$, (c) $f_{\text{cerrado}} = 2f_{\text{abierto}}$, (d) $f_{\text{cerrado}} = \frac{3}{2}f_{\text{abierto}}$

E XAMEN RÁPIDO 17.5 El Parque Balboa en San Diego tiene un órgano al aire libre. Cuando la temperatura del aire aumenta, la frecuencia fundamental de uno de los tubos del órgano (a) permanece igual, (b) baja, (c) sube, o (d) es imposible de determinar.

Ejemplo 17.5 Viento en una alcantarilla

Una sección de alcantarillas de drenaje de 1.23 m de largo hace un ruido de aullido cuando el viento sopla a través de sus extremos abiertos.

Determine las frecuencias de los primeros tres armónicos de la alcantarilla si tiene forma cilíndrica y está abierto en ambos extremos. Considere $v = 343 \text{ m/s}$ como la rapidez del sonido en el aire.

SOLUCIÓN

Conceptualizar El sonido del viento que sopla a través del extremo del tubo contiene muchas frecuencias y la alcantarilla responde al sonido mediante vibración a las frecuencias naturales de la columna de aire.

Categorizar Este ejemplo es un problema de sustitución relativamente simple.

Determine la frecuencia del primer armónico de la alcantarilla, la cual se modela como una columna de aire abierta en ambos extremos:

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{343 \text{ m/s}}{2(1.23 \text{ m})} = 139 \text{ Hz}$$

Encuentre los siguientes armónicos al multiplicar por enteros:

$$f_2 = 2f_1 = 279 \text{ Hz}$$

$$f_3 = 3f_1 = 418 \text{ Hz}$$

Ejemplo 17.6 Medición de la frecuencia de un diapasón

En la figura 17.18 se ilustra un aparato simple para demostrar la resonancia en columnas de aire. Un tubo vertical abierto en ambos extremos se sumerge parcialmente en agua y un diapasón oscilante con una frecuencia desconocida se coloca cerca de la parte superior del tubo. La longitud L de la columna de aire se ajusta al mover el tubo verticalmente. Las ondas sonoras generadas por el diapasón se refuerzan cuando L corresponde a una de las frecuencias de resonancia del tubo. Para cierto tubo, el valor más pequeño de L para el que se presenta un pico en la intensidad sonora es 9.00 cm.

(A) ¿Cuál es la frecuencia del diapasón?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Las ondas sonoras del diapasón vibratorio entran en el tubo en su extremo superior. Aunque el tubo está abierto en su extremo inferior para permitir que entre el agua, la superficie del agua actúa como una barrera. Las ondas se reflejan de la superficie del agua y se combinan con las que se mueven hacia abajo para formar una onda estacionaria.

Categorizar Debido a la reflexión de las ondas de sonido de la superficie del agua, podemos modelar al tubo como abierto en el extremo superior y cerrado en el extremo inferior. Por tanto, podemos aplicar el modelo de *ondas bajo condiciones de frontera* a esta situación.

Analizar

Use la ecuación 17.10 para hallar la frecuencia fundamental para $L = 0.0900$ m:

$$f_1 = \frac{v}{4L} = \frac{343 \text{ m/s}}{4(0.0900 \text{ m})} = 953 \text{ Hz}$$

Ya que el diapasón hace que la columna de aire resuene a esta frecuencia, esta frecuencia también debe ser la del diapasón.

(B) ¿Cuáles son los valores de L para las dos siguientes condiciones de resonancia?

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 16.12 para encontrar la longitud de onda de la onda sonora del diapasón:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{343 \text{ m/s}}{953 \text{ Hz}} = 0.360 \text{ m}$$

Note de la figura 17.18b que la longitud de la columna de aire para la segunda resonancia es $3\lambda/4$:

$$L = 3\lambda/4 = 0.270 \text{ m}$$

Observe en la figura 17.18b que la longitud de la columna de aire para la tercera resonancia es $5\lambda/4$:

$$L = 5\lambda/4 = 0.450 \text{ m}$$

Finalizar Considere cómo difiere este problema del ejemplo anterior. En la alcantarilla, la longitud es fija y la columna del aire se presentó con una mezcla de muchas frecuencias. El tubo en este ejemplo se presenta con una frecuencia única del diapasón, y se varía la longitud del tubo hasta que se alcanza una resonancia.

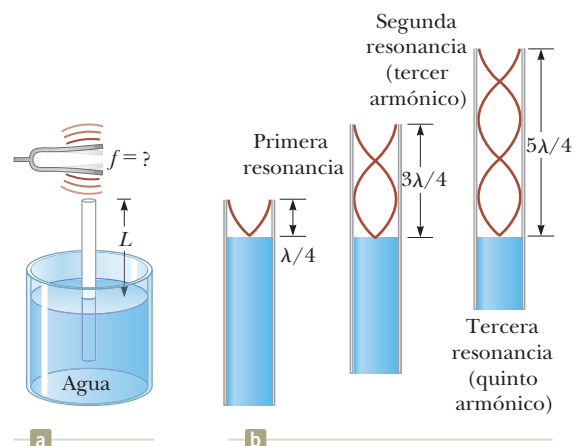


Figura 17.18 (Ejemplo 17.6) (a) Aparato para demostrar la resonancia de ondas sonoras en un tubo cerrado en un extremo. La longitud L de la columna de aire varía al mover el tubo verticalmente mientras se sumerge parcialmente en agua. (b) Primeros tres modos normales del sistema que se muestra en (a).

17.7 Batimientos: Interferencia en el tiempo

El fenómeno de interferencia estudiado hasta el momento involucra la sobreposición de dos o más ondas que tienen la misma frecuencia. Ya que la amplitud de la oscilación de los elementos del medio varía con la posición en el espacio del elemento en tal onda, a dicho fenómeno se le refiere como *interferencia espacial*.

Ahora considere otro tipo de interferencia, uno que resulta de la sobreposición de dos ondas que tienen *frecuencias* ligeramente diferentes. En este caso, cuando las dos ondas se

observan en un punto en el espacio, están periódicamente en y fuera de fase. Es decir: hay una alternación *temporal* (tiempo) entre interferencia constructiva y destructiva. Debido a este fenómeno se le refiere como *interferencia en el tiempo* o *interferencia temporal*. Por ejemplo, si se golpean dos diapasones de frecuencias ligeramente diferentes, uno escucha un sonido de amplitud periódicamente variable. Este fenómeno se llama **batimiento**.

Definición de batimiento ►

El batimiento es la variación periódica en amplitud en un punto dado debido a la sobreposición de dos ondas que tienen frecuencias ligeramente diferentes.

El número de máximos de amplitud que uno escucha por segundo, o la *frecuencia de batimiento*, es igual a la diferencia en frecuencia entre las dos fuentes, como se demostrará a continuación. La máxima frecuencia de batimiento que detecta el oído humano es de aproximadamente 20 batimientos/s. Cuando la frecuencia de batimiento supera este valor, los batimientos se mezclan de manera indistinguible con los sonidos que los producen.

Considere dos ondas sonoras de igual amplitud que viajan a través de un medio con frecuencias ligeramente diferentes f_1 y f_2 . Usando ecuaciones similares a la ecuación 16.13 se representan las funciones de onda para estas dos ondas en un punto que identificamos como $x = 0$. También elegimos el ángulo de fase en la ecuación 16.13 como $\phi = \pi/2$:

$$y_1 = A \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \omega_1 t \right) = A \cos (2\pi f_1 t)$$

$$y_2 = A \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \omega_2 t \right) = A \cos (2\pi f_2 t)$$

Al usar el principio de sobreposición, se encuentra que la función de onda resultante en este punto es

$$y = y_1 + y_2 = A (\cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi f_2 t)$$

La identidad trigonométrica

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) \cos \left(\frac{a+b}{2} \right)$$

permite escribir la expresión para y como

$$y = \left[2A \cos 2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right) t \right] \cos 2\pi \left(\frac{f_1 + f_2}{2} \right) t \quad (17.11)$$

Resultante de dos ondas de frecuencias diferentes pero igual amplitud ►

En la figura 17.19 se muestran gráficas de las ondas individuales y la onda resultante. A partir de los factores de la ecuación 17.11, se ve que la onda resultante tiene una frecuencia efectiva igual a la frecuencia promedio $(f_1 + f_2)/2$. Esta onda se multiplica por una onda envolvente conocida por la expresión entre corchetes:

$$y_{\text{envolvente}} = 2A \cos 2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right) t \quad (17.12)$$

Es decir: la amplitud y por tanto la intensidad del sonido resultante varía en el tiempo. La línea azul discontinua en la figura 18.17b es una representación gráfica de la onda envolvente en la ecuación 18.11 y es una onda seno que varía con frecuencia $(f_1 - f_2)/2$.

En la onda sonora resultante se detecta un máximo en la amplitud siempre que

$$\cos 2\pi \left(\frac{f_1 - f_2}{2} \right) t = \pm 1$$



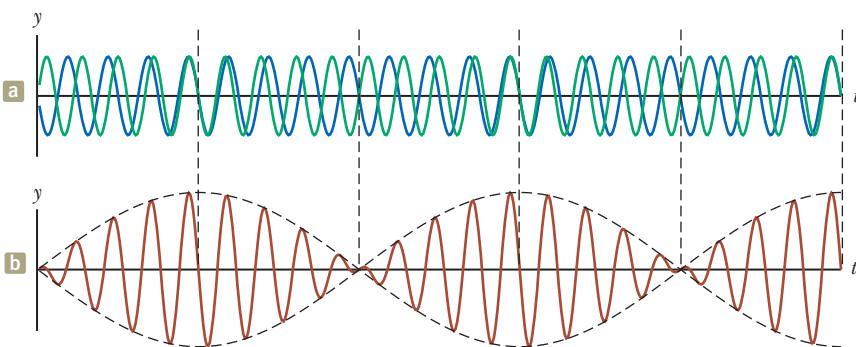


Figura 17.19 Los batimientos se forman por la combinación de dos ondas de frecuencias ligeramente diferentes. (a) Ondas individuales. (b) Onda combinada. La onda envolvente (línea discontinua) representa el batimiento de los sonidos combinados.

Por tanto, existen *dos* máximos en cada periodo de la onda envolvente. Ya que la amplitud varía con la frecuencia como $(f_1 - f_2)/2$, el número de batimientos por segundo, o la **frecuencia de batimiento** $f_{\text{batimiento}}$, es el doble de este valor. Es decir,

$$f_{\text{batimiento}} = |f_1 - f_2| \quad (17.13)$$

◀ Frecuencia de batimiento

Por ejemplo, si un diapasón vibra a 438 Hz y un segundo después vibra a 442 Hz, la onda sonora resultante de la combinación tiene una frecuencia de 440 Hz (la nota musical La) y una frecuencia de batimiento de 4 Hz. Un escucha oiría una onda sonora de 440 Hz que pasaría por un máximo de intensidad cuatro veces cada segundo.

Ejemplo 17.7 Las cuerdas de piano desafinadas

Dos cuerdas de piano idénticas, de 0.750 m de longitud, se afinan cada una exactamente a 440 Hz. La tensión en una de las cuerdas después aumenta en 1.0%. Si ahora se golpean, ¿cuál es la frecuencia de batimiento entre las fundamentales de las dos cuerdas?

SOLUCIÓN

Conceptualizar A medida que la tensión en una de las cuerdas cambia, su frecuencia fundamental cambia. Por tanto, cuando ambas cuerdas se tocan, tendrán diferentes frecuencias y se escucharán batimientos.

Categorizar Se debe combinar la interpretación de las *ondas bajo condiciones de frontera* para cuerdas con el reciente conocimiento de los batimientos.

Analizar Establezca una relación de las frecuencias fundamentales de las dos cuerdas usando la ecuación 17.6 con $n = 1$:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{(v_2/2L)}{(v_1/2L)} = \frac{v_2}{v_1}$$

Aplique la ecuación 16.18 para sustituir las magnitudes de velocidad de onda en las cuerdas:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\sqrt{T_2/\mu}}{\sqrt{T_1/\mu}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

Incorpore que la tensión en una cuerda es 1.0% mayor que la otra; es decir, $T_2 = 1.010T_1$

$$\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{1.010T_1}{T_1}} = 1.005$$

Resuelva para la frecuencia de la cuerda tensada

$$f_2 = 1.005f_1 = 1.005(440 \text{ Hz}) = 442 \text{ Hz}$$

Encuentre la frecuencia de batimiento con la ecuación 17.13:

$$f_{\text{batimiento}} = 442 \text{ Hz} - 440 \text{ Hz} = 2 \text{ Hz}$$

Finalizar Note que una desafinación de 1.0% en la tensión conduce a una frecuencia de batimiento fácilmente audible de 2 Hz. Un afinador de piano puede usar batimientos para afinar un instrumento de cuerda al “batir” una nota contra un tono de referencia de frecuencia conocida. Después el afinador puede ajustar la tensión de la cuerda hasta que la frecuencia del sonido que emite sea igual a la frecuencia del tono de referencia. El afinador lo hace al apretar o aflojar la cuerda hasta que los batimientos producidos por ella y la fuente de referencia se vuelven prácticamente imposibles de notar.

17.8 Patrones de ondas no sinusoidales

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 17.4

Tono contra frecuencia No confunda el término *tono* con *frecuencia*. La frecuencia es la medición física del número de oscilaciones por segundo. El tono es una reacción psicológica al sonido que permite a una persona colocar el sonido en una escala de alto a bajo o de agudo a grave. Por tanto, la frecuencia es el estímulo y el tono es la respuesta. Aunque el tono se relaciona principalmente (pero no por completo) con la frecuencia, no son lo mismo. Una frase como “el tono del sonido” es incorrecta, porque el tono no es una propiedad física del sonido.

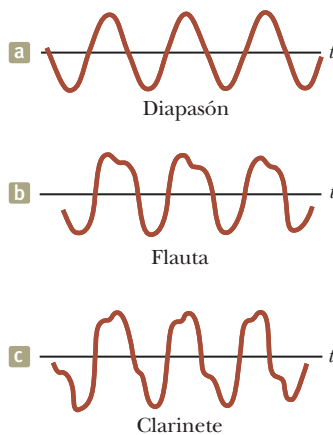


Figura 17.20 Patrones de onda sonora producidos por (a) un diapasón, (b) una flauta y (c) un clarinete, cada uno aproximadamente a la misma frecuencia.

Teorema de Fourier ►

Es relativamente sencillo distinguir los sonidos que surgen de un violín y un saxofón, aun cuando ambos ejecuten la misma nota. Por otra parte, una persona no entrenada en música tendrá dificultades para distinguir una nota tocada en un clarinete de la misma nota tocada en un oboe. Se puede usar el patrón de las ondas sonoras de diferentes fuentes para explicar estos efectos.

Recuerde que cuando un sistema bajo condiciones de frontera vibra, lo hace con una combinación de frecuencias que ocurren simultáneamente. Cuando las frecuencias que son múltiplos enteros de una frecuencia fundamental se combinan para hacer un sonido, el resultado es un sonido *musical*. Un escucha puede asignar un tono al sonido de acuerdo con la frecuencia fundamental. El tono es una reacción psicológica a un sonido que permite al escucha colocar el sonido en una escala de bajo a alto (grave a agudo). Las combinaciones de las frecuencias que no son múltiplos enteros de una fundamental resultan en un *ruido* en lugar de un sonido musical. Es mucho más difícil para un escucha asignar un tono a un ruido que a un sonido musical.

Los patrones de onda producidos por un instrumento musical son el resultado de la sobreposición de frecuencias que son múltiplos enteros de una fundamental. Esta sobreposición resulta en la correspondiente riqueza de tonos musicales. La respuesta perceptiva humana asociada con diferentes mezclas de armónicos es la *calidad* o *timbre* del sonido. Por ejemplo, el sonido de la trompeta se percibe con una calidad “chillona” (se aprendió a asociar el adjetivo *chillón* con dicho sonido); esta calidad permite distinguir el sonido de la trompeta del propio del saxofón, cuya calidad se percibe como “alengüetada”. Sin embargo, el clarinete y el oboe contienen columnas de aire excitadas por lengüetas; debido a esta similitud, tienen mezclas de frecuencias similares y es más difícil para el oído humano distinguir las sobre la base de su calidad sonora.

Los patrones de onda sonora producidos por la mayoría de los instrumentos musicales son no sinusoidales. En la figura 17.20, se muestran los patrones característicos producidos por un diapasón, una flauta y un clarinete, cada uno tocando la misma nota. Cada instrumento tiene su propio patrón característico. Sin embargo, note que a pesar de las diferencias en los patrones, cada patrón es periódico. Este punto es importante para el análisis de estas ondas. Notice that the frequencies at which the waveforms repeat are the same; the addition of higher harmonics does not affect the fundamental frequency of the sound.

El problema de analizar patrones de onda no sinusoidales aparece a primera vista como una tarea formidable. Sin embargo, si el patrón de onda es periódico, se puede representar tan cercano como se desee mediante la combinación de un número suficientemente grande de las ondas sinusoidales que formen una serie armónica. De hecho, cualquier función periódica se representa como una serie de términos seno y coseno con el uso de una técnica matemática en términos del **teorema de Fourier**.² La correspondiente suma de términos que representan el patrón de onda periódica se llama **serie de Fourier**. Sea $y(t)$ cualquier función periódica en el tiempo con un periodo T tal que $y(t + T) = y(t)$. El teorema de Fourier establece que esta función se puede escribir como

$$y(t) = \sum (A_n \text{sen } 2\pi f_n t + B_n \text{cos } 2\pi f_n t) \quad (17.14)$$

donde la frecuencia más baja es $f_1 = 1/T$. Las frecuencias más altas son múltiplos enteros de la fundamental, $f_n = n f_1$, y los coeficientes A_n y B_n representan las amplitudes de las diferentes ondas. La figura 17.21 representa un análisis armónico de los patrones de onda que se muestran en la figura 17.20. Cada barra en la gráfica representa uno de los términos en la serie en la ecuación 17.14 hasta $n = 9$. Note que un diapasón golpeado sólo produce un armónico (el primero), de modo que todos los coeficientes, excepto A_1 , son cero en la ecuación 17.14, y la forma de onda es una onda sinusoidal pura. Por otra parte, la flauta y el clarinete producen el primer armónico y muchos superiores.

Observe la variación en intensidad relativa de los diferentes armónicos para la flauta y el clarinete. En general, cualquier sonido musical consiste de una frecuencia funda-

² Desarrollado por Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), físico y matemático francés.



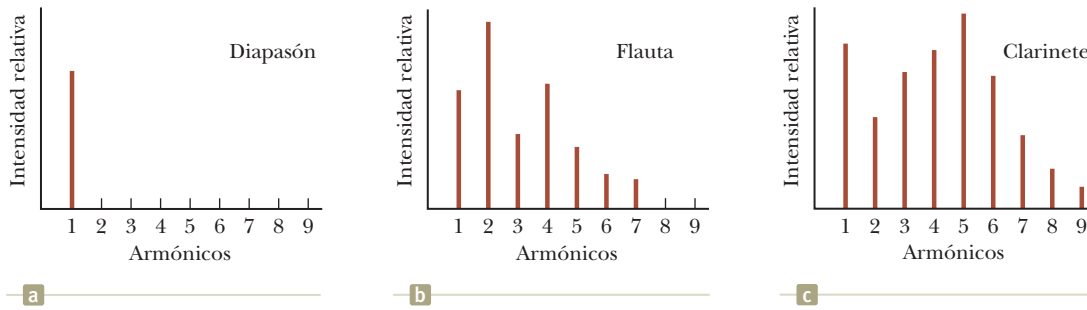


Figura 17.21 Armónicos de las formas de onda mostradas en la figura 17.20. Observe las variaciones en la intensidad de los diversos armónicos. Las partes (a), (b) y (c) corresponden a las de la figura 17.20.

mental f más otras frecuencias que son múltiplos enteros de f y todos tienen diferentes intensidades.

Se explicó el *análisis* de un patrón de onda con el uso del teorema de Fourier. El análisis implica la determinación de los coeficientes de los armónicos en la ecuación 17.14 a partir de un conocimiento del patrón de onda. El proceso inverso, llamado *síntesis de Fourier*, también se puede realizar. En este proceso, los diversos armónicos se suman para formar un patrón de onda resultante. Como ejemplo de la síntesis de Fourier, considere la construcción de una onda cuadrada, como se muestra en la figura 17.22. La simetría de la onda cuadrada sólo resulta en múltiplos impares de la frecuencia fundamental que se combina en su síntesis. En la figura 17.22a, la curva anaranjada muestra la combinación de f y $3f$. En la figura 17.22b, se sumó $5f$ a la combinación y se obtuvo la curva verde. Observe cómo se aproxima la forma general de la onda cuadrada, aun cuando las porciones superior e inferior no son planas como deberían.

La figura 17.22c muestra el resultado de sumar frecuencias impares hasta $9f$. Esta aproximación (curva rojo-café) a la onda cuadrada es mejor que las aproximaciones en las figuras 17.22a y 17.22b. Para aproximar la onda cuadrada tan cerca como sea posible, se deben sumar todos los múltiplos impares de la frecuencia fundamental, hasta la frecuencia infinita.

Con el uso de tecnología moderna, los sonidos musicales se pueden generar electrónicamente al mezclar diferentes amplitudes de cualquier número de armónicos. Estos sintetizadores musicales electrónicos ampliamente usados son capaces de producir una variedad infinita de tonos musicales.

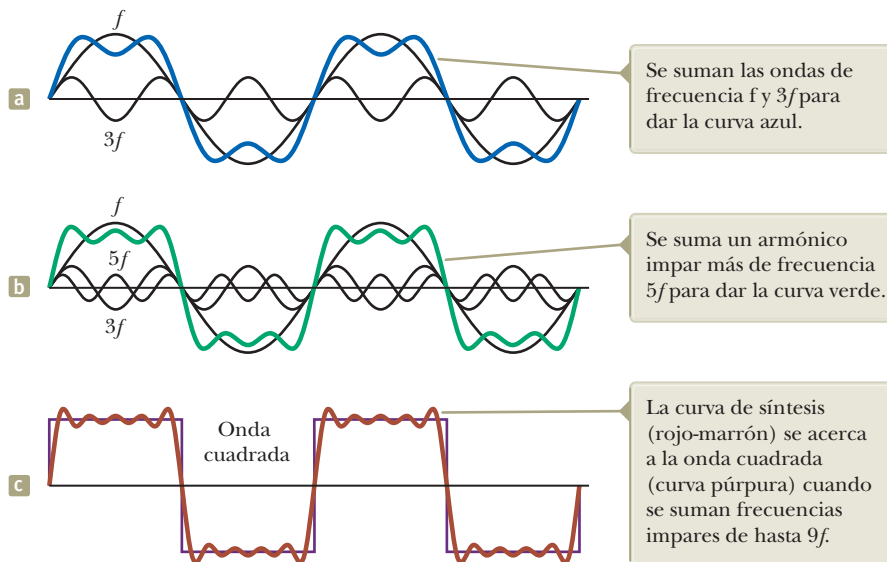


Figura 17.22 Síntesis de Fourier de una onda cuadrada, representada por la suma de múltiplos impares del primer armónico, que tiene frecuencia f .

Resumen

► Conceptos y principios

El **principio de sobreposición** especifica que, cuando dos o más ondas se mueven a través de un medio, el valor de la función de onda resultante es igual a la suma algebraica de los valores de las funciones de onda individuales.

El fenómeno de **batimiento** es la variación periódica en intensidad en un punto dado debido a la sobreposición de dos ondas que tienen frecuencias ligeramente diferentes. La **frecuencia de batimiento** es

$$f_{\text{batimiento}} = |f_1 - f_2| \quad (17.13)$$

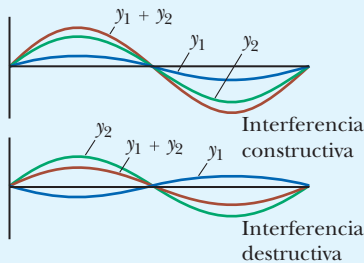
donde f_1 y f_2 son las frecuencias de las ondas individuales.

Las **ondas estacionarias** se forman a partir de la combinación de dos ondas sinusoidales que tienen la misma frecuencia, amplitud y longitud de onda, pero que viajan en direcciones opuestas. La onda estacionaria resultante se describe mediante la función de onda

$$y = (2A \text{ sen } kx) \cos \omega t \quad (17.1)$$

Por tanto, la amplitud de la onda estacionaria es $2A$, y la amplitud del movimiento armónico simple de cualquier partícula del medio varía de acuerdo con su posición como $2A \text{ sen } kx$. Los puntos de amplitud cero (llamados **nodos**) ocurren en $x = n\lambda/2$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$). Los puntos de amplitud máxima (llamados **antinodos**) ocurren en $x = n\lambda/4$ ($n = 1, 3, 5, \dots$). Los antinodos adyacentes están separados por una distancia $\lambda/2$. Los nodos adyacentes también están separados por una distancia $\lambda/2$.

► Modelo de análisis para resolver problemas



Ondas en interferencia. Cuando se sobreponen dos ondas viajeras que tienen igual frecuencia, la onda resultante se describe por el **principio de sobreposición** y tiene una amplitud que depende del ángulo de fase ϕ entre las dos ondas. La **interferencia constructiva** ocurre cuando las dos ondas están en fase, lo que corresponde a $\phi = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ rad. La **interferencia destructiva** se presenta cuando las dos ondas están a 180° fuera de fase, lo que corresponde a $\phi = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ rad.

Ondas bajo condiciones de frontera.

Cuando una onda está sujeta a condiciones de frontera, sólo se permiten ciertas frecuencias naturales; se dice que las frecuencias están **cuantizadas**.

Para ondas sobre una cuerda fija en ambos extremos, las frecuencias naturales son

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.7)$$

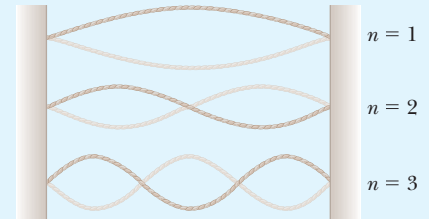
donde T es la tensión en la cuerda y μ es su densidad de masa lineal.

Para ondas sonoras con velocidad v en una columna de aire abierta en ambos extremos, las frecuencias naturales son

$$f_n = n \frac{v}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.9)$$

Si una columna de aire está abierta en un extremo y cerrada en el otro, sólo están presentes armónicos impares y las frecuencias naturales son

$$f_m = m \frac{v}{4L} \quad m = 1, 3, 5, \dots \quad \text{o} \quad f_n = (2n - 1) \frac{v}{4L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.10)$$



Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a WEBASSIGN.
From Cengage

- ACTIVIDAD** Usted y sus amigos deciden fundar una pequeña empresa de nueva creación en su garaje. Su negocio diseñará y construirá guitarras acústicas con cuerdas de acero. Realiza investigaciones en línea y decide las cuerdas particulares que usará. La tabla muestra los datos de su investigación para las seis cuerdas que se utilizarán en sus guitarras.

Nota de cuerda abierta	Frecuencia Fundamental (Hz)	Peso de la cuerda/unidad longitud (10^{-5} lb/in)
e'	329.6	2.000
b	246.9	2.930
g	196.0	5.870
d	146.8	9.180
A	110.0	14.70
E	82.41	32.20

El sistema de nomenclatura de notas utilizado en la primera columna de la tabla es tal que Do medio (como se toca en un piano) se anota con minúscula do. Las notas en la octava por encima del Do medio usan esta notación minúscula/notación preparada. El Do debajo del Do medio media (y las notas en la octava que comienzan con este Do) se anota con do en minúscula. El siguiente Do abajo (y las notas en la octava que comienza con este Do) se anota con mayúscula Do. Por tanto, la nota Mi de la cuerda más baja de la guitarra está dos octavas por debajo de la nota do de la cuerda más alta.

Diseña sus guitarras para que la longitud de la cuerda (la longitud de la parte vibrante de la cuerda) sea de 25.50 pulgadas para las seis cuerdas. (a) Después de seleccionar las cuerdas que se utilizarán, su equipo debe elegir la madera particular que se utilizará en la guitarra, y luego diseñar el grosor de la madera en la cara frontal de la guitarra. Esta elección y este diseño dependerán de la tensión total ejercida por las cuerdas en la cara frontal. ¿Cuál es la tensión total en las seis cuerdas? (b) Otra parte de su diseño se relaciona con la velocidad de la onda en las cuerdas. Para su diseño, la velocidad de la onda en la cuerda do debe ser aproximadamente cuatro veces mayor que en la cuerda Mi. ¿Los datos anteriores satisfacen este criterio de diseño? (c) ¿Alguna guitarra diseñada como esta no cumple con los criterios de diseño en el inciso (b)?

- ACTIVIDAD** Instale cuatro botellas de vidrio idénticas llenas de niveles crecientes de agua de izquierda a derecha. Haga que una parte de su grupo golpee las botellas con una cuchara de izquierda a derecha y escuche cómo cambian las frecuencias. Ahora haga que la otra parte sople en la parte superior de cada botella de izquierda a derecha y escuche cómo cambian las frecuencias. ¿Por qué las frecuencias cambian en direcciones opuestas para estos dos experimentos? ¿Qué está vibrando en cada caso?
- ACTIVIDAD** El generador de señal gratuita o las aplicaciones del generador de funciones están disponibles para descargar a su teléfono inteligente. Haga que dos miembros de su grupo descarguen una aplicación que tiene la capacidad de realizar un barrido de frecuencia. Configure uno de los teléfonos para que reproduzca una onda sinusoidal continua de frecuencia de 4 000 Hz. Ajuste el otro para comenzar un barrido de onda sinusoidal descendente de 3 800 Hz a 3 000 Hz. Enciende ambos teléfonos tocándolos al mismo tiempo. Haga que cada miembro del grupo escuche con atención el sonido combinado. Mientras escucha claramente la frecuencia del segundo teléfono que baja, algunos miembros del grupo también pueden escuchar un sonido suabiendo en frecuencia. Será diferente en naturaleza; sonará como si proviniera de su oído en lugar de hacerlo desde los teléfonos inteligentes. Gire la cabeza hacia adelante y hacia atrás, lo que puede ayudarlo a escucharla. ¿Qué está causando este sonido?

Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN** From Cengage

Nota: A menos que se especifique lo contrario, tome la rapidez del sonido en el aire de 343 m/s, su valor a una temperatura de aire de 20.0 °C. En cualquier otra temperatura en grados Celsius T_C , la rapidez del sonido en el aire es descrita por

$$v = 331 \sqrt{1 + \frac{T_C}{273}}$$

donde v está en m/s y T está en °C.

SECCIÓN 17.1 Análisis de modelo: Ondas en interferencia

- Dos ondas sobre una cuerda se describen mediante las funciones de onda

$$y_1 = 3.0 \cos(4.0x - 1.6t) \quad y_2 = 4.0 \sin(5.0x - 2.0t)$$

donde x y y están en centímetros y t está en segundos. Determine la sobreposición de las ondas $y_1 + y_2$ en los puntos (a) $x = 1.00$, $t = 1.00$; (b) $x = 1.00$, $t = 0.500$; y (c) $x = 0.500$, $t = 0$. *Nota:* Recuerde que los argumentos de las funciones trigonométricas están en radianes.

- Dos pulsos de diferentes amplitudes se acercan mutuamente, cada uno con una rapidez $v = 1.00$ m/s. La figura P17.2

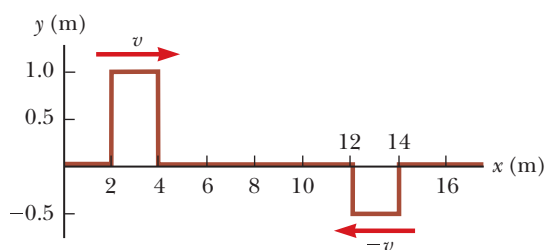


Figura P17.2

- muestra las posiciones de los pulsos en el tiempo $t = 0$. (a) Bosqueje la onda resultante en $t = 2.00$ s, 4.00 s, 5.00 s y 6.00 s. (b) ¿Qué pasaría si? Si se invierte el pulso a la derecha, ¿cómo cambiaría sus dibujos de la onda resultante?
- Dos pulsos A y B se mueven en direcciones opuestas a lo largo de una cuerda tensa con una rapidez $v = 2.00$ cm/s. La amplitud de A es el doble de la amplitud de B. Los pulsos se muestran en la figura P17.3 en $t = 0$. Bosqueje la onda resultante en $t = 1.00$ s, 1.50 s, 2.00 s, 2.50 s y 3.00 s.

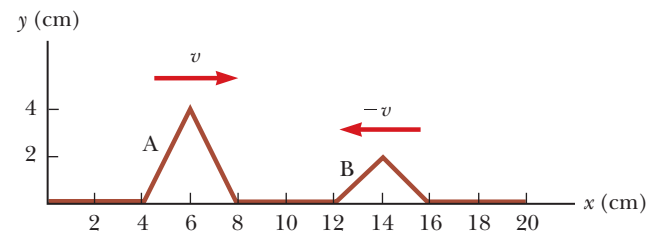


Figura P17.3

- ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Dos bocinas idénticas se activan mediante el mismo oscilador de 200 Hz de frecuencia. Las bocinas se ubican en el suelo a una distancia de 4.00 m una de otra. Un hombre camina directo hacia la bocina de la derecha como se muestra en la figura P17.4. Después de escuchar tres mínimos en la intensidad sonora, camina hacia el siguiente máximo y se detiene. Ignore cualquier reflexión de sonido producida por el suelo.

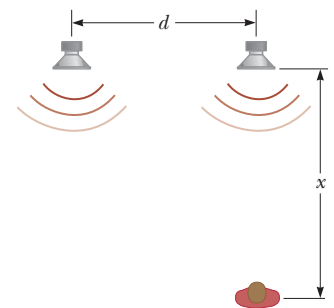


Figura P17.4



5. Dos pulsos que viajan sobre la misma cuerda se describen mediante

$$y_1 = \frac{5}{(3x - 4t)^2 + 2} \quad y_2 = \frac{-5}{(3x + 4t - 6)^2 + 2}$$

(a) ¿En qué dirección viaja cada pulso? (b) ¿En qué instante los dos se cancelan en todas partes? (c) ¿En qué punto los pulsos siempre se cancelan?

6. Dos bocinas idénticas separadas 10.0 m son conducidas por el mismo oscilador con una frecuencia $f = 21.5$ Hz (figura P17.6) en una zona donde la rapidez del sonido es de 344 m/s. (a) Demuestre que un receptor en el punto A registra un mínimo de intensidad del sonido de las dos bocinas. (b) Si el receptor se mueve en el plano de los altavoces, muestre la trayectoria que debe seguir para mantenerse en un mínimo la intensidad a lo largo de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$ (mostrada en rojo-café en la figura P17.6). (c) ¿Puede el receptor permanecer en un mínimo y alejarse de las dos fuentes? Si es así, determine la forma limitante de la trayectoria que debe tomar. Si no es así, explique qué tanto se puede alejar.

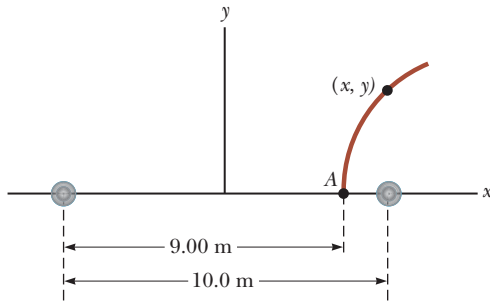


Figura P17.6

7. Dos ondas sinusoidales en una cuerda están descritas por las funciones de onda

$$y_1 = 2.00 \text{ sen } (20.0x - 32.0t) \quad y_2 = 2.00 \text{ sen } (25.0x - 40.0t)$$

donde x , y_1 y y_2 están en centímetros y t en segundos. (a) ¿Cuál es la diferencia de fase entre estas dos ondas en el punto $x = 5.00$ cm en $t = 2.00$ s? (b) ¿Cuál es el valor x positivo más cercano al origen para el que las dos fases difieran por $\pm\pi$ en $t = 2.00$ s? (Esta es una posición donde las dos ondas suman cero.)

SECCIÓN 17.2 Ondas estacionarias

8. Verifique por sustitución directa que la función de onda para una onda estacionaria dada en la ecuación 17.1,

$$y = (2A \text{ sen } kx) \cos \omega t$$

es una solución de la ecuación de onda lineal general, la ecuación 16.27:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

9. Dos ondas simultáneamente presentes sobre una cuerda larga tienen una diferencia de fase ϕ entre ellos de modo que una onda formada a partir de su combinación este descrita por

$$y(x, t) = 2A \text{ sen } \left(kx + \frac{\phi}{2} \right) \cos \left(\omega t - \frac{\phi}{2} \right)$$

(a) A pesar de la presencia del ángulo de fase ϕ , ¿es cierto que los nodos están separados por media longitud de onda? Explique. (b) ¿Son los nodos diferentes de alguna manera de lo que serían los nodos si ϕ fuera cero? Explique.

10. Una onda estacionaria está descrita por la función de onda

$$y = 6 \text{ sen } \left(\frac{\pi}{2} x \right) \cos (100\pi t)$$

donde xy y están en metros y t en segundos. (a) Prepare una gráfica que muestre y como función de x para $t = 0$, para $t = 5$ ms, para $t = 10$ ms, para $t = 15$ ms y para $t = 20$ ms. (b) A partir de la gráfica, identifique la longitud de onda de la onda y explique cómo lo hizo. (c) A partir de la gráfica, identifique la frecuencia de la onda y explique cómo lo hizo. (d) A partir de la ecuación, identifique directamente la longitud de onda de la onda y explique cómo lo hizo. (e) A partir de la ecuación, identifique directamente la frecuencia y explique cómo lo hizo.

SECCIÓN 17.4 Análisis de modelo: Ondas bajo condiciones de frontera

11. Una onda estacionaria se establece en una cuerda de 120 cm de longitud fijada en ambos extremos. La cuerda vibra en cuatro segmentos cuando se conduce a 120 Hz. (a) Determine la longitud de onda. (b) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de la cuerda?
12. Una cuerda tensa tiene una longitud de 2.60 m y se fija en ambos extremos. (a) Encuentre la longitud de onda del modo fundamental de vibración de la cuerda. (b) ¿Puede encontrar la frecuencia de este modo? Explique por qué sí o por qué no.
13. Una cuerda que tiene 30.0 cm de largo y tiene una masa por unidad de longitud de 9.00×10^{-3} kg/m se estira a una tensión de 20.0 N. Encuentre (a) la frecuencia fundamental y (b) las tres frecuencias que podrían causar los patrones de onda en la cuerda.
14. En el arreglo que se muestra en la figura P17.14, un objeto de masa $m = 5.00$ kg cuelga de una cuerda alrededor de una polea ligera. La longitud del cable entre la polea y el punto P es $L = 2.00$ m. (a) Cuando el vibrador se ajusta a una frecuencia de 150 Hz, se forma una onda estacionaria con seis bucles. ¿Cuál debe ser la densidad de masa lineal de la cuerda? (b) ¿cuántos bucles (si existen) se producirán si m se cambia a 45.0 kg? (c) ¿cuántos bucles (si existen) se producirá si m se cambia a 10.0 kg?

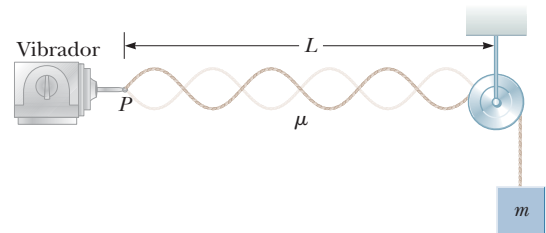


Figura P17.14

15. **Problema de repaso.** Una esfera de masa $M = 1.00$ kg se sostiene mediante una cuerda que pasa sobre una barra horizontal ligera de longitud $L = 0.300$ m (figura P17.15). La cuerda hace un ángulo $\theta = 35^\circ$ con la barra. La frecuencia fundamental de ondas estacionarias en la porción de la cuerda sobre la barra es $f = 60.0$ Hz. Determine la masa de esta porción de la cuerda arriba de la barra.

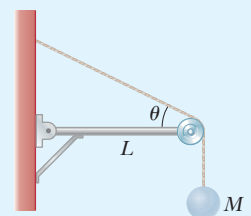


Figura P17.15
Problemas 15 y 16.

16. Problema de repaso. Una esfera de masa M se sostiene mediante una cuerda que pasa sobre una barra horizontal ligera de longitud L (figura P17.15). La cuerda hace un ángulo θ con la barra. La frecuencia fundamental de ondas estacionarias en la porción de la cuerda sobre la barra es f . Determine la masa de esta porción de la cuerda arriba de la barra.

17. Una cuerda de violín tiene una longitud de 0.350 m y se afina en Sol concierto, con $f_G = 392$ Hz. (a) ¿Dónde debe colocar su dedo el violinista para tocar La concierto, con $f_A = 440$ Hz? (b) Si esta posición permanece correcta a un medio del ancho de un dedo (es decir, dentro de 0.600 cm), ¿cuál es el máximo cambio porcentual permisible en la tensión de la cuerda?

18. Problema de repaso. Un objeto de cobre cuelga en la parte baja de un alambre de acero de masa despreciable. El extremo superior del alambre está fijo. Cuando el alambre se golpea, emite sonido con una frecuencia fundamental de 300 Hz. Después el objeto de cobre se sumerge en agua de modo que la mitad de su volumen está abajo de la línea del agua. Determine la nueva frecuencia fundamental.

SECCIÓN 17.5 Resonancia

19. La Bahía de Fundy, en Nueva Escocia, tiene las mareas más altas del mundo. Suponga que en medio del océano y en la boca de la bahía el gradiente de gravedad de la Luna y la rotación de la Tierra hacen que la superficie del agua oscile con una amplitud de unos cuantos centímetros y un periodo de 12 h 24 min. En el nacimiento de la bahía, la amplitud es de varios metros. Suponga que la bahía tiene una longitud de 210 km y una profundidad uniforme de 36.1 m. La rapidez de las ondas acuáticas de longitud de onda larga está dada por $v = \sqrt{gd}$, donde d es la profundidad del agua. Argumente a favor o en contra de la proposición de que la marea se amplifica por resonancia de ondas estacionarias.

SECCIÓN 17.6 Ondas estacionarias en columnas de aire

20. La tráquea de una grulla blanca típica es de 5.00 pies de largo. ¿Cuál es la frecuencia resonante fundamental de la tráquea del ave, modelada como un tubo estrecho cerrado en un extremo? Tome una temperatura de 37 °C.

21. La frecuencia fundamental de un tubo de órgano abierto corresponde al Do medio (261.6 Hz en la escala cromática musical). La tercera resonancia de un tubo de órgano cerrado tiene la misma frecuencia. ¿Cuál es la longitud de (a) el tubo abierto? y (b) el tubo cerrado?

22. Desde que vio la figura 16.22 en el capítulo anterior, le ha fascinado la respuesta auditiva en humanos. Ha configurado un aparato que le permite determinar su propio umbral de audición en función de la frecuencia. Después de realizar el experimento y registrar los resultados, grafica los resultados, que se parecen a la figura P17.22. Está intrigado

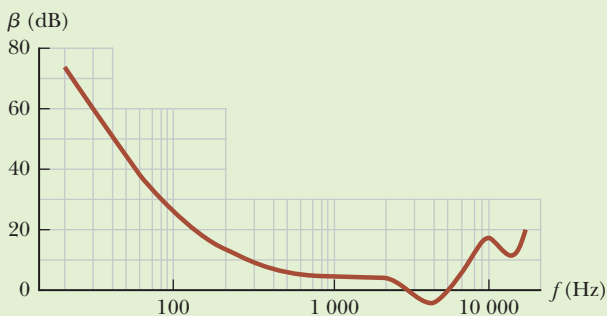


Figura P17.22

por los dos saltos en la curva en el lado derecho del gráfico. Mide cuidadosamente y descubre que los valores mínimos de estos saltos ocurren a 3 800 Hz y 11 500 Hz. Al realizar alguna investigación en línea, descubre que el canal externo del oído humano se puede modelar como una columna de aire abierta en el extremo externo y cerrada en el extremo interno por el tímpano. Use esta información para determinar la longitud del canal externo en su oído.

23. Una columna de aire en un tubo de vidrio está abierta en un extremo y cerrada en el otro mediante un pistón móvil. El aire en el tubo se calienta arriba de la temperatura ambiente y un diapasón de 384 Hz se mantiene en el extremo abierto. Cuando el pistón está a $d_1 = 22.8$ cm del extremo abierto se escucha resonancia y, una vez más, cuando está a $d_2 = 68.3$ cm del extremo abierto. (a) ¿Qué rapidez de sonido se implica con estos datos? (b) ¿A qué distancia del extremo abierto del pistón será cuando se escuche la siguiente resonancia?

24. El casillero de una ducha tiene dimensiones de 86.0 cm × 86.0 cm × 210 cm. Suponga que el casillero actúa como un tubo cerrado en ambos extremos, con nodos en lados opuestos. Suponga que las voces de diferentes cantantes varían de 130 Hz a 2 000 Hz. Sea 355 m/s la rapidez del sonido en el aire caliente. Para alguien cantando en la ducha, que frecuencias parecerán más ricas (debido a la resonancia).

25. Un tubo de vidrio (abierto en ambos extremos) de longitud L se coloca cerca de una bocina de audio de frecuencia $f = 680$ Hz. ¿Para qué valores de L resonará el tubo con la bocina?

26. Un túnel bajo un río tiene 2.00 km de largo. (a) ¿A qué frecuencia puede resonar el aire en el túnel? (b) Explique si sería bueno hacer una regla contra tocar el claxon de su automóvil cuando está en el túnel.

27. Como se muestra en la figura P17.27, el agua se bombea a un cilindro vertical alto con una relación de flujo volumétrico $R = 1.00$ L/min. El radio del cilindro es $r = 5.00$ cm y en la parte superior abierta del cilindro vibra un diapasón con una frecuencia $f = 512$ Hz. A medida que el agua asciende, ¿qué intervalo de tiempo transcurre entre resonancias sucesivas?

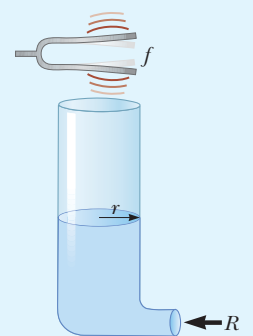


Figura P17.27
Problemas 27 y 28

28. Como se muestra en la figura P17.27, el agua se bombea a un cilindro vertical alto con una relación de flujo volumétrico R . El radio del cilindro es r y en la parte superior abierta del cilindro vibra un diapasón con una frecuencia f . A medida que el agua asciende, ¿qué intervalo de tiempo transcurre entre resonancias sucesivas?

29. Es un flautista en una orquesta local. En un día frío de invierno, llega tarde a una actuación. Al llegar a la sala de orquesta, sabrá que ha perdido el ensayo del grupo antes de la presentación, por lo que afina su instrumento en el aire frío que se encuentra fuera de la puerta del escenario. Después de afinar, corre dentro del auditorio, donde la temperatura es de 22.2 °C, toma asiento y comienza a tocar la primera canción con el resto de la orquesta. Le da mucha vergüenza darse cuenta de que está tocando la canción medio paso más arriba que sus colegas de la orquesta. Su entusiasmo por la física supera su vergüenza musical al darse cuenta de que puede usar esta información para calcular la temperatura exterior. (Suponga que la longitud del instrumento no cambia con la temperatura. Un medio paso representa una relación de frecuencia de $2^{1/12}$).

30. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Un estudiante está escuchando los sonidos de una columna de aire que tiene 0.730 m de largo. No sabe si la columna está abierta en ambos extremos o abierta en un solo extremo. Oye resonancia de la columna de aire con frecuencias 235 Hz y 587 Hz.

SECCIÓN 17.7 Batimientos: interferencia en el tiempo

31. **Problema de repaso.** Un estudiante sostiene un diapason que oscila a 256 Hz. Camina hacia una pared con una rapidez constante de 1.33 m/s. (a) ¿Qué frecuencia de batimiento observa entre el diapason y su eco? (b) ¿Qué tan rápido debe caminar alejándose de la pared para observar una frecuencia de batimiento de 5.00 Hz?
32. **Mientras intenta afinar la nota Do a 523 Hz, un afinador de pianos escucha 2.00 batimientos/s entre un oscilador de referencia y la cuerda.** (a) ¿Cuáles son las posibles frecuencias de la cuerda? (b) Cuando aprieta la cuerda ligeramente, escucha 3.00 batimientos/s. ¿Ahora cuál es la frecuencia de la cuerda? (c) ¿En qué porcentaje el afinador debe cambiar la tensión en la cuerda para que quede afinada?

SECCIÓN 17.8 Patrones de onda no sinusoidales

33. Suponga que un flautista ejecuta una nota Do de 523 Hz con amplitud de desplazamiento del primer armónico A_1 500 nm. A partir de la figura 17.21b, lea, por proporción, las amplitudes de desplazamiento de los armónicos del 2 al 7. Considérelas como los valores del A_2 al A_7 en el análisis de Fourier del sonido y suponga $B_1 = B_2 = \dots = B_7 = 0$. Construya una grafica de la forma de onda del sonido. Su forma de onda no se parecerá exactamente a la forma de onda de flauta de la figura 17.20b porque usted simplifica al ignorar los términos coseno; no obstante, produce la misma sensación a la audición humana.

PROBLEMAS ADICIONALES

34. Dos cuerdas vibran en la misma frecuencia de 150 Hz. Después de que se disminuye la tensión en una de las cuerdas, un observador oye cuatro batimientos por segundo cuando las cuerdas vibran juntas. Determine la nueva frecuencia en la cuerda ajustada.
35. La lancha de la figura P17.35 viaja a lo largo de una línea recta paralela a la costa y a una distancia $d = 600$ m de ésta. El radio de la lancha recibe señales simultáneas de la misma frecuencia de antenas A y B , separadas una distancia $L = 800$ m. Las señales interfieren constructivamente en el punto C , que es equidistante de la A y B . La señal enviada por el primer mínimo en el punto D , que es directamente hacia afuera de la orilla del punto B . Determine la longitud de onda de las ondas de radio.

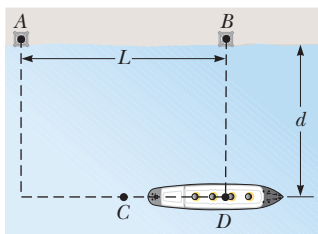


Figura P17.35

36. Un alambre de 2.00 m de largo con una masa de 0.100 kg se fija en ambos extremos. La tensión en el cable se mantiene en 20.0 N. (a) ¿Cuáles son las frecuencias de los tres primeros

modos permitidos de vibración? (b) Si un nodo se observa en un punto 0.400 m de uno de los extremos, ¿en qué modo y con qué frecuencia vibra?

37. **CIC** Una cuerda fija en ambos extremos y que tiene una masa de 4.80 g, una longitud de 2.00 m y una tensión de 48.0 N vibra en su segundo modo normal ($n = 2$). (a) ¿Es mayor o menor la longitud de onda en el aire del sonido emitido por esta cuerda vibrante que la longitud de onda de la onda en la cuerda? (b) ¿Cuál es la razón entre la longitud de onda en el aire del sonido emitido por esta cuerda vibrante y la longitud de onda de la onda en la cuerda?

38. **CE** Está trabajando como asistente de un arquitecto paisajista, que diseña los jardines alrededor de un nuevo edificio comercial. El arquitecto planea tener una gran cuenca de agua rectangular como parte de su diseño. Cuando ve este diseño, menciona al arquitecto que el proyecto está ubicado en un área propensa a los terremotos. Usted señala que un terremoto podría crear un seiche en la cuenca por resonancia, haciendo que el agua en la cuenca se derrame e ingrese a los transformadores eléctricos subterráneos cercanos. Un seiche es una onda estacionaria en un cuerpo de agua, en el que el agua se balancea hacia adelante y hacia atrás con antinodos en los extremos de la cuenca. (Puede haber creado un seiche en una bañera cuando era niño deslizando el cuerpo hacia adelante y hacia atrás a lo largo de la bañera, dejando agua en el piso para que sus padres la limpien). El arquitecto rechaza sus comentarios como poco realistas. Mientras visitaba a su primo la semana anterior en un área no propensa a terremotos, había visto una cuenca de agua similar a la planeada por el arquitecto. Llama a su primo y descubre que la cuenca hidrográfica de su ciudad tiene la misma profundidad de agua que la planeada por el arquitecto. Le pide a tu primo que cree un pulso en el agua tirando un guijarro, y determina cuánto tarda el pulso en cruzar el cuenco. Según este intervalo de tiempo y la longitud de la cuenca de su primo, determina que un pulso demorará 2.50 s en cruzar la cuenca planificada por el arquitecto. Demuestre al arquitecto que habrá varias resonancias de seiche posibles en la cuenca hidrológica para las bajas frecuencias típicas de los terremotos en el rango de 0-4 Hz.

39. **CIC** **Problema de repaso.** Considere el aparato se muestra en la figura 17.15 y descrito en ejemplo 17.4. Supongamos que el número de antinodos en la figura 18.11b es un valor arbitrario n . (a) Encuentre una expresión para el radio de la esfera en el agua como una función solo de n . (b) ¿Cuál es el mínimo valor permitido de n para una esfera de tamaño distinto de cero? (c) ¿Cuál es el radio de la esfera más grande que se producirá en una onda en la cuerda? (d) ¿Qué pasa si se utiliza una esfera más grande?

40. **PG** **Problema de repaso.** Para el arreglo que se muestra en la figura P17.40, el plano inclinado y la pequeña polea no tienen fricción, la cuerda soporta el objeto de masa M en el fondo del plano y la cuerda tiene masa m . El sistema está en equilibrio y la parte vertical de la cuerda tiene una longitud h . Queremos estudiar las ondas que se establecen en la sección

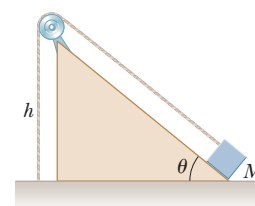


Figura P17.40

vertical de la cuerda. (a) ¿Qué análisis de modelo describe al objeto de masa M ? (b) ¿Qué análisis de modelo describe las ondas en la parte vertical de la cuerda? (c) Encuentre la tensión en la cuerda. (d) Modele la forma de la cuerda como un cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Encuentre la longitud total de la cuerda. (e) Determine la masa por unidad de longitud de la cuerda. (f) Encuentre la rapidez de las ondas en la cuerda. (g) Halle la frecuencia más baja para una onda estacionaria. (h) Evalúe este resultado para $M = 1.50$ kg, $m = 0.750$ g, $h = 0.500$ m y $\theta = 30.0^\circ$. (i) Determine el valor numérico de la frecuencia más baja para una onda en la sección inclinada de la cuerda.

41. **Problema de repaso.** Una bocina enfrente de una habitación y una bocina idéntica en la parte trasera de la habitación se activan mediante el mismo oscilador a 456 Hz. Una estudiante camina con rapidez uniforme de 1.50 m/s a lo largo de la longitud de la habitación. Escucha un solo tono, que alternativamente es más fuerte y más débil. (a) Modele estas variaciones como batimientos entre los sonidos con el corrimiento Doppler que la estudiante recibe. Calcule el número de batimientos que escucha la estudiante cada segundo. (b) Modele las dos bocinas como productoras de una onda estacionaria en la habitación y a la estudiante como si caminara entre antinodos. Calcule el número de máximos de intensidad que la estudiante escucha cada segundo.
42. Dos bocinas idénticas se activan mediante el mismo oscilador de frecuencia f . Las bocinas se ubican a una distancia d una de otra sobre un poste vertical. Un hombre camina directo hacia la bocina inferior en una dirección perpendicular al poste, como se muestra en la figura P17.42 (a) ¿Cuántas veces escuchara un mínimo en la intensidad del sonido? (b) ¿A qué distancia esta del poste en estos momentos? Sea v la rapidez del sonido y suponga que el suelo no refleja sonido. Los oídos del hombre están en el mismo nivel que la bocina inferior.

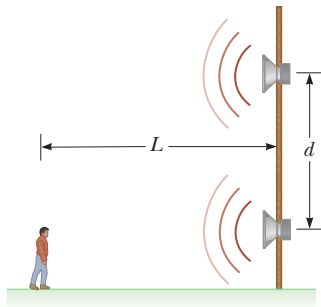


Figura P17.42

43. Se establece una onda estacionaria en una cuerda de longitud y tensión variables por medio de un vibrador de frecuencia variable. Ambos extremos de la cuerda están fijos. Cuando el vibrador tiene una frecuencia f , en una cuerda de longitud L y bajo tensión T , se establecen n antinodos en la cuerda. (a) Si la longitud de la cuerda se duplica, ¿en qué factor cambiara la frecuencia de modo que se produzca el mismo número de antinodos? (b) Si la frecuencia y longitud se mantienen constantes, ¿qué tensión producirá $n + 1$ antinodos? (c) Si la frecuencia se triplica y la longitud de la cuerda se acorta a la mitad, ¿en qué factor cambiará la tensión de modo que se produzca el doble de antinodos?
44. **Problema de repaso.** El extremo superior de una cuerda de un yo-yo se mantiene en reposo. De hecho, el yo-yo es más pesado que la cuerda. Parte del reposo y se mueve hacia abajo con aceleración constante de 0.800 m/s² mientras se desen-

rolla de la cuerda. El roce de la cuerda contra el borde del yo-yo excita vibraciones de onda estacionaria transversales en la cuerda. Ambos extremos de la cuerda son nodos, incluso cuando la longitud de la cuerda aumenta. Considere el instante 1.20 s después que comienza el movimiento a partir del reposo. (a) Demuestre que la razón de cambio con el tiempo de la longitud de onda del modo fundamental de oscilación es 1.92 m/s. (b) ¿Qué pasaría si? ¿La razón de cambio de la longitud de onda del segundo armónico también es 1.92 m/s en este momento? Explique su respuesta. (c) ¿Qué pasaría si? El experimento se repite después de agregar más masa al cuerpo del yo-yo. La distribución de masa se mantiene igual, de modo que el yo-yo todavía se mueve con aceleración hacia debajo de 0.800 m/s². En el punto 1.20 s, ¿la razón de cambio de la longitud de onda fundamental de la cuerda en vibración aun es igual a 1.92 m/s? Explique. (d) ¿La razón de cambio de la longitud de onda del segundo armónico es la misma que en el inciso (b)? Explique.

45. **Problema de repaso.** Considere el objeto de cobre colgando del alambre de acero en el problema 18. El extremo superior del alambre se fija. Cuando el alambre es golpeado, emite sonido con una frecuencia fundamental de 300 Hz. Luego se sumerge el objeto de cobre en agua. Si el objeto se puede colocar con cualquier fracción deseada de su volumen sumergido, ¿cuál es la frecuencia fundamental nueva posible más baja?
46. Una cuerda con 1.60 g/m de densidad lineal se estira entre dos tornillos de banco separados 48.0 cm. La cuerda no se estira apreciablemente mientras la tensión en él se eleva de manera estable de 15.0 N en $t = 0$ a 25.0 N en $t = 3.50$ s. Por tanto, la tensión como función del tiempo está dada por la expresión $T = 15.0 + 10.0 t/3.50$. La cuerda vibra en su modo fundamental a lo largo de este proceso. Encuentre el número de oscilaciones que completa durante el intervalo de 3.50 s.

47. **Problema de repaso.** Un objeto de 12.0 kg cuelga en equilibrio de una cuerda con una longitud total de $L = 5.00$ m y una densidad de masa lineal $\mu = 0.00100$ kg/m. La cuerda se enrolla alrededor de dos poleas ligeras sin fricción separadas una distancia $d = 2.00$ m (figura P17.47a). (a) Determine la tensión en la cuerda. (b) A qué frecuencia debe vibrar la cuerda entre las poleas para formar el patrón de onda estacionaria que se muestra en la figura P17.47b?

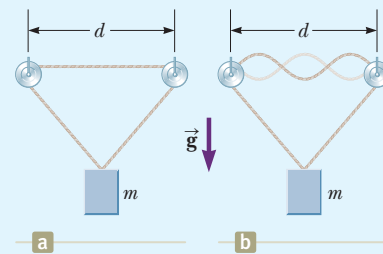


Figura P17.27 Problemas 47 y 48

48. **Problema de repaso.** Un objeto de masa m cuelga en equilibrio de una cuerda con una longitud total L y una densidad de masa lineal μ . La cuerda se enrolla alrededor de dos poleas ligeras sin fricción separadas una distancia d (figura P17.47a). (a) Determine la tensión en la cuerda. (b) ¿A qué frecuencia debe vibrar la cuerda entre las poleas para formar el patrón de onda estacionaria que se muestra en la figura P17.47b?

49. Dos ondas se describen mediante las funciones de onda

$$y_1(x, t) = 5.00 \text{ sen } (2.00x - 10.0t)$$

$$y_2(x, t) = 10.0 \text{ cos } (2.00x - 10.0t)$$

donde y_1 , y_2 y x están en metros y t en segundos. (a) Demuestre que la onda resultante a partir de su sobreposición se puede expresar como una función sencilla. (b) Determine la amplitud y ángulo de fase de esta onda sinusoidal.

PROBLEMA DE DESAFÍO

50. En las figuras 17.22a y 17.22b, observe que la amplitud de la onda de la componente para la frecuencia f es grande, para que $3f$ sea pequeño, y $5f$ sea más pequeño aún. ¿Cómo sabemos exactamente cuánta amplitud asignar a cada componente de frecuencia para construir una onda cuadrada? Este problema nos ayuda a encontrar la respuesta a esa pregunta. Sea que la onda cuadrada de la figura 17.22c tenga una amplitud A y en $t = 0$ está en el extremo izquierdo de la figura. Entonces, un periodo T de la onda cuadrada está descrito por

$$y(t) = \begin{cases} A & 0 < t < \frac{T}{2} \\ -A & \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

Exprese la ecuación 17.14 con frecuencias angulares:

$$y(t) = \sum_n (A_n \text{ sen } n\omega t + B_n \text{ cos } n\omega t)$$

Ahora procedemos como sigue. (a) multiplique ambos lados de la ecuación 17.14 por $\text{sen } m\omega t$ e integre ambos lados sobre un periodo T . Demuestre que el lado izquierdo de la ecuación resultante es igual a 0 si m es par y es igual a $4A/m\omega$ si m es impar. (b) utilizando identidades trigonométricas, demuestre que todos los términos del lado derecho que contienen a B_n son iguales a cero. (c) Usando identidades trigonométricas, demuestre que todos los términos del lado derecho que tienen a A_n son igual a cero, *excepto* en el caso que $m = n$. (d) Demuestre que todo el lado derecho de la ecuación se reduce a $\frac{1}{2}A_m T$. (e) Demuestre que la expansión de la serie de Fourier de una onda cuadrada es

$$y(t) = \sum_n \frac{4A}{n\pi} \text{ sen } n\omega t$$



Termodinámica

Ahora nos concentraremos al estudio de la termodinámica, que

implica situaciones en donde la temperatura o estado (sólido, líquido, gas) de un sistema cambia debido a transferencias de energía. En esta parte del libro, nos enfocaremos en el calor Q de la ecuación 8.2 y sus efectos sobre las condiciones térmicas de un sistema. También veremos el trabajo W realizado en sistemas deformables, como un gas encerrado, así como la radiación electromagnética T_{ER} a través de la frontera del sistema. Cada una de estas transferencias de energía puede causar un cambio en la energía interna del sistema E_{int} , que podemos relacionar con la *temperatura*.

Históricamente, el desarrollo de la termodinámica fue paralelo al de la teoría atómica de la materia. Hacia 1820, los experimentos químicos habían proporcionado fuerte evidencia de la existencia de átomos. En esa época, los científicos reconocieron que debía existir una conexión entre la termodinámica y la estructura de la materia. En 1827, el botánico Robert Brown reportó que granos de polen suspendidos en un líquido se movían erráticamente de un lugar a otro como si estuvieran bajo agitación constante. En 1905, Albert Einstein usó la teoría cinética para explicar la causa de este movimiento errático, conocido en la actualidad como *movimiento browniano*. Einstein explicó este fenómeno al suponer que los granos están bajo bombardeo constante de moléculas “invisibles” en el líquido, y que son éstas las que se mueven erráticamente. El movimiento de las moléculas está relacionado con la temperatura del líquido. Así se forjó una conexión entre el mundo cotidiano y los minúsculos bloques constructores invisibles que conforman este mundo.

La termodinámica también aborda cuestiones más prácticas. ¿Usted se ha preguntado cómo un refrigerador es capaz de enfriar su contenido, o qué tipos de transformaciones ocurren en una planta eléctrica o en el motor de su automóvil, o qué le sucede a la energía cinética de un objeto en movimiento cuando llega al reposo? Las leyes de la termodinámica pueden emplearse para proporcionar explicaciones de éstos y otros fenómenos. ■

Una burbuja en una de las múltiples zonas de barro del Parque Nacional *Yellowstone*, captada en el momento de estallar. Una zona de barro es una alberca de barro caliente burbujeante que muestra la existencia de procesos termodinámicos bajo la superficie de la Tierra. (© Adambooth/Dreamstime.com)



18

Temperatura

Una acera de ladrillo exhibe pandeo. En algunos casos, esto es causado por un fenómeno mecánico: el crecimiento de las raíces de los árboles debajo de la acera, pero no vemos árboles aquí lo suficientemente cerca de la acera como para causar este efecto. Este pandeo es causado por un proceso térmico, relacionado con una temperatura alta. (John W. Jewett, Jr.)



- 18.1 Temperatura y ley cero de la termodinámica
- 18.2 Termómetros y escala de temperatura Celsius
- 18.3 Termómetro de gas a volumen constante y escala absoluta de temperatura
- 18.4 Expansión térmica de sólidos y líquidos
- 18.5 Descripción macroscópica de un gas ideal

IMAGINE Ha descubierto que se ha quedado sin papas fritas.

Mientras conduce a la tienda, mira las líneas de transmisión de energía eléctrica de alto voltaje que cruzan la carretera delante de usted. Ha visto estas líneas casi todos los días, pero hoy hay algo diferente sobre ellas. Las líneas eléctricas entre las torres a ambos lados de la carretera parecen estar cayendo más bajo hoy que en el pasado. Luego observa que una acera de ladrillo al costado de la carretera se ha pandeado, como se muestra arriba. ¿Qué está causando estos efectos? Su ciudad natal está experimentando temperaturas muy altas que han durado varios días; ha estado más caliente de lo que puede recordar. ¿Podría esto estar relacionado con estos efectos? ¿Volverán a subir las líneas eléctricas cuando el clima se enfríe? ¿La acera se “enderezará” cuando la temperatura baje? ¿Qué piensa el reptil mirando la situación desde la acera? ¡Espere un minuto! En todas estas preguntas, ¿qué es exactamente la temperatura, qué significa “caliente y fresco” en realidad? Esta pregunta atormenta su visita a la tienda y conduce a casa sin comprar sus papas fritas.

CONEXIONES Hasta este punto en el texto, nos hemos centrado en situaciones mecánicas, que generalmente involucran objetos macroscópicos. Por ejemplo, observamos las energías cinéticas de los automóviles, las bolas de billar, los planetas y los neumáticos rodantes. Realizamos cálculos utilizando energías potenciales en sistemas de resortes, una bola y la Tierra, un planeta y el Sol. En este capítulo, comenzamos a investigar los fenómenos térmicos. Introdujimos energía interna en el capítulo 7, donde hablamos sobre algo que se está calentando debido a la fricción. Ese fue nuestro primer indicio de un proceso térmico. La característica distintiva de los procesos térmicos es que implican energía en una escala microscópica. Como veremos en el

capítulo 20, podemos relacionar la temperatura de un objeto con la energía cinética de las moléculas del objeto. Introdujimos el proceso de transferencia de energía del calor en el capítulo 8 como un medio de transferir energía hacia o desde un sistema; en el capítulo 19, discutiremos este proceso en términos de colisiones microscópicas entre moléculas en el límite del sistema. Para establecer la base de estas discusiones en los próximos capítulos, primero abordaremos este capítulo sobre una comprensión macroscópica del concepto de temperatura y sus efectos. El capítulo concluye con un estudio de gases ideales en la escala macroscópica. En este estudio, conectamos la cantidad de presión del capítulo 14 con la de la temperatura de este capítulo. Una vez que entendemos los fenómenos térmicos, veremos, por ejemplo, los efectos térmicos sobre la resistencia eléctrica en el capítulo 26, sobre las propiedades magnéticas de los materiales en el capítulo 29, sobre la radiación de una superficie caliente en el capítulo 39, y así sucesivamente.

18.1 Temperatura y ley cero de la termodinámica

Con frecuencia el concepto de temperatura se asocia con qué tan caliente o frío se siente un objeto cuando se toca. De esta forma, los sentidos proporcionan una indicación cualitativa de la temperatura. Sin embargo, los sentidos no son confiables y es frecuente que generen errores. Por ejemplo, si usted está parado, descalzo, con un pie sobre la alfombra y el otro sobre un mosaico adyacente, éste se siente más frío que la alfombra *aun cuando ambos estén a la misma temperatura*. Los dos objetos se sienten diferentes porque el mosaico transfiere energía por calor a una rapidez mayor que la alfombra. Su piel “mide” la rapidez de transferencia de energía por calor, y no la temperatura real. Se necesita un método confiable y reproducible para medir lo caliente o lo frío relativo de los objetos en lugar de la rapidez de transferencia de energía. Los científicos han desarrollado una variedad de termómetros para efectuar tales mediciones cuantitativas.

Dos objetos a diferentes temperaturas iniciales, finalmente llegan a una temperatura intermedia cuando se colocan en contacto mutuo. Por ejemplo, cuando en una tina de baño se mezclan agua caliente y agua fría, se transfiere energía del agua caliente al agua fría y la temperatura final de la mezcla tiene un valor entre las temperaturas caliente y fría iniciales.

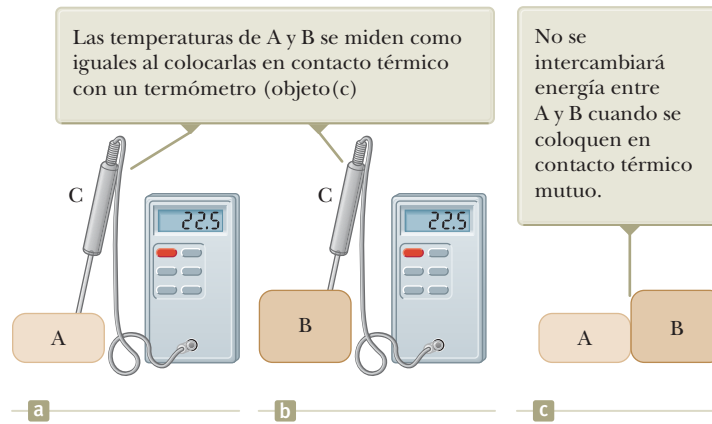
Los mecanismos de transferencia de energía del capítulo 8, que tratará este capítulo, son el calor Q en la ecuación 8.2 y la radiación electromagnética T_{ER} . Para propósitos de esta discusión, suponga que dos objetos están en **contacto térmico** mutuo si entre ellos pueden intercambiar energía mediante dichos procesos debido a una diferencia de temperatura. El **equilibrio térmico** es una situación en la que dos objetos no intercambiarían energía, por calor o por radiación electromagnética, si se colocan en contacto térmico.

Considere dos objetos A y B, que no están en contacto térmico, y un tercer objeto C, que es un termómetro. Se quiere determinar si A y B están en equilibrio térmico entre sí. El termómetro (objeto C) primero se coloca en contacto térmico con el objeto A hasta llegar al equilibrio térmico,¹ como se muestra en la figura 18.1a. A partir de ese momento, la lectura del termómetro permanece constante y se registra. Luego el termómetro se retira del objeto A y se coloca en contacto térmico con el objeto B, como se ilustra en la figura 18.1b. De nuevo, se registra la lectura después de lograr el equilibrio térmico. Si las dos lecturas son iguales, se concluye que el objeto A y el objeto B están en equilibrio entre sí. Si se colocan en contacto mutuo, como en la figura 18.1c, no hay intercambio de energía entre ellos.

¹ Se supone una cantidad despreciable de transferencia de energía entre el termómetro y el objeto A durante el intervalo de tiempo de contacto térmico. Sin esta suposición, que también se hace para el termómetro y el objeto B, la medición de la temperatura de un objeto perturba al sistema de modo que la temperatura medida es diferente de la temperatura inicial del objeto. En la práctica, siempre que mida una temperatura con un termómetro, usted mide el sistema perturbado, no el sistema original.



Figura 18.1 La ley cero de la termodinámica. En general, los objetos A y B pueden ser de diferentes tamaños, diferentes masas, y diferentes materiales. La ley cero nos permite identificar algo que es igual para ambos objetos: la temperatura.



Estos resultados se resumen en un enunciado conocido como **ley cero de la termodinámica** (ley de equilibrio):

Ley cero de la termodinámica ▶

Si los objetos A y B están por separado en equilibrio térmico con un tercer objeto C, entonces A y B están en equilibrio térmico entre sí.

Este enunciado se prueba fácilmente de manera experimental y es muy importante porque *permite definir la temperatura*. Se puede considerar a la **temperatura** como la propiedad que determina si un objeto está en equilibrio térmico con otros objetos. Dos objetos que están en equilibrio térmico, entre sí, están a la misma temperatura. En sentido inverso, si dos objetos tienen diferentes temperaturas, no se encuentran en equilibrio térmico mutuo. Ahora se conoce que la temperatura es algo que determina si se transferirá o no energía entre dos objetos en contacto térmico. En la figura 18.1, son *solo* las temperaturas de A y B las que determinan si la energía se transferirá de una a otra cuando se colocan en contacto térmico, no en *tamaño, masa, material, densidad* o cualquier otra cosa. Por ahora, la temperatura solo se define para nosotros en términos de la ley cero. En el capítulo 20 se relacionará la temperatura con el comportamiento mecánico de las moléculas.

E XAMEN RÁPIDO 18.1 Dos objetos, con diferentes tamaños, masas y temperaturas, se ponen en contacto térmico. ¿En qué dirección viaja la energía? (a) La energía viaja del objeto más grande al objeto más pequeño. (b) La energía viaja del objeto con más masa al que tiene menos masa. (c) La energía viaja del objeto con mayor temperatura al objeto con menor temperatura.

18.2 Termómetros y escala de temperatura Celsius

En la figura 18.1, usamos un termómetro para medir las temperaturas de A y B. Todos los termómetros se basan en el principio de que alguna propiedad física de un sistema cambia a medida que varía la temperatura del sistema. Algunas propiedades físicas que cambian con la temperatura son (1) el volumen de un líquido, (2) las dimensiones de un sólido, (3) la presión de un gas a volumen constante, (4) el volumen de un gas a presión constante, (5) la resistencia eléctrica de un conductor y (6) el color de un objeto.

Un termómetro de uso cotidiano consiste de una masa de líquido, por lo general mercurio o alcohol, que se expande en un tubo capilar de vidrio cuando se calienta (figura 18.2). En este caso, la propiedad física que cambia es el volumen de un líquido. Cualquier cambio de temperatura en el rango del termómetro se define como proporcional al cambio en longitud de la columna de líquido. El termómetro se calibra al colocarlo en contacto térmico con un sistema natural que permanezca a temperatura constante. Uno de dichos sistemas es una mezcla de hielo y agua en equilibrio térmico a presión atmosférica.





Figura 18.2 Termómetro de mercurio antes y después de incrementar su temperatura.

En la **escala de temperatura Celsius**, esta mezcla se define que tiene una temperatura de cero grados Celsius, que se escribe como $0\text{ }^{\circ}\text{C}$; esta temperatura se llama *punto de hielo* del agua. Otro sistema empleado comúnmente es una mezcla de agua y vapor en equilibrio térmico a presión atmosférica; su temperatura se define como $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, que es el *punto de vapor* del agua. Una vez que los niveles del líquido en el termómetro se establecen en estos dos puntos, la longitud de la columna de líquido entre los dos puntos se divide en 100 segmentos iguales para crear la escala Celsius. Por tanto, cada segmento indica un cambio en temperatura de un grado Celsius.

Los termómetros calibrados de esta manera presentan problemas cuando se necesitan lecturas de extrema precisión. Por ejemplo, las lecturas dadas por un termómetro de alcohol calibrado en los puntos de hielo y de vapor de agua podrían coincidir con las lecturas del termómetro de mercurio sólo en los puntos de calibración. Como el mercurio y el alcohol tienen diferentes propiedades de expansión térmica, entonces cuando un termómetro lee una temperatura de, por ejemplo $50\text{ }^{\circ}\text{C}$, el otro puede indicar un valor ligeramente distinto. Las discrepancias entre termómetros son especialmente grandes cuando las temperaturas a medir están lejos de los puntos de calibración.²

Un problema adicional, que es práctico, de cualquier termómetro, es el rango limitado de temperaturas en las que se puede emplear. Un termómetro de mercurio, por ejemplo, no se puede usar por abajo del punto de congelación del mercurio, que es $-39\text{ }^{\circ}\text{C}$, y un termómetro de alcohol no es útil para medir temperaturas superiores a $85\text{ }^{\circ}\text{C}$, el punto de ebullición del alcohol. Para superar este problema, se necesita un termómetro universal cuyas lecturas sean independientes de la sustancia empleada. El termómetro de gas, que se estudia en la siguiente sección, se aproxima a este requisito.

18.3 Termómetro de gas a volumen constante y escala absoluta de temperatura

Una versión de un termómetro de gas es el aparato de volumen constante que se muestra en la figura 18.3. El cambio físico que se aprovecha en este dispositivo es la variación de la presión de un volumen de gas fijo debida a la temperatura. La ampollita se sumerge en

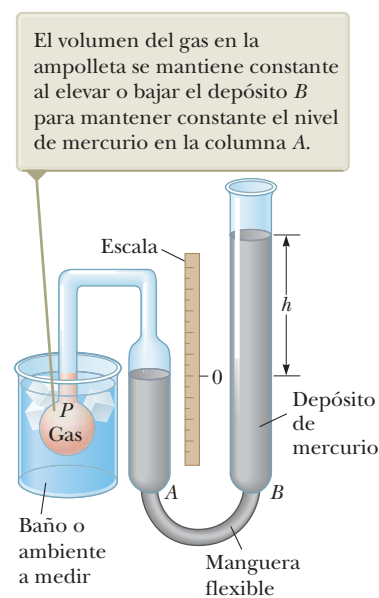


Figura 18.3 Un termómetro de gas a volumen constante mide la presión del gas contenido en la ampollita sumergida en el baño.

² Dos termómetros que usan el mismo líquido también pueden dar lecturas diferentes, debido en parte a las dificultades en la construcción de tubos capilares de vidrio uniformes.

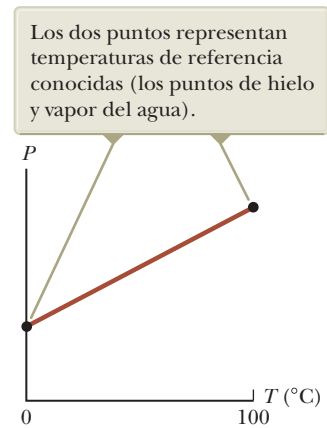


Figura 18.4 Una gráfica típica de presión contra temperatura tomada con un termómetro de gas a volumen constante.

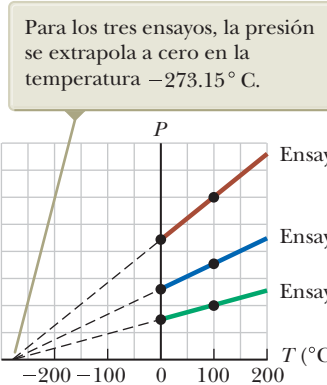


Figura 18.5 Presión contra temperatura para ensayos experimentales en gases que tienen diferentes presiones en un termómetro de gas a volumen constante.

un baño de hielo-agua, y el depósito de mercurio B se eleva o baja. Esto hará que el mercurio se transfiera entre los depósitos A y B a través de la manguera flexible. El depósito B se ajusta hasta que la parte superior del mercurio en la columna A se encuentre en el punto cero de la escala. La altura h , la diferencia entre los niveles de mercurio en el depósito B y la columna A , indica la presión en la ampolla a 0°C mediante la ecuación 14.4, $P = P_0 + \rho gh$, donde P_0 es la presión atmosférica.

En seguida la ampolla se sumerge en agua al punto de vapor. El depósito B se reajusta hasta que la parte superior del mercurio en la columna A de nuevo esté en cero en la escala, lo cual garantiza que el volumen del gas es el mismo que era cuando la ampolla estaba en el baño de hielo (de ahí la designación de “volumen constante”). Este ajuste del depósito B da un valor para la presión de gas a 100°C . Después estos dos valores de presión y temperatura se grafican como se muestra en la figura 18.4. La línea que une los dos puntos sirve como una curva de calibración para temperaturas desconocidas. (Otros experimentos demuestran que una relación lineal entre presión y temperatura es una muy buena suposición.) Para medir la temperatura de una sustancia, el matraz de gas de la figura 18.3 se coloca en contacto térmico con la sustancia y la altura del depósito B se ajusta hasta que la parte superior de la columna de mercurio en A esté en cero en la escala. La altura de la columna de mercurio en B indica la presión del gas; al conocer la presión, la temperatura de la sustancia se encuentra mediante la gráfica de la figura 18.4.

Ahora suponga que utiliza termómetros de gas para medir las temperaturas de diferentes gases a distintas presiones iniciales. Los experimentos demuestran que las lecturas del termómetro son casi independientes del tipo de gas empleado, en tanto la presión del gas sea baja y la temperatura esté arriba del punto de licuefacción (figura 18.5). El acuerdo entre termómetros que emplean diversos gases mejora a medida que se reduce la presión.

Si las líneas rectas de color de la figura 18.5 se extienden hacia temperaturas negativas, se encuentra un resultado notable: **en cada caso, la presión es cero cuando la temperatura es -273.15°C** ! Este hallazgo sugiere algún papel especial que esta temperatura particular debe jugar. Se usa como la base para la **escala absoluta de temperatura**, que establece -273.15°C como su punto cero. A esta temperatura usualmente se le refiere como **cero absoluto**. Se indica como cero porque a una temperatura más baja, la presión del gas sería negativa, lo que no tiene sentido. El tamaño de un grado en la escala absoluta de temperatura se elige como idéntica al tamaño de un grado en la escala Celsius. Por tanto, la conversión entre dichas temperaturas es

$$T_C = T - 273.15 \quad (18.1)$$

donde T_C es la temperatura Celsius y T es la temperatura absoluta.

Ya que los puntos de hielo y vapor son experimentalmente difíciles de duplicar y dependen de la presión atmosférica, en 1954 el Comité Internacional de Pesos y Medidas adoptó una escala absoluta de temperatura con base en dos nuevos puntos fijos. El primer punto es el **cero absoluto**. La segunda temperatura de referencia para esta nueva escala se eligió como el **punto triple del agua**, que es la combinación única de temperatura y presión en donde al agua líquida, gaseosa y sólida (hielo) coexisten en equilibrio. Este punto triple ocurre a una temperatura de 0.01°C y una presión de 4.58 mm de mercurio. En la escala nueva, que usa la unidad *kelvin*, la temperatura del agua en el punto triple se estableció en 273.16 kelvins, abreviada 273.16 K. Esta elección se hizo de modo que la antigua escala absoluta de temperatura basada en los puntos de hielo y vapor concordara cercanamente con la nueva escala basada en el punto triple. Esta nueva escala absoluta de temperatura (también llamada **escala Kelvin**) emplea la unidad del SI de temperatura absoluta, el **kelvin**, que se define como $1/273.16$ de la diferencia entre el cero absoluto y la temperatura del punto triple del agua.

La figura 18.6 da la temperatura absoluta de varios procesos físicos y estructuras. La temperatura del cero absoluto (0 K) no se puede lograr, aunque experimentos de laboratorio han estado muy cerca de lograrlo, alcanzando temperaturas de menos de un nanokelvin.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 18.1

Cuestión de grado Las notaciones para temperaturas en la escala Kelvin no usan el signo de grado. La unidad para una temperatura Kelvin es simplemente “kelvins” y no “grados Kelvin”.



Las escalas de temperatura Celsius, Fahrenheit y Kelvin³

La ecuación 18.1 muestra que la temperatura Celsius T_C se desliza de la temperatura absoluta (Kelvin) T en 273.15° . Ya que el tamaño de un grado es el mismo en las dos escalas, una diferencia de temperatura de 5°C es igual a una diferencia de temperatura de 5 K . Las dos escalas sólo difieren en la elección del punto cero. Por tanto, la temperatura del punto hielo en la escala Kelvin, 273.15 K , corresponde a 0.00°C , y el punto de vapor en la escala Kelvin, 373.15 K , es equivalente a 100.00°C .

Una escala de temperatura común en uso cotidiano en Estados Unidos es la **escala Fahrenheit**. Dicha escala ubica la temperatura del punto de hielo en 32°F y la temperatura del punto de vapor en 212°F . La relación entre las escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit es

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32^\circ\text{F} \quad (18.2)$$

Mediante las ecuaciones 18.1 y 18.2 se encuentra una relación entre los cambios de temperatura en las escalas Celsius, Kelvin y Fahrenheit:

$$\Delta T_C = \Delta T = \frac{5}{9}\Delta T_F \quad (18.3)$$

De estas tres escalas de temperatura, sólo la escala Kelvin se apoya en un verdadero valor cero de temperatura. Las escalas Celsius y Fahrenheit se basan en un cero arbitrario asociado con una sustancia particular, agua, en un planeta particular, la Tierra. Por tanto, si usted encuentra una ecuación que pida una temperatura T o que involucre una razón de temperaturas, *debe* convertir todas las temperaturas a kelvins. Si la ecuación contiene un cambio en temperatura ΔT , usar las temperaturas Celsius le dará la respuesta correcta, a la luz de la ecuación 18.3, pero siempre es *más seguro* convertir las temperaturas a la escala Kelvin.

Note que la escala es logarítmica

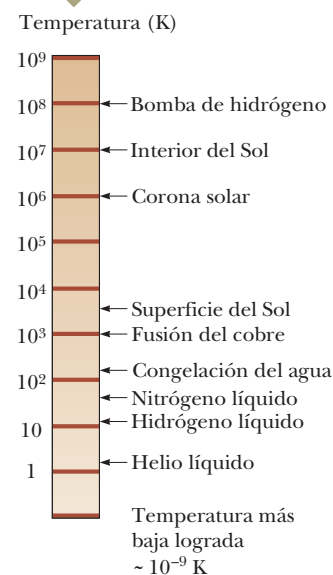


Figura 18.6 Temperaturas absolutas a las que ocurren varios procesos físicos.

- EJAMEN RÁPIDO 18.2** Considere los siguientes pares de materiales. ¿Cuál par
- representa dos materiales, uno de los cuales está el doble de caliente que el otro? **(a)**
 - agua en ebullición a 100°C , un vaso con agua a 50°C , **(b)** agua en ebullición a 100°C ,
 - metano congelado a -50°C , **(c)** un cubo de hielo a -20°C , flamas de un traga fuego
 - de circo a 233°C , **(d)** ninguno de estos pares.

Ejemplo 18.1 Conversión de temperaturas

Un día la temperatura alcanza 50°C , ¿cuál es la temperatura en grados Celsius y en kelvins?

SOLUCIÓN

Conceptualizar En Estados Unidos, una temperatura de 50°F se entiende bien. Sin embargo, en muchas otras partes del mundo, esta temperatura puede no tener sentido porque las personas están familiarizadas con la escala de temperatura Celsius.

Categorizar Este ejemplo es un simple problema de sustitución.

Resuelva la ecuación 18.2 para la temperatura Celsius y sustituya valores numéricos:

$$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32) = \frac{5}{9}(50 - 32) = 10^\circ\text{C}$$

Use la ecuación 18.1 para encontrar la temperatura Kelvin:

$$T = T_C + 273.15 = 10^\circ\text{C} + 273.15 = 283\text{ K}$$

Un conjunto de equivalentes de temperatura relacionados con el clima que conviene tener en mente es que 0°C es (literalmente) congelación a 32°F , 10°C es fresco a 50°F , 20°C es temperatura ambiente, 30°C es caliente a 86°F y 40°C es un día caluroso a 104°F .

³ Llamadas en honor de Anders Celsius (1701-1744), Daniel Gabriel Fahrenheit (1686-1736) y William Thomson, lord Kelvin (1824-1907), respectivamente.

18.4 Expansión térmica de sólidos y líquidos

El estudio del termómetro líquido utiliza uno de los cambios mejor conocidos en una sustancia: a medida que aumenta su temperatura, su volumen se incrementa. Este fenómeno, conocido como **expansión térmica**, desempeña un importante papel en numerosas aplicaciones de ingeniería. Por ejemplo, las juntas de expansión térmica como las que se muestran en la figura 18.7, se deben incluir en edificios, autopistas de concreto, vías ferroviarias, paredes de ladrillo y puentes para compensar los cambios dimensionales que ocurren a medida que cambia la temperatura.

La expansión térmica es responsable de los efectos que vio en la semblanza de apertura. En un día caluroso, las líneas eléctricas se expanden. La distancia entre los extremos de las líneas se fija en las posiciones de los polos. Por tanto, cuando la línea de potencia se alarga, se hunde hacia abajo desde sus extremos fijos. La acera de ladrillo en la fotografía de apertura del capítulo probablemente se instaló sin juntas de expansión. A medida que aumenta la temperatura, la expansión de las secciones de la acera hace que se doblen hacia arriba.

La expansión térmica es una consecuencia del cambio en la separación *promedio* entre los átomos en un objeto. Para entender este concepto, modele a los átomos conectados mediante resortes rígidos como se estudió en la sección 15.3, y se ve en la figura 15.11b. A temperaturas ordinarias, los átomos en un sólido oscilan respecto a sus posiciones de equilibrio con una amplitud de aproximadamente 10^{-11} m y una frecuencia cercana a 10^{13} Hz. El espaciado promedio entre los átomos es alrededor de 10^{-10} m. A medida que la temperatura del sólido aumenta, los átomos oscilan con mayores amplitudes; como un resultado, la separación promedio entre ellos se incrementa.⁴ En consecuencia, el objeto se expande.

Si la expansión térmica es suficientemente pequeña comparada con las dimensiones iniciales de un objeto, el cambio en cualquier dimensión es, a una buena aproximación, proporcional a la primera potencia del cambio de temperatura. Suponga que un objeto tiene una longitud inicial L_i a lo largo de alguna dirección en alguna temperatura, y la longitud aumenta en una cantidad ΔL para un cambio en temperatura ΔT . Es conveniente considerar el cambio fraccionario en longitud por cada grado de cambio de temperatura, entonces se define el **coeficiente de expansión lineal promedio** como

$$\alpha \equiv \frac{\Delta L/L_i}{\Delta T} \quad (18.4)$$

Sin estas juntas para separar secciones de carretera sobre puentes, la superficie se pandearía debido a expansión térmica en días muy calientes o se fracturaría debido a contracción en días muy fríos.



a

La junta vertical larga se llena con un material suave para permitir que la pared se expanda y contraiga conforme cambia la temperatura de los ladrillos.



b

Figura 18.7 Juntas de expansión térmica en (a) puentes y (b) paredes.

⁴Más precisamente, la expansión térmica surge de la naturaleza *asimétrica* de la curva de energía potencial para los átomos en un sólido, como se muestra en la figura 15.11a. Si los osciladores fueran realmente armónicos, las separaciones atómicas promedio no cambiarían sin importar la amplitud de la vibración.

Los experimentos demuestran que α es constante para pequeños cambios de temperatura. Para fines de cálculo, esta ecuación por lo general se reescribe como

$$\Delta L = \alpha L_i \Delta T \tag{18.5}$$

o en la forma

$$L_f - L_i = \alpha L_i (T_f - T_i) \tag{18.6}$$

donde L_f es la longitud final, T_i y T_f son las temperaturas inicial y final, respectivamente, y la constante de proporcionalidad α es el coeficiente de expansión lineal promedio para un material dado y tiene unidades de $(^\circ\text{C})^{-1}$. La ecuación 18.5 puede emplearse para expansión térmica cuando se incrementa la temperatura del material, y también para contracción térmica cuando disminuye su temperatura.

Puede ser útil pensar en la expansión térmica como un aumento efectivo o como una ampliación fotográfica de un objeto. Por ejemplo, a medida que se calienta una rondana metálica (figura 18.8), todas las dimensiones, incluido el radio del orificio, aumentan de acuerdo a la ecuación 18.5. Una cavidad en un trozo de material se expande en la misma forma como si la cavidad estuviese llena con el material.

La tabla 18.1 contiene los coeficientes de expansión lineal promedio de diversos materiales. Para dichos materiales, α es positiva, lo que indica un aumento en longitud a temperatura creciente. Sin embargo, éste no siempre es el caso. Algunas sustancias, la calcita (CaCO_3) es un ejemplo, se expanden a lo largo de una dimensión (α positiva) y se contraen en otra (α negativa) a medida que sus temperaturas aumentan.

Ya que las dimensiones lineales de un objeto cambian con la temperatura, se sigue que el área superficial y el volumen cambian. El cambio en volumen es proporcional al volumen inicial V_i y al cambio en temperatura de acuerdo con la relación

$$\Delta V = \beta V_i \Delta T \tag{18.7}$$

donde β es el **coeficiente de expansión volumétrica promedio**. Para encontrar la relación entre β y α , suponga que el coeficiente de expansión lineal promedio del sólido es el mismo en todas direcciones; es decir, suponga que el material es *isotrópico*. Considere una caja sólida de dimensiones ℓ , w y h . Su volumen a cierta temperatura T_i es $V_i = \ell wh$. Si la temperatura cambia a $T_i + \Delta T$, su volumen cambia a $V_i + \Delta V$, donde cada dimensión cambia de acuerdo con la ecuación 18.5. Por tanto,

$$\begin{aligned} V_i + \Delta V &= (\ell + \Delta\ell)(w + \Delta w)(h + \Delta h) \\ &= (\ell + \alpha\ell \Delta T)(w + \alpha w \Delta T)(h + \alpha h \Delta T) \\ &= \ell wh(1 + \alpha \Delta T)^3 \\ &= V_i[1 + 3\alpha \Delta T + 3(\alpha \Delta T)^2 + (\alpha \Delta T)^3] \end{aligned}$$

TABLA 18.1 Coeficientes de expansión promedio para algunos materiales cerca de temperatura ambiente

Material (Sólidos)	Coficiente de expansión lineal promedio (α) ($^\circ\text{C}$) ⁻¹	Material (Líquidos y Gases)	Coficiente de expansión volumétrica promedio (β) ($^\circ\text{C}$) ⁻¹
Aluminio	24×10^{-6}	Acetona	1.5×10^{-4}
Latón y bronce	19×10^{-6}	Alcohol, etílico	1.12×10^{-4}
Concreto	12×10^{-6}	Benceno	1.24×10^{-4}
Cobre	17×10^{-6}	Gasolina	9.6×10^{-4}
Vidrio (ordinario)	9×10^{-6}	Glicerina	4.85×10^{-4}
Vidrio (Pyrex)	3.2×10^{-6}	Mercurio	1.82×10^{-4}
Invar (aleación Ni-Fe)	0.9×10^{-6}	Trementina	9.0×10^{-4}
Plomo	29×10^{-6}	Airea ^a 0 $^\circ\text{C}$	3.67×10^{-3}
Acero	11×10^{-6}	Helio ^a	3.665×10^{-3}

^aLos gases no tienen un valor específico para el coeficiente de expansión volumétrica porque la cantidad de expansión depende del tipo de proceso por el que pasa el gas. Los valores dados aquí suponen que el gas experimenta una expansión a presión constante.

◀ Expansión térmica unidimensional

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 18.2

¿Los hoyos se vuelven más grandes o más pequeños? Cuando se eleva la temperatura de un objeto, cada dimensión lineal aumenta en tamaño. Eso incluye cualquier hoyo en el material, que se expande en la misma forma como si el hoyo estuviera lleno con el material, como se muestra en la figura 18.8.

◀ Expansión térmica unidimensional

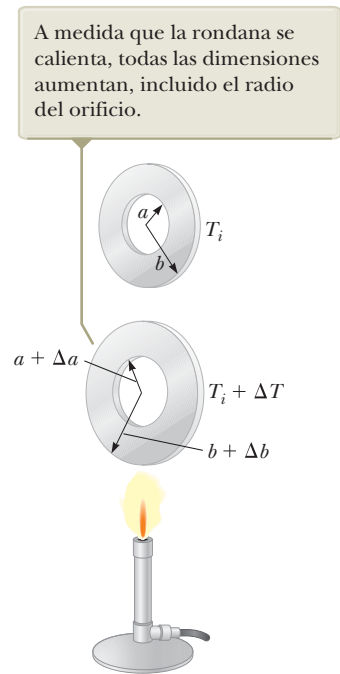


Figura 18.8 Expansión térmica de una rondana metálica homogénea. (La expansión está exagerada en esta figura.)

Al dividir ambos lados entre V_i y despejar el término $\Delta V/V_i$, se obtiene el cambio fraccionario en volumen:

$$\frac{\Delta V}{V_i} = 3\alpha \Delta T + 3(\alpha \Delta T)^2 + (\alpha \Delta T)^3$$

Puesto que $\alpha\Delta T \ll 1$ para valores típicos de ΔT ($< \sim 100$ °C), se pueden despreciar los términos $3(\alpha\Delta T)^2$ y $(\alpha\Delta T)^3$. Al hacer esta aproximación, es claro que

$$\frac{\Delta V}{V_i} = 3\alpha \Delta T \rightarrow \Delta V = (3\alpha)V_i \Delta T$$

Al comparar esta expresión con la ecuación 19.6 se obtiene

$$\beta = 3\alpha$$

En forma similar, puede demostrar que el cambio en área de una placa rectangular está dado por $\Delta A = 2\alpha A \Delta T$ (vea el problema 37).

Esta porción aumentada de la gráfica muestra que la densidad máxima del agua ocurre a 4 °C.

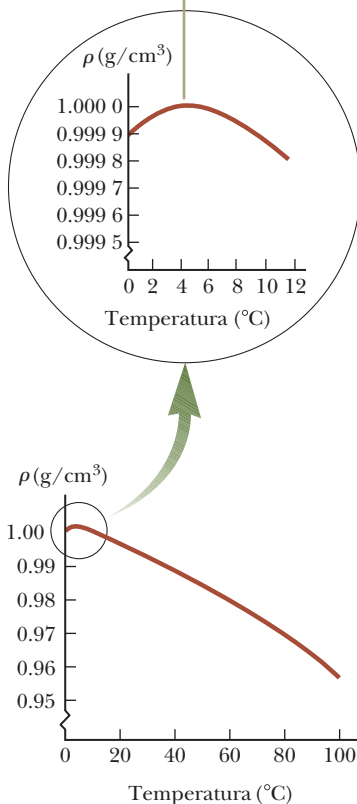


Figura 18.9 Variación de la densidad del agua a presión atmosférica con la temperatura.

E XAMEN RÁPIDO 18.3 Si se le pide hacer un termómetro de vidrio muy sensible, ¿cuál de los siguientes líquidos de trabajo seleccionarías? (a) mercurio, (b) alcohol, (c) gasolina, (d) glicerina.

E XAMEN RÁPIDO 18.4 Dos esferas se elaboran del mismo metal y tienen el mismo radio, pero una es hueca y la otra sólida. Las esferas se someten al mismo aumento de temperatura. ¿Cuál esfera se expande más? (a) La esfera sólida. (b) La esfera hueca. (c) Ambas se expanden en la misma cantidad. (d) No hay suficiente información para decirlo.

El inusual comportamiento del agua

Por lo general, los líquidos aumentan en volumen con temperatura creciente y tienen coeficientes de expansión volumétrica promedio alrededor de diez veces mayores que los sólidos. El agua fría sigue este comportamiento *excepto* cerca de los 0°C , como puede ver en la curva de densidad contra temperatura que se muestra en la figura 18.9. A medida que la temperatura aumenta de 0°C a 4°C , el agua se contrae y por tanto su densidad aumenta. Arriba de 4°C , el agua se expande con temperatura creciente y así su densidad disminuye. En consecuencia, la densidad del agua alcanza un valor máximo de 1.000 g/cm^3 a 4°C .

Este inusual comportamiento de expansión térmica del agua sirve para explicar por qué un estanque empieza a congelarse en la superficie, en lugar de hacerlo en el fondo. Cuando la temperatura del aire cae de, por ejemplo, 7°C a 6°C , el agua superficial también se enfría y por tanto disminuye en volumen. El agua superficial es más densa que el agua del fondo, la cual no se ha enfriado ni disminuido en volumen. Como resultado, el agua de la superficie se hunde, y agua más caliente de abajo se mueve a la superficie. Sin embargo, cuando la temperatura del aire está entre 4°C y 0°C , el agua superficial se expande mientras se enfría, y se vuelve menos densa que el agua bajo ella. El proceso de mezcla se detiene y finalmente el agua de la superficie se congela. A medida que el agua se congela, el hielo permanece en la superficie porque es menos denso que el agua. El hielo continúa acumulándose en la superficie, mientras que el agua cercana al fondo permanece a 4°C . Si éste no fuese el caso, los peces y otras formas de vida marina no sobrevivirían.

Ejemplo 18.2 Expansión de una vía de ferrocarril

Un segmento de vía de ferrocarril de acero tiene una longitud de $30\,000\text{ m}$ cuando la temperatura es de 0.0°C . ¿Cuál es su longitud cuando la temperatura es de 40.0°C ?



18.2 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar La vía es relativamente larga, por lo que se espera obtener un aumento medible de longitud para un aumento de temperatura de 40 °C.

Categorizar Se evaluará un aumento en longitud a partir de la discusión de esta sección, así que esta parte del ejemplo es un problema de sustitución.

Utilice la ecuación 18.5 y el valor del coeficiente de expansión lineal de la tabla 18.1:

$$\Delta L = \alpha L_i \Delta T = [11 \times 10^{-6} (\text{°C})^{-1}](30.000 \text{ m})(40.0^\circ\text{C}) = 0.013 \text{ m}$$

Encuentre la nueva longitud de la vía:

$$L_f = 30.000 \text{ m} + 0.013 \text{ m} = 30.013 \text{ m}$$

La expansión de 1.3 cm es de hecho mensurable como se predijo en el paso conceptualizar. Si la sección de la vía se empalma a la derecha contra otra vía, no puede ocurrir esta expansión y se desarrolla una tensión térmica en la vía. La tensión térmica podría doblar la vía. Esta tensión puede evitarse dejando pequeñas brechas de expansión entre las vías.

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si la temperatura disminuye a -40.0°C ? ¿Cuál es la longitud del segmento que no está sujeto?

Respuesta La expresión para el cambio de longitud en la ecuación 18.5 es la misma, ya sea que la temperatura aumente o disminuya. Por tanto, si hay un aumento en longitud de 0.013 m cuando la temperatura aumenta en 40 °C, hay una disminución en longitud de 0.013 m cuando la temperatura disminuye en 40 °C. (Se supone que α es constante sobre todo el rango de temperaturas.) La nueva longitud a la temperatura más fría es $30.000 \text{ m} - 0.013 \text{ m} = 29.987 \text{ m}$.

Ejemplo 18.3 El corto electrotérmico

Un dispositivo electrónico con diseño pobre tiene dos tornillos unidos a diferentes partes del dispositivo que casi se tocan entre sí en su interior, como en la figura 18.10. Los tornillos de acero y latón están a diferentes potenciales eléctricos y, si se tocan, se desarrollará un cortocircuito que dañará al dispositivo. (El potencial eléctrico se estudiará en el capítulo 24.) La separación inicial entre los extremos de los tornillos es $d = 5.0 \mu\text{m}$ a 27°C . ¿A qué temperatura se tocarán los tornillos? Suponga que la distancia entre las paredes del dispositivo no es afectada por el cambio de temperatura.

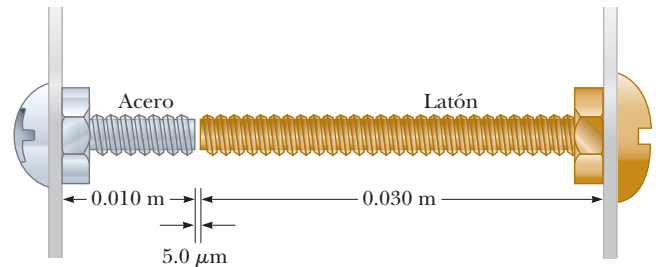


Figura 18.10 (Ejemplo 18.3) Dos tornillos unidos a diferentes partes de un dispositivo eléctrico casi se tocan cuando la temperatura es de 27°C . A medida que la temperatura aumenta, los extremos de los tornillos se mueven uno hacia el otro.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que los extremos de ambos tornillos se expanden en el espacio que existe entre ellos a medida que aumenta la temperatura.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de expansión térmica en donde la *suma* de los cambios en longitud de los dos tornillos debe ser igual a la longitud de la separación inicial entre los extremos.

Analizar Establezca la suma de los cambios de longitud igual al ancho de la separación:

$$\Delta L_{\text{lat}} + \Delta L_{\text{ac}} = \alpha_{\text{lat}} L_{i,\text{lat}} \Delta T + \alpha_{\text{ac}} L_{i,\text{ac}} \Delta T = d$$

Resuelva para ΔT :

$$\Delta T = \frac{d}{\alpha_{\text{lat}} L_{i,\text{lat}} + \alpha_{\text{ac}} L_{i,\text{ac}}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\Delta T = \frac{5.0 \times 10^{-6} \text{ m}}{[19 \times 10^{-6} (\text{°C})^{-1}](0.030 \text{ m}) + [11 \times 10^{-6} (\text{°C})^{-1}](0.010 \text{ m})} = 7.4^\circ\text{C}$$

Encuentre la temperatura a la que se tocan los tornillos:

$$T = 27^\circ\text{C} + 7.4^\circ\text{C} = 34^\circ\text{C}$$

Finalizar Esta temperatura es posible si el aire acondicionado en el alojamiento del dispositivo falla durante un largo periodo en un día de verano muy caliente.



18.5 Descripción macroscópica de un gas ideal

La ecuación de expansión volumétrica $\Delta V = \beta V_i \Delta T$ se basa en la suposición de que el material tiene un volumen inicial V_i antes de que ocurra un cambio de temperatura. Tal es el caso para sólidos y líquidos porque tienen un volumen fijo a una temperatura dada.

El caso para gases es por completo diferente. Las fuerzas interatómicas dentro de los gases son muy débiles y, en muchos casos, es posible imaginar dichas fuerzas como inexistentes y aún así hacer muy buenas aproximaciones. Por tanto, *no hay separación de equilibrio* para los átomos ni volumen “estándar” a una temperatura determinada; el volumen depende del tamaño del recipiente. Como resultado, con la ecuación 18.7 no es posible expresar cambios en volumen ΔV en un proceso sobre un gas porque no se definió el volumen V_i al inicio del proceso. Las ecuaciones que involucran gases contienen el volumen V , en lugar de un *cambio* en el volumen desde un valor inicial, como una variable.

Para un gas, es útil saber cómo se relacionan las cantidades volumen V , presión P y temperatura T para una muestra de gas de masa m . En general, la ecuación que interrelaciona estas cantidades, llamada *ecuación de estado*, es muy complicada. Sin embargo, si el gas se mantiene a una presión muy baja (o densidad baja), la ecuación de estado es muy simple y se puede determinar a partir de resultados experimentales. Tal gas de densidad baja se refiere como un **gas ideal**.⁵ El **modelo de gas ideal** se puede emplear para efectuar predicciones que sean adecuadas para describir el comportamiento de gases reales a bajas presiones.

Es conveniente expresar la cantidad de gas en un volumen dado en términos del número de moles n . Un **mol** de cualquier sustancia es aquella cantidad de la sustancia que contiene un **número de Avogadro** $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ de partículas constituyentes (átomos o moléculas). El número de moles n de una sustancia se relaciona a su masa m mediante la expresión

$$n = \frac{m}{M} \quad (18.8)$$

donde M es la masa molar de la sustancia. La masa molar de cada elemento químico es la masa atómica (de la tabla periódica; consulte el Apéndice C expresada en gramos por mol. Por ejemplo, la masa de un átomo de helio (He) es 4.00 u (unidades de masa atómica), así que la masa molar del He es 4.00 g/mol.

Ahora suponga que un gas ideal está confinado a un recipiente cilíndrico cuyo volumen puede variar mediante un pistón móvil, como en la figura 18.11. Si supone que el cilindro no tiene fugas, la masa (o el número de moles) del gas permanece constante. Para tal sistema, los experimentos proporcionan la siguiente información:

- Cuando el gas se mantiene a una temperatura constante, su presión es inversamente proporcional al volumen. (Históricamente, este comportamiento se describe como ley de Boyle.)
- Cuando la presión del gas se mantiene constante, el volumen es directamente proporcional a la temperatura. (Históricamente, este comportamiento se describe como ley de Charles.)
- Cuando el volumen del gas se mantiene constante, la presión es directamente proporcional a la temperatura. (Históricamente, este comportamiento se describe como ley de Gay-Lussac y justifica las líneas rectas que se dibujaron a través de los puntos de datos en el gráfico de la figura 18.5.)

Estas observaciones se resumen mediante la **ecuación de estado para un gas ideal**:

$$PV = nRT \quad (18.9)$$

Ecuación de estado para un gas ideal ▶

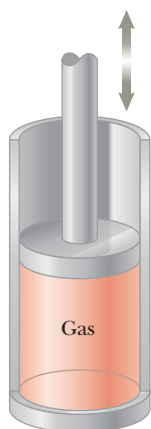


Figura 18.11 Un gas ideal confinado a un cilindro cuyo volumen puede variar mediante un pistón móvil.

⁵ Para ser más específicos, aquí las suposiciones son que la temperatura del gas no debe ser muy baja (el gas no se debe condensar en un líquido) o muy alta, y que la presión debe ser baja. El concepto de gas ideal implica que las moléculas de gas no interactúan, excepto en colisión, y que el volumen molecular es despreciable comparado con el volumen del recipiente. En realidad, un gas ideal no existe. Sin duda, el concepto de un gas ideal es muy útil porque los gases reales a bajas presiones se modelan bien como gases ideales.

En esta expresión, también conocida como **ley de gas ideal**, n es el número de moles de gas en la muestra y R es una constante. Los experimentos en numerosos gases demuestran que, conforme la presión tiende a cero, la cantidad PV/nT tiende al mismo valor R para todos los gases. Por esta razón, R se llama **constante universal de los gases**. En unidades del SI, la presión se expresa en pascuales ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$) y el volumen en metros cúbicos, el producto PV tiene unidades de newton \times metros, o joules, y R tiene el valor

$$R = 8.314 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \quad (18.10)$$

Si la presión se expresa en atmósferas y el volumen en litros ($1 \text{ L} = 10^3 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$), entonces R tiene el valor

$$R = 0.08206 \text{ L} \cdot \text{atm/mol} \cdot \text{K}$$

Al emplear este valor de R y la ecuación 18.9 se prueba que el volumen ocupado por 1 mol de *cualquier* gas a presión atmosférica y a 0°C (273 K) es de 22.4 L .

La ley de gas ideal afirma que, si el volumen y la temperatura de una cantidad fija de gas no cambian, la presión también permanece constante. Considere una botella de champaña que se agita y luego expulsa líquido cuando se abre, como se muestra en la figura 18.12. Una concepción equivocada común es que la presión dentro de la botella aumenta cuando la botella se agita. Por lo contrario, ya que la temperatura de la botella y su contenido permanecen constantes en tanto la botella esté sellada, lo mismo pasa con la presión, como se puede demostrar al cambiar el corcho con un medidor de presión. La explicación correcta es como sigue. El gas dióxido de carbono reside en el volumen entre la superficie del líquido y el corcho. La presión del gas en este volumen se establece más alta que la presión atmosférica en el proceso de embotellado. Agitar la botella desplaza parte del dióxido de carbono en el líquido, donde forma burbujas, y éstas quedan unidas en el interior de la botella. (No se genera nuevo gas al agitar.) Cuando la botella se abre, la presión se reduce a presión atmosférica, lo cual causa que el volumen de las burbujas aumente súbitamente. Si las burbujas se unen a la botella (detrás de la superficie del líquido), su rápida expansión expulsa líquido de la botella. Sin embargo, si los lados y el fondo de la botella se golpean primero hasta que no queden burbujas bajo la superficie, la caída en presión no fuerza al líquido de la botella cuando la champaña se abre.

La ley de gas ideal con frecuencia se expresa en términos del número total de moléculas N . Puesto que el número de moles n es igual a la razón del número total de moléculas y el número de Avogadro N_A , la ecuación 18.9 se escribe como

$$PV = nRT = \frac{N}{N_A} RT$$

$$PV = Nk_B T \quad (18.11)$$

donde k_B es la **constante de Boltzmann**, que tiene el valor

$$k_B = \frac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K} \quad (18.12)$$

Es común llamar a cantidades como P , V y T las **variables termodinámicas** de un gas ideal. Si la ecuación de estado se conoce, una de las variables siempre se puede expresar como alguna función de las otras dos.

E XAMEN RÁPIDO 18.5 Un material común para acolchar objetos en los paquetes está hecho de burbujas de aire atrapadas entre hojas de plástico. ¿Este material es más efectivo para evitar que los contenidos del paquete se muevan en el interior en (a) un día caliente, (b) un día frío, (c) días calientes o fríos?

E XAMEN RÁPIDO 18.6 En un día de invierno enciende su horno y la temperatura del aire dentro de su casa aumenta. Suponga que su casa tiene la cantidad normal de fuga entre el aire interior y el aire exterior. ¿El número de moles de aire en su habitación a la temperatura más alta (a) es mayor que antes, (b) es menor que antes o (c) es igual que antes?



Figura 18.12 Una botella de champaña se agita y se abre. El líquido se expulsa con fuerza de la abertura. Una idea equivocada común es que la presión dentro de la botella aumenta por la sacudida.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 18.3

Demasiadas k . Existe una variedad de cantidades físicas para las que se usa la letra k . Dos de las que se vieron anteriormente son la constante de fuerza para un resorte (capítulo 15) y el número de onda para una onda mecánica (capítulo 16). La constante de Boltzmann es otra k , y en el capítulo 19 se verá que la k se emplea para conductividad térmica y para una constante eléctrica en el capítulo 22. Para encontrar sentido en este confuso estado de asuntos y ayudarlo a reconocer la constante de Boltzmann se utiliza un subíndice B. En este libro encontrará la constante de Boltzmann como k_B , pero en otras fuentes puede ver la constante de Boltzmann simplemente como k .

◀ Constante de Boltzmann



Ejemplo 18.4 Calentamiento de una lata de aerosol

Una lata de aerosol que contiene un gas propelente al doble de la presión atmosférica (202 kPa) y que tiene un volumen de 125.00 cm³ está a 22 °C. Después se lanza a un fuego abierto. (*Precaución:* No realice este experimento; es muy peligroso.) Cuando la temperatura del gas en la lata alcanza 195 °C, ¿cuál es la presión dentro de la lata? Suponga que cualquier cambio en el volumen de la lata es despreciable.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Por intuición cabe esperar que la presión del gas en el recipiente aumente debido a la temperatura creciente.

Categorizar El gas en la lata se modela como ideal y se emplea la ley de gas ideal para calcular la nueva presión.

Analizar Reordene la ecuación 18.9:

$$(1) \quad \frac{PV}{T} = nR$$

No escapa aire durante la compresión, así n , y por tanto nR , permanecen constantes. Por ende, establezca el valor inicial del lado izquierdo de la ecuación (1) igual al valor final:

$$(2) \quad \frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f}$$

Ya que los volúmenes inicial y final del gas se suponen iguales, cancele los volúmenes:

$$(3) \quad \frac{P_i}{T_i} = \frac{P_f}{T_f}$$

Resuelva para P_f :

$$P_f = \left(\frac{T_f}{T_i}\right)P_i = \left(\frac{468 \text{ K}}{295 \text{ K}}\right)(202 \text{ kPa}) = 320 \text{ kPa}$$

Finalizar Mientras más alta sea la temperatura, mayor será la presión que ejerza el gas atrapado, como se esperaba. Si la presión aumenta lo suficiente, la lata puede explotar. Debido a esta posibilidad, nunca debe desechar las latas de aerosol en el fuego.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que se incluye un cambio de volumen debido a expansión térmica de la lata de acero a medida que aumenta la temperatura. ¿Esto altera significativamente la respuesta para la presión final?

Respuesta Ya que el coeficiente de expansión térmica del acero es muy pequeño, no se espera un gran efecto en la respuesta final.

Encuentre el cambio en volumen de la lata mediante la ecuación 18.7 y el valor de α para el acero de la tabla 18.1:

$$\Delta V = \beta V_i \Delta T = 3\alpha V_i \Delta T$$

$$= 3[11 \times 10^{-6} (\text{°C})^{-1}](125.00 \text{ cm}^3)(173 \text{ °C}) = 0.71 \text{ cm}^3$$

Aplique la ecuación (2) otra vez y obtenga una ecuación para la presión final:

$$P_f = \left(\frac{T_f}{T_i}\right)\left(\frac{V_i}{V_f}\right)P_i$$

Este resultado difiere de la ecuación (3) sólo en el factor V_i/V_f . Evalúe este factor:

$$\frac{V_i}{V_f} = \frac{125.00 \text{ cm}^3}{(125.00 \text{ cm}^3 + 0.71 \text{ cm}^3)} = 0.994 = 99.4\%$$

Por tanto, la presión final diferirá sólo por 0.6% del valor calculado sin considerar la expansión térmica de la lata. Al tomar 99.4% de la presión final previa, la presión que incluye expansión térmica es 318 kPa.

Resumen

Definiciones

Dos objetos están en **equilibrio térmico** mutuo si no intercambian energía cuando están en contacto térmico.

La **temperatura** es la propiedad que determina si un objeto está en equilibrio térmico con otros objetos. Dos objetos en equilibrio térmico mutuo están a la misma temperatura. La unidad del SI de temperatura absoluta es el **kelvin**, que se define como 1/273.16 de la diferencia entre cero absoluto y la temperatura del punto triple del agua.



Conceptos y principios

La **ley cero de la termodinámica** establece que si los objetos A y B están por separado en equilibrio térmico con un tercer objeto C, entonces los objetos A y B están en equilibrio térmico mutuo.

Cuando la temperatura de un objeto se cambia por una cantidad ΔT , su longitud cambia por una cantidad ΔL que es proporcional a ΔT y a su longitud inicial L_i :

$$\Delta L = \alpha L_i \Delta T \quad (18.5)$$

donde la constante α es el **coeficiente de expansión lineal promedio**. El **coeficiente de expansión volumétrica promedio** β para un sólido es aproximadamente igual a 3α .

Un **gas ideal** es aquel para el cual PV/nT es constante. Un gas ideal se describe mediante la **ecuación de estado**,

$$PV = nRT \quad (18.9)$$

donde n es igual al número de moles del gas, P es su presión, V su volumen, R es la constante universal de los gases ($8.314 \text{ J/mol} \times \text{K}$), y T es la temperatura absoluta del gas. Un gas real se comporta aproximadamente como un gas ideal si tiene una baja densidad.

Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN** From Cengage

- Problema de repaso.** En el “Imagine” que abre el capítulo 15, se analizó el cambio en el tiempo para un reloj de péndulo debido a un cambio en el valor de la aceleración g debido a la gravedad. Haga que su grupo piense en un cambio en el tiempo del reloj de péndulo debido a un cambio en la temperatura. Suponga que el péndulo está hecho de bronce y tiene un periodo de 1000 s cuando la temperatura es de 20.0 °C. Durante una semana cálida de verano, la temperatura permanece en un rango muy pequeño con un promedio de 30.0 °C. (a) ¿El reloj pierde tiempo o gana tiempo durante esa semana? (b) ¿Por cuánto está errado el reloj al final de la semana?
- Su equipo de testigos expertos ha sido contratado por el ayuntamiento en una demanda presentada por un conductor de camión. Mientras conducía por una calle de la ciudad en un día caluroso, la parte superior del camión manejado por el conductor golpeó una línea eléctrica que colgaba en la calle, causando daños a su camión y daños a sí mismo. El conductor afirma que la línea de alimentación estaba demasiado baja debido a la temperatura. Como resultado, colgaba por debajo del límite de altura libre de 14 pies, 0 pulgadas publicado en un letrero en la calle. Va al sitio del accidente y toma las siguientes medidas. Los polos que soportan los extremos de la línea de alimentación están a 40.0 pies de distancia. Ambos extremos de la línea son compatibles a una altura de 16.0 pies sobre la superficie de la carretera. En el día de invierno que visitó el sitio, la temperatura es de $-25.0 \text{ }^\circ\text{C}$ y la línea de alimentación de cobre esencialmente no muestra caídas. El día del accidente, la temperatura fue de $38.0 \text{ }^\circ\text{C}$. Prepare un argumento de que la línea de alimentación no se combó por debajo de la altura de claro, y que el conductor del camión debe haber cargado su camión a una altura mayor que la libre indicada. (*Sugerencia:* la forma de la línea de potencia colgante será una curva, pero supondrá una forma poco realista para la línea que permitirá un cálculo simple para el punto más bajo posible en la línea).


- ACTIVIDAD** Para esta actividad, necesitará algunos recipientes, algunos popotes, y un poco de agua. (a) Llene varios recipientes a diferentes niveles con agua y mida la profundidad h del agua en cada taza cuidadosamente. Ahora sumerja un popote verticalmente en cada taza con la parte inferior del popote apoyándose en la parte inferior de la taza. Coloque su dedo sobre el extremo superior del popote para sellar y levantar la paja verticalmente fuera de la taza. Mida la longitud h' de la columna de agua atrapada en el popote. Es posible que tenga que tomar una foto del popote con el teléfono inteligente y una regla y analizar cuidadosamente una ampliación de la foto para hacer esta medida. ¿La longitud de la columna de agua atrapada en el popote está de acuerdo con la profundidad del agua en la taza? ¿debería estar de acuerdo? (b) Para que la columna de agua se suspenda en el popote, a presión sobre la columna (dentro de la paja) debe ser menor que la presión atmosférica. Para que esto suceda, la columna de agua debe moverse hacia abajo un poco cuando el popote se levanta del agua, por lo que el aire encima de la columna se expande en el volumen y la presión disminuye. Por lo tanto, las dos longitudes medidas no deben ser las mismas. Pero, ¿es detectable la diferencia? Demuestre que la longitud h' del agua suspendida en el popote de longitud ℓ , debe estar relacionado con la profundidad h del agua en la taza por

$$h' = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{P_0}{\rho g} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\ell^2 + 2 \left(\frac{P_0}{\rho g} \right) (\ell - 2h) + \left(\frac{P_0}{\rho g} \right)^2}$$

donde P_0 es la presión atmosférica y ρ es la densidad del agua. (c) para un popote de 30 cm, utilice la ecuación para determinar la diferencia $h - h'$ para diferentes niveles de h de cero a 30 cm en incrementos de 1 cm. (d) Para qué valores de h es el porcentaje de goteo en la columna de agua más grande cuando el popote se saca de la taza? (e) Para qué valor de h ¿es el valor de $h - h'$, un máximo?



Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage

SECCIÓN 18.2 Termómetros y escala de temperatura Celsius

1. Está trabajando como asistente de investigación para un profesor cuya área de investigación es la termodinámica. El le señala que Daniel Fahrenheit utilizó la mejor estimación de la temperatura normal del cuerpo humano como uno de los puntos en la definición de la escala de temperatura Fahrenheit original. En la escala revisada que usamos ahora, la temperatura normal del cuerpo humano es 98.6 °F. Su profesor propone una nueva escala en la cual la temperatura normal del cuerpo humano sería exactamente 100 °N, donde la unidad °N es un grado en la Nueva escala. La temperatura del agua helada sería 0 °N, como en la escala Celsius. Su profesor le pide que determine las siguientes temperaturas en su nueva escala: (a) cero absoluto, (b) el punto de fusión del mercurio (237.9 °F), (c) el punto de ebullición del agua y, para la publicidad en su futura esperada conferencia de prensa, (d) la temperatura del aire más alta registrada en la superficie de la Tierra, 134.1 °F el 10 de julio de 1913, en Death Valley, California.

SECCIÓN 18.3 Termómetro de gas a volumen constante y escala absoluta de temperatura

- 2.** Una enfermera mide la temperatura de un paciente y obtiene 41.5 °C. (a) ¿Cuál es la temperatura en la escala Fahrenheit? (b) ¿Usted piensa que el paciente está seriamente enfermo? Explique.
- 3.** Convierta las siguientes temperaturas a sus valores en las escalas Fahrenheit y Kelvin: (a) el punto de sublimación de hielo seco, -78.5 °C; (b) temperatura del cuerpo humano, 37.0 °C.
- 4.** El nitrógeno líquido tiene un punto de ebullición de -195.81 °C a presión atmosférica. Expresé esta temperatura (a) en grados Fahrenheit y (b) en kelvins.
- 5.** El Valle de la Muerte tiene el récord de la más alta temperatura registrada en Estados Unidos. El 10 de julio de 1913, en un lugar llamado Rancho Furnace Creek, la temperatura alcanzó los 134 °F. La temperatura más baja registrada en E.U.A. ocurrió en Campo Prospect Creek, Alaska, el 23 de enero de 1971, cuando la temperatura se desplomó a -79.8 °F. (a) Convierta estas temperaturas a la escala Celsius. (b) Convierta las temperaturas Celsius a Kelvin.

SECCIÓN 18.4 Expansión térmica de sólidos y líquidos

Nota: La tabla 18.1 está disponible para resolver problemas en esta sección.

6. Problema de repaso. Dentro de la pared de una casa, una sección de tubería de agua caliente en forma de L consiste de tres partes: una pieza recta horizontal de $h = 28.0$ cm de longitud; un codo; y una pieza vertical recta de $\ell = 134$ cm de longitud (figura P18.6). Una trabe y un castillo mantienen fijos los extremos de esta sección de tubería de cobre. Encuentre la magnitud y dirección del desplazamiento del codo cuando hay flujo de agua, lo que eleva la temperatura de la tubería de 18.0 °C a 46.5 °C.

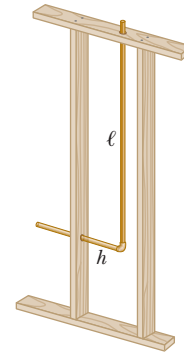


Figura P18.6

- 7.** Un alambre telefónico de cobre en esencia no tiene comba entre postes separados 35.0 m en un día de invierno cuando la temperatura es de -20.0 °C. ¿Cuánto más largo es el alambre en un día de verano cuando la temperatura es de 35.0 °C?
- 8.** Un par de monturas de gafas está elaborado con epoxi plástico. A temperatura ambiente (20.0 °C), las monturas tienen orificios circulares de 2.20 cm de radio. ¿A qué temperatura deben calentarse las monturas si lentes de 2.21 cm de radio deben insertarse en ellas? El coeficiente de expansión lineal promedio del epoxi es $1.30 \times 10^{-4} (\text{°C})^{-1}$.
- 9.** La tubería Trans-Alaska tiene 1 300 km de largo, desde Bahía Prudhoe hasta puerto de Valdez, y experimenta temperaturas de -73 °C a +35 °C. ¿Cuánto se expande la tubería de acero debido a la diferencia de temperatura? ¿Cómo se puede compensar esta expansión?
- 10.** Un orificio cuadrado de 8.00 cm de lado se corta en una hoja de cobre. (a) Calcular el cambio en el área de este orificio causado al incrementar en 50.0 K la temperatura de la hoja. (b) ¿Este cambio representa un aumento o una disminución en el área encerrada por el orificio?

11. Observa un nuevo puente que se está construyendo cerca de su casa. Durante la construcción, observa que dos tramos de concreto del puente de una longitud total de $L_i = 250$ m están colocados extremo con extremo, de modo que no se permite espacio para la expansión (figura P18.11a). En el “Imagine” de apertura de este capítulo, hablamos sobre el pandeo de las

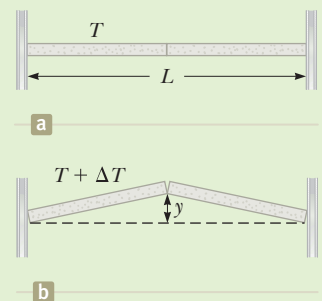


Figura P18.11

aceras. Lo mismo ocurrirá con los tramos en el puente si no se tiene en cuenta la expansión (figura P18.11b). Desea advertir al equipo de construcción sobre esta situación peligrosa, de modo que calcula la altura y a la que subirán los tramos cuando se pandeen en respuesta a un aumento de temperatura de $\Delta T = 20.0$ °C.

12. Observa un nuevo puente que se está construyendo cerca de su casa. Durante la construcción, observa que dos luces de hormigón se colocan de extremo a extremo para formar un tramo de longitud L_i . Sin embargo, se colocan extremo con

extremo para que no se permita espacio para la expansión (figura P18.11a). En el “Imagine” de apertura de este capítulo, hablamos sobre el pandeo de las aceras. Lo mismo ocurrirá con los tramos en los puentes si no se tiene en cuenta la expansión (figura P18.11b). Desea advertir al equipo de construcción sobre esta situación peligrosa, de modo que calcule la altura y la altura a la que subirán los tramos cuando se pandeen en respuesta a un aumento de temperatura de ΔT .

- 13.** A $20.0\text{ }^{\circ}\text{C}$, un anillo de aluminio tiene un diámetro interior de $5.000\text{ }0\text{ cm}$, y una barra de latón tiene un diámetro de $5.050\text{ }0\text{ cm}$. (a) Si sólo se calienta el anillo, ¿qué temperatura debe alcanzar tal que apenas se deslice por la barra? (b) **¿Qué pasaría si?** Si tanto la barra como el anillo se calientan juntos, ¿qué temperatura deben alcanzar para que el anillo apenas se deslice sobre la barra? (c) ¿Funcionaría este último proceso? Explique. *Sugerencia:* Consulte la tabla 19.2 en el próximo capítulo.
- 14.** **¿Por qué es imposible la siguiente situación?** Un delgado anillo de latón tiene un diámetro interno de 10.00 cm a $20.0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Un cilindro sólido de aluminio tiene un diámetro de 10.02 cm a $20.0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Suponga que ambos metales tienen coeficientes de expansión lineal constantes. Los dos metales se enfrían juntos a una temperatura en donde el anillo puede deslizarse sobre el extremo del cilindro.
- 15.** Un matraz volumétrico fabricado de Pyrex se calibra en $20.0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Se llena hasta la marca de 100 mL con acetona a $35.0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Después de que el matraz está lleno, la acetona se enfría y el matraz se calienta de manera que la combinación acetona-matraz alcanza una temperatura uniforme de $32.0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Luego la combinación se enfría a $20.0\text{ }^{\circ}\text{C}$. (a) ¿Cuál es el volumen de la acetona cuando se enfría a $20.0\text{ }^{\circ}\text{C}$? (b) En la temperatura de $32.0\text{ }^{\circ}\text{C}$, ¿el nivel de acetona está por arriba o por debajo de la marca de 100 mL en el matraz? Explique.
- 16. Problema de repaso.** En un día en que la temperatura es de $20.0\text{ }^{\circ}\text{C}$, un sendero de concreto se vierte en tal forma que los extremos del sendero son incapaces de moverse. Tome el módulo de Young para el concreto como $7.00 \times 10^9\text{ N/m}^2$ y la resistencia a la compresión como $2.00 \times 10^9\text{ N/m}^2$. (a) ¿Cuál es el esfuerzo en el cemento en un día caliente de $50.0\text{ }^{\circ}\text{C}$? (b) ¿El concreto se fractura?
- 17. Problema de repaso.** El puente Golden Gate en San Francisco tiene un tramo principal de 1.28 km de largo, uno de los más largos del mundo. Imagine que un alambre de acero tenso con esta longitud y área de sección transversal de $4.00 \times 10^{-6}\text{ m}^2$ se tiende en la losa, con sus extremos unidos a las torres del puente, y que en este día de verano la temperatura del alambre es de $35.0\text{ }^{\circ}\text{C}$. (a) Cuando llega el invierno, las torres permanecen a la misma distancia de separación y la losa del puente mantiene la misma forma mientras se abren las juntas de dilatación. Cuando la temperatura disminuye a $-10.0\text{ }^{\circ}\text{C}$, ¿cuál es la tensión en el alambre? Considere que el módulo de Young para el acero es de $20.0 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$. (b) Si el esfuerzo en el acero supera su límite elástico de $3.00 \times 10^8\text{ N/m}^2$, ocurre deformación permanente. ¿A qué temperatura el alambre alcanzaría su límite elástico? (c) **¿Qué pasaría si?** Explique cómo cambiarían sus respuestas a los incisos (a) y (b) si el puente Golden Gate tuviera el doble de largo?

SECCIÓN 18.5 Descripción macroscópica de un gas ideal

- 18.** Su padre y su hermano menor se enfrentan al mismo problema. El rociador de jardín de su padre y el cañón de agua de su hermano tienen tanques con una capacidad de 5.00 L (figura P18.18). Su padre pone una cantidad despreciable de fertilizante concentrado en su tanque. Ambos vierten 4.00 L de agua y sellan sus tanques, de modo que los tanques tam-

bién contienen aire a presión atmosférica. A continuación, cada uno usa una bomba de pistón operada a mano para inyectar más aire hasta que la presión absoluta en el tanque alcanza 2.40 atm y se vuelve muy difícil mover el manubrio de la bomba. Ahora cada quien usa su dispositivo para rociar agua, no aire, hasta que el chorro se vuelve débil, cuando la presión en el tanque llega a 1.20 atm . Para lograr rociar toda el agua, cada uno encuentra que debe bombear el tanque tres veces. He aquí el problema: la mayor parte del agua se rocía como resultado del segundo bombeo. El primer y tercer bombeo parecen tan difíciles como el segundo, pero resultan en una cantidad mucho más pequeña de agua rociada. Explique este fenómeno.

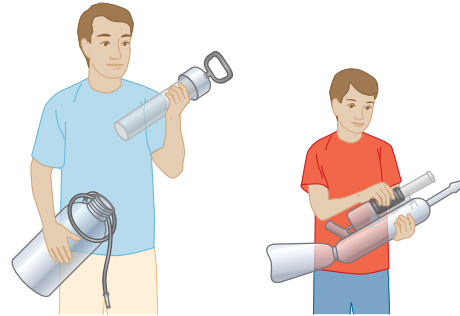


Figura P18.18

- 19.** Un auditorio tiene dimensiones de $10.0\text{ m} \times 20.0\text{ m} \times 30.0\text{ m}$. ¿Cuántas moléculas de aire llenan el auditorio a $20.0\text{ }^{\circ}\text{C}$ y una presión de 101 kPa (1.00 atm)?
- 20.** Un recipiente de forma cúbica con 10.0 cm por lado contiene aire (con masa molar equivalente de 28.9 g/mol) a presión atmosférica y temperatura de 300 K . Encuentre (a) la masa del gas, (b) la fuerza gravitacional ejercida sobre él y (c) la fuerza que él ejerce sobre cada cara del cubo. (d) ¿por qué tan pequeña muestra ejerce tan grande fuerza?
- 21.** (a) Encuentre el número de moles en un metro cúbico de un gas ideal a $20.0\text{ }^{\circ}\text{C}$ y presión atmosférica. (b) Para aire, el número de Avogadro de moléculas tiene 28.9 g de masa. Calcule la masa de un metro cúbico de aire. (c) Establezca cómo se compara este resultado con la densidad tabulada de aire a $20.0\text{ }^{\circ}\text{C}$.
- 22.** Utilice la definición del número de Avogadro para encontrar la masa de un átomo de helio.
- 23.** En sistemas de vacío avanzados, se han logrado presiones tan bajas como $1.00 \times 10^{-9}\text{ Pa}$. Calcule el número de moléculas en un recipiente de 1.00 m^3 a esta presión y una temperatura de $27.0\text{ }^{\circ}\text{C}$.
- 24.** Ha obtenido una excelente pasantía en la NASA, trabajando en la planificación de una próxima misión a Marte. La órbita de transferencia a Marte durará varios meses y requerirá la recuperación del oxígeno en el dióxido de carbono exhalado por la tripulación. En un método de recuperación, 1.00 mol de dióxido de carbono produce 1.00 mol de oxígeno y 1.00 mol de metano como subproducto. El metano se almacena en un tanque bajo presión y está disponible para controlar la orientación de la nave espacial mediante ventilación controlada. Un solo astronauta exhala 1.09 kg de dióxido de carbono por día. Si el metano generado en el reciclaje de la respiración de tres astronautas durante una semana de vuelo se almacena en un tanque de 150 L originalmente vacío a $-45.0\text{ }^{\circ}\text{C}$, ¿cuál es la presión final en el tanque?

25. Problema de repaso. La masa de un globo de aire caliente y su carga (no incluido el aire interior) es de 200 kg. El aire exterior está a 10.0 °C y 101 kPa. El volumen del globo es de 400 m³. ¿A qué temperatura se debe calentar el aire en el globo antes de que éste se eleve? (La densidad del aire a 10.0 °C es de 1.244 kg/m³.)

26. Una habitación de volumen V contiene aire con masa molar equivalente M (en g/mol). Si la temperatura de la habitación se eleva de T_1 a T_2 , ¿qué masa de aire dejará la habitación? Suponga que la presión del aire en la habitación se mantiene a P_0 .

27. Estime la masa del aire en su recámara. Establezca las cantidades que toma como datos y el valor que mide o estima para cada una.

28. Está solicitando un puesto en una unidad de rescate marítimo y se encuentra realizando el examen de calificación. Una pregunta en el examen es sobre el uso de una campana de buceo. La campana de buceo tiene la forma de un cilindro con una longitud vertical de $L = 2.50$ m. Está cerrado en el extremo circular superior y abierto en el extremo circular inferior. La campana se baja del aire al agua de mar ($\rho = 1.025$ g/cm³) y se mantiene en su orientación vertical a medida que se baja. El aire en la campana está inicialmente a la temperatura $T_i = 20.0$ °C. La campana, con dos humanos adentro, se baja a una profundidad (medida en la parte inferior de la campana) de 27.0 brazas, o $h = 49.4$ m. A esta profundidad, la temperatura del agua es de $T_f = 4.0$ °C y la campana está en equilibrio térmico con el agua. La pregunta del examen le pide que compare dos situaciones: (i) No se agrega aire adicional al interior de la campana cuando está sumergida. Por tanto, el agua ingresa al fondo abierto de la campana y el volumen del aire cerrado disminuye. (ii) La campana está equipada con tanques de aire presurizado, que entregan aire a alta presión en el interior de la campana para mantener el nivel de agua en el borde inferior de la campana. Esta elección requiere dinero y esfuerzo para agregar los tanques. La pregunta del examen es: ¿Qué escenario es mejor?

29. Un medidor de presión en un cilindro registra la presión manométrica, que es la diferencia entre las presiones interior y exterior P_0 . La presión manométrica se denota por P_g . Cuando el tanque está lleno, la masa de gas en él es m_i a la presión atmosférica P_{gr} . Suponga que la temperatura del cilindro permanece constante, entonces demuestre que la masa del gas *restante* en el cilindro cuando la lectura de la presión es P_{gf} está dada por

$$m_f = m_i \left(\frac{P_{gf} + P_0}{P_{gi} + P_0} \right)$$

PROBLEMAS ADICIONALES

30. Una barra de acero que se emplea en la construcción de un rascacielos tiene una longitud de 35 000 m cuando se maneja un día frío a una temperatura de 15 000 °F. ¿Cuál es la longitud de la barra cuando se instala posteriormente en un día caluroso a una temperatura de 90 000 °F?

31. Dos barras metálicas se fabrican de invar y una tercera barra se elabora de aluminio. A 0 °C, cada una de las tres barras se taladra con dos orificios separados 40.0 cm. A través de los orificios se ponen clavijas para ensamblar las barras en un triángulo equilátero, como en la figura P18.31. (a) Primero ignore la expansión del invar. Encuentre el ángulo entre las barras de invar como función de la temperatura Celsius. (b)

¿Su respuesta es precisa tanto para temperaturas negativas como positivas? (c) ¿Es precisa para 0 °C? (d) Resuelva el problema de nuevo e incluya la expansión del invar. El aluminio se funde a 660 °C y el invar a 1 427 °C. Suponga que los coeficientes de expansión tabulados son constantes. ¿Cuáles son (e) el mayor y (f) el menor ángulos obtenibles entre las barras de invar?

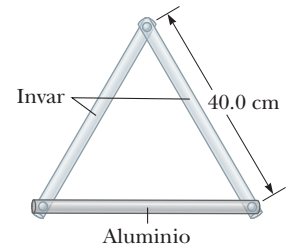


Figura P18.31

32. ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Un aparato se diseñó de manera que un vapor inicialmente a $T = 150$ °C, $P = 1.00$ atm y $V = 0.5000$ m³ en un pistón cilíndrico experimente un proceso donde (a) el volumen permanezca constante y la presión baje a 0.870 atm, seguido por (2) una expansión en la cual la presión es constante y el volumen aumenta a 1.00 m³, y después por (3) un retorno a las condiciones iniciales. Es importante que la presión del gas nunca sea menor que 0.850 atm para que el pistón sustente una parte muy delicada y costosa del aparato. Sin tal respaldo, el delicado aparato se dañaría severamente y quedaría inútil. Cuando el diseño se convierte en un prototipo funcional, entonces opera perfectamente.

33. Un estudiante mide la longitud de una barra de latón con una cinta de acero a 20.0 °C. La lectura es de 95.00 cm. ¿Qué indicará la cinta para la longitud de la barra cuando ésta y la cinta estén a (a) -15.0 °C y (b) 55.0 °C?

34. La densidad de la gasolina es de 730 kg/m³ a 0 °C. Su coeficiente de expansión métrica promedio es de 9.60×10^{-4} (°C)⁻¹. Suponga que 1.00 gal de gasolina ocupa 0.003 80 m³. ¿Cuántos kilogramos adicionales de gasolina recibiría si compra 10.0 gal de gasolina a 0 °C en lugar de a 20.0 °C, de una bomba que no tiene compensación de temperatura?

35. Un líquido tiene una densidad ρ . (a) Demuestre que el cambio fraccionario en densidad para un cambio en temperatura ΔT es $\Delta\rho/\rho = -\beta\Delta T$. ¿Qué implica el signo negativo? (b) El agua pura tiene una densidad máxima de 1000 0 g/cm³ a 4.0 °C. A 10.0 °C, su densidad es 0.999 7 g/cm³. ¿Cuál es β para el agua en el rango de temperatura de 0 °C a 4.00 °C?

36. (a) Considere que la definición del coeficiente de expansión volumétrica es

$$\beta = \frac{1}{V} \left. \frac{dV}{dT} \right|_{P=\text{constante}} = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial T}$$

Use la ecuación de estado de un gas ideal para demostrar que el coeficiente de expansión volumétrica de un gas ideal a presión constante está dado por $\beta = 1/T$, donde T es la temperatura absoluta. (b) ¿Qué valor predice esta expresión para β a 0 °C? Establezca cómo se compara este resultado con los valores experimentales para (c) helio y (d) aire en la tabla 18.1. Nota: Estos valores son mayores que los coeficientes de expansión volumétrica para la mayoría de los líquidos y sólidos.

37. La placa rectangular que se muestra en la figura P18.37 tiene un área A_i igual a ℓw . Si la temperatura aumenta en ΔT , cada dimensión aumenta de acuerdo con la ecuación 19.4, donde α es el coeficiente de expansión lineal promedio. (a) Demuestre que el aumento en área es $\Delta A = 2\alpha A_i \Delta T$. (b) ¿Qué aproximación supone esta expresión?



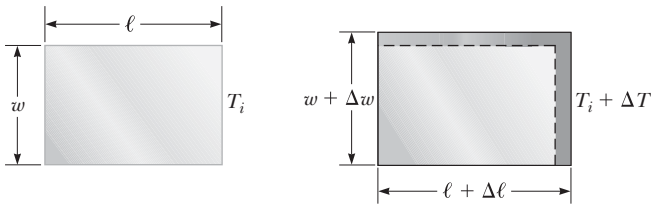


Figura P18.37

- 38.** Una tira bimetalica de longitud L está hecha de dos listones de diferentes metales acomodados juntos. (a) Primero suponga que la tira originalmente es recta. A medida que la tira se calienta, el metal con el mayor coeficiente de expansión promedio se expande más que el otro, lo que fuerza a la tira en un arco con el radio exterior que tiene mayor circunferencia (figura P18.38). Obtenga una expresión para el ángulo de doblado θ como función de la longitud inicial de las tiras, sus coeficientes de expansión lineal promedio, el cambio en temperatura y la separación de los centros de las tiras ($\Delta r = r_2 - r_1$). (b) Demuestre que el ángulo de doblado disminuye a cero cuando ΔT tiende a cero y también cuando los dos coeficientes de expansión promedio se vuelven iguales. (c) ¿Qué pasará si? ¿Qué ocurre si la tira se enfría?

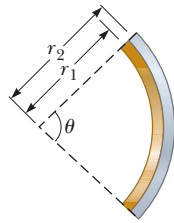


Figura P18.38

- 39.** Una barra de cobre y una barra de acero varían en longitud en 5.00 cm a 0 °C. Las barras se calientan y enfrían juntas. (a) ¿Es posible que la diferencia en longitud permanezca constante a todas las temperaturas? Explique. (b) Si así es, describa las longitudes a 0 °C tan precisas como pueda. ¿Puede decir cuál barra es más larga? ¿Puede decir las longitudes de las barras?
- 40.** Un cilindro vertical de área de sección transversal A es sellado con un pistón sin fricción de gran ajuste de masa m (figura P18.40). El pistón no está restringido en su movimiento y es soportado por el gas a una presión P bajo él. La presión atmosférica es P_0 . Se desea encontrar la altura h en la figura P18.40. (a) ¿Qué análisis de modelo es apropiado para describir el pistón? (b) Escriba una apropiada ecuación de fuerza para el pistón a partir de este análisis de modelo, en términos de P , P_0 , m , A y g . (c) Suponga que n moles de un gas ideal están en el cilindro a una temperatura T . Sustituya para P en su respuesta al inciso (b) para obtener la altura h del pistón sobre el fondo del cilindro.

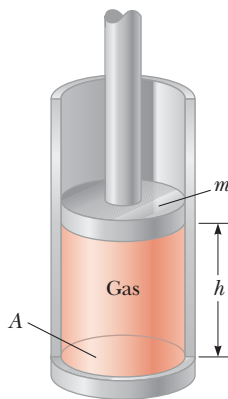


Figura P18.40

- 41. Problema de repaso.** Considere un objeto con cualquiera de las formas que se muestran en la tabla 10.2. ¿Cuál es el aumento porcentual en el momento de inercia del objeto cuando se calienta de 0 °C a 100 °C, si está compuesto de (a) cobre o (b) aluminio? Suponga que los coeficientes de expansión lineal promedio que se muestran en la tabla 18.1 no varían entre 0 °C y 100 °C. (c) ¿Por qué las respuestas a los incisos (a) y (b) son las mismas para todas las formas?

- 42. Problema de repaso.** Después de una colisión en el espacio exterior, un disco de cobre a 850 °C gira en torno a su eje con una rapidez angular de 25.0 rad/s. A medida que el disco radia luz infrarroja, su temperatura cae a 20.0 °C. Ningún momento de torsión externo actúa en el disco. (a) ¿La rapidez angular cambia a medida que el disco se enfría? Explique cómo cambia o por qué no lo hace. (b) ¿Cuál es su rapidez angular a la temperatura más baja?

- 43.** Comience con la ecuación 18.11 y demuestre que la presión total P en un recipiente lleno con una mezcla de varios gases ideales es $P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots$, donde P_1, P_2, \dots , son las presiones que cada gas ejercería si llenara sólo el recipiente. (Estas presiones individuales se llaman *presiones parciales* de los gases respectivos.) Este resultado se conoce como *ley de Dalton de presiones parciales*.

PROBLEMAS DE DESAFÍO

- 44. Problema de repaso.** El techo perfectamente plano de una casa forma un ángulo θ con la horizontal. Cuando cada día su temperatura cambia, entre T_c antes del amanecer y T_h a media tarde, el techo se expande y contrae uniformemente con un coeficiente de expansión térmica α_1 . Sobre el techo hay una placa metálica rectangular plana con coeficiente de expansión α_2 mayor que α_1 . La longitud de la placa es L , medida a lo largo de la pendiente del techo. La componente del peso de la placa perpendicular al techo se soporta mediante una fuerza normal distribuida uniformemente sobre el área de la placa. El coeficiente de fricción cinética entre la placa y el techo es μ_k . La placa siempre está a la misma temperatura que el techo, así, suponga que su temperatura cambia de manera continua. Debido a la diferencia en coeficientes de expansión, cada trozo de la placa se mueve en relación con el techo bajo ella, excepto por puntos a lo largo de cierta línea horizontal que corre a través de la placa llamada línea estacionaria. Si la temperatura se eleva, partes de la placa bajo la línea fija se mueven abajo en relación con el techo y sienten una fuerza de fricción cinética que actúa hacia arriba en el techo. Elementos del área arriba de la línea fija se deslizan hacia arriba del techo y sobre ellos la fricción cinética actúa hacia abajo, paralela al techo. La línea fija no ocupa área, así, suponga que sobre la placa no actúa fuerza de fricción estática mientras la temperatura cambia. La placa como un todo casi está en equilibrio, así que la fuerza de fricción neta sobre ella debe ser igual a la componente de su peso que actúa hacia abajo del plano inclinado. (a) Demuestre que la línea fija está a una distancia de

$$\frac{L}{2} \left(1 - \frac{\tan \theta}{\mu_k} \right)$$

abajo del borde superior de la placa. (b) Analice las fuerzas que actúan en la placa cuando la temperatura cae y demuestre que la línea estacionaria está a esa misma distancia sobre el borde inferior de la placa. (c) Demuestre que la placa baja del techo como un gusano moviéndose cada día una distancia

$$\frac{L}{\mu_k} (\alpha_2 - \alpha_1) (T_h - T_c) \tan \theta$$

(d) Evalúe la distancia que una placa de aluminio se mueve cada día si su longitud es de 1.20 m, la temperatura va en ciclos entre 4.00 °C y 36.0 °C, y el techo tiene una pendiente

de 18.5° , $1.50 \times 10^{-5} \text{ (}^\circ\text{C)}^{-1}$ de coeficiente de expansión lineal, y 0.420 de coeficiente de fricción con la placa. (e) **¿Qué pasaría si?** ¿Y si el coeficiente de expansión de la placa es menor que el del techo? ¿La placa sube lentamente por el techo?

45. Un riel de acero de 1.00 km está firmemente sujeto a ambos extremos cuando la temperatura es de 20.0°C . A medida que la temperatura aumenta, el riel se pandea y toma la forma de un arco de círculo vertical. Encuentre la altura h del centro del riel cuando la temperatura es de 25.0°C . (Necesitará resolver una ecuación trascendente.)

46. El helio gaseoso se vende en tanques de acero que se rompen si se le somete a un esfuerzo de tensión mayor que su límite elástico de $5 \times 10^8 \text{ N/m}^2$. Si el helio se utiliza para inflar un globo, ¿éste podría elevar el tanque esférico donde viene el helio? Justifique su respuesta. *Sugerencia:* Considere un cascarón esférico de acero de radio r , grosor t y con densidad igual al hierro, y que contenga helio a presión alta y a punto de romperse en dos hemisferios.



Primera ley de la termodinámica

19



IMAGINE Es un fin de semana de tres días, y usted decide ir de campamento

con otros miembros del Club de Física a Whitney Portal, California, la puerta de entrada a Mount Whitney, el pico más alto en Estados Unidos agrupados, es decir sin Alaska o Hawái. Esta comunidad se encuentra a una altitud de 2 393 m sobre el nivel del mar, por lo que debería ser un buen lugar para hacer algunas observaciones astronómicas. A medida que la casa rodante de su asesor del club avanza hacia Whitney Portal, ganando altura con cada minuto, nota un letrero que dice: "Precaución: el puente se congela antes de la superficie del camino". Se pregunta por qué sucedería eso. Cuando llega a su destino, sale de su auto y se maravilla de lo frío que está. Pero luego piensa: "¡Espera un minuto! Estoy más cerca del Sol de lo que estaba al nivel del mar. ¿Por qué no es más cálido en la cima de una montaña?". Arregló el campamento y se ofrece a preparar la cena para el grupo. Hierva algunos huevos durante tres minutos, fríe algunas hamburguesas y coloca una bandeja de galletas en el horno. Después de terminar las galletas, pone un pastel casero a hornear. Al final de la comida, los resultados son mixtos. Las hamburguesas son geniales, los huevos no estaban lo suficientemente cocinados, las galletas estaban muy bien hechas cerca de los bordes de la bandeja para hornear, y el pastel cayó. ¿Por qué su cena resultó tan infructuosa? No está satisfecho con su desempeño en la cocina y se va a la cama. A la mañana siguiente, se levanta para una caminata rápida y observa que hay escarcha en los automóviles, buzones de correo y cosas por el estilo, pero solo en la parte superior de la superficie de esos artículos, no en los lados. ¿Por qué la escarcha solo está en parte superior de la superficie? ¡Ha habido tantos misterios asociados con este viaje de montaña y es solo la primera mañana! Es de esperar que haya servicio de telefonía celular cuando regrese a la casa rodante de su paseo para que pueda pasar un tiempo investigando estos misterios en línea.

CONEXIONES La ecuación 8.2, la ecuación de la conservación de la energía, muestra cómo la energía de un sistema puede cambiar debido a las transferencias mecánicas de

Se saca un pastel del horno y se cae. ¿Qué causa la caída de un pastel y por qué se formula esta pregunta en un capítulo sobre termodinámica? (bonchan/Shutterstock)

- 19.1 Calor y energía interna
- 19.2 Calor específico y calorimetría
- 19.3 Calor latente
- 19.4 Trabajo y calor en procesos termodinámicos
- 19.5 Primera ley de la termodinámica
- 19.6 Mecanismos de transferencia de energía en procesos térmicos



energía, como el trabajo, y las transferencias térmicas, como el calor. También muestra que la energía de un sistema se divide entre tipos mecánicos (energía cinética y potencial) y un tipo térmico (energía interna). Pero esta es nuestra comprensión moderna de la energía. Hasta aproximadamente 1850, los campos de la termodinámica y la mecánica se consideraban dos ramas distintas de la ciencia. El principio de la conservación de la energía parecía describir solo ciertos tipos de sistemas mecánicos. Sin embargo, a mediados del siglo XIX, experimentos realizados por el inglés James Joule y otros demostraron una fuerte conexión entre la transferencia de energía por calor en procesos térmicos y la transferencia de energía por trabajo en procesos mecánicos. Esta conexión condujo a lo que conocemos como la ecuación 8.2. Este capítulo se centra en una forma reducida de la ecuación 8.2, conocida como la *primera ley de la termodinámica*. Esta ley describe sistemas en los que el único cambio de energía es el de la energía interna y las transferencias de energía son por calor y trabajo. Una diferencia importante en nuestra explicación del trabajo en este capítulo y en la mayoría de los capítulos sobre mecánica es que consideraremos el trabajo realizado en sistemas *deformables*. Veremos transferencias de energía asociadas con la temperatura y la energía interna en una serie de casos en el futuro, que incluyen, entre otros, el calentamiento de las resistencias eléctricas en el capítulo 26, cocinar una papa en un horno de microondas en el capítulo 33, y la radiación térmica de un cuerpo negro en el capítulo 39.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 19.1

Energía interna, energía térmica y energía de enlace Cuando lea otros libros de física, puede ver términos como *energía térmica* y *energía de enlace*. La energía térmica se interpreta como aquella parte de la energía interna asociada con el movimiento aleatorio de las moléculas y, por tanto, relacionada con la temperatura. La energía de enlace es la energía potencial intermolecular. En consecuencia,

$$\text{Energía interna} = \text{energía térmica} + \text{energía de enlace}$$

No obstante que esta separación se presenta aquí para aclarar en cuanto a otros libros, no se usarán estos términos porque no hay necesidad de ellos.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 19.2

Calor, temperatura y energía interna son diferentes Mientras lea el periódico o explore el internet, esté alerta de las frases empleadas de manera incorrecta que incluyan la palabra *calor* y piense en la palabra adecuada para utilizarse en lugar de *calor*. Los ejemplos incorrectos incluyen “A medida que el camión frenó hasta detenerse, se generó una gran cantidad de calor por fricción” y “El calor de un día de verano...”.

19.1 Calor y energía interna

En el capítulo 7, se introdujo la *energía interna* E_{int} , que exhibe cambios en el lado izquierdo de la ecuación 8.2, y en el capítulo 8, se introdujo el *calor* Q , que es un mecanismo para la transferencia de energía en el lado derecho de la ecuación. Estos términos a menudo se usan incorrectamente de manera intercambiable en el lenguaje popular. Por tanto, serán definidos cuidadosamente:

La **energía interna** es toda la energía de un sistema que se asocia con sus componentes microscópicos, átomos y moléculas, cuando se observa desde un marco de referencia en reposo respecto al centro de masa del sistema.

La última parte de esta oración asegura que cualquier energía cinética volumétrica del sistema resultante de su movimiento a través del espacio no se incluye en la energía interna. La energía interna incluye la energía cinética del movimiento aleatorio traslacional, rotacional y vibratorio de las moléculas; la energía potencial vibratoria asociada con fuerzas entre los átomos en las moléculas; y la energía potencial eléctrica asociada con fuerza entre moléculas. En el capítulo 7, relacionamos la energía interna con la temperatura de un objeto, pero esta relación es limitada. Mostramos en la sección 18.3 que los cambios de energía internos también pueden ocurrir en ausencia de cambios de temperatura. En esa discusión, investigaremos la energía interna del sistema cuando hay un *cambio físico*, la mayoría de las veces relacionado con un cambio de fase, como derretirse o hervir.

Se asigna energía asociada con *cambios químicos*, relacionados con reacciones químicas, al término de energía potencial en la ecuación 8.2, y no a la energía interna. Por tanto, se discute la *energía potencial química* en, por ejemplo, un cuerpo humano (debido a las comidas previas), el tanque de gasolina de un automóvil (debido a su previa transferencia de combustible) y una batería de un circuito eléctrico (colocado en la batería durante su construcción en el proceso de manufactura).

Compara esta descripción de la energía interna con lo siguiente para el calor:

El **calor** se define como un proceso de transferencia de energía a través de la frontera de un sistema debida a una diferencia de temperatura entre el sistema y sus alrededores. También es la cantidad de energía Q transferida mediante este proceso.



Cuando usted *calienta* una sustancia, transfiere energía hacia ella al colocarla en contacto con alrededores que tienen una mayor temperatura. Tal es el caso, por ejemplo, cuando coloca una sartén de agua fría en el quemador de una estufa. El quemador está a una temperatura mayor que el agua y, por tanto, el agua gana energía mediante calor. Para su pastel en el horno en la semblanza de apertura, la energía se transfiere por el calor del aire caliente en el horno a la mezcla del pastel.

Lea con cuidado esta definición de calor (Q en la ecuación 8.2). En particular, en las siguientes frases comunes observe lo que *no* es el calor. (1) Calor *no* es energía en una sustancia caliente. Por ejemplo, “El agua en ebullición tiene una gran cantidad de calor” es incorrecta; el punto de ebullición del agua tiene *energía interna* E_{int} . (2) Calor *no* es radiación. Por ejemplo, “Estaba muy caliente porque la acera radiaba calor” es incorrecta; la energía abandona la acera vía *radiación electromagnética*, T_{ER} en la ecuación 8.2. (3) Calor *no* es lo caliente de un ambiente. Por ejemplo, “El calor en el aire era intolerante” es incorrecta; en un día caliente, el aire tiene una elevada *temperatura* T .

Como una analogía a la distinción entre calor y energía interna, considere la distinción entre trabajo y energía mecánica estudiada en el capítulo 7. El trabajo realizado sobre un sistema es una medida de la cantidad de energía transferida al sistema desde sus alrededores, mientras que la energía mecánica (energía cinética más energía potencial) de un sistema es una consecuencia del movimiento y configuración del sistema. Por tanto, cuando una persona efectúa trabajo sobre un sistema, la energía se transfiere desde la persona al sistema. No tiene sentido hablar acerca del trabajo *de* un sistema; sólo es posible referirse al trabajo realizado *sobre* o *por* un sistema cuando ocurrió algún proceso en donde se transfirió energía hacia o desde el sistema. Del mismo modo, carece de sentido hablar del calor *de* un sistema; sólo es posible referirse al calor cuando sucede transferencia de energía como resultado de una diferencia de temperatura. Tanto el calor como el trabajo son maneras de transferir energía entre un sistema y sus alrededores por eso ambos aparecen en el lado derecho de la ecuación 8.2.

Unidades de calor

Los primeros estudios acerca del calor se enfocaron en el resultante aumento en temperatura de una sustancia, que con frecuencia era agua. Los conceptos iniciales de calor se basaron en un fluido llamado *calórico* que fluía de una sustancia a otra y causaba cambios en la temperatura. A partir del nombre de este fluido mítico salió una unidad de energía relacionada con los procesos térmicos, la **caloría (cal)**, que se define como la cantidad de transferencia de energía necesaria para elevar la temperatura de 1 g de agua de 14.5 °C a 15.5 °C.¹ (La “Caloría”, escrita con C mayúscula y que se emplea para describir el contenido energético de los alimentos, es en realidad una kilocaloría.) La unidad de energía en el sistema estadounidense es la **unidad térmica británica (Btu)**, que se define como la cantidad de transferencia de energía requerida para elevar la temperatura de 1 lb de agua de 63 °F a 64 °F.

Una vez que la relación entre energía en procesos térmicos y mecánicos quedó clara, no hubo necesidad de una unidad separada asociada a los procesos térmicos. El *joule* ya se definió como una unidad de energía basada en procesos mecánicos. Los científicos cada vez más se alejan de la caloría y el Btu, y emplean el joule para describir procesos térmicos. En este libro, calor, trabajo y energía interna por lo general se miden en joules.

El equivalente mecánico del calor

En los capítulos 7 y 8 se encontró que, siempre que la fricción esté presente en un sistema mecánico, la energía mecánica en el sistema disminuye; en otras palabras, la energía mecánica no se conserva en presencia de fuerzas no conservativas. Varios experimentos demuestran que esta energía mecánica simplemente no desaparece sino que se transforma en energía interna. Puede realizar tal experimento en casa al martillar un clavo en

Retrato de James Prescott Joule (1818-89) (oil on canvas), Collier, John (1850-1934)/Royal Society, London, UK/Bridgeman Images



James Prescott Joule *Físico británico (1818-1889)*

Joule recibió cierta educación formal en matemáticas, filosofía, y química de John Dalton, pero en gran parte fue autodidacta. La investigación de Joule condujo al establecimiento del principio de conservación de la energía. Su estudio de la relación cuantitativa entre los efectos eléctrico, mecánico y químico del calor culminó con su anuncio, en 1843, de la cantidad de trabajo requerida para producir una unidad de energía, llamada el equivalente mecánico del calor.

¹Originalmente, la caloría se definió como la transferencia de energía necesaria para elevar la temperatura de 1 g de agua en 1 °C. Sin embargo, mediciones cuidadosas demostraron que la cantidad de energía requerida para producir un cambio de 1 °C depende un poco de la temperatura inicial; por tanto, evolucionó una definición más precisa.

Los bloques que caen hacen girar la rueda de paletas, y eso causa que se eleve la temperatura del agua.

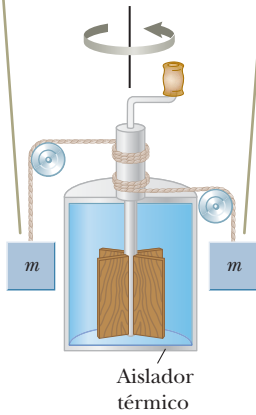


Figura 19.1 Experimento de Joule para determinar el equivalente mecánico del calor.

un trozo de madera. ¿Qué sucede a toda la energía cinética del martillo una vez que haya terminado? Parte de ella ahora está en el clavo como energía interna, como se demuestra por el clavo mensurablemente más caliente. Note que en este proceso *no* hay transferencia de energía mediante calor. Para el clavo y la tabla, la ecuación 8.2 queda $\Delta E_{\text{int}} = W + T_{\text{MW}}$, donde W es el trabajo realizado por el martillo sobre el clavo y T_{MW} es la energía que abandona el sistema vía ondas sonoras cuando el clavo es golpeado y ΔE_{int} representa el clavo y la madera más cálidos. Tenga en cuenta que no hay transferencia de energía por calor en este proceso. Aunque esta conexión entre energía mecánica e interna la sugirió por primera vez Benjamín Thompson, fue James Prescott Joule quien estableció la equivalencia de la reducción en energía mecánica y el aumento de energía interna.

En la figura 19.1 se muestra un diagrama esquemático del experimento más famoso de Joule. El sistema de interés es la Tierra, los dos bloques y el agua en un contenedor aislado térmicamente. Dentro del sistema se realiza trabajo sobre el agua mediante una rueda de paletas giratoria, que es impulsada a través de pesados bloques que caen con una rapidez constante. Si se desprecian la energía transformada en los cojinetes y la energía a través de las paredes por calor, la disminución en energía potencial del sistema conforme caen los bloques es igual al trabajo efectuado por la rueda de paletas sobre el agua y, a su vez, es igual al aumento en energía interna del agua. Si los dos bloques caen una distancia h , la pérdida de energía potencial del sistema es $2mgh$, donde m es la masa de un bloque; esta energía eleva la temperatura del agua. Al variar las condiciones del experimento, Joule encontró que la disminución en energía mecánica es proporcional al producto de la masa de agua y el aumento en la temperatura del agua. La constante de proporcionalidad que obtuvo era de aproximadamente $4.18 \text{ J/g} \times \text{C}$. Por tanto, 4.18 J de energía mecánica elevan la temperatura de 1 g de agua en $1 \text{ }^\circ\text{C}$. Mediciones más precisas tomadas más tarde probaron que la proporcionalidad era de $4.186 \text{ J/g} \cdot \text{ }^\circ\text{C}$ cuando la temperatura del agua se incrementaba de $14.5 \text{ }^\circ\text{C}$ a $15.5 \text{ }^\circ\text{C}$. Aquí se adopta este valor de “caloría de 15 grados”:

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J} \quad (19.1)$$

Esta igualdad se conoce, por razones meramente históricas, como el **equivalente mecánico del calor**. Un nombre más conveniente sería *equivalencia entre energía mecánica y energía interna*, pero el nombre histórico tiene mucha presencia en el lenguaje cotidiano, a pesar del uso incorrecto de la palabra *calor*.

Ejemplo 19.1 Pérdida de peso por el camino difícil

Un estudiante ingiere alimentos cuantificados en 2 000 Calorías. Él desea hacer una cantidad equivalente de trabajo en el gimnasio y levanta una barra de 50.0 kg. ¿Cuántas veces debe levantar la barra para gastar toda esta energía? Suponga que él levanta la barra 2.00 m cada vez que la eleva y no vuelve a ganar energía cuando baja la barra.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine al estudiante levantando la barra. Él hace trabajo sobre el sistema de la barra y la Tierra, por lo que la energía sale de su cuerpo. La cantidad total de trabajo que debe hacer el estudiante es de 2 000 Calorías.

Categorizar Modele el sistema de la barra y la Tierra como un *sistema no aislado* para la *energía*.

Analizar Reduzca la ecuación de conservación de energía, ecuación 8.2, a la expresión apropiada para el sistema de la barra y la Tierra:

$$(1) \Delta U_{\text{total}} = W_{\text{total}}$$

Expresé el cambio en energía potencial gravitacional del sistema después de que la barra se eleva una vez:

$$\Delta U = mgh$$

Expresé la cantidad de energía total que debe transferirse al sistema mediante trabajo por levantar la barra n veces, si supone que no vuelve a ganar energía cuando la barra se baja:

$$(2) \Delta U_{\text{total}} = nmgh$$



19.1 continuación

Sustituya la ecuación (2) en la ecuación (1):

$$nmgh = W_{\text{total}}$$

Resuelva para n :

$$n = \frac{W_{\text{total}}}{mgh}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\begin{aligned} n &= \frac{(2\,000 \text{ Cal})}{(50.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(2.00 \text{ m})} \left(\frac{1.00 \times 10^3 \text{ cal}}{\text{Caloría}} \right) \left(\frac{4.186 \text{ J}}{1 \text{ cal}} \right) \\ &= 8.54 \times 10^3 \text{ veces} \end{aligned}$$

Finalizar Si el estudiante está en buena forma y levanta la barra una vez cada 5 s, le tomará cerca de 12 h realizar esta proeza. Es claro que resulta mucho más fácil que el estudiante pierda peso mediante una dieta.

En realidad, el cuerpo humano no es 100% eficiente. Por tanto, no toda la energía de la comida transformada dentro del cuerpo se transfiere afuera del cuerpo mediante trabajo realizado sobre la barra. Parte de esta energía se utiliza para bombear sangre y efectuar otras funciones dentro del cuerpo. Así, las 2 000 Calorías se gastan en menos de 12 h cuando se incluyen estos otros procesos energéticos.

19.2 Calor específico y calorimetría

Cuando se le agrega energía a un sistema y no hay cambio en las energías cinética o potencial del sistema, por lo general la temperatura del sistema aumenta. (Una excepción a esta afirmación sucede cuando un sistema se somete a un cambio de estado, también llamado *fase de transición*, como se explica en la siguiente sección.) Si el sistema consiste en una muestra de una sustancia, se encuentra que la cantidad de energía requerida para elevar la temperatura de una masa determinada de la sustancia a cierta cantidad varía de una sustancia a otra. Por ejemplo, la cantidad de energía necesaria para elevar la temperatura de 1 kg de agua en 1 °C es 4 186 J, pero la cantidad de energía requerida para elevar la temperatura de 1 kg de cobre en 1 °C sólo es de 387 J. En la explicación que sigue se usará el calor como ejemplo de transferencia de energía, pero considere que la temperatura del sistema podría cambiar mediante cualquier método de transferencia de energía.

La **capacidad térmica** C de una muestra particular se define como la cantidad de energía necesaria para elevar la temperatura de dicha muestra en 1 °C. A partir de esta definición, se ve que, si la energía Q produce un cambio ΔT en la temperatura de una muestra, entonces

$$Q = C \Delta T \quad (19.2)$$

El **calor específico** c de una sustancia es la capacidad térmica por unidad de masa. Por tanto, si a una muestra de una sustancia con masa m se le transfiere energía Q y la temperatura de la muestra cambia en ΔT , el calor específico de la sustancia es

$$c \equiv \frac{Q}{m \Delta T} \quad (19.3)$$

El calor específico es en esencia una medida de qué tan insensible térmicamente es una sustancia a la adición de energía. Mientras mayor sea el calor específico de un material, más energía se debe agregar a una determinada masa del material para causar un cambio particular de temperatura. La tabla 19.1 (página 506) contiene calores específicos representativos.

A partir de esta definición, es factible relacionar la energía Q transferida entre una muestra de masa m de un material y sus alrededores con un cambio de temperatura ΔT como

$$Q = mc \Delta T \quad (19.4)$$

Por ejemplo, la energía requerida para elevar la temperatura de 0.500 kg de agua en 3.00 °C es $Q = (0.500 \text{ kg})(4\,186 \text{ J/kg} \cdot \text{°C})(3.00 \text{ °C}) = 6.28 \times 10^3 \text{ J}$. Note que, cuando la temperatura aumenta, Q y ΔT se consideran positivos y la energía se transfiere al sistema. Cuando la temperatura disminuye, Q y ΔT se consideran negativos y la energía se transfiere afuera del sistema.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 19.3

Una desafortunada elección de terminología El nombre *calor específico* es un desafortunado vestigio de los días cuando la termodinámica y la mecánica se desarrollaron por separado. Un mejor nombre sería *transferencia específica de energía*, pero el término existente está muy arraigado como para sustituirlo.

◀ Calor específico

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 19.4

La energía se puede transferir mediante cualquier método El símbolo Q representa la cantidad de energía transferida, pero considere que la transferencia de energía en la ecuación 19.4 podría ser mediante *cualquiera* de los métodos introducidos en el capítulo 8; no tiene que ser calor. Por ejemplo, doblar repetidamente un colgador de alambre para ropa eleva la temperatura en el punto de doblez mediante *trabajo*.

TABLA 19.1 Calores específicos de algunas sustancias a 25 °C y presión atmosférica

Sustancia	Calor específico (J/kg · °C)	Sustancia	Calor específico (J/kg · °C)
<i>Sólidos elementales</i>		<i>Otros sólidos</i>	
Aluminio	900	Latón	380
Berilio	1 830	Vidrio	837
Cadmio	230	Hielo (−5 °C)	2 090
Cobre	387	Mármol	860
Germanio	322	Madera	1 700
Oro	129	<i>Líquidos</i>	
Hierro	448	Alcohol (etílico)	2 400
Plomo	128	Mercurio	140
Silicio	703	Agua (15 °C)	4 186
Plata	234	<i>Gas</i>	
		Vapor (100°C)	2 010

Note: Para convertir los valores a unidades de cal/g · °C, divida entre 4 186.

Es posible identificar $mc\Delta T$ como el cambio en energía interna del sistema si se ignora cualquier expansión o contracción térmica del sistema. (La expansión o contracción térmica causarían una cantidad muy pequeña de trabajo efectuado por el aire circundante sobre el sistema.) Entonces, la ecuación 19.4 es una forma reducida de la ecuación 8.2: $\Delta E_{\text{int}} = Q$. La energía interna del sistema se puede cambiar por transferencia de energía en el sistema por cualquier mecanismo. Por ejemplo, si el sistema es un horneado de papas en un microondas, la ecuación 8.2 se reduce análogamente a la ecuación 19.4: $\Delta E_{\text{int}} = T_{\text{ER}} = mc\Delta T$, donde T_{ER} es la energía transferida a las papas desde el horno de microondas mediante radiación electromagnética. Si el sistema es el aire en una bomba para bicicleta, el cual se calienta cuando se opera la bomba, la ecuación 8.2 se reduce al siguiente análogo de la ecuación 19.4: $\Delta E_{\text{int}} = W = mc\Delta T$, donde W es el trabajo realizado por el operador sobre la bomba. Al identificar $mc\Delta T$ con ΔE_{int} , se ha dado un paso hacia adelante en la comprensión de la temperatura: la temperatura está relacionada con la energía de las moléculas de un sistema. En el capítulo 20 se aprenderán más detalles de dicha relación.

El calor específico varía con la temperatura. Sin embargo, si los intervalos de temperatura no son muy grandes, la variación de temperatura se ignora y c puede tratarse como una constante.² Por ejemplo, el calor específico del agua varía solo alrededor de 1% de 0 °C a 100 °C a presión atmosférica. A menos que se indique lo contrario, tales variaciones son despreciables.

EJERCICIO RÁPIDO 19.1 Imagine que tiene hierro, vidrio y agua, 1 kg de cada uno, y que las tres muestras están a 10 °C. **(a)** Clasifique las muestras de mayor a menor temperatura después de agregar 100 J de energía a cada muestra. **(b)** Clasifique las muestras de mayor a menor cantidad de energía transferida mediante calor si cada muestra aumenta 20 °C en temperatura.

Advierta de la tabla 20.1 que el agua tiene el mayor calor específico de los materiales comunes. Este alto calor específico es responsable en parte de las temperaturas moderadas que se encuentran cerca de los grandes cuerpos de agua. A medida que la temperatura de un cuerpo de agua disminuye durante el invierno, la energía se transfiere del agua fría al aire mediante calor, lo que aumenta la energía interna del aire. Debido al alto calor específico del agua, una cantidad de energía relativamente grande se transfiere al aire incluso para cambios medidos de temperatura del agua. Los vientos predominantes en

² La definición dada por la ecuación 20.4 supone que el calor específico no varía con la temperatura en el intervalo $\Delta T = T_f - T_i$. En general, si c varía con la temperatura en el intervalo, la expresión correcta para Q es $Q = m \int_{T_i}^{T_f} c(T) dT$.

la costa oeste de Estados Unidos son hacia la tierra (hacia el este). Por tanto, la energía liberada por el océano Pacífico mientras se enfría mantiene las áreas costeras mucho más calientes de lo que serían de otro modo. Como resultado, los estados de la Costa Oeste por lo general tienen clima invernal más favorable que los estados de la Costa Este, donde los vientos predominantes no tienden a transportar la energía hacia tierra.

Calorimetría

Una técnica para medir calor específico involucra el calentamiento de una muestra en alguna temperatura conocida T_x , al colocarla en un recipiente que contenga agua de masa conocida y temperatura $T_w < T_x$, y medir la temperatura del agua después de que se logra el equilibrio. Esta técnica se llama **calorimetría**, y los dispositivos donde se presenta esta transferencia de energía se llaman **calorímetros**. La figura 19.2 exhibe la muestra caliente en agua fría y la resultante transferencia de energía mediante calor desde la parte de alta temperatura del sistema hacia la parte de baja temperatura. Si el sistema de la muestra y el agua está aislado, el principio de conservación de energía requiere que la cantidad de energía Q_{caliente} que sale de la muestra (de calor específico de la muestra) sea igual a la cantidad de energía $Q_{\text{frío}}$ que entra al agua.³ La conservación de energía permite escribir la representación matemática de este enunciado energético como

$$Q_{\text{Frío}} = -Q_{\text{Caliente}} \quad (19.5)$$

Suponga que m_x es la masa de una muestra de alguna sustancia cuyo calor específico quiere determinar. Sean c_x su calor específico y T_x su temperatura inicial, como se ilustra en la figura 19.2. Del mismo modo, sean m_w , c_w y T_w los valores correspondientes para el agua. Si T_f es la temperatura final después de que el sistema alcanza el equilibrio, la ecuación 19.4 indica que la transferencia de energía para el agua es $m_w c_w (T_f - T_w)$, que es positivo porque $T_f > T_w$, y que la transferencia de energía para la muestra de calor específico desconocido es $m_x c_x (T_f - T_x)$, que es negativa. Al sustituir estas expresiones en la ecuación 19.5 se obtiene

$$m_w c_w (T_f - T_w) = -m_x c_x (T_f - T_x) \quad (19.6)$$

Esta ecuación puede resolverse para el calor específico c_x

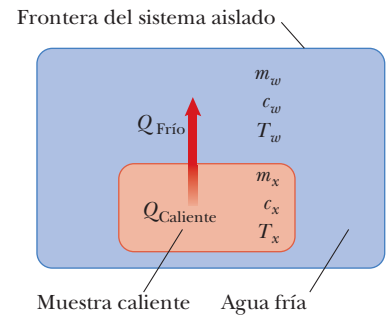


Figura 19.2 En un experimento de calorimetría, una muestra caliente cuyo calor específico se desconoce es colocada en agua fría dentro de un contenedor que aísla el sistema de los alrededores.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 19.5

Recuerde el signo negativo Es crucial incluir el signo negativo en la ecuación 19.5. El signo negativo es necesario en la ecuación por consistencia con la convención de signos para la transferencia de energía. La transferencia de energía Q_{caliente} tiene un valor negativo porque la energía sale de la sustancia caliente. El signo negativo en la ecuación garantiza que el lado derecho sea un número positivo, consistente con el lado izquierdo, que es positivo porque la energía entra al agua fría.

Ejemplo 19.2 Momento de diversión para un vaquero

Un vaquero dispara una bala de plata con una rapidez de boquilla de 200 m/s en la pared de pino de una cantina. Suponga que toda la energía interna generada por el impacto permanece con la bala. ¿Cuál es el cambio de temperatura de la bala

SOLUCIÓN

Conceptualizar Piense en experiencias similares que haya tenido en las que la energía mecánica se transforma en energía interna cuando se detiene un objeto en movimiento. Por ejemplo, como se mencionó en la sección 19.1, un clavo queda caliente después de golpearlo algunas veces con un martillo.

Categorizar La bala se modela como un *sistema aislado*. Sobre el sistema no se realiza trabajo porque la fuerza de la pared no tiene desplazamiento alguno. Este ejemplo es similar al patinador que empuja una pared en la sección 9.8. Ahí, la pared no efectúa trabajo sobre el patinador y la energía potencial almacenada en el cuerpo, debida a comidas anteriores, se transforma en energía cinética. Aquí, la pared no realiza trabajo sobre la bala y la energía cinética se transforma en energía interna.

Analizar Reduzca la ecuación de conservación de la energía, ecuación 8.2, a la expresión apropiada para el sistema de la bala:

$$(1) \quad \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

³ Para mediciones precisas, debe incluir el contenedor de agua en los cálculos porque también intercambia energía con la muestra. No obstante, hacerlo requerirá conocer la masa y composición del contenedor. Si la masa del agua es mucho mayor que la del contenedor, se pueden despreciar los efectos del contenedor.

continúa

19.2 continuación

El cambio en la energía interna de la bala está relacionado a su cambio en temperatura:

$$(2) \quad \Delta E_{\text{int}} = mc \Delta T$$

Sustituya la ecuación (2) en la ecuación (1):

$$(0 - \frac{1}{2}mv^2) + mc \Delta T = 0$$

Resuelva para ΔT , con $234 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$ como el calor específico de la plata (vea la tabla 19.1):

$$(3) \quad \Delta T = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{mc} = \frac{v^2}{2c} = \frac{(200 \text{ m/s})^2}{2(234 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C})} = 85.5^\circ\text{C}$$

Finalizar Observe que el resultado no depende de la masa de la bala. (En realidad, la pared también se calienta, por lo que nuestro análisis se simplifica).

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que al vaquero se le agotan las balas de plata y dispara una bala de plomo con la misma rapidez hacia la pared. ¿El cambio de temperatura de la bala será mayor o menor?

Respuesta La tabla 20.1 muestra que el calor específico del plomo es $128 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$, el cual es menor que el de la plata. Por tanto, una cantidad dada de entrada de energía eleva el plomo a una temperatura más alta que la plata y la temperatura final de la bala de plomo será mayor. En la ecuación (3), sustituya el nuevo valor para el calor específico:

$$\Delta T = \frac{v^2}{2c} = \frac{(200 \text{ m/s})^2}{2(128 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C})} = 156^\circ\text{C}$$

No es requisito que las balas de plata y plomo sean de la misma masa para determinar este cambio en temperatura. El único requisito es que tengan la misma rapidez.

Ejemplo 19.3 Enfriamiento de un lingote caliente

Un lingote de 0.050 kg de metal se calienta a 200.0°C y después se deja caer en un calorímetro que contiene 0.400 kg de agua inicialmente a 20.0°C . La temperatura de equilibrio final del sistema mezclado es 22.4°C . Encuentre el calor específico del metal.

Conceptualizar Imagine el proceso que ocurre en el sistema aislado de la figura 19.2. La energía deja el lingote caliente y va hacia el agua fría, así que el lingote se enfría y el agua se calienta. Cuando ambos están a la misma temperatura, finaliza la transferencia de energía.

Categorizar Se utiliza una ecuación desarrollada en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Resuelva para c_x :

$$c_x = \frac{m_w c_w (T_f - T_w)}{m_x (T_x - T_f)}$$

Sustituya valores numéricos:

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{(0.400 \text{ kg})(4186 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C})(22.4^\circ\text{C} - 20.0^\circ\text{C})}{(0.050 \text{ kg})(200.0^\circ\text{C} - 22.4^\circ\text{C})} \\ &= 453 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Probablemente el lingote es parecido al hierro, como puede ver al comparar este resultado con la información mostrada en la tabla 19.1. La temperatura del lingote inicialmente está arriba del punto de vapor. Por tanto, parte del agua se puede vaporizar cuando el lingote se deja caer en el agua. Se supone que el sistema está sellado y este vapor no escapa. Ya que la temperatura de equilibrio final es menor que el punto de vapor, cualquier vapor que resulte se vuelve a condensar de regreso en agua.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que realiza un experimento en el laboratorio que utiliza esta técnica para determinar el calor específico de una muestra y usted quiere reducir la incertidumbre global en su resultado final para c_x . De la información proporcionada en este ejemplo, ¿para reducir la incertidumbre cuál valor sería más efectivo cambiar?

Respuesta La incertidumbre experimental más grande se asocia con la pequeña diferencia en temperatura de 2.4°C para el agua. Por ejemplo, al usar las reglas para propagación de incertidumbre del apéndice de la sección B.8, una incertidumbre de 0.1°C en T_f y T_w conduce a una incertidumbre de 8% en su diferencia. Para que esta diferencia de temperatura sea experimentalmente más grande, el cambio más efectivo es *reducir la cantidad de agua*.



19.3 Calor latente

Como se vio en secciones anteriores, una sustancia se somete a un cambio de temperatura cuando la energía se transfiere entre ella y sus alrededores. Sin embargo, en algunas ocasiones, la transferencia de energía no resulta en un cambio de temperatura. Este es el caso siempre que las características físicas de la sustancia cambian de una forma a otra; tal cambio se conoce comúnmente como **cambio de fase**. Dos cambios de fase comunes son de sólido a líquido (fusión) y de líquido a gas (ebullición); otro es un cambio en la estructura cristalina de un sólido. Todos esos cambios de fase incluyen un cambio en la energía interna del sistema, pero no un cambio en su temperatura. Por ejemplo, en la ebullición el aumento en la energía interna se representa mediante el rompimiento de los enlaces entre moléculas en el estado líquido; este rompimiento de enlaces permite a las moléculas alejarse más en el estado gaseoso, con un aumento correspondiente en la energía potencial intermolecular.

Como es de esperar, diferentes sustancias responden de modo distinto a la agregación o eliminación de energía mientras cambian de fase, porque varían sus ordenamientos moleculares internos. Además, la cantidad de energía transferida durante un cambio de fase depende de la cantidad de sustancia de que se trate. (Toma menos energía fundir un cubo de hielo que derretir un lago congelado.) Cuando se estudien dos fases de un material se utilizará el término *material de fase superior* para indicar que el material está a una temperatura alta. Así, por ejemplo, si se estudian hielo y agua, el agua es el material de fase superior, mientras que el vapor es el material de fase superior en un estudio de agua y vapor. Considere un sistema que contiene una sustancia en dos fases en equilibrio, como hielo y agua. La cantidad inicial de material de fase superior, agua, en el sistema es m_i . Ahora imagine que al sistema entra la energía Q . Como resultado, la cantidad final de agua es m_f debido a la fusión de un poco de hielo. Por tanto, la cantidad de hielo derretido, es igual a la cantidad de agua nueva es $\Delta m = m_f - m_i$. Para este cambio de fase, el **calor latente** se define como

$$L \equiv \frac{Q}{\Delta m} \quad (19.7)$$

Este parámetro se llama calor latente (literalmente, el calor “oculto”) porque esta energía agregada o eliminada no resulta en un cambio de temperatura. El valor de L para una sustancia depende de la naturaleza del cambio de fase, así como de las propiedades de la sustancia. Si toda la cantidad de material de fase inferior experimenta un cambio de fase, el cambio en masa Δm del material de fase superior es igual a la masa inicial del material de fase inferior. Por ejemplo, si un cubo de hielo de masa m sobre una placa se funde completamente, el cambio en masa del agua es $m_f - 0 = m$, que es la masa de agua nueva, que también es igual a la masa inicial del cubo de hielo.

De la definición de calor latente, y de nuevo al elegir el calor como el mecanismo de transferencia de energía, la energía requerida para cambiar la fase de una sustancia pura es

$$Q = L \Delta m \quad (19.8)$$

donde Δm es el cambio en masa del material de fase superior.

Calor latente de fusión L_f es el término que se aplica cuando el cambio de fase es de sólido a líquido (*derretir* significa “combinar mediante fusión”), y **calor latente de vaporización** L_v es el término que se usa cuando el cambio de fase es de líquido a gas (el líquido se “vaporiza”).⁴ Cuando entra energía a un sistema, lo que causa fusión o vaporización, se incrementa la cantidad de material de fase superior, entonces Δm es positivo y Q también es positivo, consistente con la convención de signos. Cuando se extrae energía de un sistema, lo que origina congelación o condensación, disminuye la cantidad de material de fase superior, así Δm es negativo y Q también es negativo, en acuerdo con la convención de signos. Mantenga en mente que Δm , en la ecuación 19.8 siempre se refiere al material

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 19.6

Los signos son cruciales Los errores de signo ocurren con mucha frecuencia cuando los estudiantes aplican ecuaciones de calorimetría. Para cambios de fase, recuerde que Δm en la ecuación 19.8 siempre es el cambio en masa del material de fase superior. En la ecuación 19.4, asegúrese de que su ΔT siempre sea la temperatura final menos la temperatura inicial. Además, siempre debe incluir el signo negativo en el lado derecho de la ecuación 19.5.

◀ Energía transferida por una sustancia durante un cambio de fase

⁴ Cuando un gas se enfría, eventualmente se *condensa*, es decir, regresa a la fase líquida. La energía proporcionada por unidad de masa se llama *calor latente de condensación* y es numéricamente igual al calor latente de vaporización. Del mismo modo, cuando un líquido se enfría, al final se solidifica, y el *calor latente de solidificación* es numéricamente igual al calor latente de fusión.

TABLA 19.2 Calores latentes de fusión y vaporización

Sustancia	Punto de fusión (°C)	Calor latente de fusión (J/kg)	Punto de ebullición (°C)	Calor latente vaporización (J/kg)
Helio ^a	-272.2	5.23×10^3	-268.93	2.09×10^4
Oxígeno	-218.79	1.38×10^4	-182.97	2.13×10^5
Nitrógeno	-209.97	2.55×10^4	-195.81	2.01×10^5
Alcohol etílico	-114	1.04×10^5	78	8.54×10^5
Agua	0.00	3.33×10^5	100.00	2.26×10^6
Azufre	119	3.81×10^4	444.60	3.26×10^5
Plomo	327.3	2.45×10^4	1 750	8.70×10^5
Aluminio	660	3.97×10^5	2 450	1.14×10^7
Plata	960.80	8.82×10^4	2 193	2.33×10^6
Oro	1 063.00	6.44×10^4	2 660	1.58×10^6
Cobre	1 083	1.34×10^5	1 187	5.06×10^6

^aEl helio no se solidifica a presión atmosférica. El punto de fusión dado aquí corresponde a una presión de 2.5 MPa.

de fase superior. Los calores latentes de varias sustancias varían considerablemente como muestran los datos en la tabla 19.2.

Para entender el papel del calor latente en los cambios de fase, considere la energía requerida para convertir un sistema que consiste de un cubo de hielo de 1.00 g de -30.0 °C a vapor a 120.0 °C. La figura 19.3 indica los resultados experimentales obtenidos cuando al cubo se le agrega gradualmente energía. Los resultados se presentan como una gráfica de temperatura del sistema contra energía agregada al sistema. Examine cada porción de la curva rojo-café, dividida desde la parte A hasta la parte E.

Parte A. En esta porción de la curva la temperatura del sistema cambia de -30.0 °C a 0.0 °C. La ecuación 19.4 indica que la temperatura varía linealmente con la energía agregada, así el resultado experimental es una línea recta sobre la gráfica. El calor específico del hielo es $2\,090 \text{ J/kg} \cdot \text{°C}$, entonces se puede calcular la cantidad de energía agregada mediante el uso de la ecuación 19.4:

$$Q = m_{\text{hielo}} c_{\text{hielo}} \Delta T = (1.00 \times 10^{-3} \text{ kg})(2\,090 \text{ J/kg} \cdot \text{°C})(30.0 \text{ °C}) = 62.7 \text{ J}$$

Parte B. Cuando la temperatura del sistema alcanza 0.0 °C, la mezcla hielo-agua permanece a esta temperatura, aun cuando se agregue energía, hasta que todo el hielo se funde. La energía requerida para fundir 1.00 g de hielo a 0.0 °C es, de la ecuación 19.8,

$$Q = L_f \Delta m_w = L_f m_{\text{hielo}} = (3.33 \times 10^5 \text{ J/kg})(1.00 \times 10^{-3} \text{ kg}) = 333 \text{ J}$$

En este punto, se está en la marca de 396 J ($= 62.7 \text{ J} + 333 \text{ J}$) sobre el eje de energía de la figura 20.3.

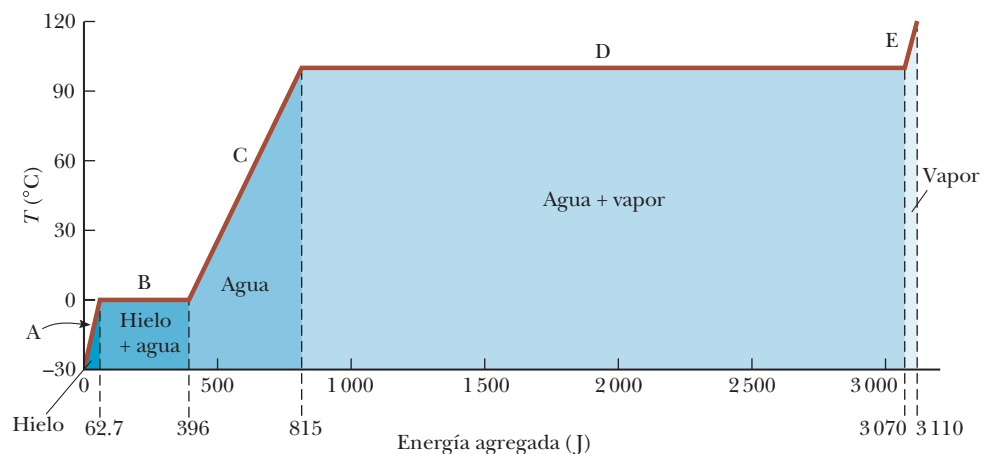


Figura 19.3 Gráfica de temperatura contra energía agregada cuando un sistema que inicialmente contiene 1.00 g de hielo a -30.0 °C se convierte a vapor a 120.0 °C.

Parte C. Entre 0.0 °C y 100.0 °C, no ocurre nada sorprendente. No hay cambio de fase y así toda la energía agregada al sistema, que ahora es agua, se emplea para incrementar su temperatura. La cantidad de energía necesaria para aumentar la temperatura de 0.0 °C a 100.0 °C es

$$Q = m_w c_w \Delta T = (1.00 \times 10^{-3} \text{ kg})(4.19 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C})(100.0 ^\circ\text{C}) = 419 \text{ J}$$

donde m_w es la masa del agua en el sistema, que es igual a la masa m_i del hielo original.

Parte D. A 100.0 °C ocurre otro cambio de fase conforme el sistema cambia de agua a 100.0 °C a vapor a 100.0 °C. Similar a la mezcla hielo-agua en la parte B, la mezcla agua-vapor permanece a 100.0 °C, aun cuando se agrega energía, hasta que todo el líquido se convierte a vapor. La energía necesaria para convertir 1.00 g del agua a vapor a 100.0 °C es

$$Q = L_v \Delta m_s = L_v m_w = (2.26 \times 10^6 \text{ J/kg})(1.00 \times 10^{-3} \text{ kg}) = 2.26 \times 10^3 \text{ J}$$

Parte E. En esta porción de la curva, como en las partes A y C, no se presenta cambio de fase; por tanto, toda la energía agregada se utiliza para incrementar la temperatura del sistema, que ahora es vapor. La energía que debe agregarse para elevar la temperatura del vapor de 100.0 °C a 120.0 °C es

$$Q = m_s c_s \Delta T = (1.00 \times 10^{-3} \text{ kg})(2.01 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C})(20.0 ^\circ\text{C}) = 40.2 \text{ J}$$

La cantidad total de energía que se debe agregar para cambiar 1 g de hielo a $-30.0 ^\circ\text{C}$ a vapor a $120.0 ^\circ\text{C}$ es la suma de los resultados de las cinco partes de la curva, que es $3.11 \times 10^3 \text{ J}$. Inversamente, para enfriar 1 g de vapor a $120.0 ^\circ\text{C}$ a hielo a $-30.0 ^\circ\text{C}$, se deben quitar $3.11 \times 10^3 \text{ J}$ de energía.

Observe en la figura 19.3 la cantidad de energía relativamente grande que se transfiere al agua para vaporizarla a vapor. Imagine invertir este proceso, con una gran cantidad de energía transferida del vapor para condensarlo en agua líquida. Esto es el porqué una quemada de piel por vapor a $100 ^\circ\text{C}$ es mucho más dañina que la exposición de su piel a agua a $100 ^\circ\text{C}$. Una gran cantidad de energía entra a su piel desde el vapor, y éste permanece a $100 ^\circ\text{C}$ durante mucho tiempo mientras se condensa. Por lo contrario, cuando su piel tiene contacto con agua a $100 ^\circ\text{C}$, el agua de inmediato comienza a bajar de temperatura a medida que transfiere energía del agua a su piel.

E XAMEN RÁPIDO 19.2 Suponga que se realiza el mismo proceso de agregar
 • energía al cubo de hielo como se señaló con anterioridad en la figura 19.3, pero en
 • vez de ello se grafica la energía interna del sistema como una función de la energía de
 • entrada. ¿Cómo sería esta gráfica?

Si el agua líquida se mantiene perfectamente inmóvil en un contenedor muy limpio, es posible que el agua descienda por debajo de $0 ^\circ\text{C}$ sin congelarse en hielo. Este fenómeno, llamado **subenfriamiento**, surge porque el agua requiere una perturbación de cierto tipo para que las moléculas se separen y comiencen a formar la gran estructura abierta del hielo por la cual la densidad del hielo es menor que la del agua, como se explicó en la sección 18.4. Si el agua subenfriada se perturba, súbitamente se congela. El sistema desciende a la configuración de energía más baja de las moléculas ligadas de la estructura del hielo, y la energía liberada eleva la temperatura de regreso a $0 ^\circ\text{C}$.

Los calentadores de manos comerciales consisten en acetato de sodio líquido en una bolsa plástica sellada. La solución en la bolsa está en un estado subenfriado estable. Cuando sus dedos presionan un disco en la bolsa, el líquido se solidifica y la temperatura aumenta, como el agua subenfriada recién mencionada. Sin embargo, en este caso, el punto de congelación del líquido es mayor que la temperatura corporal, así que la bolsa se siente caliente al tacto. Para reutilizar el calentador de manos, la bolsa se debe hervir hasta que el sólido se licue. Entonces, a medida que se enfría, pasa por debajo de su punto de congelación hacia el estado subenfriado.



También es posible crear **sobrecalentamiento**. Por ejemplo, agua limpia en una taza muy limpia colocada en un horno de microondas a veces puede elevar su temperatura más allá de 100 °C sin hervir, porque la formación de una burbuja de vapor en el agua requiere raspones en la taza o algún tipo de impureza en el agua para servir como sitio de nucleación. Cuando la taza se saca del horno de microondas, el agua sobrecalentada se vuelve explosiva pues de inmediato se forman burbujas y el agua caliente se sube hacia arriba fuera de la taza.

Ejemplo 19.4 Enfriamiento de vapor

¿Qué masa de vapor, inicialmente a 130 °C, se necesita para calentar 200 g de agua en un contenedor de vidrio de 100 g, de 20.0 °C a 50.0 °C?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine colocar agua y vapor en un contenedor aislado y cerrado. El vapor se enfría y se condensa en agua líquida, y eventualmente, el sistema alcanza un estado uniforme de agua con una temperatura final de 50.0 °C en equilibrio con el vidrio a la misma temperatura.

Categorizar Con base en la conceptualización de esta situación, este ejemplo se clasifica como uno que involucra calorimetría en donde ocurre un cambio de fase. El calorímetro es un *sistema aislado* para *energía*: la energía se transfiere entre los componentes del sistema pero no cruza la frontera entre el sistema y el entorno.

Analizar Escriba la ecuación 19.5 para describir el proceso de calorimetría: (1) $Q_{\text{cold}} = -Q_{\text{hot}}$

El vapor experimenta tres procesos: primero una disminución en temperatura a 100 °C, luego una condensación en agua líquida y finalmente una disminución en temperatura del agua a 50.0 °C. Encuentre la transferencia de energía en el primer proceso utilizando la masa desconocida m_s del vapor:

$$Q_1 = m_s c_s \Delta T_s$$

Encuentre la transferencia de energía en el segundo proceso:

$$Q_2 = L_v \Delta m_s = L_v(0 - m_s) = -m_s L_v$$

Encuentre la transferencia de energía en el tercer proceso:

$$Q_3 = m_s c_w \Delta T_{\text{agua caliente}}$$

Sume las transferencias de energía en estas tres etapas:

$$(2) Q_{\text{caliente}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = m_s(c_s \Delta T_s - L_v + c_w \Delta T_{\text{agua caliente}})$$

El agua a 20.0 °C y el vidrio sólo se someten a un proceso, un aumento en temperatura a 50.0 °C. Encuentre la transferencia de energía en este proceso:

$$(3) Q_{\text{frío}} = m_w c_w \Delta T_{\text{agua fría}} + m_g c_g \Delta T_{\text{vidrios}}$$

Sustituya las ecuaciones (2) y (3) en la ecuación (1):

$$m_w c_w \Delta T_{\text{agua fría}} + m_g c_g \Delta T_{\text{vidrios}} = -m_s(c_s \Delta T_s - L_v + c_w \Delta T_{\text{agua caliente}})$$

Resuelva para m_s :

$$m_s = -\frac{m_w c_w \Delta T_{\text{agua fría}} + m_g c_g \Delta T_{\text{vidrios}}}{c_s \Delta T_s - L_v + c_w \Delta T_{\text{agua caliente}}}$$

Sustituya valores numéricos:

$$m_s = -\frac{(0.200 \text{ kg})(4186 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C})(50.0^\circ\text{C} - 20.0^\circ\text{C}) + (0.100 \text{ kg})(837 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C})(50.0^\circ\text{C} - 20.0^\circ\text{C})}{(2010 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C})(100^\circ\text{C} - 130^\circ\text{C}) - (2.26 \times 10^6 \text{ J/kg}) + (4186 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C})(50.0^\circ\text{C} - 100^\circ\text{C})}$$

$$= 1.09 \times 10^{-2} \text{ kg} = \mathbf{10.9 \text{ g}}$$

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si el estado final del sistema es agua a 100 °C? ¿Necesitaría más o menos vapor? ¿Cómo cambiaría el análisis anterior?

Respuesta Necesitaría más vapor para elevar la temperatura del agua y el vidrio a 100 °C en lugar de a 50.0 °C. Habría dos cambios principales en el análisis. Primero, no tendría un término Q_3 para el vapor, porque el agua que se condensa del vapor no se enfría por debajo de 100 °C. Segundo, en $Q_{\text{frío}}$, el cambio de temperatura sería 80.0 °C en lugar de 30.0 °C. Para practicar, demuestre que el resultado es una masa de vapor requerida de 31.8 g.

19.4 Trabajo y calor en procesos termodinámicos

En termodinámica el *estado* de un sistema se describe con variables como presión, volumen, temperatura y energía interna. Como resultado, estas cantidades pertenecen a una categoría llamada **variables de estado**. Para cualquier configuración dada del sistema, es posible identificar valores de las variables de estado. (Para sistemas mecánicos, las variables de estado incluyen energía cinética K y energía potencial U .) Un estado de un sistema se especifica sólo si el sistema está en equilibrio térmico interno. En el caso de un gas en un contenedor, el equilibrio térmico interno requiere que cada parte del gas esté a la misma presión y temperatura.

Una segunda categoría de variables en situaciones que involucran energía es la de **variables de transferencia**. Estas variables son las que aparecen en el lado derecho de la ecuación de conservación de la energía, la ecuación 8.2. Una variable tal tiene un valor distinto de cero si ocurre un proceso donde la energía se transfiera a través de la frontera del sistema. La variable de transferencia es positiva o negativa, esto depende de si la energía entra o sale del sistema. Ya que una transferencia de energía a través de la frontera representa un cambio en el sistema, las variables de transferencia no se asocian con un estado determinado del sistema, sino con un *cambio* en el estado del sistema.

En las secciones previas se explicó el calor como una variable de transferencia. En esta sección se estudia otra importante variable de transferencia para sistemas termodinámicos, el trabajo. El trabajo efectuado sobre las partículas se ilustró con amplitud en el capítulo 7, y aquí se investiga el trabajo realizado sobre un sistema deformable, un gas. Considere un gas contenido en un cilindro ajustado con un pistón móvil (figura 19.4). En equilibrio, el gas ocupa un volumen V y ejerce una presión uniforme P sobre las paredes del cilindro y sobre el pistón. Si el pistón tiene un área de sección transversal A , la magnitud de la fuerza ejercida por el gas sobre el pistón es $F = PA$. Por la tercera ley de Newton, la magnitud de la fuerza ejercida por el pistón sobre el gas también es PA . Ahora suponga que el pistón se empuja hacia adentro y comprime el gas **cuasiestáticamente**, es decir, con la suficiente lentitud para permitir que el sistema permanezca esencialmente en equilibrio térmico interno en todo momento. La cara inferior del pistón es el punto de aplicación de la fuerza sobre el gas. A medida que el pistón se empuja hacia abajo mediante una fuerza externa $\vec{F} = -F\hat{j}$ a través de un desplazamiento de $d\vec{r} = dy\hat{j}$ (figura 19.4b), el trabajo realizado sobre el gas es, de acuerdo con la definición de trabajo en el capítulo 7,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -F\hat{j} \cdot dy\hat{j} = -F dy = -PA dy$$

Dado que $A dy$ es el cambio en volumen del gas dV , el trabajo efectuado sobre el gas se expresa como

$$dW = -P dV \quad (19.9)$$

Si el gas se comprime, dV es negativo y el trabajo realizado sobre el gas es positivo. Si el gas se expande, dV es positivo y el trabajo efectuado sobre el gas es negativo. Si el volumen permanece constante, el trabajo realizado sobre el gas es cero. El trabajo total efectuado sobre el gas a medida que su volumen cambia de V_i a V_f está dado por la integral de la ecuación 19.9:

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} P dV \quad (19.10)$$

Para evaluar esta integral, debe conocer cómo varía la presión con el volumen durante el proceso.

En general, la presión no es constante durante un proceso seguido por un gas, depende del volumen y la temperatura. Si la presión y el volumen se conocen en cada paso del proceso, entonces es posible graficar el estado del gas en cada etapa mediante una importante representación gráfica llamada **diagrama PV** , como en la figura 19.5. Este tipo de diagrama permite visualizar un proceso experimentado por un gas. La curva en un diagrama PV se llama *trayectoria* entre los estados inicial y final.

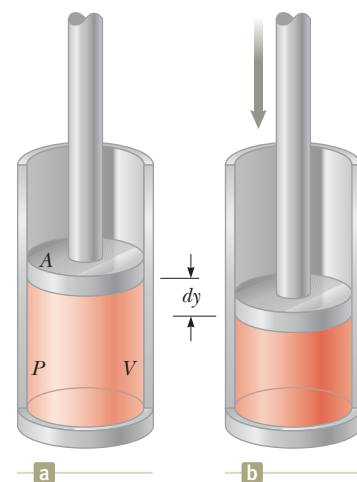


Figura 19.4 Se realiza trabajo sobre un gas, contenido en un cilindro a una presión P , conforme el pistón se empuja hacia abajo para comprimir el gas.

El trabajo efectuado sobre un gas es igual al negativo del área bajo la curva PV . Aquí el área es negativa porque el volumen disminuye, y el trabajo es positivo.

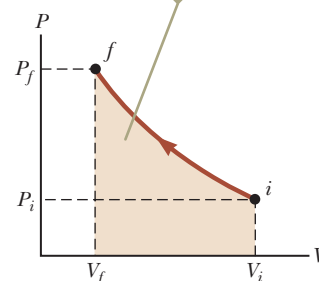


Figura 19.5 Se comprime un gas cuasi estáticamente (con lentitud) desde el estado i hasta el estado f . Un agente externo debe hacer trabajo positivo sobre el gas para comprimirlo.

◀ Trabajo realizado sobre un gas

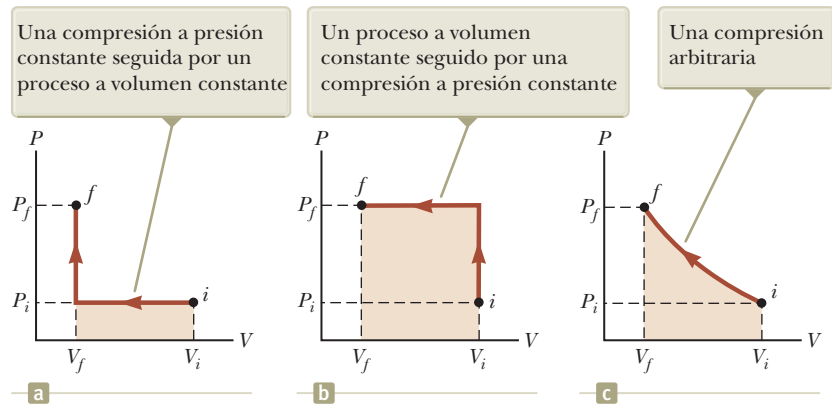


Figura 19.6 El trabajo realizado sobre un gas a medida que se lleva desde un estado inicial hasta un estado final depende de la trayectoria entre dichos estados.

Advierta que la integral en la ecuación 19.10 es igual al área bajo una curva en un diagrama PV . Por tanto, se identifica un uso importante para los diagramas PV :

El trabajo realizado sobre un gas en un proceso cuasi estático que lleva al gas de un estado inicial a un estado final, es el negativo del área bajo la curva en un diagrama PV , evaluada entre dichos estados.

Para el proceso de comprimir un gas en un cilindro, el trabajo efectuado depende de la trayectoria particular tomada entre los estados inicial y final, como sugiere la figura 19.5. Para ilustrar este importante punto, considere varias trayectorias diferentes que conectan i y f (figura 19.6). En el proceso que se muestra en la figura 19.6a, el volumen del gas primero se reduce de V_i a V_f a presión constante P_i y la presión del gas después aumenta de P_i a P_f al calentarse a volumen constante V_f . El trabajo efectuado sobre el gas a lo largo de esta trayectoria es $-P_i(V_f - V_i)$. En la figura 19.6b, la presión del gas aumenta de P_i a P_f a volumen constante V_i y enseguida el volumen del gas se reduce de V_i a V_f a presión constante P_f . El trabajo realizado sobre el gas es $-P_f(V_f - V_i)$. Este valor es mayor que el del proceso descrito en la figura 19.6a porque el pistón se movió a través del mismo desplazamiento mediante una fuerza mucho más grande. Por último, para el proceso descrito en la figura 19.6c, donde tanto P como V cambian de manera continua, el trabajo efectuado sobre el gas tiene algún valor entre los obtenidos en los primeros dos procesos. En este caso, para evaluar el trabajo se debe conocer la función $P(V)$ de modo que pueda determinarse la integral en la ecuación 19.10.

La transferencia de energía Q adentro o afuera de un sistema mediante calor también depende del proceso. Por ejemplo, en el capítulo 20, mostraremos que un proceso de volumen constante entre dos temperaturas requiere una cantidad diferente de calor que un proceso de presión constante entre las mismas temperaturas.

19.5 Primera ley de la termodinámica

Cuando se introdujo la ley de conservación de energía en el capítulo 8, se estableció que el cambio en la energía de un sistema es igual a la suma de todas las transferencias de energía a través de la frontera del sistema (ecuación 8.2). La **primera ley de la termodinámica** es un caso especial de la ley de conservación de energía que describe procesos que sólo cambian la energía interna⁵ y donde sólo se transfiere energía mediante calor y trabajo:

$$\Delta E_{\text{int}} = Q + W \quad (19.11)$$

Revise la ecuación 8.2 para ver que la primera ley de la termodinámica está contenida en esa ecuación más general.

Primera ley de la termodinámica ▶

⁵ Es un accidente desafortunado de la historia que el símbolo tradicional para energía interna sea U , que también es el símbolo tradicional para energía potencial, como se presentó en el capítulo 7. Para evitar confusión entre energía potencial y energía interna, en este libro se usa el símbolo E_{int} para energía interna. Sin embargo, si usted toma un curso avanzado de termodinámica, esté preparado para ver U como el símbolo para la energía interna en la primera ley.

Analicemos cada uno de los tres términos en la primera ley para varios procesos a través de los cuales se toma un gas. Como modelo, consideremos la muestra de gas contenida en el aparato pistón-cilindro de la figura 19.7. Esta figura muestra el trabajo realizado sobre el gas y la energía que se transfiere por el calor, por lo que la energía interna del gas está aumentando. En el siguiente análisis de varios procesos, refiérase a esta figura y altere mentalmente las direcciones de la transferencia de energía para reflejar lo que está sucediendo en el proceso.

Primero, considere un *sistema aislado*, es decir, que no interactúa con sus alrededores, como ya se ha visto. En este caso, no tiene lugar transferencia de energía por calor y el trabajo realizado sobre el sistema es cero; así que, la energía interna permanece constante. Es decir, $Q = W = 0$, entonces se sigue que $\Delta E_{\text{int}} = 0$; por tanto, $E_{\text{int},i} = E_{\text{int},f}$. Se concluye que la energía interna E_{int} de un sistema aislado permanece constante.

Ahora considere el caso de un sistema que puede intercambiar energía con sus alrededores y se lleva a través de un **proceso cíclico**, es decir, un proceso que inicia y finaliza en el mismo estado. En este caso, el cambio en la energía interna de nuevo debe ser cero porque E_{int} es una variable de estado; por tanto, la energía Q agregada al sistema debe ser igual al negativo del trabajo W efectuado sobre el sistema durante el ciclo. Es decir, en un proceso cíclico,

$$\Delta E_{\text{int}} = 0 \quad \text{y} \quad Q = -W \quad \text{proceso cíclico}$$

Se puede demostrar que en un proceso cíclico para un gas, el trabajo neto realizado sobre el sistema por ciclo es igual al área encerrada por la trayectoria que representa el proceso en un diagrama PV .

Un proceso que ocurre a temperatura constante se llama **proceso isotérmico**. Este proceso puede establecerse sumergiendo el cilindro en la figura 19.7 en un baño de agua helada o poniendo el cilindro en contacto con algún otro depósito de temperatura constante. Un gráfico de P contra V a temperatura constante para un gas ideal produce una curva hiperbólica llamada isoterma, como se muestra en la figura 19.9. La ley de los gases ideales (ecuación 18.9) con T constante indica que la ecuación de esta curva es $PV = nRT = \text{constante}$. En el capítulo 20 se muestra que la energía interna de un gas ideal es función de la temperatura solamente. Por tanto, debido a que la temperatura no cambia en un proceso isotérmico que involucra un gas ideal, se debe tener $\Delta E_{\text{int}} = 0$. Para un proceso isotérmico, se concluye a partir de la primera ley que la transferencia de energía Q debe ser igual al negativo del trabajo realizado en el gas; es decir, $Q = -W$. Cualquier energía que ingresa al sistema por el calor es transferida fuera del sistema por el trabajo.

Calculemos el trabajo realizado en el gas en la expansión isotérmica del estado i al estado f en la figura 19.9. El trabajo realizado en el gas viene dado por la ecuación 19.10.

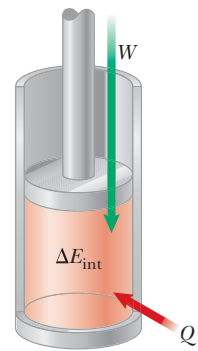


Figura 19.7 La primera ley de la termodinámica iguala el cambio en energía interna E_{int} en un sistema con la transferencia de energía neta al sistema mediante calor Q y trabajo W . En la situación que se muestra aquí, la energía interna del gas aumenta.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 19.7

Convenciones de signo dual Algunos libros de física e ingeniería presentan la primera ley como $\Delta E_{\text{int}} = Q - W$, con un signo menos entre el calor y el trabajo. La razón es que el trabajo se define en estos tratamientos como el trabajo realizado *por* el gas en lugar de *sobre* el gas, como en el tratamiento de este texto. La ecuación equivalente a la ecuación 20.9 en estos tratamientos define el trabajo como $W = \int_{V_i}^{V_f} P dV$. Por tanto, si el gas realiza trabajo positivo, la energía sale del sistema, lo que conduce al signo negativo en la primera ley. En sus estudios en otros cursos de química o ingeniería, o al leer otros libros de física, asegúrese de notar cuál convención de signo se usa para la primera ley.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 19.8

La primera ley Con la aproximación de energía de este libro, la primera ley de la termodinámica es un caso especial de la ecuación 8.2. Algunos físicos argumentan que la primera ley es la ecuación general para la conservación de la energía, equivalente a la ecuación 8.2. En este método, la primera ley se aplica a un sistema cerrado (de modo que no hay transferencia de materia), el calor se interpreta de modo que incluya radiación electromagnética y el trabajo de modo que incluya transmisión eléctrica (“trabajo eléctrico”) y ondas mecánicas (“trabajo molecular”). Tenga esto presente cuando revise la primera ley en su lectura de otros libros de física.

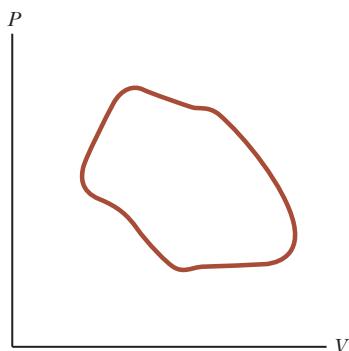


Figura 19.8 Un proceso cíclico en un gas forma una curva cerrada en un diagrama PV .

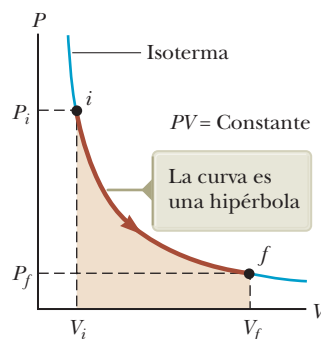


Figura 19.9 Diagrama PV para una expansión isotérmica de un gas ideal desde un estado inicial hasta un estado final.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 19.9

$Q \neq 0$ en un proceso isotérmico No caiga en la trampa común de pensar que no debe haber transferencia de energía por calor si la temperatura no cambia, como es el caso en un proceso isotérmico. Ya que la causa del cambio de temperatura puede ser calor o trabajo, la temperatura puede permanecer constante incluso si entra energía al gas por calor, que sólo ocurriría si la energía que entra al gas por calor sale por trabajo.

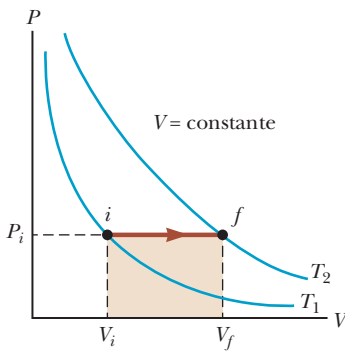


Figura 19.10 Un proceso isobárico toma un gas entre las temperaturas T_1 y T_2 .

Ya que el gas es ideal y el proceso es cuasi estático, la ley del gas ideal es válida para cada punto sobre la trayectoria. Por tanto,

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} P dV = - \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV$$

En este caso, T es constante y se puede sacar de la integral junto con n y R :

$$W = -nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = -nRT \ln V \Big|_{V_i}^{V_f}$$

Para calcular la integral, use (dx/x) . (Vea el apéndice B.) Al evaluar la integral en los volúmenes inicial y final se obtiene

$$W = nRT \ln \left(\frac{V_i}{V_f} \right) \quad (\text{proceso isotérmico}) \quad (19.12)$$

Numéricamente, este trabajo W es igual al negativo del área sombreada bajo la curva PV que se exhibe en la figura 20.9. El gas se expande, entonces $V_f > V_i$ y el valor para el trabajo realizado sobre el gas es negativo, como se esperaba. Si el gas se comprime, se tiene $V_f < V_i$ y el trabajo sobre el gas es positivo.

Un proceso que ocurre a presión constante se llama **proceso isobárico**. En la figura 19.7, se podría establecer un proceso isobárico al permitir que el pistón se mueva libremente de modo que siempre esté en equilibrio entre la fuerza neta del gas que empuja hacia arriba y el peso del pistón más la fuerza debida a la presión atmosférica que empujan hacia abajo. Un proceso isobárico aparece como una línea horizontal en un diagrama PV como se muestra en la figura 19.10. Encuentre los procesos isobáricos en la figura 19.6.

En tal proceso, los valores del calor y el trabajo por lo general son distintos de cero. El trabajo efectuado sobre el gas en un proceso isobárico es simplemente

$$W = -P(V_f - V_i) \quad \text{proceso isobárico} \quad (19.13)$$

donde P es la presión constante del gas durante el proceso.

Un proceso que ocurre a volumen constante se llama **proceso isovolumétrico** o *isocórico*. En la figura 19.7, sujetar el pistón en una posición fija aseguraría un proceso isovolumétrico. Un proceso isovolumétrico aparece como una línea vertical en un diagrama PV como se muestra en la figura 19.11. Encuentre los procesos isovolumétricos en la figura 19.6.

Ya que el volumen del gas no cambia en tal proceso, el trabajo dado por la ecuación 19.10 es cero. Así, de la primera ley se ve que, en un proceso isovolumétrico, porque $W = 0$,

$$\Delta E_{\text{int}} = Q \quad \text{proceso isovolumétrico} \quad (19.14)$$

Esta expresión específica que si se agrega energía mediante calor a un sistema que se mantiene a volumen constante, toda la energía transferida permanece en el sistema como un aumento en su energía interna. Por ejemplo, cuando una lata de pintura en aerosol se lanza al fuego, la energía entra al sistema (el gas en la lata) mediante calor a través de las paredes metálicas del envase. En consecuencia, la temperatura, y por tanto la presión en la lata, aumentan hasta que ésta posiblemente explote.

Un **proceso adiabático** es aquel donde no entra ni sale energía del sistema por calor; es decir, $Q = 0$. Un proceso adiabático se puede lograr al aislar térmicamente las paredes del sistema o al realizar el proceso rápidamente de modo que haya un tiempo despreciable para que la energía se transfiera por calor. Al aplicar la primera ley de la termodinámica a un proceso adiabático se obtiene

$$\Delta E_{\text{int}} = W \quad (\text{proceso adiabático}) \quad (19.15)$$

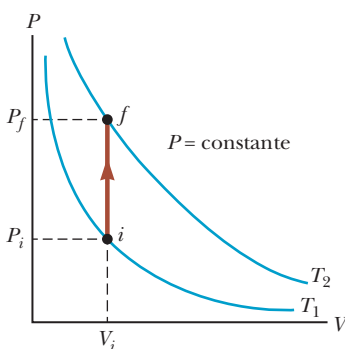


Figura 19.11 Un proceso isovolumétrico toma un gas entre las temperaturas T_1 y T_2 .

Este resultado muestra que si un gas se comprime adiabáticamente de modo que W sea positivo, entonces ΔE_{int} es positivo y la temperatura del gas aumenta. Inversamente, la temperatura de un gas disminuye cuando el gas se expande adiabáticamente.

Los procesos adiabáticos son muy importantes en la práctica de la ingeniería. Algunos ejemplos comunes son la expansión de los gases calientes en un motor de combustión interna, la licuefacción de los gases en un sistema de enfriamiento y la carrera de compresión en un motor diésel. Veremos diagramas de PV para procesos adiabáticos y se estudiarán con más detalle en el capítulo 20.

E XAMEN RÁPIDO 19.3 En las últimas tres columnas de la siguiente tabla, llene los recuadros con los signos correctos ($-$, $+$, o 0) para Q , W y ΔE_{int} . Para cada situación, se identifica el sistema a considerar.

Situación	Sistema	Q	W	ΔE_{int}
(a) Bombear rápidamente una llanta de bicicleta.	Aire en la bomba			
(b) Sartén con agua a temperatura ambiente en una estufa caliente	Agua en la sartén			
(c) Aire que sale rápidamente de un globo	Aire originalmente en el globo			

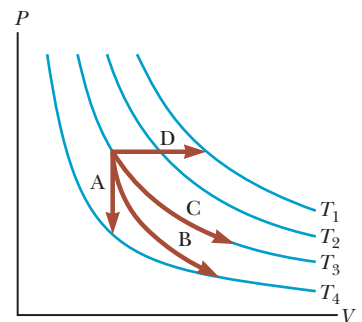


Figura 19.12 (Examen rápido 19.4) Identifique la naturaleza de las trayectorias A, B, C y D.

E XAMEN RÁPIDO 19.4 Caracterice las trayectorias en la figura 19.12 como isobárica, isovolumétrica, isotérmica o adiabática. Para la trayectoria B, $Q = 0$. Las curvas azules son isotermas.

Ejemplo 19.5 Una expansión isotérmica

Una muestra de 1.0 mol de un gas ideal se mantiene a 0.0°C durante una expansión de 3.0 L a 10.0 L.

(A) ¿Cuánto trabajo se realiza sobre el gas durante la expansión?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Represente el proceso en su mente: el cilindro en la figura 19.7 se sumerge en un baño de hielo-agua, y el pistón se mueve hacia afuera de modo que el volumen del gas aumenta. También puede emplear la representación gráfica en la figura 19.9 para conceptualizar el proceso.

Categorizar Se evaluarán los parámetros con las ecuaciones desarrolladas en las secciones anteriores, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución. La temperatura del gas es fija, el proceso es isotérmico.

Sustituya los valores dados en la ecuación 19.12:

$$\begin{aligned}
 W &= nRT \ln \left(\frac{V_i}{V_f} \right) \\
 &= (1.0 \text{ mol})(8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(273 \text{ K}) \ln \left(\frac{3.0 \text{ L}}{10.0 \text{ L}} \right) \\
 &= -2.7 \times 10^3 \text{ J}
 \end{aligned}$$

(B) ¿Cuánta transferencia de energía por calor ocurre entre el gas y sus alrededores en este proceso?

SOLUCIÓN

Encuentre el calor a partir de la primera ley:

$$\begin{aligned}
 \Delta E_{\text{int}} &= Q + W \\
 0 &= Q + W \\
 Q &= -W = 2.7 \times 10^3 \text{ J}
 \end{aligned}$$

19.5 continuación

(C) Si el gas regresa al volumen original mediante un proceso adiabático, ¿cuánto trabajo se realiza sobre el gas?

SOLUCIÓN

Use la ecuación 19.13. La presión no se proporciona, así que incorpore la ley de gas ideal:

$$\begin{aligned} W &= -P(V_f - V_i) = -\frac{nRT_i}{V_i}(V_f - V_i) \\ &= -\frac{(1.0 \text{ mol})(8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(273 \text{ K})}{10.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3}(3.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 - 10.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3) \\ &= 1.6 \times 10^3 \text{ J} \end{aligned}$$

La temperatura y volumen iniciales se emplearon para calcular el trabajo efectuado porque la temperatura final es desconocida. El trabajo realizado sobre el gas es positivo porque el gas se comprimió.

Ejemplo 19.6 Agua hirviendo

Suponga que 1.00 g de agua se vaporiza isobáricamente a presión atmosférica ($1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$). Su volumen en el estado líquido es $V_i = V_{\text{líquido}} = 1.00 \text{ cm}^3$, y su volumen en el estado de vapor es $V_f = V_{\text{vapor}} = 1\,671 \text{ cm}^3$. Encuentre el trabajo realizado en la expansión y el cambio en energía interna del sistema. Ignore cualquier mezcla del vapor y el aire circundante; imagine que el vapor simplemente empuja al aire circundante fuera del camino.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Advierta que la temperatura del sistema no se altera. Hay un cambio de fase que ocurre a medida que el agua se convierte en vapor.

Categorizar La expansión tiene lugar a presión constante, entonces el proceso se clasifica como isobárico. Se usarán las ecuaciones desarrolladas en las secciones precedentes, así este ejemplo se categoriza como un problema de sustitución.

Utilice la ecuación 19.13 para encontrar el trabajo realizado sobre el sistema a medida que el aire se empuja afuera del camino:

$$\begin{aligned} W &= -P(V_f - V_i) \\ &= -(1.013 \times 10^5 \text{ Pa})(1\,671 \times 10^{-6} \text{ m}^3 - 1.00 \times 10^{-6} \text{ m}^3) \\ &= -169 \text{ J} \end{aligned}$$

Aplique la ecuación 19.8 y el calor latente de vaporización del agua para encontrar la energía transferida en el sistema por calor:

$$\begin{aligned} Q &= L_v \Delta m_s = m_s L_v = (1.00 \times 10^{-3} \text{ kg})(2.26 \times 10^6 \text{ J/kg}) \\ &= 2\,260 \text{ J} \end{aligned}$$

Use la primera ley para encontrar el cambio en energía interna del sistema:

$$\Delta E_{\text{int}} = Q + W = 2\,260 \text{ J} + (-169 \text{ J}) = 2.09 \text{ kJ}$$

El valor positivo para ΔE_{int} indica que la energía interna del sistema aumenta. La fracción más grande de la energía ($2\,090 \text{ J}/2\,260 \text{ J} = 93\%$) transferida al líquido aumenta la energía interna del sistema. El restante 7% de la energía transferida sale del sistema mediante trabajo realizado por el vapor sobre la atmósfera circundante.

19.6 Mecanismos de transferencia de energía en procesos térmicos

En el capítulo 8 se presentó un enfoque global al análisis energético de procesos físicos a través de la ecuación 8.2, donde la transferencia de energía, que puede ocurrir mediante varios mecanismos. Antes, en este capítulo, se explicaron dos de los términos en el lado derecho de esta ecuación, trabajo W y calor Q . En esta sección se exploran más detalles acerca del calor como un medio de transferencia de energía y otros dos métodos de trans-



ferencia de energía relacionados a cambios de temperatura: convección (una forma de transferencia de materia T_{MT}) y radiación electromagnética T_{RE} .

Conducción térmica

El proceso de transferencia de energía por calor (Q en la ecuación 8.2) también se llama **conducción** o **conducción térmica**. En este proceso, la transferencia se puede representar a escala atómica como un intercambio de energía cinética entre partículas microscópicas, moléculas, átomos y electrones libres, en donde las partículas menos energéticas ganan energía en colisiones con partículas más energéticas. Por ejemplo, si usted sostiene un extremo de una larga barra metálica e inserta el otro extremo en una flama, encontrará que la temperatura del metal en su mano aumenta pronto. La energía llega a su mano mediante conducción. Al inicio, antes de que la barra se inserte en la flama, las partículas microscópicas en el metal vibran en torno a sus posiciones de equilibrio. A medida que la flama aumenta la temperatura de la barra, las partículas cerca de la flama comienzan a vibrar con mucha mayor amplitud. Estas partículas, a su vez, chocan con sus vecinas y transfieren algo de su energía en las colisiones. En forma lenta, las amplitudes de vibración de los átomos y electrones metálicos más alejados de la flama aumenta y eventualmente aquellos en el metal cercanos a su mano resultan afectados. Esta vibración aumentada se detecta mediante un incremento en la temperatura del metal y de su mano potencialmente quemada.

La rapidez de conducción térmica depende de las propiedades de la sustancia a calentar. Por ejemplo, es posible sostener un trozo de asbesto en una flama de manera indefinida, lo que implica que muy poca energía se conduce a través del asbesto. En general, los metales son buenos conductores térmicos y los materiales como asbesto, concho, papel y fibra de vidrio son conductores pobres. Los gases también son pobres conductores porque la distancia de separación entre las partículas es muy grande. Los metales son buenos conductores térmicos porque contienen gran cantidad de electrones que son comparativamente libres para moverse a través del metal y por tanto transportan energía a lo largo de grandes distancias. Por tanto, en un buen conductor como el cobre, la conducción tiene lugar mediante la vibración de los átomos y el movimiento de electrones libres. La presencia de electrones libres en metales también es la razón por la cual los metales son buenos conductores *eléctricos*. Estudiaremos la conducción eléctrica en metales en el capítulo 26.

La conducción se presenta sólo si hay una diferencia en temperatura entre dos partes del medio de conducción. Considere una placa de material de espesor Δx y área de sección transversal A . Una cara de la placa está a una temperatura T_c y la otra está a una temperatura $T_h > T_c$ (figura 19.13). Experimentalmente, se encuentra que la energía Q se transfiere en un intervalo de tiempo Δt desde la cara más caliente hacia la más fría. La energía Q que se transfiere se encuentra que es proporcional al área de sección transversal y a la diferencia de temperatura $\Delta T = T_h - T_c$, e inversamente proporcional al espesor:

$$Q = kA \frac{\Delta T}{L} \Delta t \quad (19.16)$$

donde la constante de proporcionalidad k es la **conductividad térmica** del material.

Para una placa de espesor infinitesimal dx y diferencia de temperatura dT , se escribe la **ley de conducción térmica** como

$$P = kA \left| \frac{dT}{dx} \right| \quad (19.17)$$

donde $|dT/dx|$ es el **gradiente de temperatura** (la rapidez a la que varía la temperatura con la posición). Observe que P tiene unidades de watts cuando Q está en joules y Δt en segundos. Esto no debe sorprender porque P es potencia, la rapidez de transferencia de energía por calor.

Sustancias que son buenos conductores térmicos tienen grandes valores de conductividad térmica, mientras que buenos aislantes térmicos tienen bajos valores de conductividad térmica. La tabla 19.3 contiene conductividades térmicas para varias sustancias. Note que en general los metales son mejores conductores térmicos que los no metales.

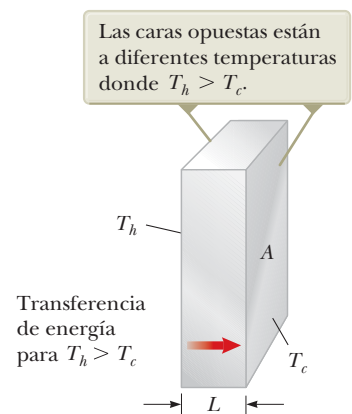


Figura 19.13 Transferencia de energía a través de una placa conductora con un área de sección transversal A y un espesor Δx .

TABLA 19.3 Conductividades térmicas

Sustancia	Conductividad térmica ($\text{W/m} \cdot ^\circ\text{C}$)
<i>Metales (a 25 °C)</i>	
Aluminio	238
Cobre	397
Oro	314
Hierro	79.5
Plomo	34.7
Plata	427
<i>No metales (valores aproximados)</i>	
Asbesto	0.08
Concreto	0.8
Diamante	2 300
Vidrio	0.8
Hielo	2
Caucho	0.2
Agua	0.6
Madera	0.08
<i>Gases (a 20 °C)</i>	
Aire	0.023 4
Helio	0.138
Hidrógeno	0.172
Nitrógeno	0.023 4
Oxígeno	0.023 8

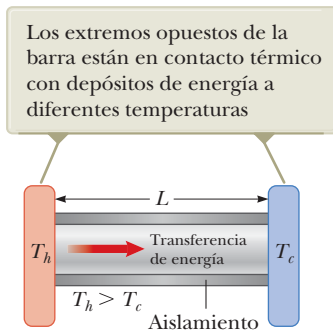


Figura 19.14 Conducción de energía a través de una barra uniforme de longitud L .

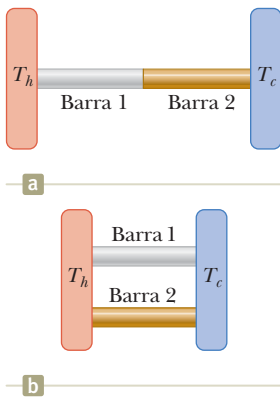


Figura 19.15 (Examen rápido 19.5) ¿En cuál caso la rapidez de transferencia de energía es mayor?

Suponga que una larga barra uniforme de longitud L se aísla térmicamente de modo que la energía no puede escapar por calor de su superficie, excepto en los extremos, como se muestra en la figura 19.14. Un extremo está en contacto térmico con un depósito de energía a temperatura T_c y el otro extremo está en contacto térmico con un depósito a temperatura $T_h > T_c$. Cuando se logra un estado estable, la temperatura en cada punto a lo largo de la barra es constante en el tiempo. En este caso, si se supone que k no es una función de la temperatura, el gradiente de temperatura es el mismo en todas partes a lo largo de la barra y es

$$\left| \frac{dT}{dx} \right| = \frac{T_h - T_c}{L}$$

Por tanto, la rapidez de transferencia de energía por conducción a través de la barra es

$$P = kA \left(\frac{T_h - T_c}{L} \right) \quad (19.18)$$

Para una placa compuesta que contenga varios materiales de espesores L_1, L_2, \dots y conductividades térmicas k_1, k_2, \dots la rapidez de transferencia de energía a través de la placa en estado estacionario es

$$P = \frac{A(T_h - T_c)}{\sum_i (L_i/k_i)} \quad (19.19)$$

donde T_c y T_h son las temperaturas de las superficies exteriores (que se mantienen constantes) y la suma es sobre todas las placas. El ejemplo 19.7 muestra cómo la ecuación 19.19 resulta de una consideración de dos espesores de materiales.

- E XAMEN RÁPIDO 19.5** Tiene dos barras de la misma longitud y diámetro, pero están formadas de diferentes materiales. Las barras se usan para conectar dos regiones a distintas temperaturas de modo que las transferencias de energía a través de las barras son por calor. Las barras se conectan en serie, como en la figura 19.15a o en paralelo, como en la figura 19.15b. ¿En cuál caso la rapidez de transferencia de energía por calor es mayor? (a) La rapidez es mayor cuando las barras están en serie. (b) La rapidez es mayor cuando las barras están en paralelo. (c) La rapidez es la misma en ambos casos.

Ejemplo 3.1 Transferencia de energía a través de dos placas

Dos placas de espesores L_1 y L_2 y conductividades térmicas k_1 y k_2 están en contacto térmico una con otra, como se muestra en la figura 19.16. Las temperaturas de sus superficies exteriores son T_c y T_h , respectivamente, y $T_h > T_c$. Determine la temperatura en la interfaz y la rapidez de transferencia de energía por conducción a través de las placas en la condición de estado estable.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Note la frase “en la condición de estado estable”. A partir de dicha frase se entiende que las transferencias de energía a través de la placa compuesta son a la misma rapidez en todos los puntos. De otro modo, la energía se acumularía o desaparecería en algún punto. Además, la temperatura varía con la posición en las dos placas, muy probablemente a diferentes velocidades en cada parte de la placa compuesta. Cuando el sistema queda en estado estable, la interfaz está a alguna temperatura fija T .

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema de conducción térmica y se impone la condición de que la potencia es la misma en ambas placas de material.

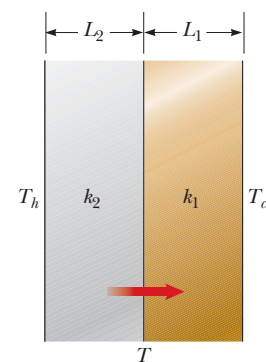


Figura 19.16 (Ejemplo 19.7) Transferencia de energía por conducción a través de dos placas en contacto térmico mutuo. En estado estable, la rapidez de transferencia de energía a través de la placa 1 es igual a la rapidez de transferencia de energía a través de la placa 2.

19.7 continuación

Analizar Aplique la ecuación 19.18 para expresar la rapidez a la que se transfiere energía a través de un área A de la placa 1:

$$(1) P_1 = k_1 A \left(\frac{T - T_c}{L_1} \right)$$

Expresa la rapidez a la que se transfiere energía a través de la misma área de la placa 2:

$$(2) P_2 = k_2 A \left(\frac{T_h - T}{L_2} \right)$$

Igualé estados dos relaciones para representar la situación de estado estacionario:

$$k_1 A \left(\frac{T - T_c}{L_1} \right) = k_2 A \left(\frac{T_h - T}{L_2} \right)$$

Resuelva para T :

$$(3) T = \frac{k_1 L_2 T_c + k_2 L_1 T_h}{k_1 L_2 + k_2 L_1}$$

Sustituya la ecuación (3) en la ecuación (1) o en la ecuación (2):

$$(4) P = \frac{A(T_h - T_c)}{(L_1/k_1) + (L_2/k_2)}$$

Finalizar La extensión de este procedimiento a varias placas de materiales conduce a la ecuación 19.19 con i en el intervalo de 1 a 2.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que usted construye un contenedor aislado con dos capas de aislante y la rapidez de transferencia de energía determinada por la ecuación (4) resulta ser muy alta. Tiene suficiente espacio para aumentar el espesor de una de las dos capas en 20%. ¿Cómo decidiría cuál capa elegir?

Respuesta Para reducir la potencia tanto como sea posible, debe aumentar lo más posible el denominador en la ecuación (4). Cualquier espesor que elija aumentar, L_1 o L_2 , aumentará el correspondiente término L/k en el denominador en 20%. Para que este cambio porcentual represente el mayor cambio absoluto, usted quiere tomar 20% del término más grande. Por tanto, debe aumentar el espesor de la capa que tenga el valor más grande de L/k .

Aislamiento casero

En la práctica de ingeniería, el término L/k para una sustancia particular se conoce como el **valor R** del material. Por tanto, la ecuación 19.19 se reduce a

$$P = \frac{A(T_h - T_c)}{\sum_i R_i} \quad (19.20)$$

donde $R_i = L_i/k_i$. En la tabla 19.4 se proporcionan los valores R de algunos materiales de construcción comunes. En Estados Unidos, las propiedades aislantes de los materiales empleados en la construcción por lo general se expresan en unidades usuales estadouni-

TABLA 19.4 Valores R para algunos materiales de construcción comunes

Material	Valor R (ft ² · °F · h/Btu)
Recubrimiento de madera dura (1 pulgada de espesor)	0.91
Tejas de madera (traslapada)	0.87
Ladrillo (4 pulgadas de espesor)	4.00
Bloque de concreto (núcleo relleno)	1.93
Aislamiento de fibra de vidrio (3.5 pulgadas de espesor)	10.90
Aislamiento de fibra de vidrio (6 pulgadas de espesor)	18.80
Tablero de fibra de vidrio (1 pulgada de espesor)	4.35
Fibra de celulosa (1 pulgada de espesor)	3.70
Vidrio plano (0.125 pulgadas de espesor)	0.89
Vidrio aislante (0.25 pulgadas de espacio)	1.54
Espacio de aire (3.5 pulgadas de espesor)	1.01
Capa de aire estancado	0.17
Muro seco (0.5 pulgadas de espesor)	0.45
Revestimiento (0.5 pulgadas de espesor)	1.32

denses, no en unidades SI. Por tanto, en la tabla 19.4, los valores R están como una combinación de unidades térmicas británicas, pies, horas y grados Fahrenheit.

En cualquier superficie vertical abierta al aire, una capa estancada muy delgada de aire se adhiere a la superficie. Uno debe considerar esta capa cuando determine el valor R para una pared. El espesor de esta capa estancada en una pared exterior depende de la rapidez del viento. La transferencia de energía a través de las paredes de una casa en un día tempestuoso es mayor que la de un día con aire tranquilo. Un valor R representativo para esta capa estancada de aire se da en la tabla 19.4.

Ejemplo 19.8 El valor R de una pared típica

Calcule el valor R total de una pared construida como se muestra en la figura 19.17a. Desde el exterior de la casa (hacia el frente en la figura) y moviéndose hacia el interior, la pared consiste en 4 pulgadas de ladrillo, 0.5 pulgadas de revestimiento, un espacio de aire de 3.5 pulgadas de grueso y 0.5 pulgadas de muro seco.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Use la figura 19.17 para ayudarse a formar ideas de la estructura de la pared. No olvide las capas de aire estancado adentro y afuera de la casa.

Categorizar Para el aislamiento casero se usarán ecuaciones específicas desarrolladas en esta sección, así que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Utilice la tabla 19.4 para hallar el valor R de cada capa:

$$R_1 \text{ (capa de aire estancada exterior)} = 0.17 \text{ ft}^2 \cdot \text{°F} \cdot \text{h/Btu}$$

$$R_2 \text{ (ladrillo)} = 4.00 \text{ ft}^2 \cdot \text{°F} \cdot \text{h/Btu}$$

$$R_3 \text{ (revestimiento)} = 1.32 \text{ ft}^2 \cdot \text{°F} \cdot \text{h/Btu}$$

$$R_4 \text{ (espacio de aire)} = 1.01 \text{ ft}^2 \cdot \text{°F} \cdot \text{h/Btu}$$

$$R_5 \text{ (muro seco)} = 0.45 \text{ ft}^2 \cdot \text{°F} \cdot \text{h/Btu}$$

$$R_6 \text{ (capa de aire estancado interior)} = 0.17 \text{ ft}^2 \cdot \text{°F} \cdot \text{h/Btu}$$

Sume los valores R para obtener el valor R total para la pared:

$$R_{\text{total}} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6 = 7.12 \text{ ft}^2 \cdot \text{°F} \cdot \text{h/Btu}$$

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que no está contento con este valor R total para la pared. No puede cambiar la estructura completa, pero le es posible llenar el espacio de aire, como en la figura 19.17b. Para *maximizar* el valor R total, ¿qué material debe elegir para llenar el espacio de aire?

Respuesta Al observar la tabla 19.4, se ve que 3.5 pulgadas de aislamiento de fibra de vidrio son diez veces más efectivas que 3.5 pulgadas de aire. Por tanto, debe llenar el espacio de aire con aislamiento de fibra de vidrio. El resultado es que se agregan $10.90 \text{ ft}^2 \cdot \text{°F} \cdot \text{h/Btu}$ de valor R y se pierden $1.01 \text{ ft}^2 \cdot \text{°F} \cdot \text{h/Btu}$ debido al espacio de aire que se sustituyó. El nuevo valor R total es igual a $7.12 \text{ ft}^2 \cdot \text{°F} \cdot \text{h/Btu} + 9.89 \text{ ft}^2 \cdot \text{°F} \cdot \text{h/Btu} = 17.01 \text{ ft}^2 \cdot \text{°F} \cdot \text{h/Btu}$.

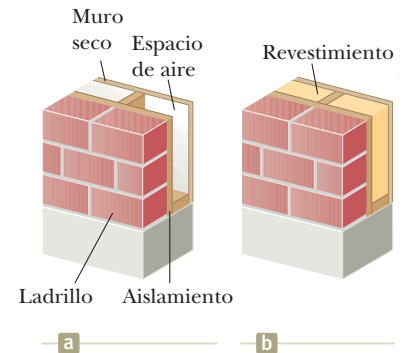


Figura 19.17 (Ejemplo 19.8) Una pared exterior de una casa que contiene (a) un espacio de aire y (b) aislamiento.

Convección

En un momento u otro, ha calentado sus manos al mantenerlas sobre un tostador calentando. En esta situación, el aire que está arriba del tostador se calienta y expande. Como resultado, la densidad de este aire disminuye y el aire se eleva. Este aire caliente abriga sus manos mientras circula. Se dice que la energía transferida por el movimiento de una sustancia caliente se transfiere por **convección**, que es una forma de transferencia de materia, T_{MT} en la ecuación 8.2. Aun cuando resulte por diferencias en densidad, como



con el aire alrededor del tostador, el proceso se conoce como *convección natural*. El flujo de aire en una costa oceánica (sección 19.2) es un ejemplo de convección natural, como lo es la mezcla que ocurre a medida que el agua superficial en un lago se enfría y se hunde (vea la sección 18.4). Cuando la sustancia calentada se obliga a moverse mediante un ventilador o bomba, como en algunos sistemas de calefacción de aire caliente y agua caliente, el proceso se llama *convección forzada*.

Sin las corrientes de convección sería muy difícil hervir agua. A medida que el agua se calienta en una tetera, las capas inferiores se calientan primero. Esta agua se expande y eleva hasta lo alto porque su densidad es baja. Al mismo tiempo, el agua fría más densa en la superficie se hunde hasta el fondo de la tetera y se calienta.

Radiación

El tercer medio de transferencia de energía que se analizará es la **radiación electromagnética**, T_{ER} en la ecuación 8.2. Todos los objetos continuamente radian energía en la forma de ondas electromagnéticas (vea el capítulo 33) producidas por vibraciones térmicas de las moléculas. Es probable que esté familiarizado con la radiación electromagnética en la forma de brillo anaranjado del quemador de una estufa eléctrica, un calentador eléctrico o las bobinas de un tostador.

La rapidez a la que un objeto radia energía es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta de la superficie. Conocida como **ley de Stefan**, este comportamiento se expresa en forma de ecuación como

$$P = \sigma A e T^4 \quad (19.21) \quad \leftarrow \text{Ley de Stefan}$$

donde P es la potencia en watts de las ondas electromagnéticas radiadas de la superficie del objeto, σ es una constante igual a $5.669\ 6 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$, A es el área superficial del objeto en metros cuadrados, e es la **emisividad** y T es la temperatura superficial en kelvins. El valor de e puede variar entre cero y la unidad, depende de las propiedades de la superficie del objeto. La emisividad es igual a la **absortividad**, que es la fracción de la radiación entrante que absorbe la superficie. Un espejo tiene muy baja absortividad porque refleja casi toda la luz incidente. Por tanto, la superficie de un espejo también tiene una emisividad muy baja. En el otro extremo, una superficie negra tiene alta absortividad y alta emisividad. Un **absorbedor ideal** se define como un objeto que absorbe toda la energía incidente sobre él y, para tal objeto, $e = 1$. Un objeto para el cual $e = 1$ con frecuencia se conoce como **cuerpo negro**. En el capítulo 39 se investigarán enfoques experimentales y teóricos a la radiación de un cuerpo negro.

Cada segundo, aproximadamente $1\ 370 \text{ J}$ de radiación electromagnética del Sol pasan perpendicularmente a través de cada m^2 en lo alto de la atmósfera de la Tierra. Esta radiación es principalmente visible y es acompañada de luz infrarroja y una cantidad significativa de radiación ultravioleta. En el capítulo 33 se estudiarán en detalle estos tipos de radiación. A la superficie de la Tierra llega, cada día, suficiente energía como para cubrir cientos de veces todas las necesidades de energía; el problema es capturarla y usarla de manera eficiente. El crecimiento en Estados Unidos del número de hogares “impulsados” por energía solar refleja los crecientes esfuerzos que se hacen por emplear esta energía abundante.

Otro ejemplo de los efectos de transferencia de energía por radiación es lo que ocurre con la temperatura atmosférica en la noche. Si hay una cubierta de nubes sobre la Tierra, el vapor de agua en las nubes absorbe parte de la radiación infrarroja emitida por la Tierra y la remite de regreso a la superficie. En consecuencia, los niveles de temperatura en la superficie permanecen moderados. En ausencia de esta cubierta de nubes, queda muy poco en el camino para evitar que escape esta radiación al espacio; por tanto, la temperatura disminuye más en una noche clara que en una llena de nubes.

Mientras un objeto radia energía a una rapidez dada por la ecuación 19.21, también absorbe radiación electromagnética de los alrededores, que consisten de otros objetos que radian energía. Si el último proceso no ocurre, un objeto al final radiaría toda su energía y su temperatura alcanzaría el cero absoluto. Si un objeto, está a una temperatura T y sus



alrededores están a una temperatura promedio T_0 , la rapidez neta de energía ganada o perdida por el objeto como resultado de la radiación es

$$P_{\text{neto}} = \sigma A \epsilon (T^4 - T_0^4) \quad (19.22)$$

Cuando un objeto está en equilibrio con sus alrededores, radia y absorbe energía a la misma rapidez y su temperatura permanece constante. Cuando un objeto está más caliente que sus alrededores, radia más energía que la que absorbe y su temperatura disminuye.

Revisemos su viaje a la montaña en el “Imagine” de apertura. Su primera experiencia fue ver un letrero, “Precaución: el puente se congela antes de la superficie del camino”. Una contribución importante para este efecto es que una carretera en el suelo tiene energía transferida por el calor Q del suelo cálido debajo de la carretera. Un puente tiene aire frío debajo, por lo que no tiene esta fuente de energía. Otro factor es que la carretera del puente puede irradiar energía T_{ER} al aire desde las superficies superior e inferior, perdiendo energía interna E_{int} más rápidamente que una carretera en el suelo. Por tanto, el puente se enfría más rápido que la carretera y el agua se congela primero en el puente. Su siguiente pensamiento fue por qué el aire de la montaña es frío a pesar de que está más cerca del sol. El cambio en la distancia al Sol es minúsculo en comparación con la distancia al Sol; eso no tiene efecto. Imagine el aire moviéndose hacia la montaña desde el nivel del mar por convección T_{MT} . Como el aire es un conductor térmico deficiente, cuando una porción de aire se mueve desde un entorno de alta presión a nivel del mar a un entorno de presión más baja en la montaña, experimenta una expansión adiabática, $Q = 0$. Como se mencionó en la sección 19.5, una expansión adiabática causa la temperatura del aire para disminuir: aire frío a grandes altitudes.

Ahora, ¿por qué su comida en la montaña fue tan infructuosa? Los huevos no estaban bien cocidos. A una presión atmosférica más baja en la montaña, la transición de fase de agua a vapor tiene lugar a una temperatura más baja. Por tanto, cocinó sus huevos a una temperatura inferior a 100°C , y no se cocinaron completamente en el intervalo de tres minutos. En altitudes más altas, necesita hervir la comida por más tiempo. Las galletas cerca del borde de la bandeja para hornear estaban muy bien hechas. La bandeja para hornear es un objeto con una temperatura alta, por lo que irradia energía T_{ER} perpendicularmente lejos de su superficie. Si la bandeja para hornear tiene bordes levantados, esta dirección perpendicular desde los bordes es hacia las galletas cerca del borde. Por tanto, estas galletas reciben más energía por radiación que las que están cerca del centro de la bandeja para hornear, y se hornean más rápido, incluso posiblemente quemándose, mientras que las que están cerca del centro son perfectas. ¿Por qué cayó su pastel? La cocción a gran altura es un arte y requiere un ajuste cuidadoso de los ingredientes para lograr pasteles exitosos. Una consideración para hornear pasteles es nuevamente el reducido punto de ebullición del agua. Como resultado, cuando la masa del pastel se coloca en el horno, el agua se evapora más rápidamente que a nivel del mar. A medida que la masa demasiado seca se eleva, no puede formar “burbujas” de vapor que construyan la estructura celular regular que soporta el peso de la parte superior del pastel.

Después de despertarse a la mañana siguiente y salir a caminar, notó escarcha en los autos y buzones, pero solo en la parte superior de las superficies. Este efecto es una demostración de la ecuación 19.22. Las superficies laterales de los automóviles y buzones de correo están emitiendo energía T_{ER} horizontalmente. Estas superficies también absorben radiación T_{ER} de otros objetos circundantes: casas, árboles, otros automóviles, etc. Como resultado, la temperatura de las superficies laterales es relativamente alta y la escarcha se derrite. Por otro lado, las superficies orientadas hacia arriba en la parte superior de los automóviles y buzones de correo están irradiando energía T_{ER} hacia arriba, pero por encima de ellos está el cielo abierto. No hay objetos que irradien energía hacia abajo en las superficies superiores. Como resultado, las superficies superiores son más frías y la escarcha no se derrite tan pronto como en los lados.

Tenga en cuenta que todos estos efectos implican transferencias de energía como las que se analizan en este capítulo y especialmente en esta sección. El único efecto que no depende de la altitud es el de las galletas bien hechas cerca del borde de la bandeja para hornear. Hay muchos efectos térmicos a su alrededor: ¡busque otros!



La botella Dewar

La *botella Dewar*⁶ es un recipiente diseñado para minimizar las transferencias de energía por conducción, convección y radiación. Tal recipiente se usa para almacenar líquidos fríos o calientes durante largos periodos. (Una botella aislada, como un termo, es un equivalente casero común de una botella Dewar.) La construcción estándar (figura 19.18) consiste de un vaso de vidrio Pyrex de doble pared con paredes plateadas. El espacio entre las paredes se vacía para minimizar transferencia de energía por conducción y convección. Las superficies plateadas minimizan la transferencia de energía por radiación, porque la plata es un muy buen reflector y tiene muy baja emisividad. Una reducción adicional en pérdida de energía se obtiene al reducir el tamaño del cuello. Las botellas Dewar se usan comúnmente para almacenar nitrógeno líquido (punto de ebullición 77 K) y oxígeno líquido (punto de ebullición 90 K).

Para confinar helio líquido (punto de ebullición 4.2 K), que tiene un calor de vaporización muy bajo, con frecuencia es necesario usar un doble sistema Dewar en el que la botella Dewar, que contiene el líquido, se rodee con una segunda botella Dewar. El espacio entre las dos botellas se llena con nitrógeno líquido.

Diseños más nuevos de contenedores emplean “superaislamiento”, que consiste de muchas capas de material reflector separadas por fibra de vidrio. Todo este material está en un vacío y no se necesita nitrógeno líquido en este diseño.

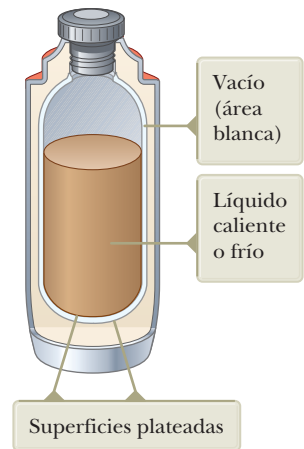


Figura 19.18 Vista transversal de una botella Dewar, que se usa para almacenar sustancias calientes o frías.

⁶Inventada por Sir James Dewar (1842-1923).

Resumen

Definiciones

La **energía interna** es una energía del sistema asociada con su temperatura y su estado físico (sólido, líquido, gas). La energía interna incluye energía cinética de traslación aleatoria, rotación y vibración de moléculas; energía potencial vibratoria dentro de las moléculas; y energía potencial entre moléculas.

Calor es el proceso de transferencia de energía a través de la frontera de un sistema, que resulta de una diferencia de temperatura entre el sistema y sus alrededores. El símbolo Q representa la cantidad de energía transferida por este proceso.

Una **caloría** es la cantidad de energía necesaria para elevar la temperatura de 1 g de agua de 14.5 °C a 15.5 °C.

La **capacidad térmica** C de cualquier muestra es la cantidad de energía necesaria para elevar la temperatura de la muestra en 1 °C.

El **calor específico** c de una sustancia es la capacidad térmica por unidad de masa:

$$c \equiv \frac{Q}{m \Delta T} \quad (19.3)$$

El **calor latente** de una sustancia se define como la razón de la energía de entrada al cambio en masa del material de fase superior:

$$L \equiv \frac{Q}{\Delta m} \quad (19.7)$$

Conceptos y principios

La energía Q que se requiere para cambiar la temperatura de una masa m de una sustancia en una cantidad ΔT es

$$Q = mc \Delta T \quad (19.4)$$

donde c es el calor específico de la sustancia.

La energía necesaria para cambiar la fase de una sustancia pura es

$$Q = L \Delta m \quad (19.8)$$

donde L es el calor latente de la sustancia, que depende de la naturaleza del cambio de fase y la sustancia, y Δm es el cambio en masa del material de fase superior.

El **trabajo** realizado sobre un gas a medida que su volumen cambia de algún valor inicial V_i a algún valor final V_f es

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} P dV \quad (19.10)$$

donde P es la presión del gas, que puede variar durante el proceso. Para evaluar W , el proceso debe estar completamente especificado; es decir, P y V se deben conocer durante cada etapa. El trabajo efectuado depende de la trayectoria que se sigue entre los estados inicial y final.

continúa



La **primera ley de la termodinámica** es una reducción específica de la ecuación de conservación de la energía (ecuación 8.2) y establece que, cuando un sistema experimenta un cambio de un estado a otro, el cambio en su energía interna es

$$\Delta E_{\text{int}} = Q + W \quad (19.11)$$

donde Q es la energía transferida al sistema por calor y W es el trabajo realizado sobre el sistema. Aunque Q y W dependen de la trayectoria tomada del estado inicial al estado final, la cantidad ΔE_{int} no depende de la trayectoria.

En un **proceso cíclico** (uno que se origina y termina en el mismo estado), $\Delta E_{\text{int}} = 0$ y por tanto $Q = -W$. Es decir, la energía transferida al sistema por calor es igual al negativo del trabajo realizado sobre el sistema durante el proceso.

En un **proceso adiabático** no se transfiere energía por calor entre el sistema y sus alrededores ($Q = 0$). En este caso, la primera ley da $\Delta E_{\text{int}} = W$.

Un **proceso isotérmico** es el que ocurre a temperatura constante. El trabajo efectuado sobre un gas ideal durante un proceso isotérmico es

$$W = nRT \ln \left(\frac{V_i}{V_f} \right) \quad (19.12)$$

Un **proceso isobárico** es el que ocurre a presión constante. El trabajo efectuado sobre un gas en tal proceso es $W = -P(V_f - V_i)$.

Un **proceso isovolumétrico** es el que sucede a volumen constante. En tal proceso no se realiza trabajo, así $\Delta E_{\text{int}} = Q$.

La **conducción** se puede ver como un intercambio de energía cinética entre moléculas o electrones que colisionan. La rapidez de transferencia de energía por conducción a través de una placa de área A es

$$P = kA \left| \frac{dT}{dx} \right| \quad (19.17)$$


donde k es la **conductividad térmica** del material del que está hecho la placa y $|dT/dx|$ es el **gradiente de temperatura**.

En la **convección** una sustancia caliente transfiere energía de una ubicación a otra.

Todos los objetos emiten **radiación térmica**, en la forma de ondas electromagnéticas, a la rapidez

$$P = \sigma A \epsilon T^4 \quad (19.21)$$

Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN**.
From Cengage

1. Su equipo ha sido contratado por un importante constructor que está diseñando casas simples para un nuevo fraccionamiento. Él le pide que calcule la cantidad de gas natural que se requerirá para calentar cada casa durante los meses de invierno. La figura TP19.1 muestra la casa en la que está trabajando actualmente. La conductividad térmica promedio de las paredes (incluidas las ventanas) y el techo de la casa representada en la figura es $0.480 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$, y su espesor promedio es de 21.0 cm . El calor de la combustión (es decir, la energía suministrada por metro cúbico) de gas natural es $3.89 \times 10^7 \text{ J/m}^3$. (a) ¿Cuántos metros cúbicos de gas se deben quemar cada día para mantener una temperatura interior de $25.0 \text{ }^\circ\text{C}$ en esta casa si la temperatura exterior es de $0.0 \text{ }^\circ\text{C}$? Ignore la radiación y la energía transferida por calor a través

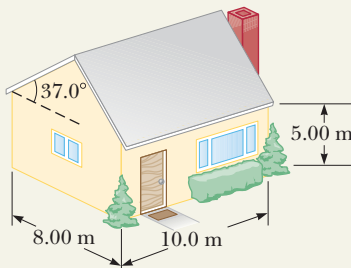


Figura TP19.1

del suelo. (b) ¿Cómo se verá afectada la respuesta al inciso (a) (aumentar o disminuir las necesidades de gas) mediante la inclusión de (i) conducción térmica a través del piso; (ii) radiación incidente en el techo, paredes y ventanas durante el día; (iii) operación de electrodomésticos, computadoras, sistemas

de entretenimiento; y (iv) fugas de aire a través de grietas alrededor de puertas y ventanas?

2. **ACTIVIDAD** Considere un objeto esférico de radio r sin atmósfera a una distancia d del Sol. Supongamos que su emisividad es $\epsilon = 1$ para todo tipo de ondas electromagnéticas y que su temperatura es uniforme sobre su superficie. A la distancia de la Tierra R del Sol, la intensidad de la radiación solar es $I_s = 1370 \text{ W/m}^2$. Esta intensidad varía en $1/d^2$ para distancias distintas de R . Un objeto esférico típico absorberá 70.0% de la radiación solar sobre su sección transversal circular πr^2 . (El objeto reflejará aproximadamente 30.0% de la radiación incidente, el objeto parece circular cuando se ve desde el Sol). Emitirá principalmente radiación infrarroja de toda su superficie $4\pi r^2$. (a) Demuestre que la temperatura de la superficie de equilibrio de un objeto a una distancia d del Sol es

$$T = \left[\frac{(0.700) I_s}{4\sigma} \left(\frac{R}{d} \right)^2 \right]^{1/4} = (255 \text{ K}) \sqrt{\frac{R}{d}}$$

(b) Use la ecuación en el inciso (a) para determinar una temperatura superficial teórica para los ocho planetas más el planeta enano Plutón, usando la media distancia del Sol dada en la tabla 13.2. También incluya el planeta enano Ceres, a una distancia de $d = 4.14 \times 10^{11} \text{ m}$ del Sol, para un total de diez objetos en nuestro sistema solar. (c) Haga una gráfica de barras de las temperaturas encontradas en el inciso (c). (d) Agregue a su gráfica de barras las temperaturas superficiales medidas y estimadas, en kelvins, según lo provisto por el Instituto Lunar y Planetario, que se

muestran en la tabla adjunta. (e) Observe primero a nuestro propio planeta, la Tierra. ¿Existe algún significado, en términos de vida en este planeta, para el hecho de que la temperatura teórica esté por debajo del punto de congelación del agua, mientras que la temperatura medida está por encima de ella? (f) La temperatura real de la Tierra se eleva por la absorción atmosférica de la radiación infrarroja emitida desde la superficie. Este efecto a veces se llama efecto invernadero. Considere los objetos con las atmósferas más delgadas: Mercurio, Ceres y Plutón. ¿Qué nota sobre la comparación de temperaturas teóricas y medidas para estos planetas? (g) Considere los gigantes gaseosos: Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno. Estos planetas no tienen superficie sólida; los datos de temperatura se proporcionan para un punto en la atmósfera donde la presión es la misma que en el nivel del mar en la Tierra. ¿Qué nota sobre la comparación de temperaturas teóricas y medidas para estos planetas? (h) La discrepancia más clara entre las temperaturas teóricas y medidas en su gráfico es para Venus. ¿Por qué la temperatura medida es mucho más alta que la tempera-

tura teórica? (i) ¿Qué puede concluir sobre la atmósfera de Marte a partir de su gráfico?

Objeto	Temperatura superficial (K) (del Instituto Lunar y Planetario)
Mercurio	440
Venus	741
Tierra Marte	288
Ceres	244
Júpiter	173
Saturno	165
Urano	134
Neptuno	77
Plutón	70
	40

Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage

SECCIÓN 19.1 Calor y energía interna

- BIO** 1. Una mujer de 55.0 kg ingiere una dona de mermelada de 540 Calorías (540 kcal) en el desayuno. (a) ¿Cuántos joules de energía son equivalentes a una dona de mermelada? (b) ¿Cuántos escalones debe subir la mujer en una escalera muy alta para cambiar la energía potencial gravitacional del sistema mujer-Tierra, en un valor equivalente a la energía alimenticia en una dona de mermelada? Suponga que la altura de un solo escalón es 15.0 cm. (c) Si el cuerpo humano sólo es 25% eficiente en convertir la energía potencial química a energía mecánica, ¿cuántos escalones debe subir la mujer para compensar su desayuno?

SECCIÓN 19.2 Calor específico y calorimetría

2. La cascada más alta en el mundo se llama Salto Ángel, en Venezuela. Su más elevada caída tiene una altura de 807 m. Si el agua en lo alto de la cascada está a 15.0 °C, ¿cuál es la máxima temperatura del agua en el fondo de la caída? Suponga que toda la energía cinética del agua conforme alcanza el fondo se invierte en elevar su temperatura.
3. Una combinación de 0.250 kg de agua a 20.0 °C, 0.400 kg de aluminio a 26.0 °C y 0.100 kg de cobre a 100 °C se mezcla en un contenedor aislado y se les permite llegar a equilibrio térmico. Ignore cualquier transferencia de energía hacia o desde el contenedor. ¿Cuál es la temperatura final de la mezcla?
- T** 4. La temperatura de una barra de plata se eleva 10.0 °C cuando absorbe 1.23 kJ de energía por calor. La masa de la barra es 525 g. A partir de estos datos, determine el calor específico de la plata.

- CE** 5. Está trabajando en su cocina preparando el almuerzo para su familia. Usted ha decidido hacer sándwiches de ensalada de huevo y está hirviendo seis huevos, cada uno con una masa de 55.5 g, en 0.750 L de agua a 100 °C. Quiere sacar todos los huevos del agua hirviendo y colocarlos inmediata-

mente en 23.0 °C de agua para enfriarlos a una temperatura confortable para sostenerlos y pelarlos. Decide que desea que la mezcla del agua y los huevos alcance una temperatura de equilibrio de 40.0 °C. Al explicarle esto a un miembro de la familia, ella lo reta a determinar exactamente la cantidad de agua a 23.0 °C que necesita para alcanzar la temperatura de equilibrio deseada. ¿El calor específico promedio de un huevo sobre el rango de temperatura esperado es $3.27 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot ^\circ\text{C}$.

- S** 6. Si agua de masa m_h y temperatura T_h se vierte en una taza de aluminio de masa m_{Al} que contiene agua de masa m_c a T_c , donde $T_h > T_c$, ¿cuál es la temperatura de equilibrio del sistema?
- CIC** 7. Un calorímetro de aluminio, con una masa de 100 g, contiene 250 g de agua. El calorímetro y el agua están en equilibrio térmico a 10.0 °C. Dos bloques metálicos se colocan en el agua. Uno es un trozo de cobre de 50.0 g a 80.0 °C. El otro tiene una masa de 70.0 g y originalmente está a una temperatura de 100 °C. Todo el sistema se estabiliza a una temperatura final de 20.0 °C. (a) Determine el calor específico de la muestra desconocida. (b) Con los datos de la tabla 19.1, ¿puede hacer una identificación positiva del material desconocido? ¿Puede identificar un material posible? (c) Explique sus respuestas al inciso (b).
- CIC** 8. Un taladro eléctrico, con una broca de acero de masa $m = 27.0 \text{ g}$ y 0.635 cm de diámetro, se usa para taladrar un bloque cúbico de acero de masa $M = 240 \text{ g}$. Suponga que el acero tiene las mismas propiedades que el hierro. Puede modelar que el proceso de corte ocurre en un punto sobre la circunferencia de la broca. Este punto se mueve en una hélice con rapidez tangencial constante de 40.0 m/s y ejerce una fuerza de magnitud constante de 3.20 N sobre el bloque. Como se muestra en la figura P19.8 (página 528), un surco en la broca lleva las virutas a la parte superior del bloque, donde forman una pila alrededor del orificio. El taladro gira y actúa sobre el bloque durante un intervalo de tiempo de 15.0 s. Suponga que este intervalo es lo suficientemente largo para conducción dentro del acero para llevarlo por completo a una temperatura uniforme. Además, suponga que los objetos de acero



pierden una cantidad despreciable de energía por conducción, convección y radiación a sus alrededores. (a) Suponga que la broca está afilada y corta tres cuartos del camino a través del bloque durante 15.0 s. Encuentre el cambio de temperatura de toda la cantidad de acero. (b) **¿Qué pasaría si?** Ahora suponga que la broca está mellada y sólo corta un octavo del camino a través del bloque durante 15.0 s. Identifique el cambio de temperatura de toda la cantidad de acero en este caso. (c) **¿Qué fragmentos de información, si los hay, no son necesarios para la solución?** Explique.

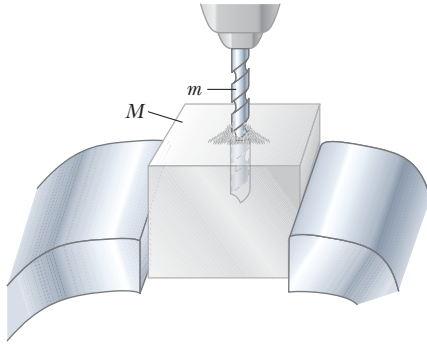


Figura P19.8

9. Una moneda de cobre de 3.00 g a 25.0 °C cae 50.0 m al suelo. (a) Si supone que 60.0% del cambio en energía potencial del sistema moneda-Tierra participa en el aumento de energía interna de la moneda, determine la temperatura final de ésta. (b) **¿Qué pasaría si?** ¿El resultado depende de la masa de la moneda? Explique.

SECCIÓN 19.3 Calor latente

10. **¿Cuánta energía se requiere para cambiar un cubo de hielo de 40.0 g de hielo a -10.0 °C a vapor a 11 °C?**

11. Un esquiador a campo traviesa de 75.0 kg se mueve sobre nieve, como lo ilustra la figura P19.11. El coeficiente de fricción entre los esquís y la nieve es de 0.200. Suponga que toda la nieve bajo sus esquís está a 0 °C y que toda la energía interna generada por fricción se adiciona a la nieve, que se pega a sus esquís hasta que se funde. **¿Qué distancia deberá esquiarse para fundir 1.00 kg de nieve?**



Figura P19.22

12. Una bala de plomo de 3.00 g a 30.0 °C se dispara con una rapidez de 240 m/s en un gran bloque de hielo a 0 °C, en donde queda incrustada. **¿Qué cantidad de hielo se derrite?**
13. En un recipiente aislado 250 g de hielo a 0 °C se agregan a 600 g de agua a 18.0 °C. (a) **¿Cuál es la temperatura final del sistema?** (b) **¿Cuánto hielo permanece cuando el sistema alcanza el equilibrio?**
14. Un automóvil tiene una masa de 1 500 kg, y sus frenos de aluminio tienen una masa global de 6.00 kg. (a) Suponga que toda la energía mecánica que se transforma en energía interna cuando el auto se detiene se deposita en los frenos, y que no se transfiere energía afuera de los frenos por calor. Los frenos originalmente están a 20.0 °C. **¿Cuántas veces se**

puede detener el automóvil desde 25.0 m/s antes de que los frenos comiencen a fundirse? (b) Identifique algunos efectos ignorados en el inciso (a) que son importantes en una valoración más realista del calentamiento de los frenos.

SECCIÓN 19.4 Trabajo y calor en procesos termodinámicos

15. Un mol de un gas ideal se calienta lentamente de modo que va del estado $PV(P_i, V_i)$ al $(3P_i, 3V_i)$, en tal forma que la presión del gas es directamente proporcional al volumen. (a) **¿Cuánto trabajo se efectúa sobre el gas en este proceso?** (b) **¿Cómo se relaciona la temperatura del gas con su volumen durante este proceso?**
16. (a) Determine el trabajo realizado sobre un gas que se expande de i a f , como se indica en la figura P19.16. (b) **¿Qué pasaría si?** **¿Cuánto trabajo se efectúa sobre el gas si se comprime de f a i a lo largo de la misma trayectoria?**

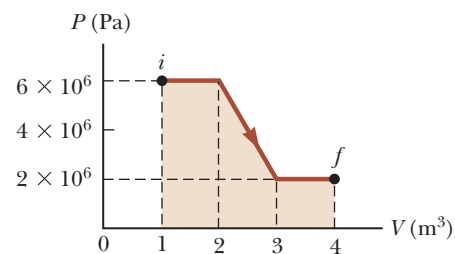


Figura P19.16

SECCIÓN 19.5 Primera ley de la termodinámica

17. Un sistema termodinámico experimenta un proceso donde su energía interna disminuye 500 J. Durante el mismo intervalo de tiempo, se efectúa un trabajo de 220 J sobre el sistema. Encuentre la energía transferida desde él por calor.
18. **¿Por qué es imposible la siguiente situación?** Un gas ideal experimenta un proceso con los siguientes parámetros: $Q = 10.0$ J, $W = 12.0$ J y $\Delta T = -2.00$ °C.
19. Una muestra de 2.00 moles de gas helio, inicialmente a 300 K y 0.400 atm, se comprime isotérmicamente a 1.20 atm. Si nota que el helio se comporta como un gas ideal, encuentre (a) el volumen final del gas, (b) el trabajo realizado sobre el gas y (c) la energía transferida por calor.
20. (a) **¿Cuánto trabajo se realiza sobre el vapor cuando 1.00 mol de agua a 100 °C hierve y se convierte en 1.00 mol de vapor a 100 °C a 1.00 atm de presión?** Suponga que el vapor se comporta como un gas ideal. (b) Determine el cambio en energía interna del sistema del agua y vapor a medida que el agua se vaporiza.
21. Un bloque de aluminio de 1.00 kg se calienta a presión atmosférica de modo que su temperatura aumenta de 22.0 °C a 40.0 °C. Encuentre (a) el trabajo realizado sobre el aluminio, (b) la energía agregada a él por calor y (c) el cambio en su energía interna.
22. En la figura P19.22, el cambio en energía interna de un gas que se lleva de A a C a lo largo de la trayectoria azul es +800 J. El trabajo efectuado sobre el gas a lo largo de la trayectoria roja ABC es -500 J. (a) **¿Cuánta energía se debe agregar al sistema por calor a medida que va de A a B a C?** (b) Si la presión en el punto A es cinco veces la del punto C, **¿cuál es el trabajo efectuado sobre el sistema al ir de C a D?** (c) **¿Cuál es la ener-**

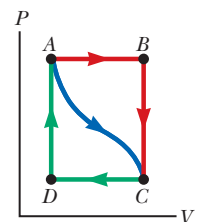


Figura P19.22

gía que se intercambia con los alrededores por calor a medida que el gas va de C a A a lo largo de la trayectoria verde? (d) Si el cambio en energía interna al ir del punto D al punto A es $+500$ J, ¿cuánta energía se debe agregar al sistema por calor a medida que va del punto C al punto D ?

SECCIÓN 19.6 Mecanismos de transferencia de energía en procesos térmicos

- 23.** Un estudiante intenta decidir qué vestir. Su recámara está a 20.0 °C. La temperatura de su piel es de 35.0 °C. El área de su piel expuesta es de 1.50 m². Hay personas en el planeta que tienen piel que es oscura en el infrarrojo, con emisividad aproximada de 0.900 . Encuentre la pérdida de energía neta de su cuerpo por radiación en 10.0 min.
- 24.** Una placa de concreto tiene 12.0 cm de espesor y un área de 5.00 m². Bobinas de calentamiento eléctrico se instalan bajo la placa para derretir el hielo sobre la superficie en los meses de invierno. ¿Qué potencia mínima debe proporcionarse a las bobinas para mantener una diferencia de temperatura de 20.0 °C entre el fondo de la placa y su superficie? Suponga que toda la energía transferida es a través de la placa.
- 25.** Dos focos tienen filamentos cilíndricos mucho más grandes en longitud que en diámetro. Los focos evacuados son idénticos excepto que uno opera a una temperatura de filamento de $2\,100$ °C y el otro opera a $2\,000$ °C. (a) Encuentre la razón de la potencia emitida por el foco más caliente a la emitida por el foco más frío. (b) Con los focos operando a las mismas respectivas temperaturas, el foco más frío es alterado haciendo más grueso su filamento para que así emita la misma potencia que el foco más caliente. ¿En qué factor debe aumentarse el radio de este filamento?
- 26.** El cuerpo humano debe mantener su temperatura central dentro de una angosta franja alrededor de 37 °C. Los procesos metabólicos, especialmente el esfuerzo muscular, convierten energía química en energía interna profunda en el interior. Desde éste, la energía debe fluir a la piel o pulmones para ser expulsada al medio ambiente. Durante ejercicio moderado, un hombre de 80 kg puede metabolizar energía alimenticia a una rapidez de 300 kcal/h, al hacer 60 kcal/h de trabajo mecánico, y liberando las restantes 240 kcal/h de energía por calor. La mayor parte de la energía es llevada desde el interior del cuerpo a la piel y forzada por convección (como diría un fontanero), por lo cual la sangre es calentada en el interior y entonces es enfriada en la piel, que es pocos grados más fría que el núcleo del cuerpo. Sin flujo de sangre, el tejido vivo es un buen aislante térmico, con una conductividad térmica de 0.210 W/m · °C. Demuestre que el flujo sanguíneo es esencial para enfriar el cuerpo del hombre, calculando la rapidez de conducción de energía en kcal/h a través de la capa de tejido bajo su piel. Suponga que su área es 1.40 m², su espesor es 2.50 cm y es mantenida a 37.0 °C en un lado y a 34.0 °C en el otro lado.
- 27.** (a) Calcule el valor R de una ventana térmica fabricada de dos paneles sencillos de vidrio con 0.125 pulgadas de espesor cada uno y separados por un espacio de aire de 0.250 pulgadas. (b) ¿En qué factor se reduce la transferencia de energía por calor a través de la ventana, si usa una ventana térmica en lugar de la ventana de panel sencillo? Incluya la contribución interna y externa de las capas de aire estancado.
- 28.** Para pruebas bacteriológicas de los suministros de agua y en las clínicas médicas, las muestras se deben incubar rutinariamente durante 24 h a 37 °C. El voluntario del Cuerpo de Paz e ingeniero del MIT, Amy Smith, inventó un incubador de bajo costo y bajo mantenimiento. El incubador consiste en una caja aislada con espuma que contiene un material ceroso que se funde a 37.0 °C, intercalado entre tubos, platos o botellas

que contienen las muestras de prueba y medio de cultivo (alimento para bacterias). Fuera de la caja, el material ceroso primero se funde mediante una estufa o colector solar. Luego el material ceroso se pone en la caja para mantener calientes las muestras de prueba, mientras se solidifica. El calor de fusión del cambio de fase del material es 205 kJ/kg. Modele el aislamiento como un panel con 0.490 m² de área superficial, 4.50 cm de espesor y 0.012 W/m · °C de conductividad. Suponga que la temperatura exterior es de 23.0 °C durante 12.0 h y 16.0 °C durante 12.0 h. (a) ¿Qué masa del material ceroso se requiere para realizar la prueba bacteriológica? (b) Explique por qué su cálculo puede efectuarse sin conocer la masa de las muestras de prueba o del aislante.

PROBLEMAS ADICIONALES

29. Un gas en un contenedor está a una presión de 1.50 atm con un volumen de 4.00 m³. ¿Cuál es el trabajo realizado sobre el gas (a) si se expande a presión constante a un volumen dos veces mayor que el inicial, y (b) si se comprime a presión constante a un cuarto de su volumen inicial?

30. Está leyendo su libro de texto sobre la mitología griega y encuentra una historia sobre Dédalo e Ícaro. Dédalo construyó dos juegos de alas con plumas y cera, una para él y otra para su hijo Ícaro. El padre y el hijo planearon usar las alas para escapar de su encarcelamiento en la isla de Creta. El padre advirtió a Ícaro que no volara demasiado alto porque la proximidad al Sol podría derretir la cera en sus alas. Por supuesto, Ícaro fue alcanzado por la emoción de volar y voló muy cerca del Sol. Sus alas se derritieron y él cayó al mar. Al leer esta información, piensa en su clase de física, donde su instructor acaba de hablar sobre la temperatura de equilibrio de un objeto sin atmósfera a una distancia dada del Sol. Busca en sus notas y encuentra la siguiente ecuación para esta temperatura de equilibrio:

$$T = (255 \text{ K}) \sqrt{\frac{R}{r}}$$

donde R es la distancia del Sol a la Tierra, r es la distancia del Sol al objeto, y T está en Kelvin. Esto plantea un acertijo en su mente: si Ícaro voló tan cerca del Sol que la cera de sus alas se derritió, ¿todavía habría aire en esa ubicación para permitirle volar a esa posición? Tome el punto de fusión de la cera como 65 °C.

31. Usted tiene un interés particular en los motores de automóviles, por lo que ha asegurado un puesto de cooperación en una compañía de automóviles mientras asiste a la escuela. Su supervisora lo está ayudando a aprender sobre el funcionamiento de un motor de combustión interna. Ella le asigna la siguiente tarea, relacionada con la simulación de un nuevo motor que está diseñando. Un gas, comenzando en $P_A = 1.00$ atm, $V_A = 0.500$ L, y $T_A = 27.0$ °C, se comprime desde el punto A en el diagrama PV en la figura P19.31 (página 530) hasta el punto B . Esto representa la carrera de compresión en un motor de gasolina de cuatro tiempos. En ese punto, se entregan 132 J de energía al gas a volumen constante, llevando el gas al punto C . Esto representa la transformación de la energía potencial en la gasolina en energía interna cuando se enciende la bujía. Su supervisora le dice que la energía interna de un gas es proporcional a la temperatura (como se verá en el capítulo 20), la energía interna del gas en el punto A es 200 J, y ella quiere saber cuál es la temperatura del gas en el punto C .

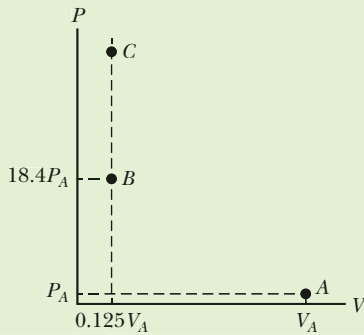


Figura P19.31

32. CE Está trabajando en un laboratorio de materia condensada para su proyecto de graduación. Varios de los proyectos en curso utilizan helio líquido, que está contenido en un recipiente con aislamiento térmico que puede contener hasta un máximo de $V_{máx} = 240$ L del líquido en $T_c = 4.20$ K. Debido a que ya se ha utilizado parte del helio líquido, alguien le pide que verifique si hay suficiente para el día siguiente, en el que cuatro grupos experimentales diferentes lo necesitarán. No está seguro de cómo medir la cantidad de líquido restante, por lo que inserta una varilla de aluminio de longitud $L = 2.00$ m y con un área de sección transversal de $A = 2.50$ cm² en el recipiente. Al ver qué parte del extremo inferior de la varilla está helada al extraerla, puede estimar la profundidad del helio líquido. Sin embargo, después de insertar la varilla, uno de los experimentadores lo llama para realizar una tarea y se olvida de la varilla, dejándola en el helio líquido hasta la mañana siguiente. ¿Cuánto helio líquido está disponible para los experimentos del día siguiente? (El aluminio tiene una conductividad térmica de $3\,100$ W / m · K a 4.20 K; ignore su variación de temperatura. La densidad del helio líquido es de 125 kg/m³.) Suponga que el helio gaseoso puede escapar de la parte superior del recipiente.

33. Un *calorímetro de flujo* es un aparato que se usa para medir el calor específico de un líquido. La técnica de calorimetría de flujo involucra la medición de la diferencia de temperatura entre los puntos de entrada y salida de una corriente de líquido que circula mientras se agrega energía por calor a una rapidez conocida. Un líquido de densidad 900 kg/m³ fluye a través del calorímetro con una rapidez de flujo volumétrico de 2.00 L/min. En estado estacionario, se establece una diferencia de temperatura de 3.50 °C entre los puntos de entrada y salida cuando la energía se proporciona a una rapidez de 200 W. ¿Cuál es el calor específico del líquido?

34. S Un *calorímetro de flujo* es un aparato que se usa para medir el calor específico de un líquido. La técnica de calorimetría de flujo involucra la medición de la diferencia de temperatura entre los puntos de entrada y salida de una corriente de líquido que circula mientras se agrega energía por calor a una rapidez conocida. Un líquido de densidad ρ fluye a través del calorímetro con una rapidez de flujo volumétrico R . En estado estacionario, se establece una diferencia de temperatura ΔT entre los puntos de entrada y salida cuando se proporciona energía a una rapidez P . ¿Cuál es el calor específico del líquido?

35. AMT **Problema de repaso.** Después de una colisión entre una gran nave espacial y un asteroide, un disco de cobre de 28.0 m de radio y 1.20 m de espesor, a una temperatura de 850 °C, flota en el espacio, girando en torno a su eje de simetría con una rapidez angular de 250 rad/s. Mientras el disco radia luz

infrarroja, su temperatura cae a 20.0 °C. Sobre el disco no actúa momento de torsión externo. (a) Encuentre el cambio de energía cinética del disco. (b) Determine el cambio de energía interna del disco. (c) Obtenga la cantidad de energía que radia.

36. AMT GP **Problema de repaso.** Dos balas de plomo, una de masa 12.0 g con una rapidez de 300 m/s se mueve hacia la derecha, y la otra de masa 8.00 g con una rapidez de 400 m/s se desplaza hacia la izquierda, colisionan de frente y permanecen juntas. Ambas balas están originalmente a 30.0 °C. Suponga que el cambio de energía cinética del sistema aparece totalmente como energía interna aumentada. Interesa determinar la temperatura y fase de las balas después de la colisión. (a) ¿Cuáles son dos modelos de análisis apropiados para el sistema de dos balas, durante el intervalo de tiempo desde antes hasta después de la colisión? (b) De uno de esos modelos, ¿cuál es la rapidez de las balas combinadas después de la colisión? (c) ¿Cuánta de la energía cinética inicial se ha transformado a energía interna en el sistema después de la colisión? (d) ¿Se funde todo el plomo debido a la colisión? (e) ¿Cuál es la temperatura de las balas combinadas después de la colisión? (f) ¿Cuál es la fase de las balas combinadas después de la colisión?

37. CIC Una bandeja para cubos de hielo se llena con 75.0 g de agua. Después de que la bandeja llena logra una temperatura de equilibrio de 20.0 °C, se coloca en un congelador a -8.00 °C para elaborar cubos de hielo. (a) Describa los procesos que ocurren conforme la energía se elimina del agua para hacer hielo. (b) Calcule la energía que debe ser removida del agua para elaborar cubos de hielo a -8.00 °C.

38. BIO La rapidez con la que una persona en reposo convierte energía alimenticia se llama *tasa metabólica basal* (TMB). Suponga que la energía interna restante deja el cuerpo de la persona por radiación y convección de aire seco. Cuando usted trota, la mayor parte de la energía alimenticia que quema por arriba de su TMB se convierte en energía interna que elevaría su temperatura corporal si no fuera eliminada. Suponga que la evaporación por transpiración es el mecanismo para eliminar esta energía. Suponga que una persona está trotando para la “máxima quema de grasa” convirtiendo energía alimenticia a la rapidez de 400 kcal/h por arriba de su TMB, y expulsando energía por trabajo a la rapidez de 60.0 W. Suponga que el calor de evaporación del agua a la temperatura corporal es igual a su calor de vaporización a 100 °C. (a) Determine la rapidez por hora a la cual el agua debe evaporarse de su piel. (b) Cuando usted metaboliza grasa, los átomos de hidrógeno en la molécula de grasa se transfieren al oxígeno para formar agua. Suponga que el metabolismo de 1.00 g de grasa genera 9.00 kcal de energía y produce 1.00 g de agua. ¿Qué fracción del agua que el trotador necesita es proporcionada por el metabolismo de grasas?

39. Una placa de hierro se mantiene contra una rueda de hierro tal que una fuerza de fricción cinética de 50.0 N actúa entre los dos pedazos de metal. La rapidez relativa a la cual deslizan entre sí es de 40.0 m/s. (a) Calcule la rapidez con la que se convierte energía mecánica a energía interna. (b) La placa y la rueda tienen, cada uno, una masa de 5.00 kg, y cada uno recibe el 50% de la energía interna. Si el sistema opera, como se ha descrito, durante 10.0 s y a cada objeto le es permitido lograr una temperatura interna uniforme, ¿cuál es el incremento de temperatura resultante?

40. C/C S Un mol de un gas ideal está contenido en un cilindro con un pistón móvil. La presión, volumen y temperatura iniciales son P_i , V_i y T_i , respectivamente. Encuentre el trabajo realizado sobre el gas en los siguientes procesos. En términos operativos, describa cómo llevar a cabo cada proceso y en un diagrama PV muestre cada proceso. (a) Una compresión iso-

bárica con volumen final a la mitad del volumen inicial, (b) una compresión isotérmica con presión final a cuatro veces la presión inicial, (c) un proceso isovolumétrico con presión final a tres veces la presión inicial.

- 41. C/C** Durante periodos de gran actividad, el Sol tiene más manchas solares que de costumbre. Las manchas solares son más frías que el resto de la capa luminosa de la atmósfera del Sol (la fotosfera). Paradójicamente, la potencia de salida total del Sol activo no es menor que el promedio sino que es la misma o ligeramente mayor que el promedio. Elabore los detalles del siguiente modelo imperfecto de este fenómeno. Considere una mancha de la fotosfera con un área de $5.10 \times 10^{14} \text{ m}^2$. Su emisividad es 0.965. (a) Encuentre la potencia que radia si su temperatura es uniformemente de 5 800 K, correspondiente al Sol quieto. (b) Para representar una mancha solar, suponga que 10.0% del área del parche está a 4 800 K y que el otro 90.0% está a 5 890 K. Encuentre la potencia de salida de la mancha. (c) Establezca cómo la respuesta al inciso (b) se compara con la respuesta al inciso (a). (d) Obtenga la temperatura promedio de la mancha. Note que esta temperatura más fría resulta en una alta presión de salida.
- 42.** ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Un grupo de excursionistas se levanta a las 8:30 a.m. y utiliza una cocina solar que consiste de una superficie reflectora curva que concentra la luz solar sobre el objeto a calentar (figura P19.42). Durante el día, la máxima intensidad solar que llega a la superficie de la Tierra en la ubicación de la cocina es $I = 600 \text{ W/m}^2$. La cocina encara al Sol y tiene un diámetro de cara $d = 0.600 \text{ m}$. Suponga que una fracción f de 40.0% de la energía incidente se transfiere a 1.50 L de agua en un contenedor abierto, inicialmente a 20.0 °C. El agua llega al punto de ebullición, y los excursionistas disfrutan un café caliente en el desayuno antes de caminar diez millar y retornar al mediodía para la comida.



Figura P19.42

- 43.** Un recipiente de cocina sobre un quemador lento contiene 10.0 kg de agua y una masa desconocida de hielo en equilibrio a 0 °C en el tiempo $t = 0$. La temperatura de la mezcla se mide en varios tiempos y el resultado se grafica en la figura P19.43. Durante los primeros 50.0 minutos, la mezcla perma-

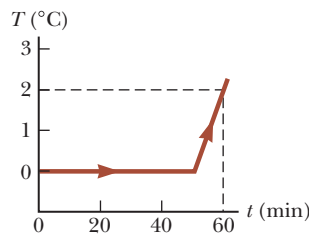


Figura P19.43

nece a 0 °C. De 50.0 min a 60.0 min, la temperatura aumenta a 2.00 °C. Si ignora la capacidad térmica del recipiente, determine la masa inicial del hielo.

- 44. C/C** Un estudiante mide los siguientes datos en un experimento de calorimetría diseñado para determinar el calor específico del aluminio:

Temperatura inicial de agua y calorímetro:	70 °C
Masa de agua:	0.400 kg
Masa del calorímetro:	0.040 kg
Calor específico del calorímetro:	0.63 kJ/kg×°C
Temperatura inicial del aluminio:	27.0 °C
Masa de aluminio:	0.200 kg
Temperatura final de mezcla:	66.3 °C

(a) Use estos datos para determinar el calor específico del aluminio. (b) Explique si su resultado está dentro del 15% del valor dado en la tabla 19.1.

PROBLEMAS ADICIONALES

- 45.** (a) El interior de un cilindro hueco se mantiene a una temperatura T_a mientras que el exterior está a una temperatura menor T_b (figura P19.45). La pared del cilindro tiene una conductividad térmica k . Si ignora los efectos de los extremos, demuestre que la rapidez de conducción de energía desde la superficie interior hasta la exterior en la dirección radial es

$$\frac{dQ}{dt} = 2\pi Lk \left[\frac{T_a - T_b}{\ln(b/a)} \right]$$

Sugerencia: El gradiente de temperatura es dT/dr . Una corriente de energía radial pasa a través de un cilindro concéntrico de área $2\pi rL$. (b) La sección de pasajeros de un jet comercial tiene la forma de un tubo cilíndrico con una longitud de 35.0 m y un radio interno de 2.50 m. Sus paredes están alineadas con un material aislante de 6.00 cm de espesor y con una conductividad térmica de $4.00 \times 10^{-5} \text{ cal/s} \cdot \text{cm} \cdot \text{°C}$. Un calentador debe mantener la temperatura interior a 25.0 °C mientras que la temperatura exterior es de -35.0 °C. ¿Qué potencia debe proporcionarse al calentador?

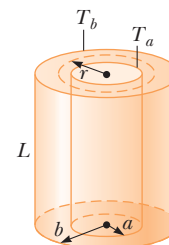


Figura P19.45

- 46. C/C** Un cascarón esférico tiene 3.00 cm de radio interior y 7.00 cm de radio exterior. Está hecho de material con conductividad térmica $k = 0.800 \text{ W/m} \cdot \text{°C}$. El interior se mantiene a 5 °C de temperatura y el exterior a 40 °C. Después de un intervalo de tiempo, el cascarón alcanza un estado estable en el que la temperatura en cada punto dentro de él se mantiene constante en el tiempo. (a) Explique por qué la rapidez de transfe-

rencia de energía P debe ser la misma a través de cada superficie esférica, de radio r , dentro del cascarón y debe satisfacer

$$\frac{dT}{dr} = \frac{P}{4\pi kr^2}$$

(b) A continuación, demuestre que

$$\int_5^{40} dT = \frac{P}{4\pi k} \int_{0.03}^{0.07} r^{-2} dr$$

donde T está en grados Celsius y r está en metros. (c) Encuentre la rapidez de transferencia de energía a través del cascarón. (d) Demuestre que

$$\int_5^T dT = 1.84 \int_{0.03}^r r^{-2} dr$$

donde T está en grados Celsius y r está en metros. (e) Obtenga la temperatura dentro del cascarón como una función del radio. (f) Encuentre la temperatura en $r = 5.00$ cm, a la mitad a través del cascarón.

47. Un estanque de agua a 0°C se cubre con una capa de hielo de 4.00 cm de grueso. Si la temperatura del aire permanece constante a -10.0°C , ¿qué intervalo de tiempo se requiere para que el espesor del hielo aumente a 8.00 cm? *Sugerencia:* Use la ecuación 19.18 en la forma

$$\frac{dQ}{dt} = kA \frac{\Delta T}{x}$$

y advierta que el incremento de energía dQ extraído del agua a través del espesor x de hielo es la cantidad requerida para congelar un espesor dx de hielo. Es decir, $dQ = L_f \rho A dx$, donde ρ es la densidad del hielo, A es el área y L_f es el calor latente de fusión.



Teoría cinética de los gases

20



IMAGINE Usted todavía está en el Club de física viaje de campamento en

Whitney Portal descrito al principio del capítulo 19. El plan de la noche es hacer una fogata y acurrucarse alrededor de ella revisando historias del Departamento de física. Usted está a cargo de la recolección de madera y de encender el fuego. Para colocar el fuego en el mejor lugar posible, usted necesita saber la dirección del viento. Como alguien le enseñó hace años, pone su dedo índice en la boca y luego lo sostiene verticalmente, sabiendo que el lado más frío de su dedo será la dirección en la que está llegando el viento. Su curso de física vuelve a empezar y dice: ¡espera un minuto! ¿por qué es ese lado del dedo frío el del viento? Mientras pensaba en una respuesta, se acerca y agarra un trozo de madera. Se raspa su dedo dolorosamente con éste y entra en la casa rodante para recibir tratamiento médico de su asesor del club. Pone algo de alcohol en la herida. A pesar de que usted sabe que el alcohol está a la misma temperatura que el resto del interior de la casa rodante, el alcohol se siente frío en el dedo. ¿podría la sensación de frío del alcohol estar relacionada con el frío que siente su dedo con el viento?, de su paseo para que pueda pasar un tiempo investigando estos misterios en línea.

CONEXIONES En el capítulo 18, discutimos las propiedades de un gas ideal mediante el uso de variables macroscópicas como presión, volumen y temperatura. Tales propiedades a gran escala pueden estar relacionadas con una descripción del gas en una escala microscópica, donde la materia se trata como una colección de un gran número de moléculas en lugar de una sola muestra macroscópica. Aplicar las leyes del movimiento de Newton de manera estadística a una colección de partículas proporciona una descripción razonable de los procesos termodinámicos. Para mantener las matemáticas relativamente simples, consideraremos principalmente el comportamiento de los gases porque las interacciones entre las moléculas son mucho más débiles que en los líquidos o en los sólidos. Comenzaremos relacionando la presión y la temperatura directamente con los detalles del movimiento molecular en una muestra de gas. Con base

Un dedo mojado se sostiene hacia arriba para probar la dirección del viento. ¿Por qué el dedo está frío en el lado del viento? (Joel Calheiros/Shutterstock)

- 20.1 Modelo molecular de un gas ideal
- 20.2 Calor específico molar de un gas ideal
- 20.3 Equipartición de la energía
- 20.4 Procesos adiabáticos para un gas ideal
- 20.5 Distribución de rapidez molecular



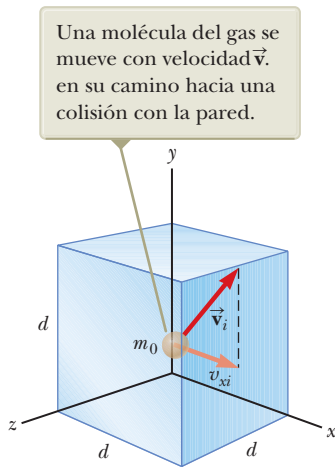


Figura 20.1 Una caja cúbica con lados de longitud d contiene un gas ideal.

en estos resultados, haremos predicciones de calores de gases específicos de los moles. Algunas de estas predicciones serán correctas y otras no. Extenderemos nuestro modelo para explicar aquellos valores que no son pronosticados correctamente por el modelo más simple. Finalmente, discutimos la distribución de velocidades moleculares en un gas y aplicamos los resultados a un líquido. Encontraremos que los conceptos discutidos en este capítulo son útiles en el futuro cuando analizamos una situación a escala microscópica, como, por ejemplo, el análisis de las características eléctricas de un gas de electrones en un cable conductor.

20.1 Modelo molecular de un gas ideal

En la sección 1.2 se presentaron varios tipos de modelos, uno de los cuales es el *modelo estructural*. Un **modelo estructural** es una construcción teórica diseñada para representar un sistema que no puede observarse directamente porque es muy grande o muy pequeño. Por ejemplo, sólo puede observarse el sistema solar desde adentro; no es posible viajar al exterior del sistema solar para mirar hacia atrás y ver cómo funciona. Este punto de vista restringido ha llevado a los modelos geocéntrico y heliocéntrico del sistema solar estudiados en la sección 13.4. El átomo de hidrógeno es un ejemplo de un sistema muy pequeño y difícil de observar directamente. Se han desarrollado diversos modelos estructurales de este sistema, como el *modelo de Bohr* (sección 41.3) y el *modelo cuántico* (sección 41.4). Una vez desarrollado un modelo estructural, se efectúan diversas predicciones para observaciones experimentales. Por ejemplo, el modelo geocéntrico del sistema solar hace predicciones de cómo el movimiento de Marte se observaría desde la Tierra. Resulta que esas predicciones no encajan con las observaciones reales. Cuando eso ocurre con un modelo estructural, éste debe ser modificado o reemplazado con otro modelo.

En este capítulo, consideraremos un modelo estructural para un gas ideal, con el objetivo de relacionar las mediciones macroscópicas del gas (presión, volumen, temperatura, etc.) con el comportamiento de sus componentes microscópicos: las moléculas. El modelo estructural que se desarrollará para un gas ideal se llama **teoría cinética**. Este modelo trata un gas ideal como un conjunto de moléculas con las siguientes propiedades:

1. Componentes físicas:

El gas consiste de un número de moléculas idénticas dentro de un recipiente cúbico con lados de longitud d (figura 20.1) El número de moléculas en el gas es grande, y la separación promedio entre ellas es grande comparada con sus dimensiones. Por tanto, las moléculas ocupan un volumen despreciable en el recipiente. Esta suposición es consistente con el modelo de gas ideal en donde se acepta que las moléculas son puntuales.

2. Comportamiento de los componentes:

- Las moléculas obedecen las leyes de movimiento de Newton, pero como un todo su movimiento es isotrópico: cualquier molécula se puede mover en cualquier dirección con cualquier rapidez.
- Las moléculas interactúan sólo mediante fuerzas de corto alcance durante colisiones elásticas. Esta suposición es consistente con el modelo de gas ideal, en el que las moléculas no ejercen entre sí fuerzas de largo alcance.
- Las moléculas tienen colisiones elásticas con las paredes.

No obstante que es frecuente ilustrar un gas ideal como constituido por átomos simples, el comportamiento de los gases moleculares se aproxima, a bajas presiones, al de los gases ideales. Por lo general, las rotaciones o vibraciones moleculares no tienen efecto sobre los movimientos que aquí se consideran.

Como primera aplicación de la teoría cinética, se relaciona la variable macroscópica de presión P con cantidades microscópicas. Considere un conjunto de N moléculas de un gas

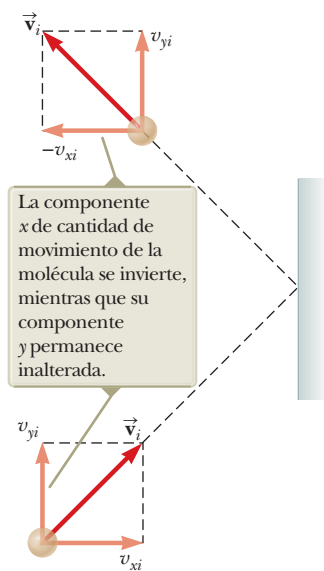


Figura 20.2 Una molécula tiene una colisión elástica con la pared del recipiente. En esta construcción se supone que la molécula se mueve en el plano xy .



ideal en un recipiente de volumen V . Como ya se indicó en la propiedad 1, el recipiente es un cubo con bordes de longitud d . Primero se concentra la atención en una de dichas moléculas de masa m_0 y se supone en movimiento tal que su componente de velocidad en la dirección x es v_{xi} , como en la figura 20.1. (Aquí, el subíndice se refiere a la i -ésima molécula en el conjunto, no a un valor inicial. En breve se combinarán los efectos de todas las moléculas.) La figura 20.2 muestra una molécula colisionando con la pared del contenedor. A medida que la molécula colisiona elásticamente con cualquier pared (propiedad 2(c) anterior), su componente de velocidad perpendicular a la pared se invierte porque la masa de ésta es mucho mayor que la masa de la molécula. La molécula se modela como un sistema no aislado para el cual el impulso de la pared causa un cambio en la cantidad de movimiento de la molécula. La componente de la cantidad de movimiento p_{xi} de la molécula es $m_0 v_{xi}$ antes de la colisión y $-m_0 v_{xi}$ después de la colisión, así que el cambio en la componente x de la cantidad de movimiento de la molécula es

$$\Delta p_{xi} = -m_0 v_{xi} - (m_0 v_{xi}) = -2m_0 v_{xi} \quad (20.1)$$

Del modelo de sistema no aislado se puede aplicar el teorema impulso-cantidad de movimiento (ecuaciones 9.11 y 9.13) a la molécula para obtener

$$\bar{F}_{i,\text{sobre molécula}} \Delta t_{\text{colisión}} = \Delta p_{xi} = -2m_0 v_{xi} \quad (20.2)$$

donde $\bar{F}_{i,\text{sobre molécula}}$ es la componente x de la fuerza promedio¹ que la pared ejerce sobre la molécula durante la colisión y ésta tiene una duración $\Delta t_{\text{colisión}}$. Para que la molécula tenga otra colisión con la misma pared después de esta primera colisión, debe viajar una distancia $2d$ en la dirección x (a través del recipiente y de regreso). Por tanto, el intervalo de tiempo entre dos colisiones con la misma pared es

$$\Delta t = \frac{2d}{v_{xi}} \quad (20.3)$$

La fuerza que causa el cambio en cantidad de movimiento de la molécula en la colisión con la pared se presenta sólo durante la colisión. Sin embargo, puede obtenerse la fuerza promedio a largo plazo para muchas travesías de la molécula dentro del cubo, y para esto se toma el promedio de la fuerza en la ecuación 20.2 durante el intervalo de tiempo para que la molécula se mueva a través del cubo y regrese, ecuación 20.3. El cambio promedio en cantidad de movimiento por viaje en el intervalo de tiempo para mucho viajes es el mismo que durante la breve duración de la colisión. Por tanto, la ecuación 20.2 se puede reescribir como

$$\bar{F}_i \Delta t = -2m_0 v_{xi} \quad (20.4)$$

donde \bar{F}_i es la componente de la fuerza promedio en el intervalo de tiempo para que la molécula se traslade a través del cubo y regrese. Exactamente ocurre una colisión en cada uno de tales intervalos, entonces este resultado también es la fuerza promedio a largo plazo sobre la molécula durante largos intervalos de tiempo que contienen cualquier número de múltiplos de Δt .

Las ecuaciones 20.3 y 20.4 permiten expresar la componente x de la fuerza promedio a largo plazo ejercida por la pared sobre la molécula como

$$\bar{F}_i = -\frac{2m_0 v_{xi}}{\Delta t} = -\frac{2m_0 v_{xi}^2}{2d} = -\frac{m_0 v_{xi}^2}{d} \quad (20.5)$$

¹ Para esta explicación se usa una barra sobre una variable para representar el valor promedio de la variable, como \bar{F} para la fuerza promedio, en lugar del subíndice "prom" que se usó anteriormente. Esta notación es para evitar confusiones porque ya se tienen algunos subíndices en las variables.

Ahora, por la tercera ley de Newton, la componente x de la fuerza promedio a largo plazo ejercida por la *molécula* sobre la *pared* es igual en magnitud y opuesta en dirección:

$$\bar{F}_{i,\text{sobre la pared}} = -\bar{F}_i = -\left(-\frac{m_0 v_{xi}^2}{d}\right) = \frac{m_0 v_{xi}^2}{d} \quad (20.6)$$

La fuerza promedio total \bar{F} ejercida por el gas sobre la pared se obtiene al sumar las fuerzas promedio ejercidas por las moléculas individuales. Al sumar términos tipo ecuación 20.6 para todas las moléculas resulta

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^N \frac{m_0 v_{xi}^2}{d} = \frac{m_0}{d} \sum_{i=1}^N v_{xi}^2 \quad (20.7)$$

donde se factorizó la longitud de la caja y la masa m_0 porque la propiedad 1 dice que todas las moléculas son iguales. Ahora se impone un aspecto adicional de la propiedad 1, que el número de moléculas es grande. Para un número pequeño de moléculas, la fuerza real sobre la pared variaría con el tiempo. Sería distinta de cero durante el breve intervalo de una colisión de la molécula contra la pared, y sería cero cuando ninguna molécula golpee la pared. Sin embargo, para un número muy grande de moléculas, como el número de Avogadro, estas variaciones en fuerza son suavizadas de manera que la fuerza promedio dada anteriormente es la misma en *cualquier* intervalo de tiempo. Por tanto, la fuerza *constante* F sobre la pared debida a las colisiones moleculares es

$$F = \frac{m_0}{d} \sum_{i=1}^N v_{xi}^2 \quad (20.8)$$

Para avanzar aún más, considere cómo expresar el valor promedio del cuadrado de la componente x de la velocidad para N moléculas. El promedio tradicional de un conjunto de valores es la suma de los valores sobre el número de valores

$$\overline{v_x^2} = \frac{\sum_{i=1}^N v_{xi}^2}{N} \rightarrow \sum_{i=1}^N v_{xi}^2 = N\overline{v_x^2} \quad (20.9)$$

El empleo de la ecuación 20.9 para sustituir la suma en la ecuación 20.8 da

$$F = \frac{m_0}{d} N\overline{v_x^2} \quad (20.10)$$

Ahora, otra vez considere una molécula con componentes de velocidad v_{xi} , v_{yi} y v_{zi} . El teorema de Pitágoras relaciona el cuadrado de la rapidez de la molécula con los cuadrados de las componentes de velocidad:

$$v_i^2 = v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2 \quad (20.11)$$

Así que, el valor promedio de v^2 para todas las moléculas en el recipiente se relaciona con los valores promedio de v_x^2 , v_y^2 y v_z^2 , de acuerdo con la expresión

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \quad (20.12)$$

Como el movimiento es isotrópico (propiedad 2(a) anterior), entonces los valores promedios $\overline{v_x^2}$, $\overline{v_y^2}$, y $\overline{v_z^2}$ son iguales entre sí. Al utilizar este hecho y la ecuación 20.12, se encuentra que

$$\overline{v^2} = 3\overline{v_x^2} \quad (20.13)$$

Por tanto, de la ecuación 20.10, la fuerza total ejercida sobre la pared es

$$F = \frac{1}{3}N \frac{m_0 \overline{v^2}}{d} \quad (20.14)$$



Con esta expresión se puede obtener la presión total ejercida sobre la pared:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{F}{d^2} = \frac{1}{3}N \frac{m_0 \overline{v^2}}{d^3} = \frac{1}{3} \left(\frac{N}{V} \right) m_0 \overline{v^2}$$

$$P = \frac{2}{3} \left(\frac{N}{V} \right) \left(\frac{1}{2} m_0 \overline{v^2} \right) \quad (20.15)$$

◀ Relación entre presión y energía cinética molecular

donde se ha introducido el volumen V del cubo como d^3 .

Hemos terminado el largo proceso iniciado al comienzo de esta sección. La recompensa por nuestra paciencia y diligencia es algo profundo: La ecuación 20.15 indica que la presión de un gas es proporcional (1) al número de moléculas por unidad de volumen y (2) a la energía cinética traslacional promedio de las moléculas, $\frac{1}{2}m_0\overline{v^2}$. Al analizar este modelo estructural de un gas ideal, se obtiene un resultado importante que relaciona la cantidad macroscópica de presión con una cantidad microscópica, el valor promedio del cuadrado de la rapidez molecular. Por tanto, se establece un vínculo clave entre el mundo molecular y el mundo a gran escala.

Observe que la ecuación 20.15 verifica algunas características de la presión con las cuales probablemente esté familiarizado. Una forma de aumentar la presión dentro de un recipiente es incrementar el número de moléculas por unidad de volumen N/V en el recipiente. Esto es lo que hace cuando agrega aire a una llanta. Volveremos a analizar el segundo conjunto de paréntesis en la ecuación 20.15 en breve, después de analizar la cantidad macroscópica de temperatura.

Podemos obtener una idea del significado de la temperatura escribiendo primero la ecuación 20.15 en la forma

$$PV = \frac{2}{3}N \left(\frac{1}{2}m_0 \overline{v^2} \right) \quad (20.16)$$

Comparemos ahora esta expresión con la ecuación de estado para un gas ideal (ecuación 18.11):

$$PV = Nk_B T \quad (20.17)$$

Igualando los lados derechos de las ecuaciones 20.16 y 20.17 y resolviendo para T da

$$T = \frac{2}{3k_B} \left(\frac{1}{2}m_0 \overline{v^2} \right) \quad (20.18)$$

◀ Relación entre temperatura y energía cinética molecular.

Este resultado nos dice que la *temperatura es una medida directa de la energía cinética molecular promedio*. En el capítulo 18, solo podríamos definir la temperatura macroscópicamente, en términos de la transferencia de energía entre dos objetos. En la ecuación 20.18, tenemos una definición más profunda de la temperatura en términos del movimiento microscópico de las moléculas de una sustancia.

Al reordenar la ecuación 20.18, podemos relacionar la energía cinética molecular traslacional con la temperatura:

$$\frac{1}{2}m_0 \overline{v^2} = \frac{3}{2}k_B T \quad (20.19)$$

◀ Energía cinética promedio por molécula

Volvamos a la ecuación 20.15. La cantidad en el segundo conjunto de paréntesis en esa ecuación es la misma que en el lado izquierdo de la ecuación 20.19. Por tanto, vemos que la presión en la ecuación 20.15 depende de la temperatura del gas. Con respecto a la discusión de la presión de aire en un neumático de automóvil, la presión puede elevarse al aumentar la temperatura de ese aire, razón por la cual la presión dentro de un neumático aumenta a medida que el neumático se calienta durante largos viajes por carretera. La continua flexión de la llanta, a medida que se mueve a lo largo de la superficie del camino, resulta en trabajo realizado sobre el caucho conforme se distorsionan las partes de la llanta, lo que genera un incremento en energía interna del caucho. La temperatura aumentada del caucho causa transferencia de energía por calor hacia el aire adentro de la llanta. Esta transferencia eleva la temperatura del aire, y este aumento en temperatura a su vez produce un incremento en presión.



La ecuación 20.19 muestra que la energía cinética de traslación promedio por moléculas es $\frac{3}{2}k_B T$. Ya que $\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$ (ecuación 20.13), se tiene que:

$$\frac{1}{2}m_0\overline{v_x^2} = \frac{1}{2}k_B T \quad (20.20)$$

En una forma similar, para las direcciones y y z .

$$\frac{1}{2}m_0\overline{v_y^2} = \frac{1}{2}k_B T \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}m_0\overline{v_z^2} = \frac{1}{2}k_B T$$

Por tanto, cada grado de libertad de traslación contribuye a una cantidad igual de energía, $k_B T$, al gas. (En general, un “grado de libertad” se refiere a un medio independiente mediante el cual una molécula puede tener energía.) Una generalización de este resultado, conocido como el **teorema de equipartición de energía**, es el siguiente:

Teorema de equipartición de energía ▶

Cada grado de libertad aporta $\frac{1}{2}k_B T$ a la energía de un sistema, donde los posibles grados de libertad son los asociados con la traslación, la rotación y la vibración de las moléculas.

La energía cinética traslacional total de las N moléculas de gas es simplemente N veces la energía promedio por molécula, dada por la ecuación 20.19:

Energía cinética traslacional total de N moléculas ▶

$$K_{\text{tot trans}} = N\left(\frac{1}{2}m_0\overline{v^2}\right) = \frac{3}{2}Nk_B T = \frac{3}{2}nRT \quad (20.21)$$

donde se utilizó $k_B = R/N_A$ para la constante de Boltzmann y $N = n/N_A$ para el número de moles del gas. Si las moléculas de gas sólo tienen energía cinética traslacional, la ecuación 20.21 representa la energía interna del gas. Este resultado implica que la energía interna de un gas ideal sólo depende de la temperatura. En la sección 20.2 se seguirá este punto.

La raíz cuadrada de $\overline{v^2}$ se llama **rapidez media cuadrática (rms)** de las moléculas. De la ecuación 20.19 se encuentra que la rapidez rms es

Rapidez media cuadrática ▶

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (20.22)$$

donde M es la masa molar en kilogramos por mol y es igual a $m_0 N_A$. Esta expresión muestra que, a una temperatura dada, las moléculas más ligeras se mueven más rápido, en promedio, que las moléculas más pesadas. Por ejemplo, a una temperatura determinada, las moléculas de hidrógeno, cuya masa molar es 2.02×10^{-3} kg/mol, tienen una rapidez promedio cerca de cuatro veces más que las moléculas de oxígeno, cuya masa molar es 32.0×10^{-3} kg/mol. La tabla 20.1 enlista la rapidez rms para varias moléculas a 20 °C.

E XAMEN RÁPIDO 20.1 Dos recipientes mantienen un gas ideal a la misma temperatura y presión. Ambos recipientes tienen el mismo tipo de gas, pero el recipiente B posee el doble de volumen que el recipiente A. (i) ¿Cuál es la energía cinética traslacional promedio por molécula en el recipiente B? (a) El doble que el recipiente A, (b) la misma que el recipiente A, (c) la mitad que el recipiente A, (d) es imposible de determinar. (ii) Entre las mismas opciones, describa la energía interna del gas en el recipiente B.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 20.1

¿La raíz cuadrada del cuadrado?

Sacar la raíz cuadrada de $\overline{v^2}$ no “deshace” el cuadrado porque se toma un promedio entre elevar al cuadrado y tomar la raíz cuadrada. Aunque la raíz cuadrada de $(\overline{v})^2$ es $\overline{v} = v_{\text{prom}}$, porque elevar al cuadrado se hace después del promedio, la raíz cuadrada de $\overline{v^2}$ no es v_{prom} , sino v_{rms} .

Tabla 20.1 Rapidez media cuadrática

Gas	Masa molar (g/mol)	v_{rms} a 20 °C (m/s)	Gas	Masa molar (g/mol)	v_{rms} a 20 °C (m/s)
H ₂	2.02	1902	NO	30.0	494
He	4.00	1352	O ₂	32.0	478
H ₂ O	18.0	637	CO ₂	44.0	408
Ne	20.2	602	SO ₂	64.1	338
N ₂ o CO	28.0	511			

EJEMPLO 20.1 Un tanque de helio

Un tanque que se emplea para llenar globos de helio tiene un volumen de 0.300 m^3 y contiene 2.00 moles de gas helio a $20.0 \text{ }^\circ\text{C}$. Suponga que el helio se comporta como un gas ideal.

(A) ¿Cuál es la energía cinética traslacional total de las moléculas de gas?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine un modelo microscópico de un gas en el que observa cómo se incrementa el movimiento de las moléculas alrededor del recipiente a medida que aumenta la temperatura. El gas es monoatómico, así que la energía cinética traslacional total de las moléculas es la energía interna del gas.

Categorizar Se evalúan los parámetros con las ecuaciones desarrolladas en la explicación precedente, así este ejemplo es un problema de sustitución.

Use la ecuación 20.21 con $n = 2.00$ moles y $T = 293 \text{ K}$:

$$E_{\text{int}} = K_{\text{tot trans}} = \frac{3}{2}nRT = \frac{3}{2}(2.00 \text{ mol})(8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(293 \text{ K}) \\ = 7.30 \times 10^3 \text{ J}$$

(B) ¿Cuál es la energía cinética promedio por molécula?

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 20.19:

$$K_{\text{avg}} = \frac{1}{2}m_0\overline{v^2} = \frac{3}{2}k_B T = \frac{3}{2}(1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(293 \text{ K}) \\ = 6.07 \times 10^{-21} \text{ J}$$

¿QUÉ PASARÍA SI? ¿Y si la temperatura se eleva de $20.0 \text{ }^\circ\text{C}$ a $40.0 \text{ }^\circ\text{C}$? Ya que 40.0 es el doble de 20.0 , ¿la energía cinética traslacional total de las moléculas del gas es el doble a la temperatura más alta?

Respuesta La expresión para la energía traslacional total depende de la temperatura, y el valor para la temperatura se debe expresar en kelvins, no en grados Celsius. Por tanto, la razón de 40.0 a 20.0 *no* es la razón apropiada. Al convertir las temperaturas Celsius a kelvins, $20.0 \text{ }^\circ\text{C}$ es 293 K y $40.0 \text{ }^\circ\text{C}$ es 313 K . Así, la energía traslacional total aumenta en un factor de sólo $313 \text{ K}/293 \text{ K} = 1.07$.

20.2 Calor específico molar de un gas ideal

Usemos los resultados de la sección 20.1 para investigar una cantidad macroscópica asociada con un gas: su calor específico. Considere un gas ideal que experimenta varios procesos tales que el cambio en temperatura es $\Delta T = T_f - T_i$ para todos los procesos. El cambio de temperatura se puede lograr al tomar una variedad de trayectorias de una isoterma a otra, como se muestra en la figura 20.3. Ya que ΔT es la misma para cada ruta, el cambio en energía interna ΔE_{int} es lo mismo para todas las trayectorias. Sin embargo, el trabajo W realizado sobre el gas (el negativo del área bajo las curvas) es diferente para cada trayectoria como se determinó en la sección 19.4. Por tanto, de la primera ley de la termodinámica, se puede argumentar que el calor $Q = \Delta E_{\text{int}} - W$ asociado con un cambio dado en temperatura *no* tiene un valor único: el calor Q para un proceso que tiene lugar entre dos temperaturas depende del proceso. Por tanto, en $Q = mc\Delta T$, el calor específico c no tiene un valor único para un gas.

Esta dificultad se puede abordar al definir calores específicos para dos procesos especiales que se han estudiado: isovolumétrico ($i \rightarrow f$ en la figura 20.4 de la página 540) e isobárico ($i \rightarrow f'$ en la figura 20.4 de la página 540). El número de moles n es una conveniente medida de la cantidad de gas, entonces se definen los **calores específicos molares** asociados con estos procesos del modo siguiente:

$$Q = nC_V \Delta T \quad (\text{volumen constante}) \quad (20.23)$$

$$Q = nC_P \Delta T \quad (\text{presión constante}) \quad (20.24)$$

donde C_V es el **calor específico molar a volumen constante** y C_P es el **calor específico molar a presión constante**. A volumen constante, no hay trabajo sobre el gas; el único cambio de energía en el sistema es el cambio de energía interna. Cuando a un gas se le agrega energía por calor a presión constante, no sólo aumenta la energía interna del

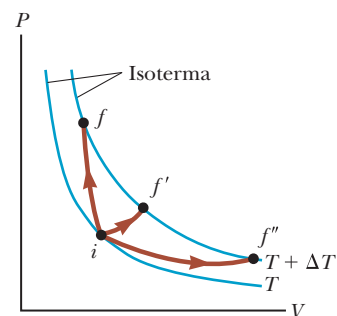


Figura 20.3 Un gas ideal se lleva de una isoterma a temperatura T a otra a temperatura $T + \Delta T$ a lo largo de tres trayectorias diferentes.

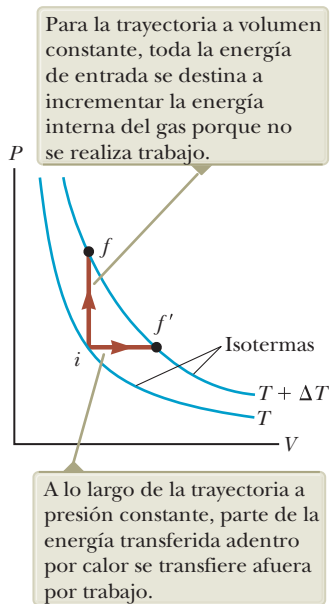


Figura 20.4 La energía se transfiere por calor a un gas ideal en dos formas.

gas, también se realiza trabajo (negativo) sobre el gas debido al cambio en volumen para mantener constante la presión. Por tanto, el calor Q en la ecuación 20.24 debe explicar el incremento en energía interna y la transferencia de energía hacia afuera del sistema por trabajo. Por este motivo, Q es mayor en la ecuación 20.24 que en la ecuación 20.23 para valores dados de n y ΔT . Así, C_p es mayor que C_v .

Debido a que no hay trabajo sobre el gas en el proceso de volumen constante en la figura 20.4, la primera ley de la termodinámica nos da

$$Q = \Delta E_{\text{int}} \quad (20.25)$$

Sustituyendo la expresión para Q dada por la ecuación 20.23 en la ecuación 20.25, obtenemos

$$\Delta E_{\text{int}} = nC_v \Delta T \quad (20.26)$$

donde ΔT es la diferencia de temperatura entre las dos isotermas. Esta ecuación se aplica a todos los gases ideales, aquellos que tienen más de un átomo por molécula, así como los gases ideales monoatómicos. También se aplica a *todos los procesos* que tienen lugar entre las mismas temperaturas. Los cinco procesos en las figuras 20.3 y 20.4 tienen el mismo cambio en la energía interna porque todos tienen lugar a través de la misma diferencia de temperatura ΔT . Esta afirmación puede parecer sorprendente, porque la ecuación 20.26 contiene un calor específico molar para un proceso específico a volumen constante. Es cierto, sin embargo, debido al hecho de que la energía interna es una variable de estado, y su cambio depende únicamente del cambio de temperatura, por lo que es independiente del proceso particular. La ecuación 20.26 nos da el cambio en la energía interna para todos los procesos, y nos permite evaluar este cambio utilizando el calor específico de volumen constante.

En el límite de los cambios infinitesimales, podemos usar la ecuación 20.26 para expresar el calor específico molar a volumen constante como

$$C_v = \frac{1}{n} \frac{dE_{\text{int}}}{dT} \quad (20.27)$$

Considere el caso más simple de un gas monoatómico ideal, es decir, un gas que contiene un átomo por molécula, como helio, neón o argón. Cuando se agrega energía a un gas monoatómico en un recipiente de volumen fijo, toda la energía adicionada se destina a incrementar la energía cinética traslacional de los átomos. No existe otra forma de almacenar la energía en un gas monoatómico. Por tanto, de la ecuación 20.21, se ve que la energía interna E_{int} de N moléculas (o n moles) de un gas monoatómico ideal es

$$E_{\text{int}} = K_{\text{tras tot}} = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} n R T \quad (20.28)$$

Para un gas monoatómico ideal, E_{int} sólo es una función de T y la relación funcional está dada por la ecuación 20.28. En general, la energía interna de cualquier gas ideal es una función sólo de T y la relación exacta depende del tipo de gas.

Al sustituir la energía interna de la ecuación 20.28 en la ecuación 20.27 se obtiene

$$C_v = \frac{3}{2} R = 12.5 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \quad (20.29)$$

Esta expresión predice un valor de $C_v = \frac{3}{2} R$ para *todos* los gases monoatómicos. Esta predicción está en excelente acuerdo con los valores medidos de calores específicos molares para gases como helio, neón, argón y xenón sobre un amplio intervalo de temperaturas (vea la columna C_v en la tabla 20.2). Las pequeñas variaciones en la tabla 20.2 de los valores predichos se debe a que los gases reales no son gases ideales. En los gases reales, ocurren interacciones intermoleculares débiles, que no se abordan en el modelo de gas ideal presentado.

Ahora suponga que el gas sigue la trayectoria $i \rightarrow f'$ a presión constante, como se muestra en la figura 20.4. Sobre esta trayectoria, la temperatura de nuevo aumenta en ΔT . La energía que se debe transferir por calor al gas en este proceso es $Q = nC_p \Delta T$. El volumen cambia en este proceso, así que el trabajo realizado sobre el gas es $W = -P\Delta V$, donde

Energía interna de un gas monoatómico ideal ▶



Tabla 20.2 Calores específicos molares de varios gases

Gas	Calor específico molar (J/mol · K) ^a			$\gamma = C_p/C_v$
	C_p	C_v	$C_p - C_v$	
<i>Gases monoatómicos</i>				
He	20.8	12.5	8.33	1.67
Ar	20.8	12.5	8.33	1.67
Ne	20.8	12.7	8.12	1.64
Kr	20.8	12.3	8.49	1.69
<i>Gases diatómicos</i>				
H ₂	28.8	20.4	8.33	1.41
N ₂	29.1	20.8	8.33	1.40
O ₂	29.4	21.1	8.33	1.40
CO	29.3	21.0	8.33	1.40
Cl ₂	34.7	25.7	8.96	1.35
<i>Gases poliatómicos</i>				
CO ₂	37.0	28.5	8.50	1.30
SO ₂	40.4	31.4	9.00	1.29
H ₂ O	35.4	27.0	8.37	1.30
CH ₄	35.5	27.1	8.41	1.31

^a Todos los valores, excepto el del agua, se obtuvieron a 300 K.

P es la presión constante a la que ocurre el proceso. Al aplicar la primera ley de la termodinámica a este proceso, se tiene

$$\Delta E_{\text{int}} = Q + W = nC_p \Delta T + (-P\Delta V) \quad (20.30)$$

Como se explicó antes, el cambio en energía interna para el proceso $i \rightarrow f'$ es igual al del proceso $i \rightarrow f$ porque E_{int} sólo depende de la temperatura para un gas ideal y ΔT es la misma para ambos procesos. Además, $PV = nRT$, entonces note que para un proceso a presión constante, $P\Delta V = nR\Delta T$. Al sustituir este valor para $P\Delta V$ en la ecuación 20.30 con $\Delta E_{\text{int}} = nC_v \Delta T$ (ecuación 20.26) se obtiene

$$\begin{aligned} nC_v \Delta T &= nC_p \Delta T - nR \Delta T \\ C_p - C_v &= R \end{aligned} \quad (20.31)$$

Esta expresión se aplica a *cualquier* gas ideal. Predice que el calor específico molar de un gas ideal a presión constante es mayor que el calor específico molar a volumen constante en una cantidad R , la constante universal de los gases (que tiene el valor $8.31 \text{ J/mol} \times \text{K}$). Esta expresión es aplicable a gases reales, como muestran los datos en la columna $C_p - C_v$ de la tabla 20.2.

Ya que $C_v = \frac{3}{2}R$ para un gas ideal monoatómico, la ecuación 20.31 predice un valor $C_p = \frac{5}{2}R = 20.8 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ para el calor específico molar de un gas monoatómico a presión constante. La razón de estos calores específicos molares es una cantidad sin dimensiones γ (letra griega gamma):

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5R/2}{3R/2} = \frac{5}{3} = 1.67 \quad (20.32)$$

◀ Razón de calores específicos molares para un gas ideal monoatómico

Los valores teóricos de C_v , C_p y γ están en excelente acuerdo con los valores experimentales obtenidos para gases monoatómicos, pero están en serio desacuerdo con los valores para los gases más complejos (vea la tabla 20.2). Esto no debe sorprender: el valor $C_v = \frac{3}{2}R$ fue deducido para un gas ideal monoatómico, y se espera alguna contribución adicional al calor específico molar proveniente de la estructura interna de las moléculas más complejas. En la sección 20.3 se describe el efecto de la estructura molecular sobre el calor específico molar de un gas. La energía interna y, por tanto, el calor específico molar de un gas complejo debe incluir contribuciones de los movimientos rotacional y vibratorio de la molécula.

En el caso de sólidos y líquidos calentados a presión constante, se realiza muy poco trabajo durante tal proceso porque la expansión térmica es pequeña. En consecuencia, C_p y C_v son aproximadamente iguales para sólidos y líquidos.

- E XAMEN RÁPIDO 20.2** ¿(i) ¿De qué modo cambia la energía interna de un gas mientras sigue la trayectoria $i \rightarrow f$ en la figura 20.4? (a) E_{int} aumenta, (b) E_{int} disminuye, (c) E_{int} permanece igual, (d) No hay suficiente información para determinar cómo cambia E_{int} . (ii) Entre las mismas opciones, ¿cómo cambia la energía interna de un gas ideal a medida que sigue la trayectoria $f \rightarrow f'$ a lo largo de la isoterma marcada $T + \Delta T$ en la figura 20.4?

Ejemplo 20.2 Calentamiento de un cilindro de helio

Un cilindro contiene 3.00 moles de gas helio a una temperatura de 300 K.

(A) Si el gas se calienta a volumen constante, ¿cuánta energía por calor se debe transferir al gas para que su temperatura aumente a 500 K?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Projete el proceso en su mente con la ayuda del arreglo pistón-cilindro de la figura 19.7. Imagine que el pistón está bloqueado en posición para mantener el gas a volumen constante.

Categorizar Los parámetros se evalúan con las ecuaciones desarrolladas en la explicación precedente, así este ejemplo es un problema de sustitución.

Use la ecuación 20.23 para encontrar la transferencia de energía: $Q_1 = nC_v \Delta T$

Sustituya los valores dados: $Q_1 = (3.00 \text{ mol})(12.5 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(500 \text{ K} - 300 \text{ K})$
 $= 7.50 \times 10^3 \text{ J}$

(B) ¿Cuánta energía se debe transferir al gas por calor a presión constante para elevar la temperatura a 500 K?

SOLUCIÓN

Utilice la ecuación 20.24 para obtener la transferencia de energía: $Q_2 = nC_p \Delta T$

Sustituya los valores dados: $Q_2 = (3.00 \text{ mol})(20.8 \text{ J/mol} \cdot \text{K})(500 \text{ K} - 300 \text{ K})$
 $= 12.5 \times 10^3 \text{ J}$

Este valor es mayor que Q_1 debido a la transferencia de energía hacia afuera del gas, por trabajo en el proceso de presión constante.

20.3 Equipartición de la energía

En la sección 20.1, encontramos que la temperatura de un gas es una medida de la energía cinética traslacional promedio de las moléculas de gas. Esta energía cinética está asociada con el movimiento del centro de masa de cada molécula. No incluye la energía asociada con el movimiento interno de la molécula, es decir, vibraciones y rotaciones alrededor del centro de masa. En esta sección, presentamos las contribuciones de la rotación y la vibración de la molécula a los calores específicos del gas.

Las predicciones basadas en el modelo para calor específico molar concuerdan bastante bien con el comportamiento de los gases monoatómicos, pero no con el comportamiento de los gases complejos (vea la tabla 20.2). Sin embargo, el valor predicho por el modelo para la cantidad $C_p - C_v = R$, es el mismo para todos los gases. Dicha similitud no sorprende porque esta diferencia es el resultado del trabajo efectuado sobre el gas, que es independiente de su estructura molecular.

Para aclarar las variaciones en C_v y C_p en los gases más complejos que los gases monoatómicos, explore aún más el origen del calor específico molar. Hasta el momento, se



ha supuesto que la única contribución a la energía interna de un gas es la energía cinética traslacional de las moléculas. No obstante, la energía interna de un gas incluye aportaciones de los movimientos traslacional, vibratorio y rotacional de las moléculas. Los movimientos rotacional y vibratorio de las moléculas se activan mediante colisiones y, por tanto, se “acoplan” al movimiento traslacional de las moléculas. La rama de la física conocida como *mecánica estadística* ha demostrado que, para un gran número de partículas que obedecen las leyes de la mecánica newtoniana, la energía disponible se comparte, en promedio, de manera equitativa por cada grado de libertad independiente. Recuerde de la sección 20.1 que el teorema de equipartición establece que, en equilibrio, cada grado de libertad aporta $\frac{1}{2}k_B$ de energía por molécula.

Considere un gas diatómico cuyas moléculas tienen la forma de una mancuerna (figura 20.5). En este modelo, el centro de masa de la molécula se traslada en las direcciones x , y y z (figura 20.5a). Además, la molécula puede girar en torno a tres ejes mutuamente perpendiculares (figura 20.5b). La rotación en torno al eje y se puede despreciar, porque el momento de inercia I_y de la molécula y su energía rotacional $\frac{1}{2}I_y\omega^2/2$ respecto a este eje son despreciables comparadas con las asociadas a los ejes x y z . (Sí los dos átomos se modelan como partículas, entonces I_y es idénticamente cero.) Por tanto, hay cinco grados de libertad para traslación y rotación: tres asociados con el movimiento traslacional y dos asociados con el movimiento rotacional. Cada grado de libertad contribuye, en promedio, con $\frac{1}{2}k_B T$ de energía por molécula, así que la energía interna para un sistema de N moléculas, ignorando por ahora la vibración, es

$$E_{\text{int}} = 3N\left(\frac{1}{2}k_B T\right) + 2N\left(\frac{1}{2}k_B T\right) = \frac{5}{2}Nk_B T = \frac{5}{2}nRT \quad (20.33)$$

Se puede emplear este resultado y la ecuación 21.28 para encontrar el calor específico molar a volumen constante:

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{dE_{\text{int}}}{dT} = \frac{1}{n} \frac{d}{dT}\left(\frac{5}{2}nRT\right) = \frac{5}{2}R = 20.8 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \quad (20.34)$$

De las ecuaciones 20.31 y 20.32, se encuentra que

$$C_p = C_V + R = \frac{7}{2}R = 29.1 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5} = 1.40$$

Estos resultados concuerdan con la mayoría de los datos para moléculas diatómicas dados en la tabla 20.2. Esto es sorprendente porque todavía no se explican las posibles vibraciones de la molécula.

En el modelo para vibración, los dos átomos se unen mediante un resorte imaginario (vea la figura 20.5c). El movimiento vibratorio agrega dos grados de libertad más, que corresponden a la energía cinética y a la energía potencial asociadas con las vibraciones a lo largo de la longitud de la molécula. Así, un modelo que incluye los tres tipos de movimiento predice una energía interna total de

$$E_{\text{int}} = 3N\left(\frac{1}{2}k_B T\right) + 2N\left(\frac{1}{2}k_B T\right) + 2N\left(\frac{1}{2}k_B T\right) = \frac{7}{2}Nk_B T = \frac{7}{2}nRT$$

y un calor específico molar a volumen constante de

$$C_V = \frac{1}{n} \frac{dE_{\text{int}}}{dT} = \frac{1}{n} \frac{d}{dT}\left(\frac{7}{2}nRT\right) = \frac{7}{2}R = 29.1 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \quad (20.35)$$

Este valor es inconsistente con los datos experimentales para moléculas como H_2 y N_2 (vea la tabla 20.2) y sugiere un fracaso del modelo basado en la física clásica.

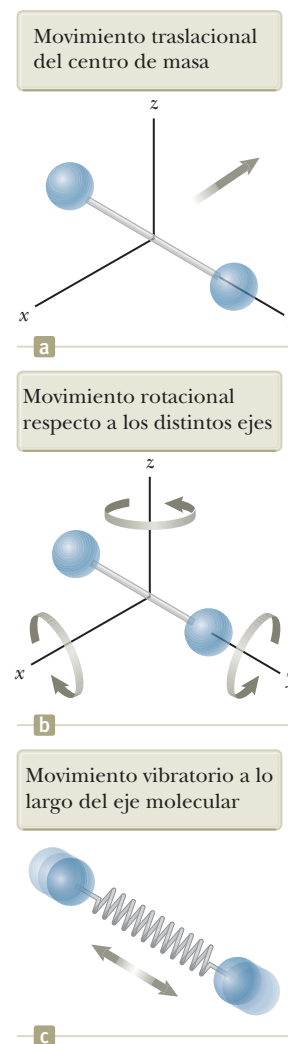


Figura 20.5 Posibles movimientos de una molécula diatómica.



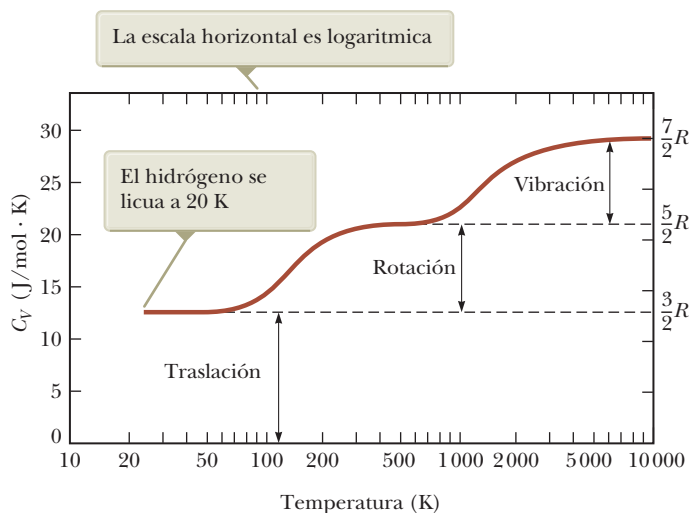


Figura 20.6 Calor específico molar del hidrógeno como función de la temperatura.

Puede parecer que el modelo es un fracaso para predecir calores específicos molares para gases diatómicos. Sin embargo, se puede afirmar cierto éxito del modelo si se hacen mediciones de calor específico molar sobre un amplio intervalo de temperatura, en lugar de hacerlo en una sola temperatura que dé los valores en la tabla 20.2. La figura 20.6 muestra el calor específico molar del hidrógeno como una función de la temperatura. La característica notable acerca de las tres mesetas en la curva de la gráfica, ¡es que son los valores del calor específico molar predicho por las ecuaciones 20.29, 20.34 y 20.35! Para bajas temperaturas, el gas hidrógeno diatómico se comporta como un gas monoatómico. A medida que la temperatura se eleva a la del ambiente, su calor específico molar crece a un valor para un gas diatómico, consistente con la inclusión de la rotación pero no de la vibración. Para temperaturas altas, el calor específico molar es consistente con un modelo que incluye todos los tipos de movimiento.

Antes de explicar la razón para este misterioso comportamiento, se harán algunas breves observaciones acerca de los gases poliatómicos. Para moléculas con más de dos átomos, están disponibles tres ejes de rotación. Las vibraciones son más complejas que para moléculas diatómicas. Por tanto, el número de grados de libertad es incluso más grande. El resultado es un calor específico molar mayor al predicho, en acuerdo cualitativo con el experimento. Los calores específicos molares para los gases poliatómicos en la tabla 20.2 son mayores que aquellos para gases diatómicos. Mientras más grados de libertad tenga disponibles una molécula, más “formas” habrá para almacenar energía, resultando así un mayor calor específico molar.

Una pista de la cuantización de la energía

Hasta el momento el modelo para calores específicos molares se basa en conceptos puramente clásicos. Predice un valor del calor específico para un gas diatómico que, de acuerdo con la figura 20.6, sólo concuerda con las mediciones experimentales hechas a elevadas temperaturas. Para explicar por qué este valor sólo es correcto a temperaturas altas y por qué existen las mesetas en la figura 20.6, se debe ir más allá de la física clásica e introducir algo de física cuántica en el modelo. En el capítulo 17 se analizó la cuantización de la frecuencia en cuerdas vibrando y en columnas de aire; sólo pueden existir ciertas frecuencias en ondas estacionarias. Dicho resultado es natural siempre que las ondas estén sujetas a condiciones de frontera.

La física cuántica (capítulos 39 al 42) demuestra que los átomos y moléculas se pueden describir mediante ondas bajo el análisis de modelo de condiciones de frontera. Así, estas ondas tienen frecuencias cuantizadas. Además, en física cuántica, la energía de un sistema es proporcional a la frecuencia de la onda que representa al sistema. Por tanto, **las energías de átomos y moléculas están cuantizadas**: sólo ciertas energías están permitidas.

Para una molécula, la física cuántica dice que las energías rotacional y vibratoria están cuantizadas. La figura 20.7 muestra un **diagrama de nivel de energía** para los estados cuánticos rotacional y vibratorio de una molécula diatómica. El estado más bajo permi-

tido se le llama **estado base**. Las líneas negras largas muestran las energías vibratorias permitidas. Estos estados están ampliamente espaciados en energía. Asociado con cada energía vibratoria permitida, hay un conjunto de energías rotacionales más estrechamente espaciadas, representadas por las líneas negras más cortas.

Si una molécula está en el estado fundamental para rotación o vibración, entonces la rotación o vibración no contribuye al calor específico del molar. Estos tipos de movimiento solo contribuyen cuando hay una transición a un estado excitado. La sección 20.1 nos dice que las energías moleculares son proporcionales a la temperatura. Por tanto, podemos agregar etiquetas a la derecha de la figura 20.7 que corresponden aproximadamente a las temperaturas a las que se excitarán los niveles de energía.

A bajas temperaturas, la energía que gana una molécula en colisiones con sus vecinas por lo general no es lo suficientemente grande para elevarla al primer estado excitado de rotación o de vibración. Así, aun cuando, de acuerdo con la física clásica, se permitan rotación y vibración, en realidad no se presentan a bajas temperaturas. Todas las moléculas están en el estado base para rotación y vibración. La única contribución a la energía promedio de las moléculas es de traslación, y el calor específico es el predicho por la ecuación 20.29. La temperatura T_A en la figura 20.7 podría ser de 50 K para el hidrógeno: solo los estados básicos de vibración o rotación están ocupados; estamos en la meseta más baja de la figura 20.6.

A medida que la temperatura se eleva, la energía promedio de las moléculas aumenta. En algunas colisiones, una molécula puede tener suficiente energía transferida desde otra molécula para excitar el primer estado rotacional. Conforme la temperatura se eleva aún más, más moléculas se pueden excitar a este estado. El resultado es que la rotación comienza a contribuir a la energía interna, y se incrementa el calor específico molar. Para el hidrógeno, la temperatura T_B en la figura 20.7 podría ser de 500 K: los niveles de rotación excitados están ocupados, pero para la vibración, solo el estado fundamental está ocupado; estamos en la segunda meseta en la figura 20.6. Ahora el calor específico molar es igual al valor predicho por la ecuación 20.34.

A temperatura ambiente no hay contribución de la vibración porque las moléculas todavía están en el estado base vibratorio. La temperatura se debe elevar aún más para excitar el primer estado vibratorio. Para el hidrógeno, la temperatura T_C en la figura 20.7 podría ser de 5 000 K: los niveles excitados de rotación y vibración están ocupados; estamos en la meseta más alta en la figura 20.6 y el calor específico molar tiene el valor predicho por la ecuación 20.35.

Las predicciones de este modelo son sustento del teorema de equipartición de la energía. Además, la inclusión en el modelo de la cuantización de energía de la física cuántica permite una total comprensión de la figura 20.6.

E XAMEN RÁPIDO 20.3 ¿El calor específico molar de un gas diatómico se mide a volumen constante y se encuentra que es de $29.1 \text{ J/mol} \times \text{K}$. ¿Cuáles son los tipos de energía que contribuyen al calor específico molar? (a) Sólo traslación, (b) sólo traslación y rotación, (c) sólo traslación y vibración, (d) traslación y vibración.

E XAMEN RÁPIDO 20.4 El calor específico molar de un gas se mide a volumen constante y se encuentra que es de $11R/2$. Es más probable que el gas sea (a) monoatómico, (b) diatómico o (c) poliatómico?

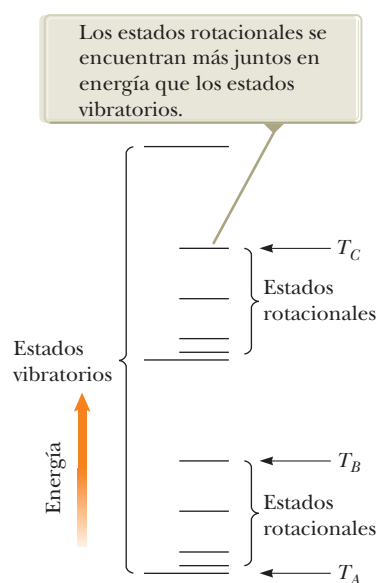


Figura 20.7 Diagrama de niveles de energía para estados vibratorio y rotacional de una molécula diatómica.

20.4 Procesos adiabáticos para un gas ideal

Nuestro estudio de los calores específicos molares nos permite completar nuestra discusión sobre los procesos adiabáticos comenzada en la sección 19.5. Como se señaló allí, un **proceso adiabático** es aquel en el que no se transfiere energía por calor entre un sistema y sus alrededores.

Por ejemplo, si un gas se comprime (o expande) rápidamente, muy poca energía se transfiere afuera (o adentro) del sistema por calor, así que el proceso es casi adiabático.

Tales procesos se presentan en el ciclo de un motor a gasolina, que se explica con detalle en el capítulo 22. Otro ejemplo de un proceso adiabático es la lenta expansión de un gas que está térmicamente aislado de sus alrededores. Las tres variables en la ley de gas ideal, P , V y T , cambian durante un proceso adiabático.

Imagine un proceso adiabático de un gas que involucra un cambio infinitesimal en volumen dV acompañado de un cambio infinitesimal en temperatura dT . El trabajo realizado sobre el gas es $-PdV$. La energía interna de un gas ideal sólo depende de la temperatura, entonces el cambio en la energía interna en un proceso adiabático es el mismo que para un proceso isovolumétrico entre las mismas temperaturas, $dE_{\text{int}} = nC_V dT$ (ecuación 20.26). Así, la primera ley de la termodinámica, $\Delta E_{\text{int}} = Q + W$, con $Q = 0$, se convierte en la forma infinitesimal

$$dE_{\text{int}} = nC_V dT = -P dV \quad (20.36)$$

La diferencial total de la ecuación de estado de un gas ideal, $PV = nRT$, da

$$P dV + V dP = nR dT \quad (20.37)$$

Al eliminar dT de las ecuaciones 20.36 y 20.37, se encuentra que

$$P dV + V dP = -\frac{R}{C_V} P dV$$

Al sustituir $R = C_p - C_V$ y dividir entre PV resulta

$$\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = -\left(\frac{C_p - C_V}{C_V}\right) \frac{dV}{V} = (1 - \gamma) \frac{dV}{V}$$

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

Al integrar esta expresión, se tiene

$$\ln P + \gamma \ln V = \text{constante}$$

que es equivalente a

$$PV^\gamma = \text{constante} \quad (20.38)$$

El diagrama PV para una expansión adiabática se muestra en la figura 20.8. Ya que $\gamma > 1$, la curva PV es más pronunciada de lo que sería para una expansión isotérmica, para la cual $PV = \text{constante}$. Por definición de un proceso adiabático, no se transfiere energía por calor hacia adentro o hacia afuera del sistema. Entonces, de la primera ley, se ve que ΔE_{int} es negativo (el trabajo es efectuado *por* el gas, así su energía interna disminuye) y en consecuencia ΔT también es negativo. Por lo tanto, la temperatura del gas disminuye ($T_f < T_i$) durante una expansión adiabática. Inversamente, la temperatura aumenta si el gas se comprime adiabáticamente. Al aplicar la ecuación 20.38 a los estados inicial y final, se ve que

$$P_i V_i^\gamma = P_f V_f^\gamma \quad (20.39)$$

Mediante la ley del gas ideal, la ecuación 20.38 se expresa como

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante} \quad (20.40)$$

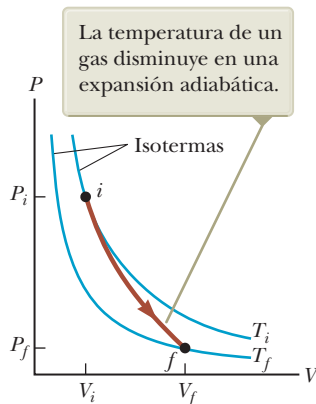


Figura 20.8 Diagrama PV para una expansión adiabática de un gas ideal.

Relación entre P y V para un proceso adiabático que involucra un gas ideal

Relación entre T y V para un proceso adiabático que involucra un gas ideal

Ejemplo 20.3 Un cilindro de motor diesel

Aire a 20.0°C en el cilindro de un motor diesel se comprime desde una presión inicial de 1.00 atm y volumen 800.0 cm^3 hasta un volumen de 60.0 cm^3 . Suponga que el aire se comporta como un gas ideal con $\gamma = 1.40$ y la compresión es adiabática. Encuentre la presión y temperatura finales del aire.

20.3 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine lo que sucede si un gas se comprime en un volumen más pequeño. La explicación anterior y la figura 20.8 indican que tanto la presión como la temperatura aumentan.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como un problema que incluye un proceso adiabático.

Analizar Aplique la ecuación 20.39 para hallar la presión final:

$$P_f = P_i \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^\gamma = (1.00 \text{ atm}) \left(\frac{800.0 \text{ cm}^3}{60.0 \text{ cm}^3} \right)^{1.40}$$

$$= 37.6 \text{ atm}$$

Utilice la ley de gas ideal para encontrar la temperatura final:

$$\frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f}$$

$$T_f = \frac{P_f V_f}{P_i V_i} T_i = \frac{(37.6 \text{ atm})(60.0 \text{ cm}^3)}{(1.00 \text{ atm})(800.0 \text{ cm}^3)} (293 \text{ K})$$

$$= 826 \text{ K} = 553 \text{ }^\circ\text{C}$$

Finalizar La temperatura del gas se incrementa en un factor de $826 \text{ K}/293 \text{ K} = 2.82$. La alta compresión en un motor diesel eleva la temperatura del gas, lo suficiente para provocar la combustión del combustible sin el uso de bujías.

20.5 Distribución de rapidezces moleculares

Hasta el momento sólo se han considerado valores promedio de las energías de moléculas en un gas, y no se ha abordado la distribución de energías entre las moléculas individuales. El movimiento de las moléculas es extremadamente caótico. Cualquier molécula individual colisiona contra otras a una rapidez enorme, por lo general un billón de veces por segundo. Cada colisión resulta en un cambio en la rapidez y dirección de movimiento de cada una de las moléculas participantes. La ecuación 20.22 muestra que las magnitudes de velocidad moleculares rms aumentan al crecer la temperatura. En un tiempo dado, ¿cuál es el número relativo de moléculas que tienen alguna característica como energía dentro de cierto rango?

Esta cuestión se abordará al considerar la **densidad de número** $n_V(E)$. Esta cantidad, llamada *función de distribución*, se define tal que $n_V(E)dE$ sea el número de moléculas por unidad de volumen con energía entre E y $E + dE$. (La razón del número de moléculas que tienen la característica deseada al número total de moléculas es la probabilidad de que una molécula particular tenga dicha característica.) En general, a partir de la mecánica estadística se encuentra que la densidad de número es

$$n_V(E) = n_0 e^{-E/k_B T} \quad (20.41)$$

donde n_0 se define tal que $n_0 dE$ es el número de moléculas por unidad de volumen que tienen energía entre $E = 0$ y $E = dE$. Esta ecuación, conocida como **ley de distribución de Boltzmann**, es importante para describir la mecánica estadística de un gran número de moléculas. Dicha ley afirma que la probabilidad de encontrar moléculas en un estado energético particular varía exponencialmente como el negativo de la energía dividida entre $k_B T$. Todas las moléculas caerán en el nivel energético más bajo si la agitación térmica a una temperatura T no excita las moléculas a niveles energéticos superiores.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 20.2

La función de distribución La función de distribución $n_V(E)$ se define en términos del número de moléculas con energía en el intervalo E a $E + dE$, y no en términos del número de moléculas con una energía específica E . El número de moléculas es finito y la cantidad de posibles valores de la energía es infinita, entonces el número de moléculas con una energía *exacta* E puede ser cero.

◀ Ley de distribución de Boltzmann

Ejemplo 20.4 Excitación térmica de niveles energéticos atómicos

Como se explicó en la sección 20.3, los átomos pueden ocupar sólo ciertos niveles energéticos discretos. Considere un gas a una temperatura de $2\,500 \text{ K}$ cuyos átomos pueden ocupar sólo dos niveles energéticos separados por 1.50 eV , donde 1 eV (electrón volt) es una unidad de energía igual a 1.60×10^{-19} . Determine la razón del número de átomos en el nivel energético superior al número en el nivel energético inferior.

continúa

20.4 continuación

SOLUCIÓN

Conceptualizar En su representación mental de este ejemplo, recuerde que sólo dos posibles estados se permiten para el sistema del átomo. La figura 20.9 le ayuda a visualizar los dos estados en un diagrama de niveles de energía. En este caso, el átomo tiene dos posibles energías, E_1 y E_2 , donde $E_1 < E_2$.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como uno enfocado a partículas en un sistema cuantizado con dos estados. A este sistema se le aplicará la ley de distribución de Boltzmann.

Analizar Establezca la razón del número de átomos en el nivel energético superior al número en el nivel energético inferior y aplique la ecuación 20.41 para expresar cada número:

Evalúe $k_B T$ en el exponente:

Sustituya este valor en la ecuación (1):

$$(1) \frac{n_V(E_2)}{n_V(E_1)} = \frac{n_0 e^{-E_2/k_B T}}{n_0 e^{-E_1/k_B T}} = e^{-(E_2 - E_1)/k_B T}$$

$$k_B T = (1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(2\,500 \text{ K}) \left(\frac{1 \text{ eV}}{1.60 \times 10^{-19} \text{ J}} \right) = 0.216 \text{ eV}$$

$$\frac{n_V(E_2)}{n_V(E_1)} = e^{-1.50 \text{ eV}/0.216 \text{ eV}} = e^{-6.96} = 9.52 \times 10^{-4}$$

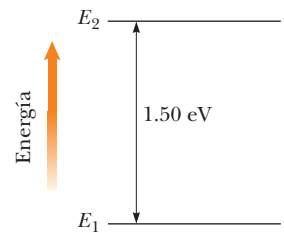


Figura 20.9 (Ejemplo 20.4) Diagrama de niveles de energía para un gas cuyos átomos pueden ocupar dos estados de energía.

Finalizar Este resultado indica que en $T = 2\,500 \text{ K}$, sólo una pequeña fracción de los átomos están en el nivel energético superior. De hecho, por cada átomo en el nivel energético superior, hay aproximadamente 1 000 átomos en el nivel inferior. El número de átomos en el nivel superior aumenta incluso a temperaturas más altas, pero la ley de distribución especifica que en equilibrio siempre existen más átomos en el nivel inferior que en el nivel superior.



INTERFOTO/Alamy

Ludwig Boltzmann

Físico austriaco (1844-1906)

Boltzmann hizo muchas aportaciones importantes al desarrollo de la teoría cinética de los gases, electromagnetismo y termodinámica. Su obra pionera en el campo de la teoría cinética condujo a la rama de la física conocida como mecánica estadística.

Ahora que se explicó la distribución de energías entre moléculas en un gas, piense sobre la distribución de magnitudes de velocidades moleculares. En 1860, James Clerk Maxwell (1831-1879) obtuvo una expresión que describe la distribución de magnitudes de velocidad moleculares en una forma muy definida. Su obra, y desarrollos posteriores de otros científicos, generaron una gran controversia porque en esa época no se podía lograr experimentalmente la detección directa de moléculas. Sin embargo, alrededor de 60 años después, se diseñaron experimentos que confirmaron las predicciones de Maxwell.

Considere un recipiente de gas cuyas moléculas tienen alguna distribución de magnitudes de velocidad. Suponga que se desea determinar cuántas moléculas de gas tienen una rapidez en el intervalo de, por ejemplo, 400 a 401 m/s. Intuitivamente, se espera que la distribución de rapidez dependa de la temperatura. Además, también es de esperarse que la distribución tenga un máximo en la vecindad de v_{rms} . Es decir, se espera que pocas moléculas tengan rapidezces mucho menores o mucho mayores que v_{rms} porque dichas magnitudes de velocidad extremas sólo resultan de una improbable cadena de colisiones.

La distribución de rapidez observada en las moléculas de gas en equilibrio térmico se muestra en la figura 20.10. La cantidad N_v , llamada **función de distribución de rapidez de Maxwell-Boltzmann**, se define como sigue. Si N es el número total de moléculas, el número de moléculas con magnitudes de velocidad entre v y $v + dv$ es $dN = N_v dv$. Este número también es igual al área del rectángulo coloreado en la figura 20.10. Además, la fracción de moléculas con magnitudes de velocidad entre v y $v + dv$ es $(N_v dv)/N$. Esta fracción también es igual a la probabilidad de que una molécula tenga una rapidez en el rango de v a $v + dv$.

La cantidad N_v que describe la distribución de magnitudes de velocidad de N moléculas de gas es

$$N_v = 4\pi N \left(\frac{m_0}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-m_0 v^2 / 2k_B T} \quad (20.42)$$

donde m_0 es la masa de una molécula de gas, k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura absoluta.² Observe la presencia del factor de Boltzmann $e^{-E/k_B T}$ con $E = \frac{1}{2} m_0 v^2$.

² Para la deducción de esta expresión, vea un texto avanzado de termodinámica

Como se indica en la figura 20.10, la rapidez promedio es un poco menor que la rapidez rms. En la *rapidez más probable* v_{mp} la curva de distribución tiene un máximo. Con la ecuación 20.42 se encuentra que

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_0}} = 1.73 \sqrt{\frac{k_B T}{m_0}} \quad (20.43)$$

$$v_{avg} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_0}} = 1.60 \sqrt{\frac{k_B T}{m_0}} \quad (20.44)$$

$$v_{mp} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m_0}} = 1.41 \sqrt{\frac{k_B T}{m_0}} \quad (20.45)$$

La ecuación 20.43 apareció anteriormente como ecuación 20.22. Los detalles de las deducciones de estas ecuaciones a partir de la ecuación 20.42 se dejan para los problemas al final del capítulo (consulte los problemas 24 y 41). De estas ecuaciones se obtiene que

$$v_{rms} > v_{prom} > v_{mp}$$

La figura 20.11 representa curvas de distribución de rapidez para nitrógeno, N_2 a dos temperaturas. Observe que el máximo en cada curva se desplaza a la derecha a medida que T aumenta, esto indica que la rapidez promedio se incrementa con el aumento de temperatura, al igual que la velocidad rms y la velocidad más probable, como se esperaba de las ecuaciones 20.43-20.45. Ya que la rapidez posible más baja es cero, y el límite superior clásico de la rapidez es infinito, así que las curvas son asimétricas. (En el capítulo 38 se probará que el límite superior real es la rapidez de la luz.)

La ecuación 20.42 muestra que la distribución de magnitudes de velocidad moleculares en un gas depende tanto de la masa como de la temperatura. A una temperatura dada, la fracción de moléculas con magnitudes de velocidad que superan un valor fijo aumenta a medida que la masa disminuye. Así, las moléculas más ligeras, como H_2 y He, escapan más fácilmente hacia el espacio desde la atmósfera de la Tierra que las moléculas más pesadas como N_2 y O_2 . (Vea el análisis de rapidez de escape en el capítulo 13. Las moléculas de gas escapan incluso más fácilmente de la superficie de la Luna que de la Tierra, porque la rapidez de escape en la Luna es menor que en la Tierra, dejándola esencialmente sin atmósfera.)

Las curvas de distribución de rapidez para moléculas en un líquido son similares a las que se muestran en la figura 20.11. El fenómeno de la evaporación de un líquido se puede entender a partir de esta distribución en magnitudes de velocidad, dado que algunas moléculas en el líquido son más energéticas que otras. Algunas de las moléculas más

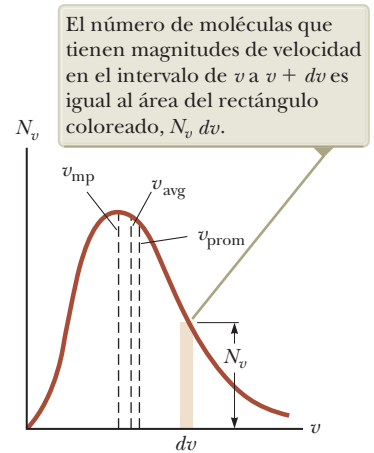


Figura 20.10 Distribución de rapidez de moléculas de gas a cierta temperatura. La función N_v tiende a cero a medida que v tiende a infinito.

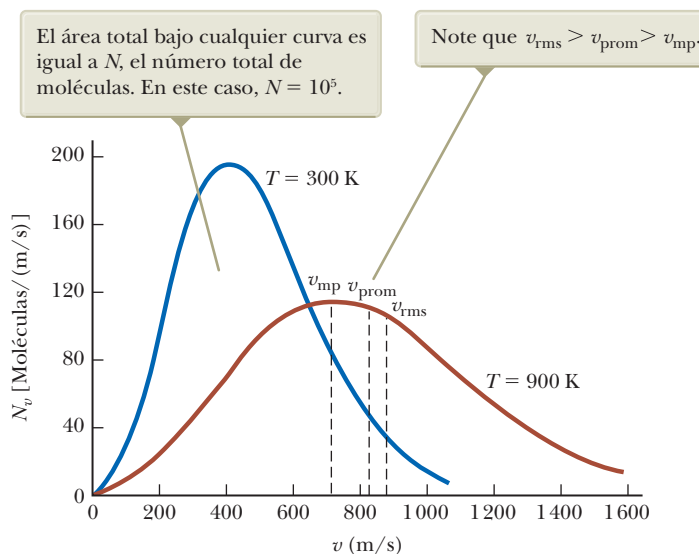


Figura 20.11 Función de distribución de rapidez para 10^5 moléculas de nitrógeno a 300 K y 900 K.

rápidas en el líquido penetran la superficie e incluso dejan el líquido a temperaturas muy por abajo del punto de ebullición. Las moléculas que escapan del líquido por evaporación son las que tienen suficiente energía para superar las fuerzas atractivas de las moléculas en la fase líquida. En consecuencia, las moléculas que quedan en la fase líquida tienen una energía cinética promedio más baja; como resultado, la temperatura del líquido disminuye. Así, la evaporación es un proceso de enfriamiento.

Esa evaporación es un proceso de enfriamiento que explica los efectos que notó en la semblanza de apertura. Cuando el viento sopla en un lado de su dedo vuelto hacia arriba, el proceso de evaporación se acelera. Las moléculas de vapor de agua son arrastradas desde la superficie de su dedo, reduciendo la presión de vapor de agua en la superficie y facilitando que más moléculas salgan de la superficie del agua. Como resultado, se aumenta el proceso de enfriamiento, y ese lado del dedo se siente bien. El lado opuesto de su dedo está protegido del viento, por lo que la evaporación no es tan rápida. Cuando su asesor del Club le puso alcohol en la herida, sintió frío. El alcohol se evapora a una velocidad mayor que el agua, por lo que el proceso de enfriamiento por evaporación hace que la piel se sienta más fría que la piel que está seca.

Ejemplo 20.5 Rapideces moleculares en el gas hidrógeno

Una muestra de 0.500 moles de gas hidrógeno está a 300 K

(A) Encuentre la rapidez promedio, la rapidez rms y la rapidez más probable de las moléculas de hidrógeno.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine un gran número de partículas en un gas real, todas moviéndose en direcciones aleatorias con magnitudes de velocidad diferentes.

Categorizar Se trata con un número muy grande de partículas, así que puede aplicarse la función de distribución de rapidez de Maxwell-Boltzmann.

Analizar Aplique la ecuación 20.44 para encontrar la rapidez promedio:

$$v_{\text{prom}} = 1.60 \sqrt{\frac{k_B T}{m_0}} = 1.60 \sqrt{\frac{(1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K})}{2(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})}}$$

$$= 1.78 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Use la ecuación 20.43 para obtener la rapidez rms:

$$v_{\text{rms}} = 1.73 \sqrt{\frac{k_B T}{m_0}} = 1.73 \sqrt{\frac{(1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K})}{2(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})}}$$

$$= 1.93 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Utilice la ecuación 20.45 para determinar la rapidez más probable:

$$v_{\text{mp}} = 1.41 \sqrt{\frac{k_B T}{m_0}} = 1.41 \sqrt{\frac{(1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K})}{2(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})}}$$

$$= 1.57 \times 10^3 \text{ m/s}$$

(B) Encuentre el número de moléculas con rapideces entre 400 m/s y 401 m/s.

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 20.42 para evaluar el número de moléculas en un estrecho intervalo de magnitudes de velocidad, entre v y $v + dv$:

$$(1) N_v dv = 4\pi N \left(\frac{m_0}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-m_0 v^2 / 2k_B T} dv$$

Evalúe la constante enfrente de v^2 :

$$4\pi N \left(\frac{m_0}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} = 4\pi n N_A \left(\frac{m_0}{2\pi k_B T} \right)^{3/2}$$

$$= 4\pi (0.500 \text{ mol})(6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}) \left[\frac{2(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})}{2\pi (1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K})} \right]^{3/2}$$

$$= 1.74 \times 10^{14} \text{ s}^3/\text{m}^3$$



20.5 continuación

Evalúe el exponente de e que aparece en la ecuación (1):

$$\frac{m_0 v^2}{2k_B T} = \frac{2(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})(400 \text{ m/s})^2}{2(1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(300 \text{ K})} = -0.0645$$

Evalúe $N_v dv$ empleando estos valores en la ecuación (1):

$$\begin{aligned} N_v dv &= (1.74 \times 10^{14} \text{ s}^3/\text{m}^3)(400 \text{ m/s})^2 e^{-0.0645} (1 \text{ m/s}) \\ &= 2.61 \times 10^{19} \text{ moléculas} \end{aligned}$$

Finalizar En esta evaluación, se podría calcular el resultado sin integración porque $dv = 1 \text{ m/s}$ es mucho más pequeño que $v = 400 \text{ m/s}$. De haber buscado el número de partículas por decir, entre 400 m/s y 500 m/s , se habría necesitado integrar la ecuación (1) entre estos límites de rapidez.

Resumen

► Conceptos y principios

La presión de N moléculas de un gas ideal contenido en un volumen V es

$$P = \frac{2}{3} \left(\frac{N}{V} \right) \left(\frac{1}{2} m_0 \overline{v^2} \right) \quad (20.15)$$

La energía cinética traslacional promedio por molécula de un gas, $\frac{1}{2} m_0 \overline{v^2}$, se relaciona con la temperatura T del gas a través de la expresión

$$\frac{1}{2} m_0 \overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T \quad (20.19)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann. Cada grado de libertad traslacional (x , y o z) tiene $\frac{1}{2} k_B T$ de energía asociada con él.

El calor específico molar de un gas monoatómico ideal a volumen constante es $C_V = \frac{3}{2} R$; el calor específico molar a presión constante es $C_p = \frac{5}{2} R$. La razón de calores específicos está dada por $\gamma = C_p / C_V = \frac{5}{3}$.

La **ley de distribución de Boltzmann** describe la distribución de partículas entre estados de energía disponibles. El número relativo de partículas que tienen energía entre E y $E + dE$ es $n_V(E) dE$, donde

$$n_V(E) = n_0 e^{-E/k_B T} \quad (20.41)$$

La **función de distribución de rapidez de Maxwell-Boltzmann** describe la distribución de rapidez de las moléculas en un gas:

$$N_v = 4\pi N \left(\frac{m_0}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-m_0 v^2 / 2k_B T} \quad (20.42)$$

El cambio en energía interna para n moles de cualquier gas ideal que experimenta un cambio en temperatura ΔT es

$$\Delta E_{\text{int}} = n C_V \Delta T \quad (20.26)$$

donde C_V es el **calor específico molar a volumen constante**.

La energía interna de N moléculas (o n moles) de un gas ideal monoatómico es

$$E_{\text{int}} = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} n R T \quad (20.28)$$

Si un gas ideal experimenta una expansión o una compresión adiabáticas, la primera ley de la termodinámica, junto con la ecuación de estado, muestra que

$$P V^\gamma = \text{constante} \quad (20.38)$$


La ecuación 20.42 permite calcular la **rapidez media cuadrática**, la **rapidez promedio** y la **rapidez más probable** de las moléculas del gas:

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_0}} = 1.73 \sqrt{\frac{k_B T}{m_0}}$$

$$v_{\text{prom}} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_0}} = 1.60 \sqrt{\frac{k_B T}{m_0}}$$

$$v_{\text{mp}} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m_0}} = 1.41 \sqrt{\frac{k_B T}{m_0}}$$

Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN. From Cengage.

1. Su grupo ha sido contratado para hacer algunas consultas para un nuevo estadio de béisbol que se está construyendo en su ciudad. Va a ser un estadio totalmente cerrado, y el arquitecto está preocupado por la regulación de la temperatura en el interior del estadio. Un arquitecto excéntrico en el equipo de desarrollo le ha pedido que considere lo siguiente: cada

vez que se golpea o lanza una pelota de béisbol, finalmente se detiene porque es atrapada, golpea la valla, aterriza en las gradas o rueda sobre el suelo hasta detenerse. No importa que detenga la pelota, su energía cinética inicial se transforma finalmente en energía interna en el interior del estadio. El miedo ha sido planteado por esta situación extraña en la que un juego emocionante con muchas pelotas de béisbol detenidas calentará el interior del estadio demasiado para que el sistema de aire acondicionado lo maneje. Realice un cálculo para mostrarle al arquitecto que incluso un juego



emocionante no desafiará al sistema de aire acondicionado por este motivo.

2. **ACTIVIDAD** Considere los diez objetos de nuestro sistema solar en la lista más abajo. Utilizando las temperaturas de la superficie enumeradas para estos objetos, determine la velocidad promedio de los átomos de helio ubicados en las atmósferas de estos objetos. Usando los datos en la tabla 13.2 y la ecuación 13.22, determine la velocidad de escape para cada uno de los objetos. Finalmente, tome la relación de la velocidad de escape a la velocidad promedio de los átomos de helio para cada objeto. (a) ¿Cuál es el valor típico de esta relación para un objeto con poca o sin atmósfera? (b) ¿Cuál es el valor típico de esta relación para que un objeto tenga una atmósfera robusta, pero con poco o nada de helio presente? (c) ¿Cuál es el valor típico de esta relación para que un objeto tenga una atmósfera robusta con una cantidad significativa de helio?

Objeto	Temperatura de la superficie (del Instituto Lunar y Planetario)		Atmósfera
	Lunar	Planetario	
Mercurio	440		Poca o nada
Venus	741		Robusta, poco He
Tierra	288		Robusta, poco He
Marte	244		Robusta, poco He
Ceres	173		Poca o nada
Júpiter	165		Robusta, mucho He
Saturno	134		Robusta, mucho He
Urano	77		Robusta, mucho He
Neptuno	70		Robusta, mucho He
Plutón	40		Poca o nada


3. **ACTIVIDAD** Está trabajando como asistente de enseñanza de un profesor de física. Él le proporcionó los siguientes datos

sobre puntajes de exámenes para dos secciones diferentes de su clase de física:

Puntaje de exámenes Sección 1	Puntaje de exámenes Sección 2
65	99
65	95
65	90
65	85
65	77
65	75
65	75
65	73
65	70
65	67
64	66
64	65
64	63
64	58
64	52
64	49
64	48
64	35
64	28
64	20

- (a) Calcule el puntaje promedio para cada sección y el puntaje promedio rms para cada sección. (b) ¿Cómo se comparan los puntajes promedio de las dos secciones? (c) Compare los puntajes promedio y rms promedio de la Sección 1. ¿Por qué cree que estas dos cantidades tienen esta relación? (d) Compare el puntaje promedio y el puntaje promedio rms para la Sección 2. (e) ¿El promedio rms de un conjunto de números siempre será mayor que el promedio? ¿Por qué si o por qué no?

Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage

SECCIÓN 20.1 Modelo molecular de un gas

El problema 20 del capítulo 18 puede asignarse a esta sección.

- T** Un globo esférico de $4\,000\text{ cm}^3$ de volumen contiene helio a una presión de $1.20 \times 10^5\text{ Pa}$. ¿Cuántas moles de helio hay en el globo si la energía cinética promedio de cada átomo de helio es de $3.60 \times 10^{-22}\text{ J}$?
- S** Un globo esférico de volumen V contiene helio a una presión P . ¿Cuántos moles de helio hay en el globo si la energía cinética promedio de los átomos de helio es K_{prom} ?
- V** Una muestra de 2.00 moles de gas oxígeno se confina en un recipiente de 5.00 L a una presión de 8.00 atm. Encuentre la energía cinética traslacional promedio de las moléculas de oxígeno bajo estas condiciones.
- Oxígeno, modelado como un gas ideal, está en un recipiente y tiene una temperatura de 77.0 °C . ¿Cuál es la magnitud promedio rms de la cantidad de movimiento de las moléculas de gas en el recipiente?
- Un recipiente de 5.00 L contiene gas nitrógeno a 27 °C y 3.00 atm. Encuentre (a) la energía cinética traslacional total de

las moléculas de gas y (b) la energía cinética promedio por molécula.

- Calcule la masa de un átomo de (a) helio, (b) hierro y (c) plomo. Proporcione sus respuestas en kilogramos. Las masas atómicas de estos átomos son 4.00 u, 55.9 u y 207 u, respectivamente.
- T** En un periodo de 1.00 s, 5.00×10^{23} moléculas de nitrógeno golpean una pared con un área de 8.00 cm^2 . Suponga que las moléculas se mueven con una rapidez de 300 m/s y golpean la pared frontal en colisiones elásticas. ¿Cuál es la presión ejercida sobre la pared? *Nota:* La masa de una molécula de N_2 es $4.65 \times 10^{-26}\text{ kg}$.
- CIC** Un recipiente de 7.00 L contiene 3.50 moles de gas a una presión de 1.603 106 Pa. Encuentre (a) la temperatura del gas y (b) la energía cinética promedio de las moléculas de gas en el recipiente. (c) ¿Qué información adicional se necesitaría si se pidiera encontrar la rapidez promedio de las moléculas de gas?

SECCIÓN 20.2 Calor específico molar de un gas ideal

Nota: Pueden emplearse los datos de la tabla 20.2 para gases particulares. Aquí se define un “gas ideal monoatómico” como un gas con los calores específicos molares $C_V = \frac{3}{2}R$ y $C_P = \frac{5}{2}R$, y un “gas ideal diatómico” como el gas con $C_V = \frac{5}{2}R$ y $C_P = \frac{7}{2}R$.

9. Calcule el cambio en energía interna de 3.00 moles de gas helio cuando su temperatura se incrementa en 2.00 K.

10. CR Su hermana, que es agente de bienes raíces, está muy interesada en sus estudios de física. Parte de su trabajo en la venta de propiedades implica conocer los detalles de los sistemas de calefacción para las casas. Ella viene a verlo un día y le comenta que un cliente le dijo lo siguiente: “Si mide la energía interna en el aire de una casa y luego sube el termostato a una temperatura más alta, la energía interna del aire en la casa es exactamente igual a como estaba a la temperatura más baja”. Le resulta difícil de creer, ya que usted ha agregado energía al aire haciendo funcionar el horno. Ayúdela a averiguar si esta afirmación es verdadera o no.

- 11. V** En un proceso a volumen constante se transfieren 209 J de energía por calor a 1.00 mol de un gas monoatómico ideal inicialmente a 300 K. Encuentre (a) el trabajo efectuado sobre el gas, (b) el aumento en energía interna del gas y (c) su temperatura final.
12. Un cilindro vertical con un pesado pistón contiene aire a 300 K. La presión inicial es 2.00×10^5 Pa, y el volumen inicial es 0.350 m^3 . Considere que la masa molar del aire es de 28.9 g/mol y suponga que $C_v = \frac{5}{2}R$. (a) Encuentre el calor específico del aire a volumen constante en unidades de J/kg \times °C. (b) Calcule la masa del aire en el cilindro. (c) Suponga que el pistón se mantiene fijo. Determine la energía de entrada requerida para elevar la temperatura del aire a 700 K. (d) **¿Qué pasaría si?** Suponga de nuevo las condiciones del estado inicial y que el pesado pistón tiene libertad de movimiento. Encuentre la energía de entrada necesaria para elevar la temperatura a 700 K.
13. Una botella aislada de 1 L está llena con té a 90 °C. Vierte en una taza y de inmediato cierra la botella. Haga una estimación de un orden de magnitud del cambio en temperatura del té restante en la botella que resulta de la admisión de aire a temperatura ambiente. Establezca las cantidades que toma como datos y los valores que mide o estima para ellos.

SECCIÓN 20.3 Equipartición de la energía

14. S Cierta molécula tiene f grados de libertad. Demuestre que un gas ideal que consiste de tales moléculas tiene las siguientes propiedades: (a) su energía interna total es $fnRT/2$, (b) su calor específico molar a volumen constante es $fR/2$, (c) su calor específico molar a presión constante es $(f+2)R/2$ y (d) su razón de calor específico es $\gamma = C_p/C_v = (f+2)/f$.

15. CR Usted está trabajando para una compañía de neumáticos para automóviles. Su supervisor está estudiando los efectos de las moléculas que golpean la superficie interna del neumático debido a su movimiento térmico. Él le da los siguientes datos de un experimento reciente. Se midió el aire en el neumático de un automóvil estacionado para tener una presión manométrica de $P_i = 1.65$ atm en un día cuando la temperatura era de $T = 6.5$ °C. El automóvil fue conducido por un tiempo y luego se tomaron medidas de nuevo. La presión manométrica en el neumático era entonces de $P_f = 1.95$ atm y el volumen interior del neumático había aumentado en un 5.00%. (a) Su supervisor le pide que determine por qué factor la velocidad eficaz de las moléculas de aire se ha incrementado desde la primera medición hasta la segunda. (b) También insinúa una propuesta que va a hacer para reemplazar el aire en los neumáticos con argón. **¿Cambiará esto el factor por el cual la velocidad promedio de las moléculas cambia en las condiciones descritas?**

16. **¿Por qué es imposible la siguiente situación?** Un equipo de investigadores descubre un nuevo gas, el cual tiene un valor de $\gamma = C_p/C_v = 1.75$.

17. CR Usted y su hermano menor están diseñando un rifle de aire comprimido que disparará un perdigón de plomo con una masa de $m = 1.10$ g y un área de sección transversal de $A = 0.0300 \text{ cm}^2$. El rifle funciona al permitir que el aire a alta presión se expanda, impulsando el perdigón hacia abajo del cañón del rifle. Debido a que este proceso ocurre muy rápidamente, no se produce una conducción térmica apreciable y la expansión es esencialmente adiabática. Su diseño es tal que, una vez que la presión comienza a empujar sobre el perdigón, se mueve una distancia de $L = 50.0$ cm antes de dejar el extremo abierto del rifle a la velocidad deseada de $v = 120$ m/s. Su diseño también incluye una cámara de volumen $V = 12.0 \text{ cm}^3$ en la que el aire a alta presión se almacena hasta que se libera. Su hermano le recuerda que necesita comprar una bomba para presurizar la cámara. Para determinar qué tipo de bomba comprar, debe encontrar cuál debe ser la presión del aire en la cámara para lograr la velocidad de boca deseada. Ignore los efectos del aire en frente de la bala y la fricción con las paredes internas del cañón.

SECCIÓN 20.4 Procesos adiabáticos para un gas ideal

18. V Durante la carrera de compresión de cierto motor de gasolina, la presión aumenta de 1.00 atm a 20.0 atm. Si el proceso es adiabático y la mezcla combustible-aire se comporta como un gas ideal diatómico, (a) **¿En qué factor cambia el volumen y (b) en qué factor cambia la temperatura?** Suponga que la compresión comienza con 0.0160 moles de gas a 27.0 °C, encuentre los valores de (c) Q , (d) ΔE_{int} y (e) W que caracterizan el proceso.

19. T El aire en una nube de tormenta se expande a medida que se eleva. Si su temperatura inicial es 300 K y no se pierde energía por conducción térmica en la expansión, **¿cuál es su temperatura cuando el volumen inicial se duplica?**

20. **¿Por qué es imposible esta situación?** Se ha diseñado un nuevo motor diesel que incrementa la economía de combustible respecto a modelos previos. Los automóviles con este nuevo diseño son increíblemente solicitados. Dos características del diseño son responsables de este aumentado ahorro de combustible: (1) el motor está totalmente fabricado de aluminio para reducir el peso del automóvil y (2) el escape del motor se emplea para precalentar el aire a 50 °C antes de que entre al cilindro para aumentar la temperatura final del gas comprimido. El motor tiene una *razón de compresión*, es decir, el cociente del volumen inicial del aire con su volumen final después de la compresión, de 14.5. El proceso de compresión es adiabático, y el aire se comporta como un gas ideal diatómico con $\gamma = 1.40$.

21. PG Considere aire (un gas ideal diatómico) a 27.0 °C y presión atmosférica que entra a una bomba de bicicleta que tiene un cilindro con diámetro interno de 2.50 cm y longitud 50.0 cm. La carrera hacia abajo comprime adiabáticamente el aire que alcanza una presión manométrica de 8.00×10^5 Pa antes de entrar a la llanta. Se desea investigar el incremento de temperatura de la bomba. (a) **¿Cuál es el volumen inicial del aire en la bomba?** (b) **¿Cuál es el número de moles de aire en la bomba?** (c) **¿Cuál es la presión absoluta del aire comprimido?** (d) **¿Cuál es el volumen del aire comprimido?** (e) **¿Cuál es la temperatura del aire comprimido?** (f) **¿Cuál es el aumento en energía interna del gas durante la compresión?** **¿Qué pasaría si?** La bomba está hecha de acero con espesor de 2.00 mm. Suponga una longitud del cilindro de 4.00 cm en equilibrio térmico con el aire. (g) **¿Cuál es el volumen de acero en esta longitud de 4.00 cm?** (h) **¿Cuál es la masa del acero en esta longitud de 4.00 cm?** (i) Suponga que la bomba se comprime otra vez. Después de la expansión adiabática, la conducción resulta en el incremento de energía en el inciso (f) compartido entre el gas y la longitud de acero de 4.00 cm. **¿Cuál será el aumento en temperatura del acero después de una compresión?**



SECCIÓN 20.5 Distribución de rapidez de moléculas

22. En una mezcla dos gases se difunden a través de un filtro en cantidades proporcionales a su respectiva rapidez rms. (a) Encuentre la razón de magnitudes de velocidad para los dos isótopos de cloro, ^{35}Cl y ^{37}Cl , mientras se difunden a través del aire. (b) ¿Cuál isótopo se mueve más rápido?

23. **Problema de repaso.** ¿A qué temperatura la rapidez promedio de los átomos de helio sería igual a (a) la rapidez de escape de la Tierra, 1.12×10^4 m/s y (b) la rapidez de escape de la Luna, 2.37×10^3 m/s? *Nota:* La masa de un átomo de helio es 6.64×10^{-27} kg.

24. **S** A partir de la distribución de rapidez de Maxwell-Boltzmann, demuestre que la rapidez más probable de una molécula de gas está dada por la ecuación 20.45. *Nota:* La rapidez más probable corresponde al punto donde la pendiente de la curva de distribución de rapidez dN_V/dv es cero.

25. Suponga que la atmósfera de la Tierra tiene una temperatura uniforme de 20 °C y composición uniforme, con una masa molar efectiva de 28.9 g/mol. (a) Demuestre que la densidad en el número de las moléculas depende de la altura y sobre el nivel del mar de acuerdo con

$$n_V(y) = n_0 e^{-m_0 g y / k_B T}$$

donde n_0 es la densidad de número a nivel del mar ($y = 0$). Este resultado se llama *ley de atmósferas*. (b) Por lo general los aviones comerciales cruzan a una altura de 11.0 km. Encuentre la razón de la densidad atmosférica ahí a la densidad al nivel del mar.

26. La ley de atmósferas establece que la densidad de número de moléculas en la atmósfera depende de la altura y sobre el nivel del mar de acuerdo a

$$n_V(y) = n_0 e^{-m_0 g y / k_B T}$$

donde n_0 es la densidad de número al nivel del mar ($y = 0$). La altura promedio de una molécula en la atmósfera de la Tierra está dada por

$$y_{\text{prom}} = \frac{\int_0^{\infty} y n_V(y) dy}{\int_0^{\infty} n_V(y) dy} = \frac{\int_0^{\infty} y e^{-m_0 g y / k_B T} dy}{\int_0^{\infty} e^{-m_0 g y / k_B T} dy}$$

(a) Pruebe que esta altura promedio es igual a $k_B T / m_0 g$. (b) Evalúe la altura promedio, si supone que la temperatura es 10 °C y la masa molecular es 28.9 u, uniformes a través de la atmósfera.

PROBLEMAS ADICIONALES

27. Ocho moléculas tienen magnitudes de velocidad de 3.00 km/s, 4.00 km/s, 5.80 km/s, 2.50 km/s, 3.60 km/s, 1.90 km/s, 3.80 km/s y 6.60 km/s. Encuentre (a) la rapidez promedio de las moléculas y (b) la rapidez rms de las moléculas.

28. **CIC** En una muestra de un metal sólido, cada átomo tiene libertad de vibrar en torno a alguna posición de equilibrio. La energía del átomo consiste de energía cinética para movimiento en las direcciones x , y y z , más energía potencial elástica asociada con las fuerzas de la ley de Hooke ejercidas por los átomos vecinos sobre él en las direcciones x , y y z . De acuerdo con el teorema de equipartición de la energía, suponga que la energía promedio de cada átomo es $\frac{3}{2} k_B T$ para cada grado de libertad. (a) Pruebe que el calor específico molar del sólido es $3R$. La *ley de Dulong-Petit* establece que este resultado describe sólidos puros a temperaturas suficientemente altas. (Puede ignorar la diferencia entre el calor específico a presión constante y el calor específico a volumen constante.) (b)

Evalúe el calor específico c del hierro. Explique cómo se compara con el valor que se menciona en la tabla 19.1. (c) Repita la evaluación y comparación para el oro.

29. **CIC** Las dimensiones de un salón de clase son $4.20 \text{ m} \times 3.00 \text{ m} \times 2.50 \text{ m}$. (a) Encuentre el número de moléculas de aire en él a presión atmosférica y 20.0 °C. (b) Halle la masa de este aire, si supone que el aire consiste en moléculas diatómicas con masa molar de 28.9 g/mol. (c) Encuentre la energía cinética promedio de las moléculas. (d) Obtenga la rapidez molecular rms. (e) ¿Qué pasaría si? Suponga que el calor específico molar del aire es independiente de la temperatura. Determine el cambio en energía interna del aire en el salón a medida que la temperatura se eleva a 25.0 °C. (f) Explique cómo convencer a un estudiante de que su respuesta al inciso (e) es correcta, aún cuando sea sorprendente.

30. La compresibilidad κ de una sustancia se define como el cambio fraccionario en volumen de dicha sustancia para un cambio dado en presión

$$\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP}$$

(a) Explique por qué el signo negativo en esta expresión asegura que κ siempre es positiva. (b) Demuestre que si un gas ideal se comprime isotérmicamente, su compresibilidad está dada por $\kappa_1 = 1/P$. (c) ¿Qué pasaría si? Demuestre que si un gas ideal se comprime adiabáticamente, su compresibilidad está dada por $\kappa_2 = 1/(\gamma P)$. Determine valores para (d) κ_1 y (e) κ_2 para un gas ideal monoatómico a una presión de 2.00 atm.

31. **CIC** La atmósfera de la Tierra consiste principalmente de oxígeno (21%) y nitrógeno (78%). La rapidez rms de las moléculas de oxígeno en la atmósfera en determinada ubicación es de 535 m/s. (a) ¿Cuál es la temperatura de la atmósfera en ese lugar? (b) La rapidez rms de las moléculas de nitrógeno (N_2) en dicho lugar, ¿es mayor, igual a o menor que 535 m/s? Explique. (c) Determine la rapidez rms del N_2 en esa ubicación.

32. **Problema de repaso.** A medida que una onda sonora pasa a través de un gas, las compresiones son tan rápidas o tan separadas que la conducción térmica se evita por un intervalo de tiempo despreciable o por un grosor de aislamiento efectivo. Las compresiones y enrarecimiento son adiabáticas. (a) Demuestre que la rapidez del sonido en un gas ideal es

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

donde M es la masa molar. La rapidez del sonido en un gas está dada por la ecuación 16.35; use esa ecuación y la definición del módulo volumétrico de la sección 12.4. (b) Calcule la rapidez teórica del sonido en el aire a 20 °C y establezca cómo se compara con el valor en la tabla 16.1. Tome $M = 28.9$ g/mol. (c) Demuestre que la rapidez del sonido en un gas ideal es

$$v = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m_0}}$$

donde m_0 es la masa de una molécula. (d) Establezca cómo el resultado en el inciso (c) se compara con las magnitudes de velocidad más probable, promedio y rms moleculares.

33. **CIC** Examine los datos para gases poliatómicos en la tabla 20.2 y dé una explicación por la que el dióxido de azufre tiene un mayor calor específico a volumen constante que los otros gases poliatómicos a 300 K.

34. **CIC** En un cilindro, una muestra de un gas ideal con número de moles n experimenta un proceso adiabático. (a) Partiendo de

S

la expresión $W = -\int P dV$ y empleando la condición $PV^\gamma = \text{constante}$, demuestre que el trabajo realizado sobre el gas es

$$W = \left(\frac{1}{\gamma - 1} \right) (P_f V_f - P_i V_i)$$

(b) Partiendo de la primera ley de la termodinámica, demuestre que el trabajo efectuado sobre el gas es igual a $nC_v(T_f - T_i)$. (c) ¿Estos dos resultados son consistentes entre sí? Explique.

35. A medida que una muestra de 1.00 mol de un gas ideal monoatómico se expande adiabáticamente, el trabajo efectuado sobre él es $-2.50 \times 10^3 \text{ J}$. La temperatura y presión iniciales del gas son 500 K y 3.60 atm. Calcule (a) la temperatura final y (b) la presión final.

36. Una muestra consiste de n moles de un gas ideal monoatómico. El gas se expande adiabáticamente, con trabajo W realizado sobre él. (El trabajo W es un número negativo.) La temperatura y presión iniciales del gas son T_i y P_i . Calcule (a) la temperatura final y (b) la presión final.

37. El calor latente de vaporización para el agua a temperatura ambiente es $2\,430 \text{ J/g}$. Considere una molécula particular en la superficie de un vaso con agua líquida, móvil hacia arriba con rapidez suficiente que será la siguiente molécula en unirse al vapor. (a) Encuentre su energía cinética traslacional. (b) Halle su rapidez. Ahora considere un gas no denso hecho justo de moléculas como ésta. (c) ¿Cuál es su temperatura? (d) ¿Por qué usted no se quema por el agua en evaporación de un recipiente a temperatura ambiente?

38. Un recipiente contiene 1.00×10^4 moléculas de oxígeno a 500 K. (a) Elabore una gráfica precisa de la función de distribución de rapidez de Maxwell vs rapidez con puntos a intervalos de rapidez de 100 m/s. (b) Determine la rapidez más probable a partir de esta gráfica. (c) Calcule las rapidezces promedio y rms para las moléculas y etiquete estos puntos sobre su gráfica. (d) A partir de la gráfica, estime la fracción de moléculas con rapidezces en el intervalo de 300 m/s a 600 m/s.

39. Para un gas maxwelliano, use una computadora o calculadora programable para encontrar el valor numérico de la razón $N_v(v)/N_v(v_{mp})$ para los siguientes valores de v : (a) $v = (v_{mp}/50.0)$, (b) $(v_{mp}/10.0)$, (c) $(v_{mp}/2.00)$, (d) v_{mp} , (e) $2.00v_{mp}$, (f) $10.0v_{mp}$ y (g) $50.0v_{mp}$. Proporcione sus resultados a tres cifras significativas.

40. Una molécula triatómica puede tener una configuración lineal, como el CO_2 (figura P20.40a), o puede ser no lineal, como el H_2O (figura P20.40b). Suponga que la temperatura de un gas de moléculas triatómicas es suficientemente baja como para que el movimiento vibratorio sea despreciable. ¿Cuál es el calor específico molar a volumen constante, expresado como múltiplo de la constante universal de los gases, (a) si las moléculas son lineales y (b) si las moléculas son no lineales? En altas temperaturas, una molécula triatómica tiene dos modos de vibración, y cada uno aporta $\frac{1}{2}R$ al calor específico molar para su energía cinética y otro $\frac{1}{2}R$ para su energía potencial. Identifique el calor específico molar de alta temperatura a volumen constante para un gas ideal triatómico de (c) moléculas lineales y (d) moléculas no lineales. (e) Explique cómo se pueden emplear los datos de calor específico para determinar si una molécula triatómica es lineal o no lineal. ¿Los datos en la tabla 20.2 son suficientes para hacer esta determinación?

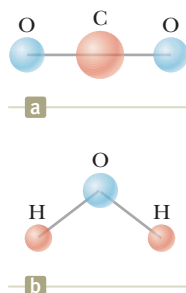


Figura P20.40

41. Utilice la distribución de rapidez de Maxwell-Boltzmann para verificar las ecuaciones 20.43 y 20.44 para (a) la rapidez rms y (b) la rapidez promedio de las moléculas de un gas a una temperatura T . El valor promedio de v^n es

$$\bar{v}^n = \frac{1}{N} \int_0^\infty v^n N_v dv$$

Use la tabla de integrales B.6 en el apéndice B.

42. En el diagrama PV para un gas ideal, una curva isotermia y una curva adiabática pasan a través de cada punto, como se muestra en la figura P20.42. Demuestre que la pendiente de la curva adiabática es más inclinada que la pendiente de la isotermia en ese punto por el factor γ .

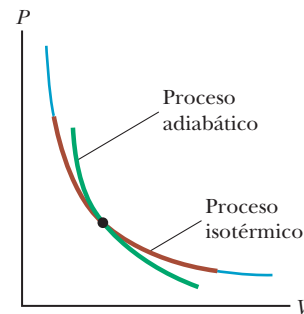


Figura P20.42

43. Con múltiples rayos láser, los físicos han podido enfriar y atrapar átomos de sodio en una región pequeña. En un experimento, la temperatura de los átomos se redujo a 0.240 mK. (a) Determine la rapidez rms de los átomos de sodio a esta temperatura. Los átomos se pueden capturar durante aproximadamente 1.00 s. La trampa tiene una dimensión lineal de más o menos 1.00 cm. (b) ¿Durante qué intervalo de tiempo aproximado un átomo vagaría afuera de la región de la trampa si no hubiera acción de captura?

44. Considere las partículas en una centrifugadora de gas, dispositivo utilizado para separar partículas de diferente masa al hacerlas girar en una trayectoria circular de radio r con rapidez angular ω . La fuerza que actúa sobre una molécula de gas hacia el centro de la centrifugadora es $m_0 \omega^2 r$. (a) Explique cómo se puede usar una centrifugadora de gas para separar partículas de diferente masa. (b) Suponga que la centrifugadora contiene un gas de partículas de idéntica masa. Demuestre que la densidad de las partículas como función de r es

$$n(r) = n_0 e^{m_0 \omega^2 r^2 / 2k_B T}$$

PROBLEMA DE DESAFÍO

45. Las ecuaciones 20.43 y 20.44 muestran que $v_{rms} > v_{prom}$ para una colección de partículas de gas, lo cual es cierto siempre que las partículas tengan una distribución de magnitudes de velocidad. Explore esta desigualdad para un gas de dos partículas. Sea $v_1 = a v_{prom}$ la rapidez de una partícula y que la otra partícula tenga rapidez $v_2 = (2 - a) v_{prom}$. (a) Demuestre que el promedio de estas dos magnitudes de velocidad es v_{prom} . (b) Demuestre que

$$v_{rms}^2 = v_{prom}^2 (2 - 2a + a^2)$$

(c) Argumente que la ecuación en el inciso (b) demuestra que, en general, $v_{rms} > v_{prom}$. (d) ¿Bajo qué condición especial se tendrá $v_{rms} = v_{prom}$ para el gas de dos partículas?

21

Máquinas térmicas, entropía y segunda ley de la termodinámica



▲
Un refrigerador en un vehículo recreativo. ¿Cómo funciona un refrigerador? (Adam Bronkhorst/Alamy)

- 21.1 Máquinas térmicas y segunda ley de la termodinámica
- 21.2 Bombas de calor y refrigeradores
- 21.3 Procesos reversibles e irreversibles
- 21.4 La máquina de Carnot
- 21.5 Motores de gasolina y diesel
- 21.6 Entropía
- 21.7 Cambios de entropía en sistemas termodinámicos
- 21.8 Entropía y la segunda ley

IMAGINE Todavía está en su viaje de campamento del Club de Física. El refrigerador eléctrico en la casa rodante de su asesor del club ha dejado de funcionar de repente. Usted ayuda a su asesor a sacar el refrigerador de su montaje e inspeccionar el funcionamiento. Éste mira un poco, intenta algunas cosas y luego dice que sospecha que el compresor se ha estropeado. Le pregunta qué hace el compresor y él dice que comprime el refrigerante gaseoso a una alta temperatura y presión. Esto lo hace pensar. Si está tratando de mantener los alimentos fríos en el refrigerador, ¿por qué le gustaría calentar el refrigerante? Su asesor continúa explicando que los aires acondicionados funcionan de la misma manera. Luego dice que cree que el refrigerador no se puede reparar y que deben ir a la tienda de suministros para acampar y comprar un refrigerador de propano de bajo costo para usar durante el resto de su viaje. "¿Qué dice? ¿Se puede enfriar la comida quemando propano? ¿Cómo puede funcionar eso?". Usted pasa las siguientes horas en línea investigando los ciclos de refrigeración.

CONEXIONES Aunque la primera ley de la termodinámica, que estudiamos en el capítulo 19, es muy importante, no hace distinción entre los procesos que ocurren espontáneamente y los que no. Solo ciertos tipos de procesos de transformación y transferencia de energía tienen lugar en la naturaleza. La segunda ley de la termodinámica, el tema principal de este capítulo, establece qué procesos ocurren y cuáles no. En general, por ejemplo, es común ver procesos en los que la energía mecánica se transforma en energía interna. Cuando un libro que se desliza sobre una superficie se detiene, su energía cinética se ha transformado en energía interna, que se extiende en el libro y la superficie. Uno nunca esperaría que esta energía interna se recobre de nuevo en el libro, de modo que el libro comience a moverse otra vez. Los libros en reposo y en equilibrio estático *siempre* permanecen en reposo. También es común ver la transferencia de energía por calor de un objeto caliente a un objeto frío con el que está en contacto. Uno nunca esperaría agregar hielo a la temperatura ambiente del agua y ver que el agua se

calentara y el hielo se enfriara. La energía *siempre* se transfiere del agua tibia al hielo frío. Los procesos esperados descritos aquí son *irreversibles*; es decir, son procesos que ocurren naturalmente en una sola dirección. No se ha observado que ningún proceso irreversible vaya hacia atrás. Si lo hiciera, violaría la segunda ley de la termodinámica.¹ La segunda ley de la termodinámica opera en todos los procesos naturales que estudiaremos en futuros capítulos. En este capítulo, estudiamos esta ley y una cantidad estrechamente relacionada, la *entropía*. Comenzamos nuestra búsqueda para comprender tanto la segunda ley como la entropía investigando la termodinámica de las *máquinas térmicas*.

21.1 Máquinas térmicas y segunda ley de la termodinámica

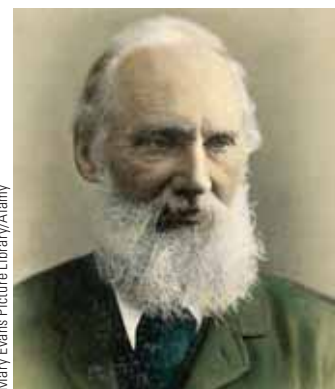
Una **máquina térmica** es un dispositivo que toma energía por calor² y, al funcionar en un proceso cíclico, expulsa una fracción de dicha energía mediante trabajo. Por ejemplo, en un típico proceso con el cual una planta de energía produce electricidad, un combustible, como carbón, se quema y los gases de alta temperatura producidos se emplean para convertir agua líquida en vapor. Este vapor se dirige a las aspas de una turbina y las pone a girar. La energía mecánica asociada con esta rotación se utiliza para impulsar un generador eléctrico. Otro dispositivo que se modela como máquina térmica es el motor de combustión interna de un automóvil. Este dispositivo emplea energía de la quema de un combustible para realizar trabajo sobre pistones, lo que resulta en el movimiento del automóvil.

Considere más en detalle la operación de una máquina térmica. Ésta lleva alguna sustancia de trabajo a través de un proceso cíclico durante el cual (1) la sustancia de trabajo absorbe energía por calor de un depósito de energía a alta temperatura, (2) la máquina realiza trabajo y (3) se expulsa energía por calor a un depósito a temperatura más baja. Como un ejemplo, considere la operación de una máquina de vapor (figura 21.1), que utiliza agua como la sustancia de trabajo. El agua en una caldera absorbe energía de la quema de combustible y la convierte en vapor, que luego realiza trabajo al expandirse contra un pistón. Después de que el vapor se enfría y condensa, el agua líquida producida regresa a la caldera y el ciclo se repite.

Es útil representar de manera esquemática una máquina térmica, como en la figura 21.2 (página 558). La máquina absorbe una cantidad de energía $|Q_h|$ del depósito caliente. Para la explicación matemática de las máquinas térmicas, se emplean valores absolutos para hacer positivas todas las transferencias de energía, y la dirección de transferencia se indica con un signo explícito, positivo o negativo. La máquina realiza trabajo $W_{\text{máq}}$ (así trabajo *negativo* $W = -W_{\text{máq}}$ es efectuado *sobre* la máquina) y después entrega una cantidad de energía $|Q_c|$ al depósito frío. Ya que la sustancia de trabajo pasa a través de un ciclo, sus energías internas inicial y final son iguales: $\Delta E_{\text{int}} = 0$. Así, de la primera ley de la termodinámica, para cada ciclo de la máquina, $\Delta E_{\text{int}} = Q + W = Q - W_{\text{máq}} = 0$, y el trabajo neto $W_{\text{máq}}$ realizado por una máquina térmica es igual a la energía neta Q_{neta} que se le transfiere.

¹Aunque un proceso que ocurre en el sentido inverso del tiempo nunca se ha *observado*, es *posible* que suceda. Sin embargo, como se verá más adelante en este capítulo, la probabilidad de que ocurra tal proceso es infinitesimalmente pequeña. Desde este punto de vista, los procesos suceden con una probabilidad muy grande en una dirección que en la dirección opuesta.

²Se emplea calor como modelo para transferencia de energía a una máquina térmica. Sin embargo, en el modelo de máquina térmica son posibles otros métodos de transferencia de energía. Por ejemplo, la atmósfera de la Tierra se puede modelar como una máquina térmica con transferencia de energía de entrada mediante radiación electromagnética del Sol. La salida de la máquina térmica atmosférica causa la estructura de los vientos en la atmósfera.



Mary Evans Picture Library/Alamy

Lord Kelvin

Físico y matemático británico (1824-1907)

William Thomson nació en Belfast, conocido como Kelvin fue el primero en proponer el uso de una escala absoluta de temperatura. La escala de temperatura Kelvin se nombró así en su honor. El trabajo de Kelvin en termodinámica condujo a la idea de que la energía no puede pasar espontáneamente de un objeto más frío a un objeto más caliente.



Andy Moore/Photolibary/Jupiter Images

Figura 21.1 Esta locomotora impulsada por vapor obtiene su energía mediante la quema de madera o carbón. La energía generada vaporiza agua en vapor, que impulsa la locomotora. Las modernas locomotoras usan combustible diesel en lugar de madera o carbón. Ya sean antiguas o modernas, tales locomotoras se modelan como máquinas térmicas, que extraen energía de la quema de un combustible y convierten una fracción del mismo en energía mecánica.

Como puede ver a partir de la figura 21.2, $Q_{\text{net}} = |Q_h| - |Q_c|$; por tanto,

$$W_{\text{máq}} = |Q_h| - |Q_c| \quad (21.1)$$

La **eficiencia térmica** e de una máquina térmica se define como la razón del trabajo neto realizado por la máquina durante un ciclo, a la energía de entrada a la mayor temperatura durante el ciclo:

$$e \equiv \frac{W_{\text{máq}}}{|Q_h|} = \frac{|Q_h| - |Q_c|}{|Q_h|} = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|} \quad (21.2)$$

Eficiencia térmica de una máquina térmica ▶

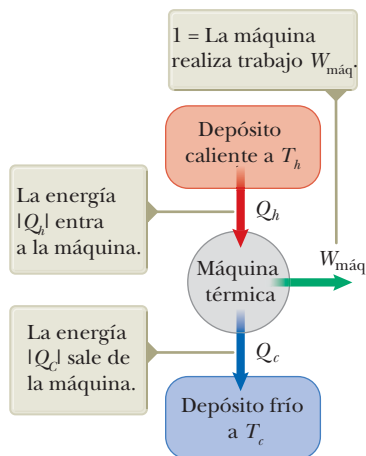


Figura 21.2 Representación esquemática de una máquina térmica.

Puede pensar en la eficiencia como la razón de lo que gana (trabajo) a lo que da (transferencia de energía a la mayor temperatura). En la práctica, todas las máquinas térmicas sólo expulsan una fracción de la energía de entrada Q_h por trabajo mecánico; en consecuencia, su eficiencia siempre es menor que el 100%. Por ejemplo, un buen motor de automóvil tiene una eficiencia aproximada de 20%, y los motores diesel tienen eficiencias que varían de 35% a 40%.

La ecuación 21.2 muestra que una máquina térmica tiene 100% de eficiencia ($e = 1$) sólo si $|Q_c| = 0$, es decir, si no se expulsa energía al depósito frío. En otras palabras, una máquina térmica con eficiencia perfecta tendría que expulsar toda la energía de entrada por trabajo. Las eficiencias de los motores reales están muy por debajo de 100%, la **forma de Kelvin-Planck de la segunda ley de la termodinámica** establece lo siguiente:

Es imposible construir una máquina térmica que, funcionando en un ciclo, no produzca otro efecto que la entrada de energía por calor de un depósito y la realización de una cantidad igual de trabajo.

Este enunciado de la segunda ley significa que, durante el funcionamiento de una máquina térmica, $W_{\text{máq}}$ nunca puede ser igual a $|Q_h|$ o, que algo de energía $|Q_c|$ se *debe* expulsar al ambiente.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 21.1

Primera y segunda

leyes Observe la distinción entre la primera y segunda leyes de la termodinámica. Si un gas experimenta un *proceso isotérmico en una dirección*, entonces $\Delta E_{\text{int}} = Q + W = 0$ y $W = -Q$. Por tanto, la primera ley permite que *toda* la energía de entrada por calor se expulse por trabajo. Sin embargo, en una máquina térmica, en la que una sustancia se somete a un proceso *cíclico*, sólo una *parte* de la energía de entrada por calor se puede expulsar por trabajo, de acuerdo con la segunda ley.

- E XAMEN RÁPIDO 21.1** La energía de entrada a una máquina es 4.00 veces mayor que el trabajo que realiza. (i) ¿Cuál es su eficiencia térmica? (a) 4.00, (b) 1.00, (c) 0.250, (d) imposible de determinar. (ii) ¿Qué fracción de la energía de entrada se expulsa al depósito frío? (a) 0.250, (b) 0.750, (c) 1.00, (d) imposible de determinar.

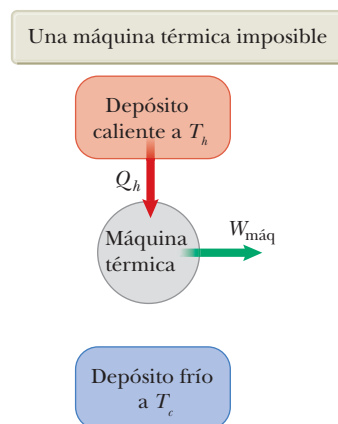


Figura 21.3 Diagrama esquemático de una máquina térmica que toma energía de un depósito caliente y realiza una cantidad equivalente de trabajo. Es imposible construir tal máquina perfecta.

Ejemplo 21.1 La eficiencia de una máquina

Durante un ciclo, una máquina transfiere $2.00 \times 10^3 \text{ J}$ de energía de un depósito caliente, y transfiere $1.50 \times 10^3 \text{ J}$ conforme expulsa a un depósito frío.

Encuentre la eficiencia de la máquina.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Revise la figura 21.2; piense en la energía que va a la máquina desde el depósito caliente y se divide, con una parte que sale por trabajo y otra por calor hacia el depósito frío.

Categorizar Este ejemplo involucra la evaluación de cantidades de las ecuaciones introducidas en esta sección, así que se clasifica como un problema de sustitución.

Encuentre la eficiencia de la máquina a partir de la ecuación 21.2:
$$e = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|} = 1 - \frac{1.50 \times 10^3 \text{ J}}{2.00 \times 10^3 \text{ J}} = 0.250, \text{ o } 25.0\%$$

(B) ¿Cuánto trabajo realiza esta máquina en un ciclo?

SOLUCIÓN

Determine el trabajo efectuado por la máquina al tomar la diferencia entre las energías de entrada y de salida:

$$\begin{aligned} W_{\text{máq}} &= |Q_h| - |Q_c| = 2.00 \times 10^3 \text{ J} - 1.50 \times 10^3 \text{ J} \\ &= 5.0 \times 10^2 \text{ J} \end{aligned}$$

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que se le pregunta por la potencia de salida de la máquina. ¿Tiene suficiente información para responder?

Respuesta No, la información es insuficiente. La potencia de una máquina es la *rapidez* a la que realiza trabajo. Sabe cuánto trabajo se efectúa por ciclo, pero carece de información sobre el intervalo de tiempo asociado con un ciclo. Sin embargo, si se le dijera que la máquina opera a 2 000 rpm (revoluciones por minuto), podría relacionar esta rapidez con el periodo de rotación T del mecanismo de la máquina. Si supone que hay un ciclo termodinámico por revolución, la potencia es

$$P = \frac{W_{\text{máq}}}{T} = \frac{5.0 \times 10^2 \text{ J}}{\left(\frac{1}{2000} \text{ min}\right)} \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) = 1.7 \times 10^4 \text{ W}$$

21.2 Bombas de calor y refrigeradores

En una máquina térmica, la dirección de transferencia de energía es del depósito caliente al depósito frío, que es la dirección natural. La función de la máquina térmica es procesar la energía del depósito caliente para que se transforme en trabajo útil. ¿Qué pasaría si se desea transferir energía del depósito frío al depósito caliente? Ya que no es la dirección natural de transferencia de energía, se debe poner algo de energía en un dispositivo para lograrlo. Los dispositivos que logran esta tarea se llaman **bombas de calor** y **refrigeradores**. Por ejemplo, los hogares en verano se enfrían con el uso de bombas de calor llamadas *condicionadores de aire*. El acondicionador de aire transfiere energía de la habitación fría en la casa al aire caliente exterior.

En un refrigerador o en una bomba de calor, la máquina toma energía $|Q_c|$ de un depósito frío y expulsa energía $|Q_h|$ a un depósito caliente (figura 21.4), que puede lograrse sólo si se realiza trabajo *sobre* la máquina. De la primera ley, se conoce que la energía cedida al depósito caliente debe ser igual a la suma del trabajo realizado y la energía tomada del depósito frío. Por tanto, el refrigerador o la bomba de calor transfiere energía desde el cuerpo más frío (por ejemplo, los contenidos de un refrigerador de cocina o el aire invernal afuera de un edificio) a un cuerpo más caliente (el aire en la cocina o a una habitación en el edificio). En la práctica, es deseable llevar a cabo este proceso con un mínimo

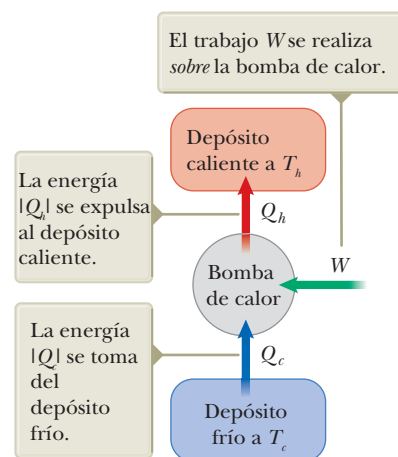


Figura 21.4 Representación esquemática de una bomba de calor.

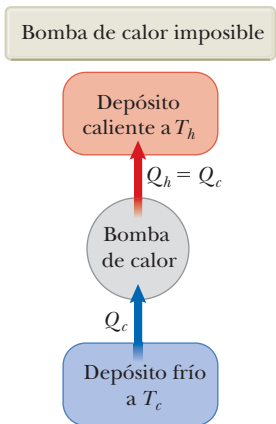


Figura 21.5 Diagrama esquemático de una bomba de calor o refrigerador imposible, es decir, uno que toma energía de un depósito frío y expulsa una cantidad equivalente de energía a un depósito caliente sin la entrada de energía por trabajo.

de trabajo. Si el proceso se pudiera lograr sin efectuar trabajo alguno, el refrigerador o bomba de calor sería “perfecto” (figura 21.5). De nuevo, la existencia de tal dispositivo violaría la segunda ley de la termodinámica, que en la forma del **enunciado de Clausius**³ establece:

Es imposible construir una máquina cíclica cuyo único efecto sea transferir energía de manera continua por calor desde un objeto a otro a una mayor temperatura sin la entrada de energía por trabajo.

En términos más simples, la energía no se transfiere espontáneamente por calor de un objeto frío a un objeto caliente. Se requiere trabajo de entrada para que funcione un refrigerador.

Los enunciados de Clausius y de Kelvin-Planck de la segunda ley de la termodinámica aparecen, a primera vista, como desconectados, pero de hecho son equivalentes en todos los aspectos. Aunque no se prueba aquí, si algún enunciado es falso, también lo es el otro.⁴

En la práctica, una bomba de calor consiste en un fluido que circula a través de dos conjuntos de serpentines metálicos que pueden intercambiar energía con los alrededores. El fluido es frío y a baja presión cuando está en los serpentines ubicados en un ambiente frío, donde absorbe energía por calor. Entonces el fluido caliente resultante se comprime y entra a los otros serpentines como un fluido caliente de alta presión. Ahí libera su energía almacenada a los alrededores calientes. En un acondicionador de aire, la energía se absorbe en el fluido en los serpentines ubicados en el interior de un edificio; después de que el fluido se comprime, la energía deja el fluido a través de serpentines localizados en el exterior. En un refrigerador, los serpentines externos están detrás o debajo de la unidad (figura 21.6). Los serpentines internos están en las paredes del refrigerador y absorben energía de los alimentos.

En el párrafo anterior, vemos por qué queremos que el refrigerante esté caliente, una pregunta que hicimos en el “Imagine” de apertura con respecto al refrigerador en la casa rodante. Pero, ¿qué hay del refrigerador de propano? Este tipo de refrigerador también toma una sustancia a través de un ciclo. En este caso, la sustancia es amoníaco, que se combina en diversas partes del ciclo con agua e hidrógeno. El quemador de propano calienta la combinación de amoníaco y agua, que luego viaja a las bobinas externas para liberar energía en el aire. El amoníaco se separa del agua y luego se combina con hidrógeno. Luego se evapora. Como explicamos en el capítulo 20, la evaporación es un proceso de enfriamiento. El amoníaco frío pasa a través de los serpentines de enfriamiento, donde absorbe la energía del interior del refrigerador, se mezcla con agua nuevamente y luego vuelve al comienzo del ciclo.

La efectividad de una bomba de calor se describe en términos de un número llamado **coeficiente de rendimiento (COP)**. El COP es similar a la eficiencia térmica de una máquina térmica en que es la razón de lo que gana (energía transferida a o desde un depósito) a lo que da (entrada de trabajo). Para una bomba de calor que funciona en el modo de enfriamiento, “lo que gana” es energía removida del depósito frío. El refrigerador o acondicionador de aire más efectivo es el que retira la mayor cantidad de energía del depósito frío a cambio de la menor cantidad de trabajo. Por tanto, para aquellos dispositivos que funcionan en el modo de enfriamiento, se define el COP en términos de $|Q_c|$:

$$\text{COP (modo de enfriamiento)} = \frac{\text{trabajo efectuado sobre la bomba de calor}}{\text{energía transferida a baja temperatura}} = \frac{|Q_c|}{W}$$

Un buen refrigerador debe tener un COP alto, típicamente 5 o 6.

Además de aplicaciones de enfriamiento, las bombas de calor cada vez se vuelven más populares para propósitos de calentamiento. En el modo de calentamiento, la energía es absorbida del aire frío exterior de un edificio y el aire caliente es liberado dentro del



Figura 21.6 Parte posterior de un refrigerador casero. El aire que rodea los serpentines es el depósito caliente.

³Expresada por primera vez por Rudolf Clausius (1822-1888).

⁴Para esta prueba vea un texto avanzado de termodinámica.

mismo. El COP de una bomba de calor se define como la razón de la energía transferida hacia el depósito caliente al trabajo requerido para transferir dicha energía:

$$\text{COP (modo de calentamiento)} = \frac{\text{trabajo realizado sobre la bomba de calor}}{\text{energía transferida a alta temperatura}} = \frac{|Q_h|}{W}$$

Si la temperatura exterior es de 25 °F (−4 °C) o mayor, un valor típico del COP para una bomba de calor es aproximadamente 4. Es decir, la cantidad de energía transferida al edificio es cerca de cuatro veces más que el trabajo efectuado por el motor en la bomba de calor. Sin embargo, conforme desciende la temperatura exterior, se vuelve más difícil que la bomba de calor extraiga suficiente energía del aire y así el COP disminuye. Por tanto, el uso de bombas de calor que extraen energía del aire, aunque satisfactorio en climas moderados, no es adecuado en áreas donde las temperaturas invernales son muy bajas. Es posible emplear bombas de calor en áreas más frías al enterrar los serpentines exteriores en el suelo, a buena profundidad. En ese caso, la energía se extrae del suelo, que tiende a estar más caliente que el aire en el invierno.

- EJEMPLO RÁPIDO 21.2** La energía que entra a un calentador eléctrico mediante transmisión eléctrica se puede convertir en energía interna con una eficiencia de 100%. ¿En qué factor cambia el costo de calentar su casa cuando sustituye su sistema de calefacción eléctrica con una bomba de calor eléctrica que tenga un COP de 4.00? Suponga que el motor que activa la bomba de calor es 100% eficiente. (a) 4.00, (b) 2.00, (c) 0.500, (d) 0.250.

Ejemplo 21.2 Congelación de agua

Cierto refrigerador tiene un COP de 5.00. Cuando el refrigerador está en funcionamiento, su potencia de entrada es de 500 W. Una muestra de agua de 500 g de masa y 20.0 °C de temperatura se coloca en el compartimiento del congelador. ¿Cuánto tarda en congelar el agua a 0 °C? Suponga que las otras partes del refrigerador permanecen a la misma temperatura y no hay fugas de energía al exterior, así que la operación del refrigerador resulta sólo en energía que se extrae del agua.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La energía sale del agua, lo que reduce su temperatura y luego se congela en hielo. El intervalo de tiempo requerido para todo este proceso se relaciona con la rapidez de extracción de energía del agua, la que a su vez se relaciona con la potencia de entrada del refrigerador.

Categorizar Este ejemplo se clasifica como una combinación de la comprensión de los cambios de temperatura y cambios de fase del capítulo 19, y el entendimiento de las bombas de calor de este capítulo.

Analizar Use la potencia nominal del refrigerador para encontrar el intervalo de tiempo Δt necesario para que ocurra el proceso de congelación:

Aplique la ecuación 21.3 para relacionar el trabajo W realizado sobre la bomba de calor, a la energía $|Q_c|$ extraída del agua:

$$P = \frac{W}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{W}{P}$$

$$\Delta t = \frac{|Q_c|}{P(\text{COP})}$$

Utilice las ecuaciones 19.4 y 19.8 para sustituir la cantidad de energía $|Q_c|$ que debe extraerse del agua de masa m :

$$\Delta t = \frac{|mc \Delta T + L_f \Delta m|}{P(\text{COP})}$$

Observe que la cantidad de agua que se congela es $\Delta m = -m$ porque toda el agua se congela:

$$\Delta t = \frac{|m(c \Delta T - L_f)|}{P(\text{COP})}$$

continúa

21.2 continuación

Sustituya valores numéricos:

$$\Delta t = \frac{|(0.500 \text{ kg})[(4 \text{ 186 J/kg} \cdot \text{ }^\circ\text{C})(-20.0^\circ\text{C}) - 3.33 \times 10^5 \text{ J/kg}]|}{(500 \text{ W})(5.00)}$$

$$= 83.3 \text{ s}$$

Finalizar En realidad, el intervalo de tiempo para que el agua se congele en un refrigerador es mucho más que 83.3 s, lo que sugiere que las suposiciones del modelo no son válidas. Sólo una pequeña parte de la energía extraída del interior del refrigerador en un intervalo de tiempo dado proviene del agua. También se debe extraer energía del recipiente en el que se coloca el agua, y se debe extraer la energía que continuamente se filtra al interior desde el exterior.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 21.2

Todos los procesos reales son irreversibles El proceso reversible es una idealización; todos los procesos reales en la Tierra son irreversibles.

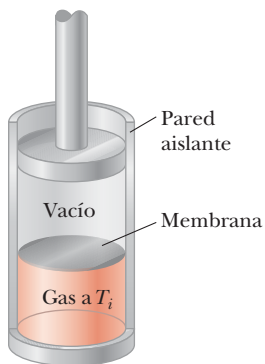


Figura 21.7 Expansión libre adiabática de un gas.

21.3 Procesos reversibles e irreversibles

En la siguiente sección se propone una máquina térmica teórica que sea lo más eficiente posible. Para entender su naturaleza, primero se debe examinar el significado de los procesos reversibles e irreversibles. En un proceso **reversible**, el sistema que experimenta el proceso puede retornar a sus condiciones iniciales a lo largo de la misma trayectoria sobre un diagrama PV , y cada punto sobre esta ruta es un estado de equilibrio. Un proceso que no satisface estos requisitos es **irreversible**.

Se sabe que todos los procesos naturales son irreversibles. Examine la **expansión libre adiabática** de un gas, y muestre que no puede ser reversible. Considere un gas en un recipiente aislado térmicamente, como se muestra en la figura 21.7. Una membrana separa al gas de un vacío. Cuando la membrana se perfora, el gas se expande libremente en el vacío. Como resultado de la perforación, el sistema cambió porque ocupa un mayor volumen después de la expansión. Debido a que el gas no ejerce una fuerza a través de un desplazamiento, entonces no realiza trabajo sobre los alrededores mientras se expande $W = 0$. Además, no se transfiere energía hacia o desde el gas por calor porque el recipiente está aislado de sus alrededores $Q = 0$. Por tanto, de la primera ley de la termodinámica, la energía interna E_{int} del gas no cambia y, como resultado, su temperatura es la misma después de la expansión. En este proceso adiabático, el sistema cambió pero los alrededores no.

Para que este proceso sea reversible, el gas debe retornar a su volumen y temperatura originales sin cambiar los alrededores. Imagine invertir el proceso mediante la compresión del gas a su volumen original. Para hacerlo, se ajusta el recipiente con un pistón y se usa una máquina para forzar el pistón hacia adentro como se muestra en la figura 21.7. Durante este proceso, los alrededores cambian porque se realiza trabajo mediante un agente externo sobre el sistema. Además, el sistema cambia porque la compresión incrementa la temperatura del gas. La temperatura del gas puede disminuirse si se le permite entrar en contacto con un depósito de energía externo. Aunque esta etapa regresa al gas a sus condiciones originales, los alrededores de nuevo resultan afectados porque se agrega energía a los alrededores desde el gas. Si esta energía se pudiera emplear para impulsar la máquina que comprime el gas, la transferencia de energía neta hacia los alrededores sería cero. De esta manera, el sistema y sus alrededores podrían retornar a sus condiciones iniciales y se podría identificar el proceso como reversible. Sin embargo, el enunciado de Kelvin-Planck de la segunda ley especifica que la energía removida del gas para regresar la temperatura a su valor original no se puede convertir completamente en energía mecánica por el proceso de trabajo efectuado por la máquina al comprimir el gas. Por tanto, se debe concluir que el proceso es irreversible.

También se podría argumentar que la expansión libre adiabática es irreversible al considerar la definición de un proceso reversible que se refiere a los estados de equilibrio. Por ejemplo, durante la expansión súbita, ocurren variaciones significativas de presión a través del gas. Por tanto, en algún momento entre los estados inicial y final no hay un valor bien



definido de la presión para todo el sistema. De hecho, el proceso no se puede representar como una trayectoria sobre un diagrama PV . En una expansión libre adiabática el diagrama PV mostraría como puntos las condiciones inicial y final, pero estos puntos no estarían conectados por una trayectoria. Así, ya que las condiciones intermedias entre los estados inicial y final no son estados de equilibrio, el proceso es irreversible.

Aunque todos los procesos reales son irreversibles, algunos son casi reversibles. Si un proceso real ocurre muy lentamente, tal que el sistema siempre está muy cerca de un estado de equilibrio, el proceso se puede aproximar como reversible.

Una característica general de un proceso reversible es que no presenta efectos no conservativos (como turbulencia o fricción) que transformen energía mecánica a energía interna. Tales efectos pueden ser imposibles de eliminar por completo. Así, no es de sorprender que los procesos reales en la naturaleza sean irreversibles.

21.4 La máquina de Carnot

En 1824 un ingeniero francés llamado Sadi Carnot describió una máquina teórica, ahora llamada **máquina de Carnot**, que es de gran importancia desde puntos de vista prácticos y teóricos. Él demostró que una máquina térmica que funciona en un ciclo reversible ideal, llamado **ciclo de Carnot**, entre dos depósitos de energía es la máquina más eficiente posible. Tal máquina ideal establece un límite superior sobre las eficiencias de todas las otras máquinas. Es decir, el trabajo neto realizado, en el ciclo de Carnot, por una sustancia de trabajo es la mayor cantidad de trabajo posible para una cantidad dada de energía suministrada a la sustancia a la temperatura superior. El **teorema de Carnot** se puede establecer como sigue:

Ninguna máquina térmica real que opere entre dos depósitos de energía puede ser más eficiente que una máquina de Carnot que funcione entre los mismos dos depósitos.

En esta sección, se demostrará que la eficiencia de una máquina de Carnot sólo depende de las temperaturas de los depósitos. A su vez, que la eficiencia representa la máxima eficiencia posible para máquinas reales. Confirme que la máquina de Carnot es la más eficiente. Imagine una máquina hipotética con una eficiencia mayor que la de una máquina de Carnot. Considere la figura 21.8, donde se muestra a la izquierda la máquina hipotética con $e > e_C$ conectada entre depósitos caliente y frío. Además, se implementa una máquina de Carnot entre los mismos depósitos. El ciclo de Carnot es reversible, entonces la máquina de Carnot puede operar en reversa como una bomba de calor de Carnot, como se muestra a la derecha en la figura 21.8. Se iguala el trabajo de salida de la máquina al trabajo de entrada de la bomba de calor, $W = W_C$, así que no existe intercambio de energía por trabajo entre los alrededores y la combinación máquina-bomba de calor.

Debido a la relación propuesta entre las eficiencias de la máquina térmica y la bomba de calor cuando ambas son operadas como máquinas, se debe tener

$$e > e_C \rightarrow \frac{|W|}{|Q_h|} > \frac{|W_C|}{|Q_{hC}|}$$

Los numeradores de estas dos fracciones se eliminan porque los trabajos se han igualado en la configuración en la figura 21.8. Esta expresión requiere que

$$|Q_{hC}| > |Q_h| \quad (21.5)$$

De la ecuación 21.1, la igualdad de los trabajos da

$$|W| = |W_C| \rightarrow |Q_h| - |Q_c| = |Q_{hC}| - |Q_{cC}|$$



Photo Researchers

Sadi Carnot

Ingeniero francés (1796-1832)

Carnot fue el primero en demostrar la relación cuantitativa entre trabajo y calor. En 1824 publicó su única obra, *Reflexiones sobre el poder motriz del calor*, que revisaba la importancia industrial, política y económica de la máquina de vapor. En ella, definió trabajo como "el peso levantado a través de una altura".

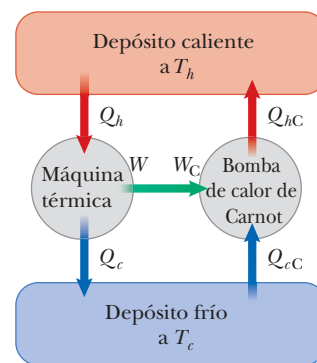


Figura 21.8 Dos máquinas trabajan como depósitos de energía: una máquina de Carnot operada como una bomba de calor, y otra máquina con una propuesta eficiencia más alta funciona entre dos depósitos de energía. Se igualan los trabajos de entrada y de salida.



PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 21.3

No compre una máquina de Carnot

La máquina de Carnot es una idealización; no espere que se desarrolle una máquina de Carnot para uso comercial. Exploramos la máquina de Carnot solamente para consideraciones teóricas.

que pueden acomodarse para colocar las energías intercambiadas con el depósito frío a la izquierda y con el depósito caliente a la derecha:

$$|Q_{hc}| - |Q_h| = |Q_{cC}| - |Q_c| \quad (21.6)$$

Observe que, debido a la ecuación 21.5, el lado izquierdo de la ecuación 21.6 es positivo, entonces el lado derecho también debe ser positivo. Así el intercambio de energía neto con el depósito caliente es igual al intercambio de energía neto con el depósito frío. En consecuencia, para la combinación de la máquina térmica y la bomba de calor, la energía se transfiere del depósito frío al depósito caliente por calor con ninguna entrada de energía por trabajo en los alrededores.

Este resultado viola el enunciado de Clausius de la segunda ley. Por tanto, debe ser incorrecta la suposición original $e > e_C$, y entonces debe concluirse que la máquina de Carnot representa la máxima eficiencia para una máquina. La principal característica de la máquina de Carnot, que la hace la más eficiente, es su *reversibilidad*; puede funcionar en reversa como una bomba de calor. Todas las máquinas reales son menos eficientes que la máquina de Carnot porque no operan mediante un ciclo reversible. La eficiencia de una máquina real se reduce aún más por dificultades prácticas como fricción y pérdidas de energía por conducción.

Veamos ahora los detalles del ciclo de Carnot para una máquina que opera entre las temperaturas T_c y T_h , suponga que la sustancia de trabajo es un gas ideal contenido en un cilindro adaptado con un pistón móvil en un extremo. Las paredes del cilindro y el pistón son térmicamente no conductoras. En la figura 21.9 se muestran cuatro etapas del

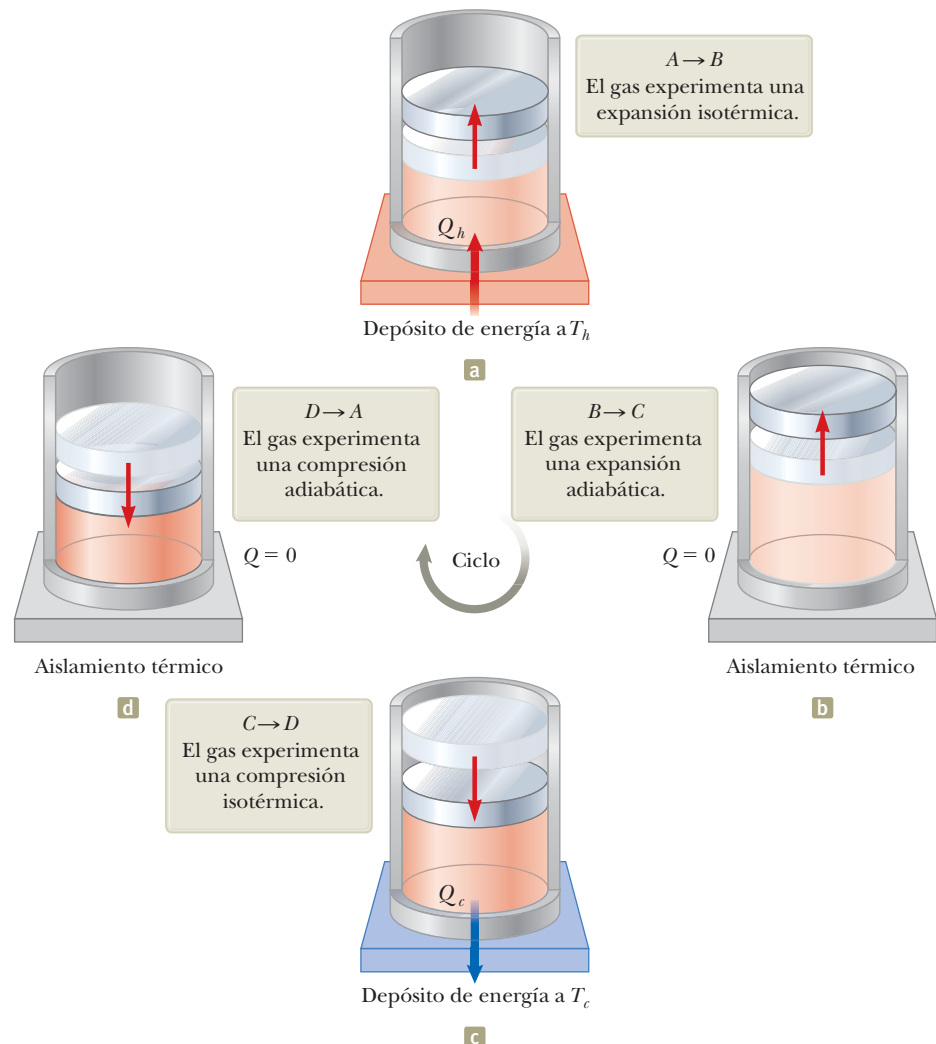


Figura 21.9 Representación gráfica del ciclo de Carnot. Las letras A , B , C y D se refieren a los estados del gas mostrados en la figura 21.9. Las flechas sobre el pistón indican la dirección de su movimiento durante cada proceso. Compárela con la representación gráfica en la figura 21.10.

ciclo de Carnot y el diagrama PV para el ciclo indicado en la figura 21.10. El ciclo de Carnot consiste de dos procesos adiabáticos y dos procesos isotérmicos, todos reversibles:

1. El proceso $A \rightarrow B$ (figura 21.9a) es una expansión isotérmica a temperatura T_h . El helio gas se coloca en contacto térmico con un depósito de energía a temperatura T_h . Durante la expansión, el gas absorbe energía $|Q_h|$ del depósito a través de la base del cilindro y realiza trabajo W_{AB} para elevar el pistón.
2. En el proceso $B \rightarrow C$ (figura 21.9b), la base del cilindro se sustituye por una pared térmicamente no conductora y el gas se expande adiabáticamente; es decir, no entra ni sale energía del sistema por calor. Durante la expansión, la temperatura del gas disminuye de T_h a T_c y el gas efectúa trabajo W_{BC} para elevar el pistón.
3. En el proceso $C \rightarrow D$ (figura 21.9c), el gas se coloca en contacto térmico con un depósito de energía a temperatura T_c y se comprime isotérmicamente a temperatura T_c . Durante este tiempo, el gas expulsa energía $|Q_c|$ al depósito y el trabajo que el pistón realiza sobre el gas es W_{CD} .
4. En el proceso final $D \rightarrow A$ (figura 21.9d), la base del cilindro se sustituye por una pared no conductora y el gas se comprime adiabáticamente. La temperatura del gas aumenta a T_h , y el trabajo efectuado por el pistón sobre el gas es W_{DA} .

La eficiencia térmica de la máquina está dada por la ecuación 21.2:

$$e = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|}$$

En el ejemplo 21.3, se demuestra que para un ciclo de Carnot,

$$\frac{|Q_c|}{|Q_h|} = \frac{T_c}{T_h} \quad (21.7)$$

Así, la eficiencia térmica de una máquina de Carnot es

$$e_C = 1 - \frac{T_c}{T_h} \quad (21.8)$$

Este resultado indica que todas las máquinas de Carnot que operan entre las mismas dos temperaturas tienen la misma eficiencia.⁵

La ecuación 21.8 se puede aplicar a cualquier sustancia de trabajo que funciona en un ciclo de Carnot entre dos depósitos de energía. De acuerdo con esta ecuación, la eficiencia es cero si $T_c = T_h$, como uno esperaría. La eficiencia aumenta conforme T_c baja y T_h se eleva. La eficiencia puede ser la unidad (100%), sin embargo, solo si $T_c = 0$ K. Tales depósitos no están disponibles; por tanto, la máxima eficiencia siempre es menor que 100%. En la mayoría de los casos prácticos, T_c está cerca de temperatura ambiente, que es aproximadamente 300 K. Así, por lo general se lucha por aumentar la eficiencia al elevar T_h .

En teoría, una máquina térmica con ciclo de Carnot que funcione en reversa constituye la bomba de calor más efectiva posible, y ello determina el máximo COP para una combi-

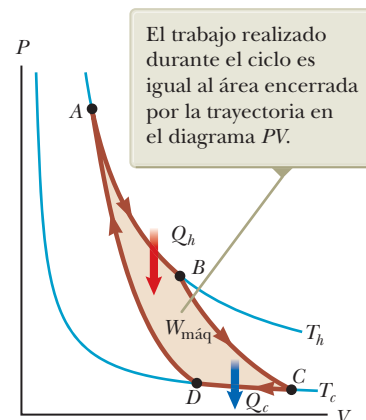


Figura 21.10 Diagrama PV para el ciclo de Carnot representado pictóricamente en la figura 21.9. Esta es una representación gráfica del ciclo. El trabajo neto efectuado $W_{\text{máq}}$ es igual a la energía neta transferida en la máquina de Carnot en un ciclo, $|Q_h| - |Q_c|$.

◀ Eficiencia de una máquina de Carnot

⁵ Para que los procesos en el ciclo de Carnot sean reversibles, deben realizarse de manera infinitesimalmente lenta. Por tanto, aunque la máquina de Carnot sea la máquina más eficiente posible, tiene una salida de potencia cero porque tarda un intervalo de tiempo infinito en completar un ciclo! Para una máquina real, el corto intervalo de tiempo para cada ciclo resulta en que la sustancia de trabajo alcanza una temperatura alta menor que la del depósito caliente y una temperatura baja mayor que la del depósito frío. Una máquina que experimenta un ciclo de Carnot entre tan estrecho intervalo de temperaturas lo analizaron F.L. Curzon and B. Ahlborn ("Eficiencia de una máquina de Carnot a máxima potencia de salida," *Am. J. Phys.* 43(1), 22, 1975), quienes encontraron que la eficiencia a máxima potencia de salida sólo depende de las temperaturas de los depósitos T_c y T_h , y está dada por $e_{C-A} = 1 - (T_c/T_h)^{1/2}$. La eficiencia de Curzon-Ahlborn e_{C-A} proporciona una aproximación más cercana a las eficiencias de las máquinas reales, que la eficiencia de Carnot.

nación dada de temperaturas de depósito caliente y frío. Al emplear las ecuaciones 21.1 y 21.4, se ve que el máximo COP para una bomba de calor en su modo de calentamiento es

$$\begin{aligned} \text{COP}_C (\text{modo de calentamiento}) &= \frac{|Q_h|}{W} \\ &= \frac{|Q_h|}{|Q_h| - |Q_c|} = \frac{1}{1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|}} = \frac{1}{1 - \frac{T_c}{T_h}} = \frac{T_h}{T_h - T_c} \end{aligned}$$

El COP de Carnot para una bomba de calor en el modo de enfriamiento es

$$\text{COP}_C (\text{modo de enfriamiento}) = \frac{T_c}{T_h - T_c}$$

Conforme la diferencia entre las temperaturas de los dos depósitos tiende a cero en esta expresión, el COP teórico tiende a infinito. En la práctica, la baja temperatura de los serpentines de enfriamiento y la alta temperatura en el compresor limitan el COP a valores por debajo de 10.

- EJEMPLO RÁPIDO 21.3** Tres máquinas operan entre depósitos separados en temperatura en 300 K. Las temperaturas de los depósitos son como sigue: Máquina A: $T_h = 1\,000\text{ K}$, $T_c = 700\text{ K}$; máquina B: $T_h = 800\text{ K}$, $T_c = 500\text{ K}$; máquina C: $T_h = 600\text{ K}$, $T_c = 300\text{ K}$. Clasifique las máquinas, por su eficiencia teórica posible, de mayor a menor.

Ejemplo 21.3 Eficiencia de la máquina de Carnot

Demuestre que la razón de transferencias de energía por calor en una máquina de Carnot es igual a la razón de temperaturas de los depósitos, como lo expresado por la ecuación 21.7.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Utilice las figuras 21.9 y 21.10 para ayudarse a visualizar los procesos en el ciclo de Carnot.

Categorizar Debido a la comprensión del ciclo de Carnot, los procesos en el ciclo se pueden clasificar como isotérmico y adiabático.

Analizar Para la expansión isotérmica (proceso $A \rightarrow B$ en la figura 21.9), encuentre la transferencia de energía por calor desde el depósito caliente mediante la ecuación 19.12 y la primera ley de la termodinámica: De manera similar, determine la transferencia de energía al depósito frío durante la compresión isotérmica $C \rightarrow D$:

$$|Q_h| = |\Delta E_{\text{int}} - W_{AB}| = |0 - W_{AB}| = nRT_h \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$|Q_c| = |\Delta E_{\text{int}} - W_{CD}| = |0 - W_{CD}| = nRT_c \ln \frac{V_C}{V_D}$$

$$(1) \quad \frac{|Q_c|}{|Q_h|} = \frac{T_c \ln(V_C/V_D)}{T_h \ln(V_B/V_A)}$$

Divida la segunda expresión entre la primera:

$$T_h V_B^{\gamma-1} = T_c V_C^{\gamma-1}$$

$$T_h V_A^{\gamma-1} = T_c V_D^{\gamma-1}$$

Aplique la ecuación 20.40 a los procesos adiabáticos $B \rightarrow C$ y $D \rightarrow A$:

$$\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1}$$

Divida la primera ecuación entre la segunda:

$$(2) \quad \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

Sustituya la ecuación (2) en la ecuación (1):

$$\frac{|Q_c|}{|Q_h|} = \frac{T_c \ln(V_C/V_D)}{T_h \ln(V_B/V_A)} = \frac{T_c \ln(V_C/V_D)}{T_h \ln(V_C/V_D)} = \frac{T_c}{T_h}$$

Finalizar Esta última ecuación es la ecuación 21.7, la que se debía comprobar.

Ejemplo 21.4 La máquina de vapor

Una máquina de vapor tiene un calentador que funciona a 500 K. La energía del combustible quemado cambia el agua líquida a vapor, y este vapor después impulsa un pistón. La temperatura del depósito frío es la del aire exterior, aproximadamente 300 K. ¿Cuál es la máxima eficiencia térmica de esta máquina de vapor?

SOLUCIÓN

Conceptualizar En una máquina de vapor el gas que empuja sobre el pistón en la figura 21.9 es vapor. Una máquina de vapor real no funciona en un ciclo de Carnot, pero, para encontrar la máxima eficiencia posible, imagine una máquina de vapor de Carnot.

Categorizar La eficiencia se calcula con la ecuación 21.8, de modo que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Sustituya las temperaturas de los depósitos en la ecuación 21.8: $e_C = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{300 \text{ K}}{500 \text{ K}} = 0.400$ o 40.0%

Este resultado es la máxima eficiencia *teórica* de la máquina. En la práctica, la eficiencia es considerablemente menor.

¿QUÉ PASARÍA SI? Suponga que se quiere aumentar la eficiencia teórica de esta máquina. Este aumento se puede lograr al elevar T_h en ΔT o reducir T_c por la misma ΔT . ¿Qué sería más efectivo?

Respuesta Una ΔT dada tendría un mayor efecto fraccionario sobre una temperatura más pequeña, así se esperaría un mayor cambio en la eficiencia si se altera T_c en ΔT . Pruebe esto numéricamente. Eleve T_h en 50 K, lo que corresponde a $T_h = 550 \text{ K}$, esto daría una máxima eficiencia de

$$e_C = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{300 \text{ K}}{550 \text{ K}} = 0.455$$

Si reduce T_c en 50 K, lo que corresponde a $T_c = 250 \text{ K}$, se obtendría una eficiencia máxima de

$$e_C = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{250 \text{ K}}{500 \text{ K}} = 0.500$$

Aunque cambiar T_c es *matemáticamente* más efectivo, con frecuencia cambiar T_h es *prácticamente* más factible.

21.5 Motores de gasolina y diesel

En un motor de gasolina, ocurren cuatro *carreras* en cada ciclo; además, dos *eventos* tienen un efecto significativo en el estado del gas en el cilindro. Estas carreras y eventos se ilustran con una representación pictórica en la figura 21.11 (página 568). En este análisis, consideremos el interior del cilindro sobre el pistón como el sistema que se toma a través de ciclos repetidos en el funcionamiento del motor. Para un ciclo dado, el pistón se mueve hacia arriba y hacia abajo dos veces, lo que representa un ciclo de cuatro tiempos que consiste en dos carreras ascendentes y dos descendentes. Los procesos en el ciclo se pueden aproximar mediante el ciclo de Otto que se muestra en el diagrama PV en la figura 21.12 (página 568), que es una representación gráfica del ciclo. En la siguiente explicación, tenga en cuenta que las designaciones de letras al lado del pistón en la figura 21.11 corresponden a los estados en el diagrama PV en la figura 21.12.

1. Durante la *carrera de admisión* (figura 21.11a y $O \rightarrow A$ en la figura 21.12), el pistón se mueve hacia abajo y una mezcla gaseosa de aire y combustible entra al cilindro a presión atmosférica. Esta es parte de la energía de entrada del ciclo: la energía entra al sistema (el interior del cilindro) por transferencia de materia como energía potencial almacenada en el combustible. En este proceso, el volumen aumenta de V_2 a V_1 . Esta aparente numeración hacia atrás se basa en el tiempo de compresión (proceso 2 que se presenta a continuación), en donde la mezcla de aire-combustible se comprime de V_1 a V_2 .
2. Durante la *carrera de compresión* (figura 21.11b y $A \rightarrow B$ en la figura 21.12), el pistón se mueve hacia arriba, la mezcla de aire-combustible se comprime adiabáticamente del volumen V_1 al volumen V_2 , y la temperatura aumenta de T_A a T_B . El trabajo realizado sobre el gas es positivo, y su valor es igual al negativo del área bajo la curva AB en la figura 21.12.



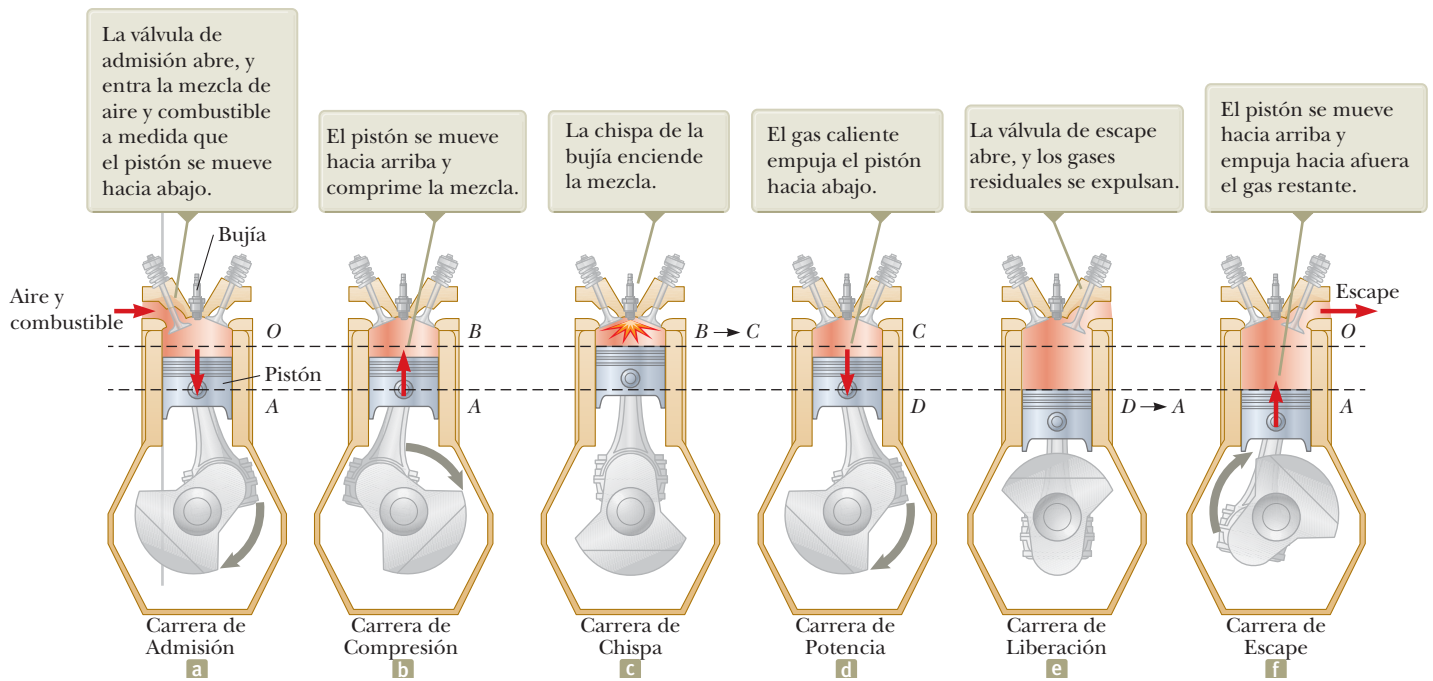


Figura 21.11 Los procesos que ocurren durante un ciclo de un motor de gasolina convencional. Las líneas discontinuas muestran las posiciones extremas de la parte superior del pistón y, por tanto, representan los volúmenes más grandes y más pequeños del gas en el cilindro. Las partes a, b, d y f representan trazos en el ciclo, lo que justifica el nombre del dispositivo como motor de cuatro tiempos. En una carrera, el pistón se mueve hacia arriba o hacia abajo entre sus posiciones extremas. Las flechas rojas muestran la dirección de desplazamiento del pistón, y las letras al lado del pistón corresponden a los estados en el diagrama PV en la figura 21.12. Las partes c y e en la figura representan eventos durante los cuales el pistón no se mueve. En la parte c, la bujía se enciende y la presión y la temperatura del gas se disparan hacia arriba. En la parte e, la válvula de escape se abre y la presión y la temperatura del gas caen precipitadamente. Los eventos en esta figura corresponden a los procesos de volumen constante en la figura 21.12. Al comparar esa cifra con esta, quedará convencido de que los volúmenes en O , B y C son todos iguales, como lo indican sus posiciones en la línea superior quebrada. Del mismo modo, los volúmenes en A y D son los mismos.

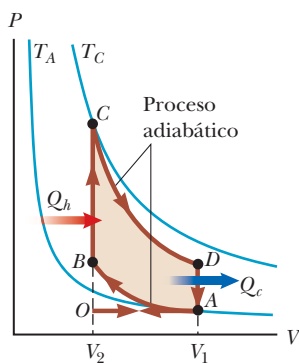


Figura 21.12 Diagrama PV para el ciclo de Otto, que representa aproximadamente los procesos que ocurren en un motor de combustión interna.

- La combustión ocurre cuando la bujía produce una chispa (figura 21.11c y $B \rightarrow C$ en la figura 21.12). Este es el *evento de combustión* en el ciclo; que se produce en un intervalo de tiempo muy corto mientras el pistón está en su posición más alta. La combustión representa una transformación rápida de energía potencial almacenada en enlaces químicos en el combustible, a energía interna asociada con el movimiento molecular, que se relaciona con temperatura. Durante este intervalo de tiempo, la presión y temperatura de la mezcla aumentan rápidamente, y la temperatura se eleva de T_B a T_C . Sin embargo, el volumen permanece aproximadamente constante debido al breve intervalo de tiempo. Como resultado, casi no se realiza trabajo sobre o por el gas. Este proceso se puede modelar en el diagrama PV (figura 21.12) como aquel proceso en donde la energía $|Q_h|$ entra al sistema. (Sin embargo, en realidad este proceso es una *transformación* de energía ya existente en el cilindro del proceso $O \rightarrow A$.)
- En la *carrera de potencia* (figura 21.11d y $C \rightarrow D$ en la figura 21.12), el gas se expande adiabáticamente de V_2 a V_1 . Esta expansión causa la caída de temperatura de T_C a T_D . El gas realiza trabajo al empujar el pistón hacia abajo, y el valor de este trabajo es igual al área bajo la curva CD .
- La *carrera de liberación de los gases residuales* ocurre cuando se abre una válvula de escape (figura 21.11e y $D \rightarrow A$ en la figura 21.12). La presión cae súbitamente por un breve intervalo de tiempo. Durante éste, el pistón es casi fijo y el volumen es aproximadamente constante. Desde el interior del cilindro se expulsa energía, y continúa expulsándose durante el siguiente proceso.

6. En el proceso final, la *carrera de escape* (figura 21.11f y $A \rightarrow O$ en la figura 21.12), el pistón se mueve hacia arriba mientras la válvula de escape permanece abierta. Los gases residuales se expulsan a presión atmosférica y el volumen disminuye de V_1 a V_2 . Después el ciclo se repite.

Si la mezcla aire-combustible se supone como un gas ideal, la eficiencia del ciclo de Otto es

$$e = 1 - \frac{1}{(V_1/V_2)^{\gamma-1}} \quad (\text{Otto cycle}) \quad (21.9)$$

donde V_1/V_2 es la **relación de compresión** y γ es la razón de los calores específicos molares C_p/C_v para la mezcla aire-combustible. La ecuación 21.9, que se deduce en el ejemplo 21.5, muestra que la eficiencia aumenta conforme se incrementa la relación de compresión. Para una típica relación de compresión de 8 y con $\gamma = 1.4$, la ecuación 21.9 predice una eficiencia teórica de 56% para un motor que opera en el ciclo de Otto idealizado. Este valor es mucho mayor que el logrado en los motores reales (15% a 20%) debido a efectos como fricción, transferencia de energía por conducción a través de las paredes del cilindro, y combustión incompleta de la mezcla aire-combustible.

Los motores diesel operan en un ciclo similar al ciclo de Otto, pero no emplean bujía. La relación de compresión para un motor diesel es mucho mayor que la de un motor de gasolina. El aire en el cilindro se comprime a un volumen muy pequeño y, como consecuencia, la temperatura del cilindro al final del tiempo de compresión es muy alta. En este punto, el combustible se inyecta en el cilindro. La temperatura es lo suficientemente alta para que la mezcla de aire-combustible se encienda sin la ayuda de una bujía. Los motores diesel son más eficientes que los motores de gasolina debido a sus mayores relaciones de compresión y a las mayores temperaturas de combustión resultantes.

Ejemplo 21.5 Eficiencia del ciclo de Otto

Demuestre que la eficiencia térmica de un motor que funciona en un ciclo de Otto (vea las figuras 21.11 y 21.12) está dada por la ecuación 21.9. Trate la sustancia de trabajo como un gas ideal.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Estudie las figuras 21.11 y 21.12 para asegurarse de que entendió el funcionamiento del ciclo de Otto.

Categorizar Como se vio en la figura 21.12, los procesos en el ciclo de Otto se clasifican como isovolumétrico y adiabático.

Analizar Modele la entrada y salida de energía por calor en los procesos $B \rightarrow C$ y $D \rightarrow A$. (En realidad, la mayor parte de la energía entra y sale por transferencia de materia conforme la mezcla de aire-combustible entra y sale del cilindro.) Use la ecuación 20.23 para encontrar las transferencias de energía por calor para dichos procesos, que tienen lugar a volumen constante.

Sustituya estas expresiones en la ecuación 21.2:

Aplique la ecuación 20.40 a los procesos adiabáticos $A \rightarrow B$ y $C \rightarrow D$:

Resuelva estas expresiones para las temperaturas T_A y T_D , y note que $V_A = V_D = V_1$ y $V_B = V_C = V_2$:

Reste la ecuación (2) de la ecuación (3) y reordene:

Sustituya la ecuación (4) en la ecuación (1):

$$B \rightarrow C \quad |Q_h| = nC_V(T_C - T_B)$$

$$D \rightarrow A \quad |Q_c| = nC_V(T_D - T_A)$$

$$(1) \quad e = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|} = 1 - \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$$

$$A \rightarrow B \quad T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$

$$C \rightarrow D \quad T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}$$

$$(2) \quad T_A = T_B \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} = T_B \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}$$

$$(3) \quad T_D = T_C \left(\frac{V_C}{V_D} \right)^{\gamma-1} = T_C \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}$$

$$(4) \quad \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}$$

$$e = 1 - \frac{1}{(V_1/V_2)^{\gamma-1}}$$

Finalizar Esta expresión final es la ecuación 21.9.



PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 21.4

La entropía es abstracta La entropía es uno de los conceptos más abstractos de la física, así que siga con mucho cuidado la explicación en ésta y las secciones siguientes. No confunda energía con entropía. Aun cuando los nombres suenen similares, los conceptos son muy diferentes.

21.6 Entropía

La ley cero de la termodinámica involucra el concepto de temperatura, y la primera ley concierne al concepto de energía interna. Temperatura y energía interna son variables de estado; es decir, el valor de cada una sólo depende del estado termodinámico de un sistema, no del proceso que lo llevó a dicho estado. Otra variable de estado, relacionada con la segunda ley de la termodinámica, es la *entropía*.

La entropía originalmente se formuló como un concepto útil en termodinámica. Sin embargo, su importancia creció conforme el campo de la mecánica estadística se desarrolló. En mecánica estadística el comportamiento de una sustancia se describe en términos del comportamiento estadístico de sus átomos y moléculas, como lo hicimos al estudiar la teoría cinética en el capítulo 20. Las técnicas analíticas de ésta proporcionan un medio alternativo de interpretar la entropía y un significado más global a este concepto.

Para desarrollar comprensión de la entropía, primero se consideran algunos sistemas no termodinámicos, como un par de dados y manos de póquer. Después estas ideas se extienden y se utilizan para entender el concepto de entropía como el aplicado a sistemas termodinámicos.

Este proceso se inicia con la distinción entre *microestados* y *macroestados* de un sistema. Un **microestado** es una configuración particular de los componentes individuales del sistema. Un **macroestado** es una descripción de las condiciones del sistema desde un punto de vista macroscópico.

Para un macroestado dado del sistema, es posible un cierto número de microestados. Por ejemplo, el macroestado de un 4 en un par de dados se puede formar a partir de los posibles microestados 1–3, 2–2 y 3–1. El macroestado de 2 sólo tiene un microestado, 1–1. Se supone que todos los microestados son igualmente probables. Hay tres maneras de comparar estos dos macroestados: (1) *Incertidumbre*: Si se conoce que existe un macroestado de 4, hay alguna incertidumbre respecto al correspondiente microestado, porque existen múltiples microestados que conducen a 4. En comparación, hay menor incertidumbre (de hecho, incertidumbre *cero*) para un macroestado de 2 porque sólo se tiene un microestado. (2) *Elección*: Existen más elecciones de microestados para un 4 que para un 2. (3) *Probabilidad*: El macroestado de 4 tiene mayor probabilidad que un macroestado de 2 porque hay más maneras (microestados) de lograr un 4. Los conceptos de incertidumbre, elección y probabilidad son centrales al concepto de entropía, como se explicará a continuación.

Considere otro ejemplo relacionado con la mano de póquer. Sólo hay un microestado asociado con el macroestado de una flor imperial de cinco espadas, que se encuentran en orden del diez al as (figura 21.13a). La figura 21.13b muestra otra mano de póquer. Aquí el macroestado es “una mano sin valor”. La mano *particular* (el microestado) en la figura 21.13b y la mano en la figura 21.13a son igualmente probables. Sin embargo, se tiene *muchas* otras manos similares a la exhibida en la figura 21.13b; es decir, existen muchos microestados que también son manos sin valor. Si usted, como jugador de póquer, le dice a su oponente que tiene un macroestado de una flor imperial en espadas, hay *incertidumbre*



a



b

Figura 21.13 (a) Una flor imperial tiene baja probabilidad de ocurrir. (b) Una mano de póquer sin valor, una de tantas.

cero con respecto a las cinco cartas que están en la mano, sólo *una elección* de qué cartas son, y *baja probabilidad* de que la mano realmente ocurrió. En contraste, si usted expresa a su oponente que tiene un macroestado de “mano sin valor”, entonces existe una *alta incertidumbre* sobre cuáles cinco cartas podrían ser, podrían ser *muchas elecciones*, con una *alta probabilidad* de que haya ocurrido una mano sin valor. De hecho, otra variable en el póquer es el valor de la mano, relacionada a la probabilidad: entre más alta la probabilidad, menor es el valor. El punto importante a destacar de esta explicación es que incertidumbre, elección y probabilidad están relacionadas en estas situaciones: si una es alta, las otras son altas, y viceversa.⁶

Para sistemas termodinámicos, la variable **entropía** se emplea para representar el nivel de incertidumbre, elección, y probabilidad en el sistema. Considere una configuración 1 (un macroestado) en el cual todas las moléculas de oxígeno en su cuarto se localizan en la mitad oeste de la habitación y las moléculas de nitrógeno en la mitad este. Compare ese macroestado con la configuración más común 2, en la que las moléculas de oxígeno y nitrógeno están distribuidas uniformemente en toda la habitación. La configuración 2 tiene mayor incertidumbre respecto a dónde se localizan las moléculas porque éstas podrían estar en cualquier parte, no justamente en una mitad de la habitación de acuerdo al tipo de molécula. La configuración 2 con una distribución uniforme también representa más elecciones respecto a dónde localizar a las moléculas. También tiene más alta probabilidad de ocurrir; ¿caso usted ha notado que la mitad de su cuarto súbitamente se queda vacío de oxígeno? Por tanto, la configuración 2 representa una alta entropía.

Para sistemas de dados y manos de póquer, la comparación entre probabilidades para varios macroestados involucran números relativamente pequeños. Por ejemplo, un macroestado de un 4 sobre un par de dados sólo es tres veces más probable que un macroestado de 2. La razón de probabilidades de una mano sin valor y una flor imperial es significativamente mayor. Sin embargo, cuando se habla de un sistema termodinámico macroscópico que contiene una cantidad de partículas del orden del número de Avogadro, las razones de probabilidades pueden ser astronómicas.

Explore este concepto al considerar 100 moléculas en un recipiente. La mitad de las moléculas son de oxígeno y la otra mitad son de nitrógeno. En cualquier momento dado, la probabilidad de que una molécula esté en la parte izquierda del recipiente, que se muestra en la figura 21.14a, como resultado de movimiento aleatorio es $\frac{1}{2}$. Si hay dos moléculas, como se indica en la figura 21.14b, la probabilidad de que ambas estén en la parte izquierda es $(\frac{1}{2})^2$, o 1 en 4. Si hay tres moléculas (figura 21.14c), la probabilidad de que todas ellas estén en la porción izquierda al mismo tiempo es $(\frac{1}{2})^3$, o 1 en 8. Para 100 moléculas que se mueven independientemente, la probabilidad de que las 50 moléculas de oxígeno sean encontradas en la parte izquierda en cualquier momento es $(\frac{1}{2})^{50}$. Del mismo modo, la probabilidad de que las restantes 50 moléculas de nitrógeno se encuentren en

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 21.5

La entropía es para sistemas termodinámicos No se ha aplicado la palabra *entropía* para describir los sistemas de dados o cartas. Se discutieron los dados y cartas sólo para establecer los conceptos de microestados, macroestados, incertidumbre, elección, y probabilidad. La entropía sólo puede emplearse para describir sistemas termodinámicos que contienen muchas partículas, permitiendo que el sistema almacene energía como energía interna.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 21.6

Entropía y desorden En algunos textos la entropía es relacionada al *desorden* de un sistema. Aunque ese enfoque tiene cierto mérito, no es totalmente exitoso. Por ejemplo, considere dos muestras del mismo material sólido a la misma temperatura. Una muestra tiene volumen V y la otra es de volumen $2V$. La muestra grande tiene mayor entropía que la pequeña simplemente porque hay más moléculas en ella. Pero no está claro en qué sentido esté más desordenada que la muestra pequeña. En este texto no se utiliza el enfoque de desorden, pero puede observarlo en otras fuentes.

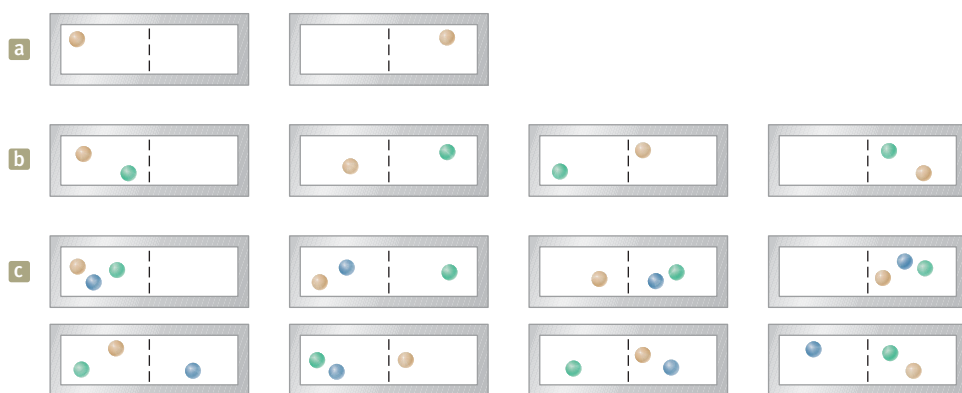


Figura 21.14 Posibles distribuciones de moléculas idénticas en un recipiente. Los colores que aquí se emplean permiten distinguir a las moléculas. (a) Una molécula en un recipiente tiene una oportunidad de 1 en 2 de estar en el lado izquierdo. (b) Dos moléculas tienen una oportunidad de 1 en 4 de estar en el lado izquierdo al mismo tiempo. (c) Tres moléculas tienen una oportunidad de 1 en 8 de estar en el lado izquierdo al mismo tiempo.

⁶ Otra forma de describir macroestados es mediante “información faltante”. Para macroestados de alta probabilidad con muchos microestados, hay una gran cantidad de información faltante, lo que significa que tenemos muy poca información sobre qué microestado realmente existe.

la porción derecha en cualquier momento es $(\frac{1}{2})^{50}$. Por tanto, la probabilidad de tener esta separación oxígeno-nitrógeno como resultado de movimiento aleatorio es el producto $(\frac{1}{2})^{50}(\frac{1}{2})^{50} = (\frac{1}{2})^{100}$, que corresponde aproximadamente a 1 en 10^{30} . Cuando este cálculo se extrapola de 100 moléculas al número en 1 mol de gas (6.02×10^{23}), ¡se encuentra que el arreglo ordenado es *extremadamente* improbable!

- E XAMEN RÁPIDO 21.4** (a) Suponga que selecciona cuatro cartas al azar de un mazo estándar de baraja y termina con un macroestado de cuatro dos. ¿Cuántos microestados se asocian con este macroestado? (b) Suponga que levanta dos cartas y termina con un macroestado de dos ases. ¿Cuántos microestados se asocian con este macroestado?

Ejemplo conceptual 21.6 ¡A jugar canicas!

Suponga que tiene una bolsa de 100 canicas, de las cuales 50 son rojas y 50 son verdes. Se le permite extraer cuatro canicas de la bolsa, de acuerdo con las siguientes reglas. Extraiga una canica, registre su color y regrésela a la bolsa. Agite la bolsa y luego extraiga otra canica. Continúe este proceso hasta que haya extraído y regresado cuatro canicas. ¿Cuáles son los posibles macroestados para este conjunto de eventos? ¿Cuál es el macroestado menos probable?

SOLUCIÓN

Ya que cada canica se regresa a la bolsa antes de que la siguiente se extraiga y luego la bolsa se agita, la probabilidad de extraer una canica roja siempre es la misma que la probabilidad de extraer una verde. En la tabla 21.1 se muestran todos los posibles microestados y macroestados. Como indica esta tabla, sólo hay una forma de extraer un macroestado de cuatro canicas rojas, así que sólo hay un microestado para dicho macroestado. Sin embargo, hay cuatro posibles microestados que corresponden al macroestado de una canica verde y tres canicas rojas, seis

microestados que corresponden a dos canicas verdes y dos canicas rojas, cuatro microestados que corresponden a tres canicas verdes y una canica roja, y un microestado que corresponde a cuatro canicas verdes. El macroestado más probable, dos canicas rojas y dos canicas verdes, corresponde al mayor número de elecciones de microestados, y, por tanto, el más incierto en cuanto a qué microestado exacto es. Los macroestados menos probables, cuatro canicas rojas o cuatro canicas verdes, corresponden a sólo una elección de microestado y, por tanto, de incertidumbre cero. No existe incertidumbre para los estados menos probables: se conocen los colores de las cuatro canicas.

TABLA 21.1 Posibles resultados de extraer cuatro canicas de una bolsa

Macroestado	Posibles microestados	Número total de microestados
Todas R	RRRR	1
IV, 3R	RRRV, RRRV, RVRV, VRRR	4
2V, 2R	RRVV, RVRV, VRRV, RVVR, VRVR, VVRR	6
3G, 1R	VVVR, VVRV, VRVV, RVVV	4
Todas V	VVVV	1

21.7 Entropía en sistemas termodinámicos

Hemos investigado las nociones de incertidumbre, número de elecciones y probabilidad para algunos sistemas no termodinámicos como los dados y las cartas, así como para un pequeño sistema de 100 moléculas de oxígeno y nitrógeno. Hemos argumentado que el concepto de entropía puede relacionarse con estas nociones para los sistemas termodinámicos macroscópicos. En nuestra explicación sobre entropía, hay dos cosas que aún no hemos hecho: (1) indicar cómo evaluar la entropía numéricamente, y (2) explicar una entropía para un sistema macroscópico con una gran cantidad de partículas. Ambas fueron realizadas, mediante métodos estadísticos, por Boltzmann en 1870 y su forma actualmente aceptada es

$$S = k_B \ln W \quad (21.10)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann; W proviene de la palabra alemana *Wahrscheinlichkeit* para probabilidad, al ser proporcional a la probabilidad de que exista un determi-



nado macroestado. Es equivalente a que W sea el número de microestados asociados con el macroestado, así que W se puede interpretar como el número de “maneras” de lograr el macroestado. Por tanto, macroestados con grandes números de microestados tienen alta probabilidad y, equivalentemente, alta entropía. Observe que las unidades de entropía son las de la constante de Boltzmann, J/K.

En la teoría cinética de los gases las moléculas de gas se representan como partículas con movimiento aleatorio. Suponga que el gas está confinado a un volumen V . Para una distribución uniforme del gas en el volumen, existe un gran número de microestados equivalentes, y la entropía del gas se puede relacionar con el número de microestados que corresponden a un macroestado determinado. Cuento el número de microestados al considerar la variedad de ubicaciones moleculares disponibles a las moléculas. Suponga que cada molécula ocupa algún volumen microscópico V_m el número total de posibles ubicaciones de una sola molécula en un volumen macroscópico V es la razón $w = V/V_m$, que es un número enorme. Aquí se emplea w para representar el número de maneras en que una molécula puede colocarse en el volumen, o el número de microestados para una sola molécula, que es equivalente al número de ubicaciones disponibles. Se supone que son iguales las probabilidades de que una molécula ocupe alguna de estas ubicaciones. Conforme más moléculas se agregan al sistema, se multiplica el número de posibles maneras en que las moléculas se pueden colocar en el volumen, como se vio en la figura 21.14. Por ejemplo, si considera dos moléculas, por cada posible colocación de la primera, todas las posibles ubicaciones de la segunda están disponibles. Por tanto, hay w maneras de colocar la primera molécula, y por cada manera, existen w formas de ubicar la segunda molécula. El número total de maneras de colocar las dos moléculas es $W = w \times w = w^2 = (V/V_m)^2$. (W representa el número de maneras de colocar múltiples moléculas en el volumen y no se debe confundir con trabajo.)

Ahora considere colocar N moléculas de gas en el volumen V . Se desprecia la probabilidad, muy pequeña, de tener dos moléculas ocupando la misma ubicación, cada molécula puede ir en alguna de las V/V_m ubicaciones, y así el número de maneras de colocar N moléculas en el volumen es $W = w^N = (V/V_m)^N$. Por tanto, la parte espacial de la entropía del gas, de la ecuación 21.10, es

$$S = k_B \ln W = k_B \ln \left(\frac{V}{V_m} \right)^N = Nk_B \ln \left(\frac{V}{V_m} \right) = nR \ln \left(\frac{V}{V_m} \right) \quad (21.11)$$

En la próxima sección se utiliza esta expresión para investigar cambios en entropía en procesos que ocurren en sistemas termodinámicos.

Observe que la ecuación 21.11 sólo representa la porción *espacial* de la entropía del gas. También existe una porción de la entropía que depende de la temperatura, que la explicación anterior no considera. Por ejemplo, imagine un proceso isovolumétrico en donde se incrementa la temperatura del gas. Para esta situación, la ecuación 21.11 no muestra algún cambio en la porción espacial de la entropía. Sin embargo, *existe* un cambio de entropía asociado con el incremento de la temperatura. Esto se puede entender si otra vez se apela a la física cuántica. De la sección 20.3, recuerde que las energías de las moléculas de gas están cuantizadas. Cuando cambia la temperatura de un gas, la distribución de energías de las moléculas de gas cambia de acuerdo a la ley de distribución de Boltzmann, discutida en la sección 20.5. Por tanto, a medida que aumenta la temperatura del gas, hay más incertidumbre sobre el microestado particular correspondiente conforme las moléculas de gas se distribuyen por sí mismas en altos estados cuánticos disponibles.

Los sistemas termodinámicos tienen un flujo constante, cambiando constantemente de un microestado a otro. Si el sistema está en equilibrio, existe un macroestado dado, descrito por variables como P , V , T y E_{int} , y el sistema fluctúa desde un microestado asociado a ese macroestado a otro. Este cambio no es observable porque solo podemos detectar el macroestado. Los estados de equilibrio tienen una probabilidad tremendamente más alta que los estados de no equilibrio, por lo que es muy poco probable que un estado de equilibrio cambie espontáneamente a un estado de no equilibrio. Por ejemplo, no observamos una división espontánea en la separación nitrógeno-oxígeno estudiada en la sección 21.6.



Sin embargo, ¿qué pasaría si el sistema inicia en un macroestado de baja probabilidad? ¿Qué ocurriría si la habitación *inicia* con una separación oxígeno-nitrógeno? En este caso, el sistema evoluciona de este macroestado de baja probabilidad al estado de más alta probabilidad: los gases se dispersan y mezclan a través de la habitación. Debido a que la entropía está relacionada a la probabilidad, un incremento espontáneo en la entropía, como en la última situación, es natural. Si inicialmente las moléculas de oxígeno y de nitrógeno estuvieran esparcidas de manera uniforme en la habitación, ocurriría un *descenso* en la entropía si sucediera una separación espontánea de las moléculas.

Una manera de conceptualizar un cambio en la entropía es relacionarlo a la *dispersión de energía*. Una tendencia natural de la energía es el experimentar un esparcimiento espacial en el tiempo, representando un incremento en la entropía. Si una pelota de basquetbol cae al suelo, rebota varias veces y eventualmente llega al reposo. La energía potencial gravitacional inicial en el sistema pelota-Tierra se ha transformado a energía interna en la bola y el piso. Esa energía se ha esparcido por calor hacia el aire y a regiones del piso alejadas del punto de caída. Además, algo de la energía se ha diseminado por sonido a través de la habitación. Sería no natural que la energía en la habitación y en el suelo invirtiera su movimiento y se concentrara en la pelota estacionaria tal que ésta espontáneamente empezara a rebotar otra vez.

En la expansión libre adiabática de la sección 21.3, el esparcimiento de energía acompaña a la diseminación de las moléculas conforme el gas se precipita a la mitad evacuada del recipiente. Si un objeto caliente se coloca en contacto térmico con un objeto frío, la energía se transfiere por calor del objeto caliente al frío, representando una diseminación de energía hasta que esté distribuida más uniformemente entre los dos objetos.

Ahora considere una representación matemática de este esparcimiento de energía o, equivalentemente, el cambio de entropía. La formulación original de entropía en termodinámica involucra la transferencia de energía por calor durante un proceso reversible. Considere cualquier proceso infinitesimal en el que un sistema cambia de un estado de equilibrio a otro. Si dQ_r es la cantidad de energía transferida por calor cuando el sistema sigue una trayectoria reversible entre los estados, el cambio en entropía dS es igual a esta cantidad de energía dividida entre la temperatura absoluta del sistema:

Cambio en entropía para un proceso infinitesimal ►

$$dS = \frac{dQ_r}{T} \quad (21.12)$$

Se supone que la temperatura es constante porque el proceso es infinitesimal. La entropía es una variable de estado, así el cambio en entropía durante un proceso sólo depende de los puntos extremos, y por tanto es independiente de la trayectoria real seguida. En consecuencia, el cambio en entropía para un proceso irreversible se determina al calcular el cambio en entropía para un proceso *reversible* que conecta los mismos estados inicial y final.

La ecuación 21.10 define la entropía estadísticamente. La evaluación de W , sin embargo, es extremadamente difícil para un sistema macroscópico con una gran cantidad de partículas, en el orden del número de Avogadro. Por otro lado, la ecuación 21.12 define los cambios en la entropía en términos de cantidades macroscópicas, Q_r y T . Por tanto, esta ecuación es más práctica que la ecuación 21.10.

El subíndice r en la cantidad dQ_r es un recordatorio de que la energía transferida se mide a lo largo de una trayectoria reversible aun cuando quizás el sistema en realidad siguió alguna trayectoria irreversible. Cuando el sistema absorbe energía, dQ_r es positiva y la entropía del sistema aumenta. Cuando el sistema expulsa energía, dQ_r es negativa y la entropía del sistema disminuye. Note que la ecuación 21.12 no define la entropía sino, más bien, el *cambio* en entropía. Por tanto, la cantidad significativa para describir un proceso es el *cambio* en entropía.



Para calcular el cambio en entropía para un proceso *finito*, primero reconozca que T , por lo general, no es constante durante el proceso. Por lo tanto, se debe integrar la ecuación 21.12:

$$\Delta S = \int_i^f dS = \int_i^f \frac{dQ_r}{T} \quad (21.13)$$

◀ Cambio en entropía para un proceso finito

Igual que con un proceso infinitesimal, el cambio en entropía ΔS de un sistema que va de un estado a otro tiene el mismo valor para *todas* las trayectorias que conectan los dos estados. Es decir, el cambio finito en entropía ΔS de un sistema sólo depende de las propiedades de los estados de equilibrio inicial y final. Por tanto, se tiene la libertad de elegir cualquier trayectoria conveniente sobre la cual evaluar la entropía en lugar de la trayectoria real, en tanto los estados inicial y final sean los mismos para ambas trayectorias. Este punto se explora más en esta sección.

De la ecuación 21.10, se tiene que un cambio en entropía se representa en la ecuación de Boltzmann como

$$\Delta S = k_B \ln \left(\frac{W_f}{W_i} \right) \quad (21.14)$$

donde W_i y W_f son los números de microestados inicial y final, respectivamente, para las configuraciones inicial y final del sistema. Si $W_f > W_i$, el estado final es más probable que el estado inicial (existen más elecciones de microestados), y la entropía aumenta. Sin embargo, como se mencionó antes, la evaluación de W es extremadamente difícil para los sistemas macroscópicos.

- E XAMEN RÁPIDO 21.5** Un gas ideal se lleva de una temperatura inicial T_i a una temperatura final mayor T_f a lo largo de dos trayectorias reversibles diferentes. La trayectoria A está a presión constante, y la trayectoria B es a volumen constante. ¿Cuál es la relación entre los cambios de entropía del gas para estas trayectorias? (a) $\Delta S_A > \Delta S_B$, (b) $\Delta S_A = \Delta S_B$, (c) $\Delta S_A < \Delta S_B$.

- E XAMEN RÁPIDO 21.6** Verdadero o falso: El cambio de entropía en un proceso adiabático debe ser cero porque $Q = 0$.

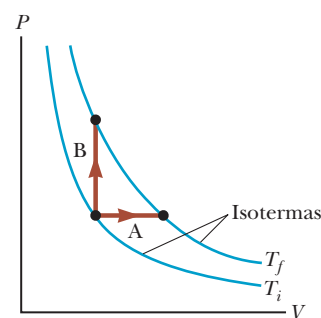


Figura 21.15 (Cuestionario rápido 21.5) Un gas ideal se toma de la temperatura T_i a la T_f a través de dos diferentes trayectorias.

EJEMPLO 21.7 Cambio en entropía: fusión

Un sólido que tiene un calor latente de fusión L_f se funde a una temperatura T_m . Calcule el cambio en entropía de esta sustancia cuando se funde una masa m de la sustancia.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Se puede elegir cualquier trayectoria reversible conveniente que conecte los estados inicial y final. No es necesario identificar el proceso o la trayectoria, cualquiera que sea, el efecto es el mismo: la energía entra a la sustancia por calor y ésta se funde. La masa m de la sustancia que se funde es igual a Δm , el cambio en masa de la sustancia de fase mayor (líquida).

Categorizar La fusión ocurre a una temperatura fija, así el proceso se clasifica como isotérmico.

Analizar Aplique la ecuación 19.8 en la ecuación 21.13 y note que la temperatura permanece fija:

$$\Delta S = \int \frac{dQ_r}{T} = \frac{1}{T_m} \int dQ_r = \frac{Q_r}{T_m} = \frac{L_f \Delta m}{T_m} = \frac{L_f m}{T_m}$$

Finalizar Observe que Δm es positivo, así que ΔS es positivo, esto significa que a la sustancia se le agrega energía.

Cambio en entropía en un ciclo de Carnot

Ahora que tenemos un poco de comprensión de la entropía, considere los cambios en entropía que ocurren en una máquina térmica de Carnot que opera entre las temperaturas T_c y T_h . En un ciclo la máquina toma energía $|Q_c|$ del depó-

sito caliente y expulsa energía $|Q_c|$ al depósito frío. Estas transferencias de energías sólo se presentan durante las porciones isotérmicas del ciclo de Carnot; por tanto, la temperatura constante se puede sacar enfrente del signo de integral en la ecuación 21.13. Entonces la integral simplemente tiene el valor de la cantidad de energía total transferida por calor. Así, el cambio total en entropía para un ciclo es

$$\Delta S = \frac{|Q_h|}{T_h} - \frac{|Q_c|}{T_c} \quad (21.15)$$

donde el signo menos indica que la energía sale de la máquina a temperatura T_c . En el ejemplo 21.3, se probó que para una máquina de Carnot,

$$\frac{|Q_c|}{|Q_h|} = \frac{T_c}{T_h}$$

Al emplear este resultado en la ecuación 21.15, se encuentra que el cambio total en entropía para una máquina de Carnot que funciona en un ciclo es *cero*:

$$\Delta S = 0$$

Ahora considere un sistema que se lleva a través de un ciclo reversible arbitrario (no de Carnot). La entropía es una variable de estado, así que sólo depende de las propiedades de un estado de equilibrio determinado, entonces se concluye que $\Delta S = 0$ para *cualquier* ciclo reversible. En general, esta condición se puede escribir como

$$\oint \frac{dQ_r}{T} = 0 \quad (\text{ciclo reversible}) \quad (21.16)$$

donde el símbolo \oint indica que la integración es sobre una trayectoria cerrada.

Cambio de entropía en una expansión libre

Considere de nuevo la expansión libre adiabática de un gas que ocupa un volumen inicial V_i (figura 21.16). En esta situación, se rompe una membrana que separa al gas de una región evacuada y el gas se expande a un volumen V_f . Este proceso es irreversible; después de llenar todo el volumen, el gas no se concentraría espontáneamente en una mitad de dicho volumen. ¿Cuál es el cambio en entropía del gas durante este proceso? El proceso no es reversible ni cuasiestático. Como se muestra en la sección 21.3, las temperaturas inicial y final del gas son las mismas.

Para aplicar la ecuación 21.13, no se puede tomar $Q = 0$, el valor para el proceso irreversible, sino que se debe obtener Q ; es decir, se debe encontrar una trayectoria reversible equivalente que comparta los mismos estados inicial y final. Una elección simple es una expansión isotérmica reversible en donde el gas empuja lentamente contra un pistón mientras entra energía al gas, por calor, desde un depósito para mantener constante la temperatura. Ya que T es constante en este proceso, la ecuación 21.13 da

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ_r}{T} = \frac{1}{T} \int_i^f dQ_r$$

Para un proceso isotérmico, la primera ley de la termodinámica especifica que $\int_i^f dQ_r$ es igual al negativo del trabajo realizado sobre el gas durante la expansión de V_i a V_f , dado por la ecuación 19.12. Al emplear este resultado, se encuentra que el cambio de entropía para el gas es

$$\Delta S = nR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) \quad (21.17)$$

Ya que $V_f > V_i$, se concluye que ΔS es positivo. Este resultado positivo indica que la entropía del gas se *incrementa* como resultado de la expansión adiabática irreversible.

Cuando se rompe la membrana, el gas se expande libre e irreversible en todo el volumen.

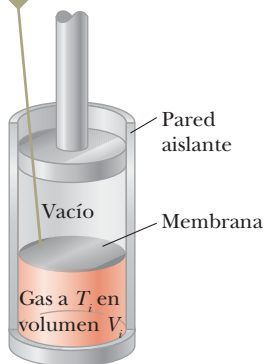


Figura 21.16 Expansión libre adiabática de un gas. El recipiente está térmicamente aislado de sus alrededores; por tanto, $Q = 0$.



Es fácil ver que la energía se ha esparcido después de la expansión. En lugar de estar concentrada en un espacio relativamente pequeño, las moléculas y la energía asociada con ellas se dispersan en una región más amplia. Además, hay más opciones de ubicaciones de moléculas, mayor incertidumbre que sus ubicaciones, y una mayor probabilidad de que las moléculas se distribuyan a través del volumen. La probabilidad es baja para que las moléculas, en ausencia de la membrana, se concentren espontáneamente en la mitad inferior del recipiente.

Cambio de entropía en conducción térmica

Ahora considere un sistema que consiste en un depósito caliente y un depósito frío en contacto térmico mutuo y aislados del resto del Universo. Durante un proceso la energía Q se transfiere por calor del depósito caliente a temperatura T_h al depósito frío a temperatura T_c . El proceso, como se describe, es irreversible (la energía no fluye espontáneamente del frío al caliente), así que debe encontrarse un proceso reversible equivalente. Todo el proceso es una combinación de dos procesos: la energía saliendo del depósito caliente y la energía entrando al depósito frío. En cada proceso se calcula el cambio de entropía para el depósito y se suma para obtener el cambio de entropía global.

Primero considere el proceso de entrada de energía al depósito frío. No obstante que el depósito ha absorbido alguna energía, la temperatura del depósito no ha cambiado. La energía que ha entrado al depósito es la misma que entraría mediante un proceso reversible, isotérmico. Lo mismo es cierto para la energía que abandona el depósito caliente.

El depósito frío absorbe energía Q , así su entropía aumenta en Q/T_c . Al mismo tiempo, el depósito caliente pierde energía Q , entonces su cambio de entropía es $-Q/T_h$. Por tanto, el cambio en entropía del sistema es

$$\Delta S = \frac{Q}{T_c} + \frac{-Q}{T_h} = Q \left(\frac{1}{T_c} - \frac{1}{T_h} \right) > 0 \quad (21.18)$$

Este incremento es consistente con la interpretación del cambio de entropía como representando la diseminación de energía. En la configuración inicial, el depósito caliente tiene exceso de energía interna respecto al depósito frío. El proceso que ocurre disemina la energía en una distribución más equitativa entre los dos depósitos.

Ejemplo 21.8 Expansión libre adiabática: una última vez

Verifique que los enfoques macroscópico y microscópico para el cálculo de la entropía conducen a la misma conclusión para la expansión libre adiabática de un gas ideal. Suponga que en la figura 21.16 un gas ideal se expande a cuatro veces su volumen inicial. Como se vio para este proceso, las temperaturas inicial y final son las mismas.

(A) Con un enfoque macroscópico, calcule el cambio de entropía para el gas.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Observe de nuevo la figura 21.16, que es un diagrama del sistema antes de la expansión libre adiabática. Imagine romper la membrana de modo que el gas se mueva hacia el área evacuada. La expansión es irreversible.

Categorizar Se puede sustituir el proceso irreversible con un proceso isotérmico reversible entre los mismos estados inicial y final. Este enfoque es macroscópico, así que se emplea una variable termodinámica, en particular, el volumen V .

Analizar Aplique la ecuación 21.17 para evaluar el cambio de entropía:
$$\Delta S = nR \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = nR \ln \left(\frac{4V_i}{V_i} \right) = nR \ln 4$$

(B) Mediante consideraciones estadísticas, calcule el cambio de entropía para el gas y demuestre que concuerda con la respuesta que obtuvo en la parte (A).

continúa



21.8 continuación

SOLUCIÓN

Categorizar Este enfoque es microscópico, entonces se utilizan variables relacionadas con las moléculas individuales.

Analizar Como en la discusión que condujo a la ecuación 21.11, el número de microestados disponibles a una sola molécula en el volumen inicial V_i es $w_i = V_i/V_m$, donde V_i es el volumen inicial del gas y V_m es el volumen microscópico ocupado por la molécula. Use este número para encontrar el número de microestados disponibles para N moléculas:

$$W_i = w_i^N = \left(\frac{V_i}{V_m}\right)^N$$

Determine el número de microestados disponibles para N moléculas en el volumen final $V_f = 4V_i$:

$$W_f = \left(\frac{V_f}{V_m}\right)^N = \left(\frac{4V_i}{V_m}\right)^N$$

Utilice la ecuación 21.14 para obtener el cambio de entropía:

$$\begin{aligned}\Delta S &= k_B \ln \left(\frac{W_f}{W_i}\right) \\ &= k_B \ln \left(\frac{4V_i}{V_i}\right)^N = k_B \ln (4^N) = Nk_B \ln 4 = nR \ln 4\end{aligned}$$

Finalizar La respuesta es la misma que para la parte (A), que trata con parámetros macroscópicos.

¿QUÉ PASARÍA SI? En la parte (A) se usó la ecuación 21.17, que está basada en un proceso isotérmico reversible que conecta los estados inicial y final. ¿Llegaría al mismo resultado si elige un proceso reversible diferente?

Respuesta Debe llegar al mismo resultado porque la entropía es una variable de estado. Por ejemplo, considere los procesos de dos etapas en la figura 21.17: una expansión adiabática reversible de V_i a $4V_i$, ($A \rightarrow B$) durante el cual la temperatura cae de T_1 a T_2 , y un proceso isovolumétrico reversible ($B \rightarrow C$) que lleva al gas de vuelta a la temperatura inicial T_1 . Durante el proceso adiabático reversible, $\Delta S = 0$ porque $Q_r = 0$.

Para el proceso isovolumétrico reversible ($B \rightarrow C$), use la ecuación 21.13:

Encuentre la razón de temperatura T_1 a T_2 de la ecuación 20.40 para el proceso adiabático:

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ_r}{T} = \int_{T_2}^{T_1} \frac{nC_V dT}{T} = nC_V \ln \left(\frac{T_1}{T_2}\right)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{4V_i}{V_i}\right)^{\gamma-1} = (4)^{\gamma-1}$$

Sustituya para determinar ΔS :

$$\begin{aligned}\Delta S &= nC_V \ln (4)^{\gamma-1} = nC_V (\gamma - 1) \ln 4 \\ &= nC_V \left(\frac{C_P}{C_V} - 1\right) \ln 4 = n(C_P - C_V) \ln 4 = nR \ln 4\end{aligned}$$

De hecho obtiene el mismo resultado exacto para el cambio de entropía.

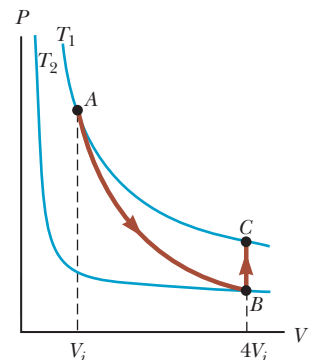


Figura 21.17 (Ejemplo 21.8) Un gas se expande a cuatro veces su volumen inicial y regresa a la temperatura inicial mediante un proceso de dos etapas.

21.8 Entropía y la segunda ley

Si considera un sistema y sus alrededores para incluir todo el Universo, éste siempre se mueve hacia un macroestado de mayor probabilidad, correspondiente a la continua dispersión de energía. Una forma alternativa de establecer este comportamiento es como sigue:

Enunciado de entropía de la segunda ley de la termodinámica

La entropía del Universo aumenta en todos los procesos reales.



Este enunciado puede ser probado al ser equivalente a los enunciados de Kelvin-Planck y Clausius.

Primero se mostrará que es equivalente al enunciado de Clausius. Observe la figura 21.5, y vea que si la bomba de calor opera en esta manera, la energía fluye espontáneamente del depósito frío al depósito caliente sin una entrada de energía por trabajo. Como un resultado, la energía en el sistema no se esparce uniformemente entre los dos depósitos, se *concentra* en el depósito caliente. En consecuencia, si el enunciado de Clausius de la segunda ley no es verdadero, entonces el enunciado de entropía también es falso, probando así su equivalencia.

Para la equivalencia con el enunciado de Kelvin-Planck, considere la figura 21.18, donde se muestra la máquina imposible de la figura 21.3 conectada a una bomba de calor que opera entre los mismos depósitos. El trabajo de salida de la máquina se utiliza para impulsar la bomba de calor. El efecto neto de esta combinación es que la energía abandona el depósito frío y es dirigida hacia el depósito caliente sin la entrada de trabajo. (El trabajo realizado por la máquina sobre la bomba de calor es *interno* al sistema de ambos dispositivos.) Esto está prohibido por el enunciado de Clausius de la segunda ley, el cual fue demostrado ser equivalente al enunciado de entropía. Por tanto, el enunciado Kelvin-Planck de la segunda ley también es equivalente al enunciado de entropía.

Al ocuparse con un sistema que no está aislado de sus alrededores, recuerde que el incremento en entropía descrito en la segunda ley es del sistema y sus alrededores. Cuando un sistema y su entorno interactúan en un proceso irreversible, el aumento en entropía de uno es mayor que la disminución en entropía del otro. Así, el cambio en entropía del Universo debe ser mayor que cero para un proceso irreversible y es igual a cero para un proceso reversible.

Este enunciado de la segunda ley puede verificarse para los cálculos del cambio de entropía realizados en la sección 21.7. Primero considere el cambio de entropía en una expansión libre, descrita por la ecuación 21.17. Ya que la expansión libre ocurre en un recipiente aislado, no se transfiere energía por calor desde los alrededores. Por tanto, la ecuación 21.17 representa el cambio de entropía del Universo completo. Como $V_f > V_i$, el cambio en entropía del Universo es positivo, consistente con la segunda ley.

Ahora considere el cambio de entropía en conducción térmica, descrita por la ecuación 21.18. Se supone que cada depósito es la mitad del Universo. (Entre más grande sea el depósito, es mejor la suposición de que su temperatura ¡permanezca constante!) Entonces el cambio de entropía del Universo queda representado por la ecuación 21.18. Ya que $T_h > T_c$, este cambio de entropía es positivo, de nuevo consistente con la segunda ley. El cambio de entropía positivo también es consistente con la noción de esparcimiento de energía. La porción caliente del Universo tiene exceso de energía interna respecto a la porción fría. La conducción térmica representa una diseminación de la energía más equitativa a través del Universo.

Por último, considere el cambio de entropía en un ciclo de Carnot, dado por la ecuación 21.15. El cambio de entropía de la máquina por sí misma es cero. El cambio en entropía de los depósitos es

$$\Delta S = \frac{|Q_c|}{T_c} - \frac{|Q_h|}{T_h}$$

De acuerdo a la ecuación 21.7, este cambio de entropía también es cero. Por tanto, el cambio de entropía del Universo sólo está asociado con el trabajo efectuado por la máquina. Una parte de ese trabajo se utiliza para cambiar la energía mecánica de un sistema externo a la máquina: rotar el eje de un motor, elevar un peso, y así sucesivamente. No hay cambio en energía interna del sistema externo por esta parte del trabajo, o, equivalentemente, no existe esparcimiento de energía, así otra vez el cambio de entropía es cero. La otra porción del trabajo se emplea para superar varias fuerzas de fricción u otras fuerzas no conservativas en el sistema externo. Este proceso causa un incremento en energía interna de ese sistema. Ese mismo incremento en energía interna podría ocurrir vía un proceso termodinámico reversible en donde energía Q se transfiere por calor, así el cambio en entropía asociado con esa parte del trabajo es positivo. Como resultado, el cambio de entropía global del Universo para la operación de la máquina de Carnot es positivo, de nuevo consistente con la segunda ley.

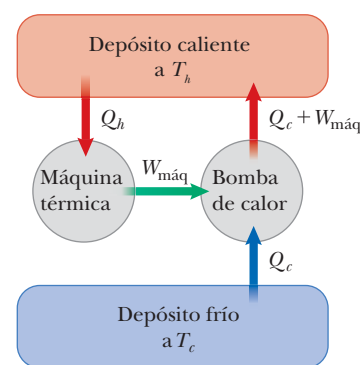


Figura 21.18 La máquina imposible de la figura 21.3 transfiere energía por trabajo a una bomba de calor que opera entre dos depósitos de energía. Esta situación es prohibida por el enunciado de Clausius de la segunda ley de la termodinámica.

Finalmente, como los procesos reales son irreversibles, la entropía del Universo debe aumentar estacionariamente para después lograr un valor máximo. En este valor, suponga que la segunda ley de la termodinámica, como formulada aquí en la Tierra, se aplica al Universo completo en expansión, así el Universo estará en un estado con temperatura y densidad uniformes. La energía total del Universo se habrá diseminado más uniformemente a través del Universo. Todos los procesos físicos, químicos y biológicos habrán cesado en esa época. A este sombrío panorama a veces se le conoce como la *muerte térmica* del Universo.

Resumen

Definiciones

La **eficiencia térmica** e de una máquina térmica es

$$e \equiv \frac{W_{\text{pág}}}{|Q_h|} = \frac{|Q_h| - |Q_c|}{|Q_h|} = 1 - \frac{|Q_c|}{|Q_h|} \quad (21.2)$$

Desde un punto de vista microscópico, la **entropía** de un determinado macroestado se define como

$$S \equiv k_B \ln W \quad (21.10)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann y W es el número de microestados del sistema que corresponden al macroestado.

El **microestado** de un sistema es la descripción de sus componentes individuales. El **macroestado** es una descripción del sistema desde un punto de vista macroscópico. Un determinado macroestado puede tener muchos microestados.

En un proceso **reversible**, el sistema puede regresar a sus condiciones iniciales a lo largo de la misma trayectoria sobre un diagrama PV , y cada punto de esta ruta es un estado de equilibrio. Un proceso que no satisface estos requisitos es **irreversible**.

Conceptos y principios

Una **máquina térmica** es un dispositivo que toma energía por calor y, al funcionar en un proceso cíclico, expulsa una fracción de dicha energía mediante trabajo. El trabajo neto realizado por una máquina térmica al llevar una sustancia de trabajo a través de un proceso cíclico ($\Delta E_{\text{int}} = 0$) es

$$W_{\text{máq}} = |Q_h| - |Q_c| \quad (21.1)$$

donde $|Q_h|$ es la energía que se toma de un depósito caliente y $|Q_c|$ es la energía que se expulsa a un depósito frío.

Dos formas en que puede expresarse la **segunda ley de la termodinámica**:

- Es imposible construir una máquina térmica que, al operar en un ciclo, no produzca otro efecto que la entrada de energía por calor desde un depósito y la realización de una cantidad igual de trabajo (enunciado de Kelvin-Planck).
- Es imposible construir una máquina cíclica cuyo único efecto sea la transferencia continua de energía, por calor, de un objeto a otro a una mayor temperatura sin la entrada de energía por trabajo (enunciado de Clausius).

El **teorema de Carnot** establece que ninguna máquina térmica real que funcione (irreversiblemente) entre las temperaturas T_c y T_h puede ser más eficiente que una máquina que opere reversiblemente en un ciclo de Carnot entre las mismas dos temperaturas.

La eficiencia térmica de una máquina térmica que funciona en el ciclo de Carnot es

$$e_C = 1 - \frac{T_c}{T_h} \quad (21.8)$$

El estado macroscópico de un sistema con un gran número de microestados tiene cuatro cualidades que están relacionadas entre sí: (1) *incertidumbre*: debido al gran número de microestados, existe fuerte incertidumbre sobre cuál de ellos es; (2) *elección*: otra vez, debido al enorme número de microestados, hay un gran número de elecciones sobre cuál de ellos pueda ser; (3) *probabilidad*: un macroestado con muchos microestados es más probable que exista que uno con un pequeño número de microestados; Para un sistema termodinámico, estas cuatro cualidades se pueden relacionar a la **entropía**, una variable de estado.

La segunda ley de la termodinámica establece que cuando ocurren procesos reales (irreversibles), existe una diseminación espacial de energía. Este esparcimiento de energía se relaciona a una variable de estado termodinámica llamada **entropía** S . Por tanto, otra forma de la segunda ley se puede establecer como sigue:

- La entropía del Universo aumenta en todos los procesos reales.



El **cambio en entropía** dS de un sistema durante un proceso entre dos estados de equilibrio infinitesimalmente separados es

$$dS = \frac{dQ_r}{T} \quad (21.12)$$


donde dQ_r es la transferencia de energía por calor para el sistema para un proceso reversible que conecta los estados inicial y final.

El cambio de entropía de un sistema durante un proceso finito arbitrario entre un estado inicial y un estado final es

$$\Delta S = \int_i^f \frac{dQ_r}{T} \quad (21.13)$$

El valor de ΔS para el sistema es el mismo para todas las trayectorias que conectan los estados inicial y final. El cambio de entropía para un sistema que experimenta cualquier proceso cíclico reversible, es cero.

Piense, dialogue y comparta

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  **WEBASSIGN** From Cengage

- Un motor funciona en un ciclo de Carnot de la siguiente manera. En el punto *A* del ciclo, 2.34 moles de un gas ideal monoatómico tiene una presión de 1 400 kPa, un volumen de 10.0 L y una temperatura de 720 K. El gas se expande isotrópicamente al punto *B* y luego se expande adiabáticamente al punto *C*, donde su volumen es de 24.0 L. Una compresión isotérmica lo lleva al punto *D*, donde su volumen es de 15.0 L. Un proceso adiabático devuelve el gas al punto *A*. (a) Complete la siguiente tabla con presiones, volúmenes y temperaturas en cada uno de los cuatro puntos en el ciclo:

Punto en el ciclo	P (kPa)	V (L)	T (K)
<i>A</i>			
<i>B</i>			
<i>C</i>			
<i>D</i>			

(b) Complete la siguiente tabla con la transferencia de energía por calor, y trabaje en el gas, y el cambio en la energía interna del gas para cada uno de los cuatro procesos en el ciclo:

Punto en el ciclo	Q (kJ)	W (kJ)	ΔE_{int} (kJ)
$A \rightarrow B$			
$B \rightarrow C$			
$C \rightarrow D$			
$D \rightarrow A$			

(c) Encuentre la eficiencia del motor a partir de los datos en la tabla en el inciso (b). (d) Encuentre la eficiencia del motor a partir de los datos de la tabla en el inciso (a).

- ACTIVIDAD** Si se lanzan dos dados de seis caras, los posibles resultados de sumar el número de puntos en las caras superiores oscilan entre 2 y 12. Las probabilidades de estos resultados varían según la cantidad de formas en que se puede lograr un resultado en particular. Por ejemplo, solo hay una forma de lograr un 2: 1–1. Pero hay seis formas de lograr un resultado de 7: 1–6, 2–5, 3–4, 4–3, 5–2 y 6–1. Por tanto, un resultado de 7 es seis veces más probable que un 2. El gráfico de barras en la figura TP21.2 muestra la probabilidad teórica de todos los resultados posibles para dos dados. Experimentalmente, si los dos dados se lanzaran 100 veces y se dibujara un histograma de posibles resultados, tendría una forma muy similar a este gráfico de probabilidad. (a) ¿Qué pasa si arrojamus tres dados? ¿Cómo se verá el histograma? Haga esto en su grupo. Lance tres dados 100 veces y haga un histograma de los resultados. ¿Cómo se diferencia la forma del histograma resultante de la curva de probabilidad que se muestra en la figura TP21.2 para dos dados? Haga un gráfico de probabili-

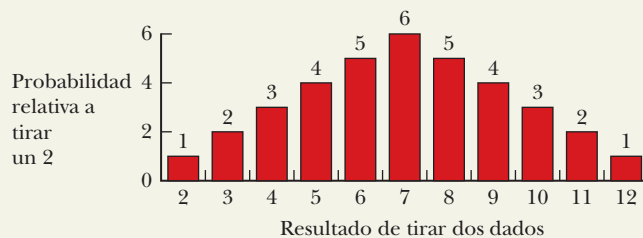


Figura TP21.2

dad teórica para tres dados como en la figura TP21.2 y compárelo con su histograma. (b) ¿Qué pasa si lanza los dados la cantidad de Avogadro? (¡No intente esto!) ¿Cómo se vería el histograma? (Realice una predicción de cómo varía el gráfico para tres dados respecto al de dos dados.) (c) Suponga que configura laboriosamente un número de Avogadro de dados sobre una mesa, con todos los dados teniendo un 1 en su cara superior. Luego sacude la mesa por unos segundos. Cuando ha sumado todos los números en las caras superiores, ¿cuál es el resultado más probable? (d) Ahora imagine que sacude la mesa de nuevo. ¿Qué tan probable es que todos los dados vuelvan a tener un 1 en sus caras superiores? (e) ¿Qué tiene que ver todo esto con la entropía?

- ACTIVIDAD** Considere los diversos líquidos en la tabla a continuación en sus puntos de ebullición. La tabla muestra el calor latente de vaporización de cada líquido en kJ/mol (note las unidades) y el punto de ebullición en °C. Para cada uno de los líquidos, evalúe el cambio de entropía del líquido por mol cuando se vaporice en el punto de ebullición. ¿Qué advierte sobre los resultados?

	L_v (kJ/mol)	Punto de ebullición (°C)
Compuestos polares		
HF	25.2	19.7
HCl	16.2	-84.8
HI	19.8	-35.6
H ₂ O	40.7	100
Compuestos no polares		
C ₃ H ₈	19.0	-42.1
C ₄ H ₁₀	22.4	-0.50
Elementos		
Hg	54.7	357
Pb	178	1 749
Cl ₂	20.4	-34.0
Br ₂	30.0	58.8

Problemas

Consulte el Prefacio para obtener una explicación de los iconos utilizados en este conjunto de problemas. Para elementos de evaluación adicionales para esta sección, vaya a  WEBASSIGN From Cengage

SECCIÓN 21.1 Máquinas térmicas y la segunda ley de la Termodinámica

- Una máquina térmica tiene una potencia de salida mecánica de 5.00 kW y una eficiencia de 25.0%. La máquina expulsa 8.00×10^3 J de energía de escape en cada ciclo. Encuentre (a) la energía que admite durante cada ciclo y (b) el intervalo de tiempo por cada ciclo.
- El trabajo realizado por una máquina es igual a un cuarto de la energía que absorbe de un depósito. (a) ¿Cuál es su eficiencia térmica? (b) ¿Qué fracción de la energía absorbida es expulsada al depósito frío?
- Suponga que una máquina térmica se conecta a dos depósitos de energía, uno es una alberca de aluminio fundido (660 °C) y el otro un bloque de mercurio sólido (−38.9 °C). La máquina participa al congelar 1.00 g de aluminio y fundir 15.0 g de mercurio durante cada ciclo. El calor de fusión del aluminio es 3.97×10^5 J/kg; el calor de fusión del mercurio es 1.18×10^4 J/kg. ¿Cuál es la eficiencia de esta máquina?

SECCIÓN 21.2 Bombas de calor y refrigeradores

- Durante cada ciclo, un refrigerador expulsa 625 kJ de energía a un depósito de alta temperatura y toma 550 kJ de energía de un depósito de baja temperatura. Determine (a) el trabajo realizado sobre el refrigerador en cada ciclo y (b) el coeficiente de rendimiento del refrigerador.
- Un congelador tiene un coeficiente de rendimiento de 6.30. Utiliza electricidad a razón de 457 kWh/año. (a) En promedio, ¿cuánta energía emplea en un solo día? (b) En promedio, ¿cuánta energía elimina del refrigerador en un solo día? (c) ¿Cuál es la cantidad masa de agua máxima a 20.0 °C que el congelador podría procesar en un solo día? *Nota:* Un kilowatt-hora (kWh) es una cantidad de energía igual a la necesaria para hacer funcionar un aparato de 1-kW durante una hora.
- Una bomba de calor tiene un coeficiente de rendimiento igual a 4.20 y requiere una potencia de 1.75 kW para operar. (a) ¿Cuánta energía es aportada por la bomba de calor a una casa en una hora? (b) Si se invierte la bomba de calor de manera que actúe como un dispositivo de aire acondicionado en el verano, ¿cuál sería su coeficiente de rendimiento?

SECCIÓN 21.4 La máquina de Carnot

- Una de las máquinas térmicas más eficientes jamás construida es una turbina de vapor en el valle del río Ohio, que funciona entre 1 870 °C y 430 °C con energía del carbón. (a) ¿Cuál es la máxima eficiencia teórica? (b) La eficiencia real de la máquina es 42.0%. ¿Cuánta potencia mecánica entrega la máquina si admite 1.40×10^5 J de energía cada segundo de su depósito caliente?
- ¿Por qué es imposible la siguiente situación? Una inventora acude a la oficina de patentes afirmando que su máquina térmica, la cual emplea agua como sustancia de trabajo, tiene una eficiencia termodinámica de 0.110. No obstante que esta eficiencia es baja comparada con típicas máquinas automotrices, ella explica que su máquina opera entre un depósito de energía a temperatura ambiente y una mezcla de agua-hielo a presión

atmosférica y por tanto no requiere otro combustible excepto para hacer el hielo. La patente es aprobada, y los prototipos operando de la máquina prueban la afirmación de la inventora respecto a la eficiencia.

- Si una máquina térmica de Carnot con 35% de eficiencia (figura 21.2) funciona en reversa para formar un refrigerador (figura 21.4), ¿cuál sería el coeficiente de rendimiento de este refrigerador?
- Un refrigerador ideal o una bomba de calor ideal es equivalente a una máquina de Carnot que funciona en reversa. Es decir, de un depósito frío se toma energía $|Q_c|$ y la energía $|Q_h|$ es expulsada a un depósito caliente. (a) Demuestre que el trabajo que se debe suministrar para que funcione el refrigerador o bomba de calor es

$$W = \frac{T_h - T_c}{T_c} |Q_c|$$

- Demuestre que el coeficiente de rendimiento (COP) del refrigerador ideal es

$$\text{COP} = \frac{T_c}{T_h - T_c}$$

- Una máquina térmica se diseña para tener una eficiencia de Carnot de 65.0% cuando opere entre dos depósitos de energía. (a) Si la temperatura del depósito frío es 20.0 °C, ¿cuál debe ser la temperatura del depósito caliente? (b) ¿La eficiencia real de la máquina puede ser igual a 65.0%? Explique.
- Una planta eléctrica funciona a un 32.0% de eficiencia durante el verano, cuando el agua de mar que utiliza para enfriar está a 20.0 °C. La planta emplea vapor a 350 °C para impulsar las turbinas. Si la eficiencia de la planta cambia en la misma proporción que la eficiencia ideal, ¿cuál es la eficiencia de la planta en el invierno, cuando el agua de mar está a 10.0 °C?
- Está trabajando en un empleo de verano en una empresa que diseña sistemas de energía no tradicionales. La compañía trabaja en una planta de energía eléctrica propuesta que usaría el gradiente de temperatura en el océano. El sistema incluye una máquina térmica que funcionaría entre 20.0 °C (temperatura del agua superficial) y 5.00 °C (temperatura del agua a una profundidad de aproximadamente 1 km). (a) Su supervisor le pide que determine la efectividad máxima de dicho sistema. (b) Además, si la salida de energía eléctrica de la planta es 75.0 MW y opera a la máxima eficiencia posible teórica, debe determinar la velocidad de la energía que se toma desde el depósito caliente. (c) A partir de esta información, si una factura de electricidad de un hogar típico muestra un uso de 950 kWh por mes, su supervisor quiere saber cuántos hogares pueden tener la potencia de este sistema de energía que funciona a su máxima eficiencia. (d) A medida que la energía se extrae del agua tibia superficial para operar el motor, esta es remplazada por la energía absorbida por la luz solar en la superficie. Si la intensidad promedio absorbida por la luz del sol es de 650 W/m² durante 12 horas de luz diurna en un día despejado, debe encontrar el área de la superficie del océano que es necesaria para que la luz solar remplace la energía absorbida por el motor. (e) A partir de esta información, debe determinar si hay suficiente superficie oceánica en la Tierra para usar dichos motores y satisfacer las necesidades eléctricas de todos los hogares asociados con la población de la Tierra. Suponga que la energía utilizada para un hogar en

el inciso (c) es un promedio en todo el planeta. (f) En vista de los resultados en este problema, su supervisor ha pedido su conclusión en cuanto a si vale la pena desarrollar tal sistema. Tenga en cuenta que el “combustible” (luz solar) es gratis.

- 14.** Una máquina térmica de Carnot funciona entre las temperaturas T_h y T_c . (a) Si $T_h = 500$ K y $T_c = 350$ K, ¿cuál es la eficiencia de la máquina? (b) ¿Cuál es el cambio en su eficiencia por cada grado de aumento en T_h sobre 500 K? (c) ¿Cuál es el cambio en su eficiencia por cada grado de cambio en T_c ? (d) ¿La respuesta al inciso (c) depende de T_c ? Explique.
- 15.** Una estación para generar energía eléctrica se diseña para dar una potencia de salida eléctrica de 1.40 MW con el uso de una turbina a dos tercios de la eficiencia de una máquina de Carnot. La descarga de energía se transfiere por calor a una torre de enfriamiento a 110 °C. (a) Encuentre la rapidez de descarga de energía por calor, como función de la temperatura de combustión T_h . (b) Si el hogar se modifica para funcionar más caliente con el empleo de tecnología de combustión más avanzada, ¿cómo cambia la cantidad de energía que se descarga? (c) Encuentre la potencia de descarga para $T_h = 800$ °C. (d) Obtenga el valor de T_h para el que la potencia de escape sólo sería la mitad del inciso (c). (e) Determine el valor de T_h para el que la potencia de descarga sería un cuarto del inciso (c).
- 16.** Suponga que construye un dispositivo de dos máquinas térmicas y que la salida de energía de escape de una se suministra como la energía de entrada para la segunda. Se dice que las dos máquinas operan *en serie*. Acepte que e_1 y e_2 representan las eficiencias de las dos máquinas. (a) La eficiencia global del dispositivo de dos máquinas se define como la salida de trabajo total dividida entre la energía que se pone en la primera máquina por calor. Demuestre que la eficiencia global está dada por

$$e = e_1 + e_2 - e_1 e_2$$

¿Qué pasaría si? Para los incisos (b) a (c) que siguen, suponga que las dos máquinas son máquinas de Carnot. La máquina 1 funciona entre las temperaturas T_h y T_i . El gas en la máquina 2 varía en temperatura entre T_i y T_c . En términos de las temperaturas, (b) ¿cuál es la eficiencia de la combinación de máquinas? (c) ¿A partir del uso de dos máquinas resulta una mejoría en la eficiencia neta en lugar de emplear sólo una? (d) ¿Qué valor de la temperatura intermedia T_i resulta en que cada una de las dos máquinas se serie realice igual trabajo? (c) ¿Qué valor de T_i resulta en cada una de las dos máquinas en serie que tengan la misma eficiencia?

- 17.** La bomba de calor, que se muestra en la figura P21.17, es en esencia un acondicionador de aire instalado hacia atrás. Extrae energía del aire exterior más frío y lo deposita en una habitación más caliente. Suponga que la razón de la energía real que entra a la habitación, al trabajo realizado por el motor del dispositivo es 10.0% de la razón máxima teórica. Determine la energía que entra a la habitación por joule de

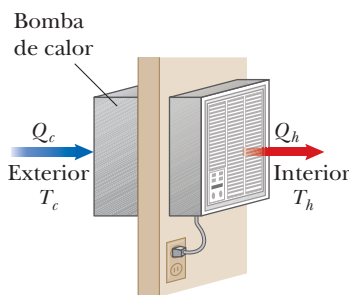


Figura P21.17

trabajo efectuado por el motor, dado que la temperatura interior es 20.0 °C y la exterior es -5.00 °C.

SECCIÓN 21.5 Motores de gasolina y diesel

Nota: Para los problemas en esta sección, suponga que el gas en la máquina es diatómico con $\gamma = 1.40$.

- 18.** Un motor de gasolina tiene una razón de compresión de 6.00. (a) ¿Cuál es la eficiencia del motor si funciona en un ciclo idealizado de Otto? (b) **¿Qué pasaría si?** Si la eficiencia real es de 15.0%, ¿qué fracción del combustible se desperdicia como resultado de fricción y pérdidas de energía por calor que se podrían evitar en un motor reversible? Suponga combustión completa de la mezcla aire-combustible.
- 19.** Un motor diesel idealizado funciona en un ciclo conocido como *ciclo diesel estándar de aire*, que se muestra en la figura P21.19. El combustible se rocía en el cilindro en el punto de máxima compresión, B. La combustión ocurre durante la expansión B→C, que se modela como un proceso isobárico. Demuestre que la eficiencia de un motor que opera en este ciclo diesel idealizado es

$$e = 1 - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} \right)$$

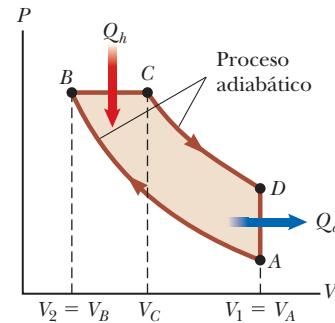


Figura P21.19

SECCIÓN 21.6 Entropía

- 20.** (a) Prepare una tabla como la tabla 21.1 para el siguiente acontecimiento. Lance simultáneamente cuatro monedas al aire y registre los resultados de sus lanzamientos en términos del número de águila (A) y sol (S) que resulten. Por ejemplo, AASA y ASAA son dos posibles en que puede lograrse tres águilas y un sol. (b) Con base en su tabla, ¿cuál es el resultado más probable registrado para un lanzamiento?
- 21.** Prepare una tabla semejante a la tabla 21.1 mediante el mismo procedimiento (a) para el caso en el que saca tres canicas de su bolsa en lugar de cuatro y (b) para el caso en el que saca cinco en lugar de cuatro.

SECCIÓN 21.7 Entropía en sistemas termodinámicos

- 22.** Un vaso de espuma de poliestireno contiene 125 g de agua caliente a 100 °C se enfría a temperatura ambiente, 20.0 °C. ¿Cuál es el cambio en entropía de la habitación? Desprecie el calor específico del vaso y cualquier cambio en la temperatura de la habitación.
- 23.** Un automóvil de 1 500 kg se mueve a 20.0 m/s. El conductor frena hasta detenerse. Los frenos se enfrían a la temperatura del aire circundante, que es casi constante en 20.0 °C. ¿Cuál es el cambio de entropía total?
- 24.** Un recipiente de 2.00 L tiene un separador al centro que lo divide en dos partes iguales, como se muestra en la figura P21.24. El lado izquierdo contiene 0.044 moles de gas H_2 ,

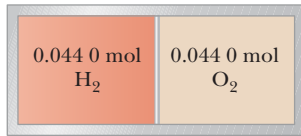


Figura P21.24

y el lado derecho contiene 0.044 0 moles de gas O_2 . Ambos gases están a temperatura ambiente y a presión atmosférica. Se retira el separador y se permite que los gases se mezclen. ¿Cuál es el aumento en entropía del sistema?

25. Calcule el cambio en entropía de 250 g de agua calentada lentamente de $20.0^\circ C$ a $80.0^\circ C$.
26. ¿Qué cambio en entropía ocurre cuando un cubo de hielo de 27.9 g a $-12^\circ C$ es transformado en vapor a $115^\circ C$?

SECCIÓN 21.8 Entropía y la segunda ley

27. Cuando una barra de aluminio se conecta entre un depósito caliente a 725 K y un depósito frío a 310 K, 2.50 kJ de energía se transfieren por calor del depósito caliente al depósito frío. En este proceso irreversible, calcule el cambio de entropía de (a) el depósito caliente, (b) el depósito frío y (c) el Universo, despreciando cualquier cambio en entropía de la barra de aluminio.
- S** 28. Cuando una barra metálica se conecta entre un depósito caliente a T_h y un depósito frío a T_c , la energía transferida por calor del depósito caliente al depósito frío es Q . En este proceso irreversible, encuentre expresiones para el cambio de entropía de (a) el depósito caliente, (b) el depósito frío y (c) el Universo, despreciando cualquier cambio en entropía de la barra metálica.
29. Personalmente, ¿qué tan rápido hace que aumente la entropía del Universo justo ahora? Calcule un orden de magnitud, establezca qué cantidades toma como datos y los valores que mide o estima para ellos.

PROBLEMAS ADICIONALES

- AMT** 30. En las cataratas del Niágara cada segundo unos $5.00 \times 10^3 \text{ m}^3$ de agua caen una distancia de 50.0 m. ¿Cuál es el incremento en entropía del Universo por segundo debido a la caída de agua? Suponga que la masa de los alrededores es tan grande que su temperatura y la del agua permanecen casi constantes a $20.0^\circ C$. También suponga una cantidad despreciable de agua que se evapora.
31. La energía absorbida por una máquina es tres veces mayor que el trabajo que realiza. (a) ¿Cuál es su eficiencia térmica? (b) ¿Qué fracción de la energía absorbida es expulsada al depósito frío?
- AMT** 32. En 1993 el gobierno estadounidense instituyó el requisito de que todos los acondicionadores de aire que se vendan en Estados Unidos deben tener un factor de eficiencia energética (EER, por sus siglas en inglés) de 10 o mayor. El EER se define como la razón de la capacidad de enfriamiento del acondicionador de aire, medida en unidades térmicas británicas por hora, o Btu/h, a su requerimiento de potencia eléctrica en watts. (a) Convierta el EER de 10.0 a forma adimensional, con el uso de la conversión $1 \text{ Btu} = 1055 \text{ J}$. (b) ¿Cuál es el nombre apropiado para esta cantidad adimensional? (c) Alrededor de 1970 era común encontrar acondicionadores de aire de habitación con EER de 5 o menos. Establezca la comparación de los costos de operación para acondicionadores de aire de 10 000 Btu/h con EER de 5.00 y 10.0. Suponga que cada acondicionador de aire opera durante 1 500 h, en el verano,

en una ciudad donde la electricidad cuesta 17.0 centavos por kWh.

33. En 1816 Robert Stirling, un clérigo escocés, patentó el *motor Stirling*, que después encontró gran variedad de aplicaciones, incluyendo su empleo en colectores de energía solar para transformar la luz solar en electricidad. El combustible se quema externamente para calentar uno de los dos cilindros del motor. Una cantidad fija de gas inerte se mueve cíclicamente entre los cilindros y se expande en el caliente y se contrae en el frío. La figura P21.33 representa un modelo de su ciclo termodinámico. Considere n moles de un gas ideal monoatómico que circula una vez por el ciclo, que consiste de dos procesos isotérmicos a temperaturas $3T_i$ y T_i y dos procesos a volumen constante. Ahora el objetivo es obtener la eficiencia de esta máquina. (a) Encuentre la energía transferida por calor al gas durante el proceso isovolumétrico AB . (b) Determine la energía que se transfiere por calor al gas durante el proceso isotérmico BC . (c) Encuentre la energía transferida por calor al gas durante el proceso isovolumétrico CD . (d) Obtenga la energía que se transfiere por calor al gas durante el proceso isotérmico DA . (e) Identifique cuáles de los resultados de los incisos (a) a (d) son positivos y evalúe la energía de entrada a la máquina por calor. (f) De la primera ley de la termodinámica, encuentre el trabajo efectuado por la máquina. (g) De los resultados de los incisos (e) y (f), evalúe la eficiencia de la máquina. Un motor Stirling es más fácil de fabricar que un motor de combustión interna o una turbina. Puede funcionar con la quema de basura. Puede operar con la energía transferida por luz solar y no producir materiales de descarga. Los motores Stirling no se emplean en automóviles debido a su largo tiempo de arranque y a su pobre respuesta de aceleración.

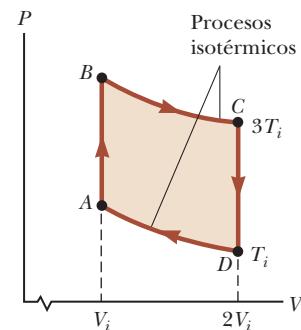


Figura P21.33

- C/C** 34. Suponga que pudiera construirse una bomba de calor ideal (Carnot) para emplearse en un acondicionador de aire. (a) Obtenga una expresión para el coeficiente de rendimiento (COP) de tal acondicionador de aire en términos de T_h y T_c . (b) ¿Tal acondicionador de aire funcionaría con una menor energía de entrada si la diferencia en las temperaturas de operación fuera mayor o menor? (c) Determine el COP para tal acondicionador de aire si la temperatura interior es $20.0^\circ C$ y la temperatura externa es $4.00^\circ C$.
35. **Problema de repaso.** Este problema complementa al problema 44 del capítulo 10. En la operación de un motor de pistón de combustión interna de un solo cilindro, una carga de combustible explota para impulsar el pistón hacia afuera en el llamado tiempo de trabajo. Parte de su energía de salida se almacena en un volante giratorio. Después esta energía se usa para empujar el pistón hacia adentro para comprimir la siguiente carga de combustible y aire. En este proceso de compresión suponga que un volumen original de 0.120 L de un gas ideal diatómico, a presión atmosférica, se comprime

adiabáticamente a un octavo de su volumen original. (a) Encuentre la entrada de trabajo que se requiere para comprimir el gas. (b) Suponga que el volante es un disco sólido de 5.10 kg de masa y 8.50 cm de radio, que gira libremente sin fricción entre el tiempo de trabajo y el tiempo de compresión. ¿Cuán rápido debe girar el volante inmediatamente después del tiempo de trabajo? Esta situación representa la mínima rapidez angular a la que el motor puede funcionar; no es el punto de ahogamiento. (c) Cuando la operación del motor está muy arriba del punto de ahogamiento, suponga que el volante pone 5.00% de su energía máxima para comprimir la siguiente carga de combustible y aire. Encuentre su rapidez angular máxima en este caso.

- 36. C C** Un hogar está a 750 K y la temperatura ambiente a 300 K. La eficiencia de una máquina de Carnot que hace 150 J de trabajo mientras transporta energía entre estos baños de temperaturas constantes es 60.0%. La máquina de Carnot debe tomar energía a $150 \text{ J}/0.600 = 250 \text{ J}$ del depósito caliente y colocar 100 J de energía por calor en el ambiente. Para seguir el razonamiento de Carnot, suponga que alguna otra máquina térmica S podría tener una eficiencia de 70.0%. (a) Encuentre la entrada de energía y la salida de energía desperdiciada de la máquina S conforme consume 150 J de trabajo. (b) Deje que la máquina S funcione como en el inciso (a) y opere la máquina de Carnot de reversa entre los mismos depósitos. El trabajo de salida de la máquina S es el trabajo de entrada para el refrigerador de Carnot. Encuentre la energía total transferida a o desde el hogar y la energía total transferida a o desde el ambiente cuando ambas máquinas funcionan juntas. (c) Explique cómo los resultados de los incisos a y (b) demuestran que se viola el enunciado de Clausius de la segunda ley de la termodinámica. (d) Encuentre la entrada de energía y la salida de trabajo de la máquina S conforme saca energía de escape de 100 J. Deje que la máquina S opere como en el inciso (c) y aporte 150 J de su trabajo de salida para que funcione la máquina de Carnot de reversa. Encuentre (e) la energía total que el hogar proporciona cuando ambas máquinas funcionan juntas, (f) el trabajo total de salida y (g) la energía total transferida al ambiente. h) Explique cómo los resultados demuestran que se viola el enunciado de Kelvin-Planck de la segunda ley. Por tanto, la suposición acerca de la eficiencia de la máquina S debe ser falsa. (i) Deje que las máquinas operen juntas a través de un ciclo, como en el inciso (d). Encuentre el cambio en entropía del Universo. (j) Explique cómo el resultado prueba que se viola el enunciado de entropía de la segunda ley.

- 37. C C** Una muestra de 1.00 mol de un gas ideal monoatómico se lleva a través del ciclo que se muestra en la figura P21.37. El proceso $A \rightarrow B$ es una expansión isotérmica reversible. Calcule (a) el trabajo neto realizado por el gas, (b) la energía agregada al gas por calor, (c) la energía expulsada del gas por calor y (d) la eficiencia del ciclo. (e) Explique cómo se compara la eficiencia con la de una máquina de Carnot que funciona entre los mismos extremos de temperatura.

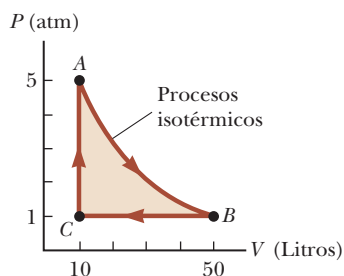


Figura P21.37

- 38. C C S** Un sistema que consiste de n moles de un gas ideal con calor específico molar a presión constante C_p , experimenta dos procesos reversibles. Comienza con presión P_i y volumen V_i , se expande isotérmicamente y luego se contrae adiabáticamente para alcanzar un estado final con presión P_f y volumen $3V_i$. (a) Encuentre su cambio de entropía en el proceso isotérmico. (La entropía no cambia en el proceso adiabático.) (b) ¿Qué pasaría si? Explique por qué la respuesta al inciso (a) debe ser la misma que la respuesta al problema 46. (No es necesario resolver el problema 46 para contestar esta pregunta.)

- 39.** Una máquina térmica funciona entre dos depósitos a $T_2 = 600 \text{ K}$ y $T_1 = 350 \text{ K}$. Admite $1.00 \times 10^3 \text{ J}$ de energía del depósito de mayor temperatura y realiza 250 J de trabajo. Encuentre (a) el cambio de entropía del Universo ΔS_U para este proceso y (b) el trabajo W que podría realizar una máquina de Carnot ideal que opere entre estos dos depósitos. (c) Demuestre que la diferencia entre las cantidades de trabajo realizados en los incisos (a) y (b) es $T_1 \Delta S_U$.

- 40. CE** Está trabajando como asistente de una profesora de física. Ella ha visto algunas de las presentaciones que ha hecho para sus clases y conoce su experiencia en la preparación de diapositivas de presentación. Su computadora portátil se ha bloqueado y no puede acceder a las diapositivas que necesita para su conferencia en una hora. Su conferencia es sobre entropía en los ciclos de máquina. Ella le pide que genere rápidamente dos diapositivas en su computadora portátil, ambas mostrando los diagramas TS , (a) uno para el ciclo de Carnot y (b) uno para el ciclo de Otto. Cuando ella se va, piensa, "¡Recórcholis! ¿Qué es un diagrama TS ?". ¡Rápido, no tiene tiempo que perder! ¡A trabajar!

- 41. CE** Usted está trabajando como testigo experto para una agencia ambiental. Una empresa de un pueblo vecino propuso una nueva planta de energía que produce 1.00 GW de energía eléctrica a partir de turbinas. La empresa afirma que la planta tomará vapor a 500 K y rechazará agua a 300 K en la corriente de agua fría de un río. El caudal del río es de $6.00 \times 10^4 \text{ kg/s}$. El supervisor de la agencia está preocupado por el efecto de verter agua caliente sobre los peces en el río. (a) La empresa afirma que la planta de energía opera con la eficiencia de Carnot. Con esa suposición, debe determinar para una presentación de prueba cuánto aumentará la temperatura del agua corriente abajo de la planta de energía debido a la energía rechazada de la planta. (b) Si se abandona la afirmación de la empresa que la planta de energía opera con eficiencia de Carnot y asume una eficiencia de más realista, tiene que declarar si el aumento de la temperatura del agua será mayor o menor que la encontrada en el inciso (a). (c) Finalmente, determine el aumento en la temperatura del agua en la corriente del río, si usted y el físico de la agencia estiman que la eficiencia real de la planta de energía es de 15.0%.

- 42. CE S** Usted está trabajando como testigo experto para una agencia ambiental. Una empresa de un pueblo vecino propuso una nueva planta de energía que produce electricidad a partir de turbinas P . La empresa afirma que la planta tomará vapor a la temperatura T_h y rechazará el agua a temperatura T_c en la corriente de agua fría de un río. El caudal del río es $\Delta m/\Delta t$. El supervisor de la agencia está preocupado por el efecto de verter agua caliente sobre los peces en el río. (a) La empresa afirma que la planta de energía opera con la eficiencia de Carnot. Con esa suposición, debe determinar para una presentación de prueba cuánto aumentará la temperatura del agua corriente abajo de la planta de energía debido a la energía rechazada de la planta. (b) Si abandona la afirmación de la empresa de que la planta de energía funciona con la eficiencia de Carnot y asume una eficiencia más realista, debe determinar el aumento de la temperatura del agua en

la corriente del río. (c) Por último, tiene que declarar si el aumento de la temperatura del agua en el inciso (b) será mayor o menor que la encontrada en el inciso (a).

43. Un atleta cuya masa es de 70.0 kg, bebe 16 onzas (454 g) de agua fría. El agua está a una temperatura de 35.0 °F. (a) Si ignora el cambio de temperatura del cuerpo que resulta de la ingesta del agua (de modo que el cuerpo se considera como un depósito siempre a 98.6 °F), encuentre el aumento en entropía de todo el sistema. (b) **¿Qué pasaría si?** Suponga que todo el cuerpo se enfría por la bebida y que el calor específico promedio de una persona es igual al calor específico del agua líquida. Si ignora cualquier otra transferencia de energía por calor y cualquier liberación de energía metabólica, determine la temperatura del atleta después de que bebe el agua fría, dada una temperatura corporal inicial de 98.6 °F. (c) Bajo estas suposiciones, ¿cuál es el aumento de entropía de todo el sistema? (d) Establezca cómo se compara este resultado con el que obtuvo en el inciso (a).

44. *¿Por qué es imposible la siguiente situación?* Dos muestras de agua se mezclan a presión constante dentro de un recipiente aislado: 1.00 kg de agua a 10.0 °C y 1.00 kg de agua a 30.0 °C. El recipiente está aislado, así que no existe intercambio de energía por calor entre el agua y el ambiente. Aún más, la cantidad de energía que abandona el agua caliente por calor es igual a la cantidad que entra al agua fría por calor. Por tanto, el cambio en entropía del Universo es cero para este proceso.

45. Una muestra de un gas ideal se expande isotérmicamente, duplicando su volumen. (a) Demuestre que el trabajo realizado sobre el gas al expandirse es $W = -nRT \ln 2$. (b) La energía interna E_{int} de un gas ideal sólo depende de su temperatura, así el cambio en energía interna es cero durante la expansión. De la primera ley se sigue que la entrada de energía al gas por calor durante la expansión es igual a la salida de energía por trabajo. ¿Este proceso tiene 100% de eficiencia al convertir la entrada de energía por calor en salida de trabajo? (c) ¿Esta conversión viola la segunda ley? Explique.

46. Una muestra que consiste de n moles de un gas ideal se somete a una expansión isobárica reversible desde el volumen V_i hasta el volumen $3V_i$. Encuentre el cambio de entropía del gas al calcular $\int_i^f dQ/T$, donde $dQ = nC_p dT$.

PROBLEMA DE DESAFÍO

47. La razón de compresión de un ciclo de Otto, como se muestra en la figura 21.47, es $V_A/V_B = 8.00$. En el inicio A del proceso de compresión, 500 cm³ de gas están a 100 kPa y 20.0 °C. En el inicio de la expansión adiabática la temperatura es $T_C = 750$ °C. Modele el fluido de trabajo como un gas ideal con $\gamma = 1.40$. (a) En la siguiente tabla indique los estados del gas:

	T (K)	P (kPa)	V (cm ³)
A	293	100	500
B			
C	1 023		
D			

(b) En la tabla que sigue complete los procesos:

	Q	W	ΔE_{int}
$A \rightarrow B$			
$B \rightarrow C$			
$C \rightarrow D$			
$D \rightarrow A$			
$ABCD A$			

(c) Identifique la energía de entrada $|Q_h|$, (d) la energía expulsada $|Q_c|$ y (e) el trabajo neto de salida $W_{\text{máq}}$. (f) Calcule la eficiencia térmica. (g) Encuentre el número de revoluciones por minuto del cigüeñal requerido para que un motor de un cilindro tenga una potencia de salida de 1.00 kW = 1.34 hp. *Nota:* El ciclo termodinámico involucra cuatro carreras de pistón.



Apéndice A Tablas

TABLA A.1 Factores de conversión

Longitud

	m	cm	km	km	pie	mi
1 metro	1	102	10^{-3}	39.37	3.281	6.214×10^{-4}
1 centímetro	10^{-2}	1	10^{-5}	0.393 7	3.281×10^{-2}	6.214×10^{-6}
1 kilómetro	103	105	1	3.937×10^4	3.281×10^3	0.621 4
1 pulgada	2.540×10^{-2}	2.540	2.540×10^{-5}	1	8.333×10^{-2}	1.578×10^{-5}
1 pie	0.304 8	30.48	3.048×10^{-4}	12	1	1.894×10^{-4}
1 milla	1 609	1.609×10^5	1.609	6.336×10^4	5 280	1

Masa

	kg	g	slug	u
1 kilogramo	1	103	6.852×10^{-2}	6.024×10^{26}
1 gramo	10^{-3}	1	6.852×10^{-5}	6.024×10^{23}
1 slug	14.59	1.459×10^4	1	8.789×10^{27}
1 unidad masa atómica	1.660×10^{-27}	1.660×10^{-24}	1.137×10^{-28}	1

Nota: 1 ton métrica = 1 000 kg.

Tiempo

	s	min	h	día	año
1 segundo	1	1.667×10^{-2}	2.778×10^{-4}	1.157×10^{-5}	3.169×10^{-8}
1 minuto	60	1	1.667×10^{-2}	6.994×10^{-4}	1.901×10^{-6}
1 hora	3 600	60	1	4.167×10^{-2}	1.141×10^{-4}
1 día	8.640×10^4	1 440	24	1	2.738×10^{-5}
1 año	3.156×10^7	5.259×10^5	8.766×10^3	365.2	1

Rapidez

	m/s	cm/s	pie/s	mi/h
1 metro por segundo	1	102	3.281	2.237
1 centímetro por segundo	10^{-2}	1	3.281×10^{-2}	2.237×10^{-2}
1 pie por segundo	0.304 8	30.48	1	0.681 8
1 milla por hora	0.447 0	44.70	1.467	1

Nota: 1 mi/min = 60 mi/h = 88 pies/s.

Fuerza

	N	lb
1 newton	1	0.224 8
1 libra	4.448	1

(Continúa)

TABLA A.1 Factores de conversión (*continuación*)**Energía, transferencia de energía**

	J	pie · lb	eV
1 joule	1	0.737 6	6.242×10^{18}
1 pie-libra	1.356	1	8.464×10^{18}
1 electrón volt	1.602×10^{-19}	1.182×10^{-19}	1
1 caloría	4.186	3.087	2.613×10^{19}
1 unidad térmica británica	1.055×10^3	7.779×10^2	6.585×10^{21}
1 kilowatt-hora	3.600×10^6	2.655×10^6	2.247×10^{25}

	cal	Btu	kWh
1 joule	0.238 9	9.481×10^{-4}	2.778×10^{-7}
1 pie-libra	0.323 9	1.285×10^{-3}	3.766×10^{-7}
1 electrón volt	3.827×10^{-20}	1.519×10^{-22}	4.450×10^{-26}
1 caloría	1	3.968×10^{-3}	1.163×10^{-6}
1 unidad térmica británica	2.520×10^2	1	2.930×10^{-4}
1 kilowatt-hora	8.601×10^5	3.413×10^2	1

Presión

	Pa	atm
1 pascal	1	9.869×10^{-6}
1 atmósfera	1.013×10^5	1
1 centímetro de mercurio ^a	1.333×10^3	1.316×10^{-2}
1 libra por pulgada cuadrada	6.895×10^3	6.805×10^{-2}
1 libra por pie cuadrado	47.88	4.725×10^{-4}

	cm Hg	lb/pulg²	lb/pie²
1 pascal	7.501×10^{-4}	1.450×10^{-4}	2.089×10^{-2}
1 atmósfera	76	14.70	2.116×10^3
1 centímetro de mercurio ^a	1	0.194 3	27.85
1 libra por pulgada cuadrada	5.171	1	144
1 libra por pie cuadrado	3.591×10^{-2}	6.944×10^{-3}	1

^aA 0 °C y en una ubicación donde la aceleración tiene su valor "estándar", 9.806 65 m/s².

TABLA A.2 Símbolos, dimensiones y unidades de cantidades físicas

Cantidad	Símbolo común	Unidad^a	Dimensiones^b	Unidades en términos de las unidades básicas del SI
Aceleración	\vec{a}	m/s ²	L/T ²	m/s ²
Cantidad de sustancia	n	MOL		mol
Ángulo	θ, ϕ	radián (rad)		
Aceleración angular	$\vec{\alpha}$	rad/s ²	T ⁻²	s ⁻²
Frecuencia angular	ω	rad/s	T ⁻¹	s ⁻¹
Cantidad de movimiento angular	\vec{L}	kg · m ² /s	ML ² /T	kg · m ² /s
Velocidad angular	$\vec{\omega}$	rad/s	T ⁻¹	s ⁻¹
Área	A	m ²	L ²	m ²
Número atómico	Z			
Capacitancia	C	farad (F)	Q ² T ² /ML ²	A ² · s ⁴ /kg · m ²
Carga	q, Q, e	coulomb (C)	Q	A · s

TABLA A.2 Símbolos, dimensiones y unidades de cantidades físicas (*continuación*)

Cantidad	Símbolo común	Unidad ^a	Dimensiones ^b	Unidades en términos de las unidades básicas del SI
Densidad de carga				
Lineal	λ	C/m	Q/L	A · s/m
Superficial	σ	C/m ²	Q/L ²	A · s/m ²
Volumétrica	ρ	C/m ³	Q/L ³	A · s/m ³
Conductividad	σ	1/Ω · m	Q ² T/ML ³	A ² · s ³ /kg · m ³
Corriente	I	AMPERE	Q/T	A
Densidad de corriente	J	A/m ²	Q/TL ²	A/m ²
Densidad	ρ	kg/m ³	M/L ³	kg/m ³
Constante dieléctrica	κ			
Momento dipolar eléctrico	\vec{p}	C · m	QL	A · s · m
Campo eléctrico	\vec{E}	V/m	ML/QT ²	kg · m/A · s ³
Flujo eléctrico	Φ_E	V · m	ML ³ /QT ²	kg · m ³ /A · s ³
Fuerza electromotriz	\mathcal{E}	volt (V)	ML ² /QT ²	kg · m ² /A · s ³
Energía, transferencia de energía	E, U, K, T	joule (J)	ML ² /T ²	kg · m ² /s ²
Entropía	S	J/K	ML ² /T ² K	kg · m ² /s ² · K
Fuerza	\vec{F}	newton (N)	ML/T ²	kg · m/s ²
Frecuencia	f	Hertz (Hz)	T ⁻¹	s ⁻¹
Calor	Q	joule (J)	ML ² /T ²	kg · m ² /s ²
Inductancia	L	henry (H)	ML ² /Q ²	kg · m ² /A ² · s ²
Longitud	ℓ, L	METRO	L	m
Desplazamiento	$\Delta x, \Delta \vec{r}$			
Distancia	d, h			
Posición	x, y, z, \vec{r}			
Ancho, altura, radio	w, h, r, R, a, b			
Momento dipolar magnético	$\vec{\mu}$	N · m/T	QL ² /T	A · m ²
Campo magnético	\vec{B}	tesla (T) (= Wb/m ²)	M/QT	kg/A · s ²
Flujo magnético	Φ_B	weber (Wb)	ML ² /QT	kg · m ² /A · s ²
Masa	m, M	KILOGRAMO	M	kg
Momento de inercia	I	kg · m ²	ML ²	kg · m ²
Cantidad de movimiento	\vec{p}	kg · m/s	ML/T	kg · m/s
Periodo	T	s	T	s
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	N/A ² (= H/m)	ML/Q ²	kg · m/A ² · s ²
Permitividad del espacio libre	ϵ_0	C ² /N · m ² (= F/m)	Q ² T ² /ML ³	A ² · s ⁴ /kg · m ³
Potencial	V	volt (V) (= J/C)	ML ² /QT ²	kg · m ² /A · s ³
Potencia	P	watt (W) (= J/s)	ML ² /T ³	kg · m ² /s ³
Presión	P	pascal (Pa) (= N/m ²)	M/LT ²	kg/m · s ²
Resistencia	R	ohm (Ω) (= V/A)	ML ² /Q ² T	kg · m ² /A ² · s ³
Calor específico	c	J/kg · K	L ² /T ² K	m ² /s ² · K
Rapidez	v	m/s	L/T	m/s
Temperatura	T	KELVIN	K	K
Tiempo	t	SEGUNDO	T	s
Momento de torsión	$\vec{\tau}$	N · m	ML ² /T ²	kg · m ² /s ²
Velocidad	\vec{v}	m/s	L/T	m/s
Volumen	V	m ³	L ³	m ³
Longitud de onda	λ	m	L	m
Trabajo	W	joule (J) (= N · m)	ML ² /T ²	kg · m ² /s ²

^aLas unidades del SI base están dadas en mayúsculas.

^bLos símbolos M, L, T, K y Q denotan masa, longitud, tiempo, temperatura y carga, respectivamente.



Apéndice B

Repaso matemático

Este apéndice en matemáticas tiene la intención de ser un breve repaso de operaciones y métodos. Desde las primeras etapas de este curso usted debió estar familiarizado con las técnicas algebraicas básicas, la geometría analítica y la trigonometría. Las secciones acerca de cálculo diferencial e integral son más detalladas y se dedican a aquellos estudiantes que tengan dificultad para aplicar los conceptos del cálculo a situaciones físicas.

B.1 Notación científica

Muchas cantidades utilizadas por los científicos con frecuencia tienen valores o muy grandes o muy pequeños. La rapidez de la luz, por ejemplo, es de aproximadamente 300 000 000 m/s, y la tinta requerida para hacer el punto sobre una *i* en este libro tiene una masa de aproximadamente 0.000 000 001 kg. Obviamente, es muy complicado leer, escribir y seguir la pista de estas cantidades. Este problema se evita al usar un método que incorpora potencias del número 10:

$$10^0 = 1$$

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\,000$$

$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$$

$$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$$

y así sucesivamente. El número de ceros corresponde a la potencia a la que se eleva el diez, llamado **exponente** de diez. Por ejemplo, la rapidez de la luz, 300 000 000 m/s, se puede expresar como 3.00×10^8 m/s.

En este método, algunos números representativos menores que la unidad son los siguientes:

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10 \times 10} = 0.01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10} = 0.001$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10} = 0.000\,1$$

$$10^{-5} = \frac{1}{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} = 0.000\,01$$

En estos casos, el número de lugares que el punto decimal está a la izquierda del dígito 1 es igual al valor del exponente (negativo). Los números expresados como alguna potencia de diez, multiplicados por otro número entre uno y diez, están en notación científica. Por ejemplo, la notación científica para 5 943 000 000 es 5.943×10^9 y para 0.000 083 2 es 8.32×10^{-5} .

Cuando se multiplican números expresados en notación científica, la siguiente regla general es muy útil:

$$10^n \times 10^m = 10^{n+m} \quad (\text{B.1})$$

donde n y m pueden ser *cualquier* número (no necesariamente enteros). Por ejemplo, $10^2 \times 10^5 = 10^7$. La regla también se aplica si uno de los exponentes es negativo: $10^3 \times 10^{-8} = 10^{-5}$.

Cuando se dividen números expresados en notación científica, observe que

$$\frac{10^n}{10^m} = 10^n \times 10^{-m} = 10^{n-m} \quad (\text{B.2})$$

Ejercicios

Con la ayuda de las reglas anteriores, compruebe las respuestas de las ecuaciones siguientes:

1. $86\,400 = 8.64 \times 10^4$
2. $9\,816\,762.5 = 9.816\,762\,5 \times 10^6$
3. $0.000\,000\,039\,8 = 3.98 \times 10^{-8}$
4. $(4.0 \times 10^8)(9.0 \times 10^9) = 3.6 \times 10^{18}$
5. $(3.0 \times 10^7)(6.0 \times 10^{-12}) = 1.8 \times 10^{-4}$
6. $\frac{75 \times 10^{-11}}{5.0 \times 10^{-3}} = 1.5 \times 10^{-7}$
7. $\frac{(3 \times 10^6)(8 \times 10^{-2})}{(2 \times 10^{17})(6 \times 10^5)} = 2 \times 10^{-18}$

B.2 Álgebra

Algunas reglas básicas

Cuando se realizan operaciones algebraicas, se aplican las leyes de la aritmética. Los símbolos como x , y y z por lo general se usan para representar cantidades no especificadas, llamadas **incógnitas**.

Primero, considere la ecuación

$$8x = 32$$

Si quiere despejar x , divida (o multiplique) cada lado de la ecuación por el mismo factor sin destruir la igualdad. En este caso, si divide ambos lados entre 8, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{8x}{8} &= \frac{32}{8} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Luego, considere la ecuación

$$x + 2 = 8$$

En este tipo de expresión se puede sumar o restar la misma cantidad de cada lado. Si resta 2 de cada lado, obtiene

$$\begin{aligned} x + 2 - 2 &= 8 - 2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

En general, si $x + a = b$, entonces $x = b - a$.

Ahora considere la ecuación

$$\frac{x}{5} = 9$$



Si multiplica cada lado por 5, queda x sola a la izquierda y 45 a la derecha:

$$\left(\frac{x}{5}\right)(5) = 9 \times 5$$

$$x = 45$$

En todos los casos, cualquier operación que realice en el lado izquierdo de la igualdad también la debe realizar en el lado derecho.

Debe recordar las siguientes reglas para multiplicar, dividir, sumar y restar fracciones, donde a, b, c y d son cuatro números:

	Regla	Ejemplo
Multiplicar	$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$	$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{15}$
Dividir	$\frac{(a/b)}{(c/d)} = \frac{ad}{bc}$	$\frac{2/3}{4/5} = \frac{(2)(5)}{(4)(3)} = \frac{10}{12}$
Sumar	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$	$\frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{(2)(5) - (4)(3)}{(3)(5)} = -\frac{2}{15}$

Ejercicios

En los ejercicios siguientes, despeje x :

Respuestas

- | | |
|--------------------------------------|---------------------|
| 1. $a = \frac{1}{1+x}$ | $x = \frac{1-a}{a}$ |
| 2. $3x - 5 = 13$ | $x = 6$ |
| 3. $ax - 5 = bx + 2$ | $x = \frac{7}{a-b}$ |
| 4. $\frac{5}{2x+6} = \frac{3}{4x+8}$ | $x = -\frac{11}{7}$ |

Potencias

Cuando multiplique potencias de una cantidad conocida x , aplique las siguientes reglas:

$$x^n x^m = x^{n+m} \tag{B.3}$$

Por ejemplo, $x^2 x^4 = x^{2+4} = x^6$.

Cuando divida potencias de una cantidad conocida, la regla es

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \tag{B.4}$$

Por ejemplo, $x^8/x^2 = x^{8-2} = x^6$.

Una potencia que es fracción, como $\frac{1}{3}$, corresponde a una raíz del modo siguiente:

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \tag{B.5}$$

Por ejemplo, $4^{1/3} = \sqrt[3]{4} = 1.5874$. (Para tales cálculos es útil una calculadora científica.)

Por último, cualquier cantidad x^n elevada a la potencia m es

$$(x^n)^m = x^{nm} \tag{B.6}$$

La tabla B.1 resume las reglas de exponentes.

Ejercicios

Verifique las siguientes ecuaciones

- $3^2 \times 3^3 = 243$
- $x^5 x^{-8} = x^{-3}$

TABLA B.1 Reglas de los exponentes

$$x^0 = 1$$

$$x^1 = x$$

$$x^n x^m = x^{n+m}$$

$$x^n/x^m = x^{n-m}$$

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

$$(x^n)^m = x^{nm}$$



3. $x^{10}/x^{-5} = x^{15}$
4. $5^{1/3} = 1.709\ 976$ (Use una calculadora.)
5. $60^{1/4} = 2.783\ 158$ (Use una calculadora.)
6. $(x^4)^3 = x^{12}$

Factorización

Las siguientes son algunas fórmulas útiles para factorizar una ecuación:

$$\begin{aligned} ax + ay + az &= a(x + y + z) && \text{factor común} \\ a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2 && \text{cuadrado perfecto} \\ a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b) && \text{diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

Ecuaciones cuadráticas

La forma general de una ecuación cuadrática es

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{B.7})$$

donde x es la cantidad desconocida y a , b y c son factores numéricos conocidos como **coeficientes** de la ecuación. Esta ecuación tiene dos raíces, dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{B.8})$$

Si $b^2 \geq 4ac$, las raíces son reales.

Ejemplo B.1

Encuentre las raíces de la ecuación $x^2 + 5x + 4 = 0$.

SOLUCIÓN

Use la ecuación B.8 para encontrar las raíces:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - (4)(1)(4)}}{2(1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2}$$

Evalúe las raíces para cada una de las posibilidades del signo:

$$x_+ = \frac{-5 + 3}{2} = -1 \quad x_- = \frac{-5 - 3}{2} = -4$$

donde x_+ se refiere a la raíz correspondiente al signo positivo y x_- se refiere a la raíz que corresponde al signo negativo.

Ejercicios

Resuelva las ecuaciones cuadráticas siguientes:

Respuestas		
1. $x^2 + 2x - 3 = 0$	$x_+ = 1$	$x_- = -3$
2. $2x^2 - 5x + 2 = 0$	$x_+ = 2$	$x_- = \frac{1}{2}$
3. $2x^2 - 4x - 9 = 0$	$x_+ = 1 + \sqrt{22}/2$	$x_- = 1 - \sqrt{22}/2$

Ecuaciones lineales

Una ecuación lineal tiene la forma general

$$y = mx + b \quad (\text{B.3})$$

donde m y b son constantes. A esta ecuación se le conoce como lineal porque la gráfica de y en función de x es una línea recta, como se muestra en la figura B.1. La constante b , llamada **ordenada al origen**, representa el valor de y en el que la línea recta interseca el eje y . La constante m es igual a la **pendiente** de la línea recta. Si dos puntos cualesquiera en la

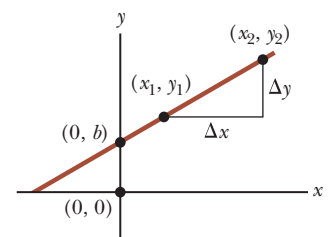


Figura B.1 Una línea recta graficada sobre un sistema coordenado xy . La pendiente de la recta es el cociente $\Delta y/\Delta x$.

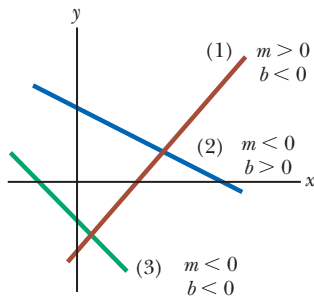


Figura B.2 La línea café tiene una pendiente positiva y una ordenada al origen negativa. La línea azul tiene una pendiente negativa y una ordenada al origen positiva. La línea verde tiene una pendiente negativa y una ordenada al origen negativa.

línea recta se especifican mediante las coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , como en la figura B.1, la pendiente de la línea recta se expresa como

$$\text{Pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{B.10}$$

Note que m y b pueden tener valores positivos o negativos. Si $m > 0$, la línea recta tiene una pendiente positiva, como en la figura B.1. Si $m < 0$, la línea recta tiene una pendiente negativa. En la figura B.1, tanto m como b son positivos. En la figura B.2 se muestran otras tres posibles situaciones. En la figura B.1, tanto m como b son positivos. En la figura B.2 se muestran otras tres posibles situaciones.

Ejercicios

1. Dibuje las gráficas de las siguientes líneas rectas: (a) $y = 5x + 3$ (b) $y = -2x + 4$ (c) $y = -3x - 6$.
2. Encuentre las pendientes de las líneas rectas descritas en el ejercicio 1.

Respuestas (a) 5, (b) -2, (c) -3.

3. Encuentre las pendientes de las líneas rectas que pasan por los siguientes conjuntos de puntos: (a) $(0, -4)$ y $(4, 2)$, (b) $(0, 0)$ y $(2, -5)$ (c) $(-5, 2)$ y $(4, -2)$.

Respuestas (a) $\frac{3}{2}$ (b) $-\frac{5}{2}$ (c) $-\frac{4}{9}$

Resolución de ecuaciones lineales simultáneas

Considere la ecuación $3x + 5y = 15$, que tiene dos incógnitas, x y y . Tal ecuación no tiene una solución única. Por ejemplo $(x = 0, y = 3)$, $(x = 5, y = 0)$ y $(x = 2, y = \frac{9}{5})$ son todas soluciones a esta ecuación.

Si un problema tiene dos incógnitas, una solución única sólo es posible si se tienen dos piezas de información que, en la mayoría de los casos, son dos ecuaciones. En general, si un problema tiene n incógnitas, su solución requiere n ecuaciones. Para resolver dos ecuaciones simultáneas que involucran dos incógnitas, x y y , resuelva una de las ecuaciones para x en términos de y y sustituya esta expresión en la otra ecuación.

En algunos casos, las dos piezas de información pueden ser (1) una ecuación y (2) una condición sobre las soluciones. Por ejemplo, suponga que tenemos la ecuación $m = 3n$ y la condición de que m y n los menores enteros positivos diferentes de cero. Entonces, la única ecuación que no permite una solución única, pero la suma de las condiciones de $n = 1$ y $m = 3$.

Ejemplo B.2

Resuelva las dos ecuaciones simultáneas

$$(1) \quad 5x + y = -8$$

$$(2) \quad 2x - 2y = 4$$

SOLUCIÓN

Despeje x de la ecuación (2)

$$(3) \quad x = y + 2$$

Sustituya la ecuación (3) en la ecuación (1):

$$5(y + 2) + y = -8$$

$$6y = -18$$

$$y = -3$$

Utilice la ecuación (3) para encontrar x :

$$x = y + 2 = -1$$



B.2 continuación**Solución alternativa**

Multiplique cada término en la ecuación (1) por 2:

Sume la ecuación (2):

Despeje x :

Utilice la ecuación (3) para encontrar y :

$$10x + 2y = -16$$

$$2x - 2y = 4$$

$$12x = -12$$

$$x = -1$$

$$y = x - 2 = -3$$

Dos ecuaciones lineales que contienen dos incógnitas también se pueden resolver mediante un método gráfico. Si las líneas rectas que corresponden a las dos ecuaciones se grafican en un sistema coordenado convencional, la intersección de las dos líneas representa la solución. Por ejemplo, considere las dos ecuaciones

$$x - y = 2$$

$$x - 2y = -1$$

Estas ecuaciones se grafican en la figura B.3. La intersección de las dos rectas tiene las coordenadas $x = 5$ y $y = 3$, que representan la solución a las ecuaciones. Debe comprobar esta solución mediante la técnica analítica explicada anteriormente.

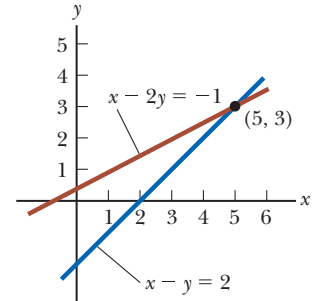


Figura B.3 Solución gráfica para dos ecuaciones lineales.

Ejercicios

Resuelva los siguientes pares de ecuaciones simultáneas que involucran dos incógnitas:

Respuestas

1. $x + y = 8$ $x = 5, y = 3$
 $x - y = 2$

2. $98 - T = 10a$ $T = 65, a = 3.27$
 $T - 49 = 5a$

3. $6x + 2y = 6$ $x = 2, y = -3$
 $8x - 4y = 28$

Logaritmos

Suponga que una cantidad x se expresa como una potencia de alguna cantidad a :

$$x = a^y \quad (\text{B.11})$$

El número a se llama número **base**. El **logaritmo** de x respecto a la base a es igual al exponente al que se debe elevar la base para satisfacer la expresión $x = a^y$:

$$y = \log_a x \quad (\text{B.12})$$

A la inversa, el **antilogaritmo** de y es el número x :

$$x = \text{antilog}_a y \quad (\text{B.13})$$

En la práctica, las dos bases usadas con más frecuencia son la base 10, llamada base de logaritmo *común*, y la base $e = 2.718\ 282$, llamada constante de Euler o base de logaritmo *natural*. Cuando se usan logaritmos comunes:

$$y = \log_{10} x \quad (\text{o } x = 10^y) \quad (\text{B.14})$$

Cuando se usan logaritmos naturales:

$$y = \ln x \quad (\text{o } x = e^y) \quad (\text{B.15})$$

Por ejemplo, $\log_{10} 52 = 1.716$, de modo que $\text{antilog}_{10} 1.716 = 10^{1.716} = 52$. Del mismo modo, $\ln 52 = 3.951$, de modo que $\text{antiln } 3.951 = e^{3.951} = 52$.

En general, observe que puede convertir entre base 10 y base e con la igualdad

$$\ln x = (2.302\ 585) \log_{10} x \tag{B.16}$$

Por último, las siguientes son algunas propiedades útiles de los logaritmos:

$$\left. \begin{aligned} \log(ab) &= \log a + \log b \\ \log(a/b) &= \log a - \log b \\ \log(a^n) &= n \log a \end{aligned} \right\} \text{cualquier base}$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln e^a = a$$

$$\ln \left(\frac{1}{a} \right) = -\ln a$$

B.3 Geometría

La **distancia** d entre dos puntos que tienen coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{B.17}$$

Dos ángulos son iguales si sus lados son perpendiculares, lado derecho con lado derecho y lado izquierdo con lado izquierdo. Por ejemplo, los dos ángulos marcados θ en la figura B.4 son iguales debido a la perpendicularidad de los lados de los ángulos. Para distinguir los lados izquierdo y derecho de un ángulo, imagine estar de pie en el vértice del ángulo y de frente al ángulo.

Medida radián: La longitud de arco s de un arco circular (figura B.5) es proporcional al radio r para un valor fijo de θ (en radianes):

$$\begin{aligned} s &= r\theta \\ \theta &= \frac{s}{r} \end{aligned} \tag{B.18}$$

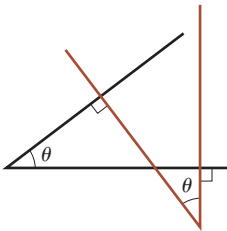


Figura B.4 Los ángulos son iguales porque sus lados son perpendiculares.

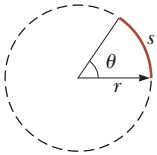


Figura B.5 El ángulo θ en radianes es el cociente de la longitud de arco s dividido entre el radio r del círculo.

La tabla B.2 da las áreas y volúmenes para varias formas geométricas usadas en todo el texto.

Tabla B.2 Información útil para geometría

Forma	Área o volumen	Forma	Área o volumen
 Rectángulo	Área = ℓw	 Esfera	Área superficial = $4\pi r^2$ Volumen = $\frac{4\pi r^3}{3}$
 Círculo	Área = πr^2 Circunferencia = $2\pi r$	 Cilindro	Área de superficie Lateral = $2\pi r\ell$ Volumen = $\pi r^2\ell$
 Triángulo	Área = $\frac{1}{2}bh$	 Caja rectangular	Área superficial = $2(\ell h + \ell w + hw)$ Volumen = ℓwh

La ecuación de una **línea recta** (figura B.6) es

$$y = mx + b$$

donde b es la ordenada al origen y m la pendiente de la recta.

La ecuación de un **círculo** de radio R con centro en el origen es

$$x^2 + y^2 = R^2$$

La ecuación de una **elipse** que tiene el origen en su centro (figura B.7) es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde a es la longitud del semieje mayor (el más grande) y b es la longitud del semieje menor (el más pequeño).

La ecuación de una **parábola** cuyo vértice está en $y = b$ (figura B.8) es

$$y = ax^2 + b$$

La ecuación de una **hipérbola rectangular** (Figura B.9) es

$$xy = \text{constante}$$

B.4 Trigonometría

La parte de las matemáticas basada en las propiedades especiales del triángulo rectángulo se llama trigonometría. Por definición, un triángulo rectángulo es aquel que contiene un ángulo de 90° . Considere el triángulo rectángulo que se muestra en la figura B.10, donde el lado a es opuesto al ángulo θ , el lado b es adyacente al ángulo θ y el lado c es la hipotenusa del triángulo. Las tres funciones trigonométricas básicas definidas por tal triángulo son el seno (sen), el coseno (cos) y la tangente (tan). En términos del ángulo θ , estas funciones se definen del modo siguiente:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{lado opuesto a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{cos } \theta = \frac{\text{lado adyacente a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tan } \theta = \frac{\text{lado opuesto a } \theta}{\text{lado adyacente a } \theta} = \frac{a}{b}$$

El teorema de Pitágoras proporciona la siguiente relación entre los lados de un triángulo rectángulo:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

A partir de las definiciones anteriores y del teorema de Pitágoras se sigue que

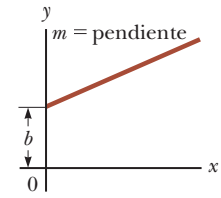
$$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$$

$$\text{tan } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}$$

Las funciones cosecante, secante y cotangente se definen como

$$\text{csc } \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta} \quad \text{sec } \theta = \frac{1}{\text{cos } \theta} \quad \text{cot } \theta = \frac{1}{\text{tan } \theta}$$

(B.19)



(B.20)

Figura B.6 Una línea recta con una pendiente m y una ordenada

(B.21)

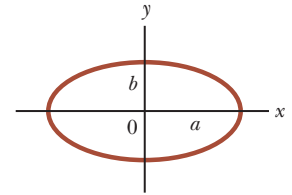


Figura B.7 Una elipse con semieje mayor a y semieje menor b .

(B.22)

(B.23)

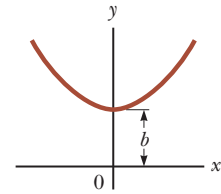


Figura B.8 Una parábola con su vértice en $y = b$.

(B.24)

(B.25)

(B.26)

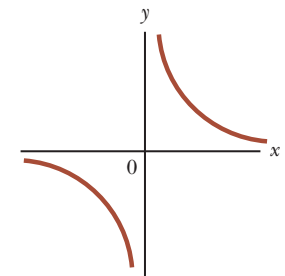


Figura B.9 Una hipérbola

a = lado opuesto
 b = lado adyacente
 c = hipotenusa

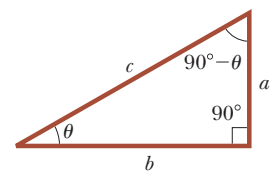


Figura B.10 Un triángulo rectángulo, que se usa para definir las funciones básicas de la trigonometría.

Tabla B.3 Algunas identidades trigonométricas

$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$	$\text{csc}^2 \theta = 1 + \text{cot}^2 \theta$
$\text{sec}^2 \theta = 1 + \text{tan}^2 \theta$	$\text{sen}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \text{cos } \theta)$
$\text{sen } 2\theta = 2 \text{sen } \theta \text{ cos } \theta$	$\text{cos}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \text{cos } \theta)$
$\text{cos } 2\theta = \text{cos}^2 \theta - \text{sen}^2 \theta$	$1 - \text{cos } \theta = 2 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}$
$\text{tan } 2\theta = \frac{2 \text{tan } \theta}{1 - \text{tan}^2 \theta}$	$\text{tan } \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \text{cos } \theta}{1 + \text{cos } \theta}}$
$\text{sen}(A \pm B) = \text{sen } A \text{ cos } B \pm \text{cos } A \text{ sen } B$	
$\text{cos}(A \pm B) = \text{cos } A \text{ cos } B \mp \text{sen } A \text{ sen } B$	
$\text{sen } A \pm \text{sen } B = 2 \text{sen} \left[\frac{1}{2}(A \pm B) \right] \text{cos} \left[\frac{1}{2}(A \mp B) \right]$	
$\text{cos } A + \text{cos } B = 2 \text{cos} \left[\frac{1}{2}(A + B) \right] \text{cos} \left[\frac{1}{2}(A - B) \right]$	
$\text{cos } A - \text{cos } B = 2 \text{sen} \left[\frac{1}{2}(A + B) \right] \text{sen} \left[\frac{1}{2}(B - A) \right]$	

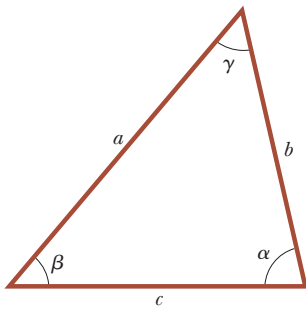


Figura B.11 Un triángulo arbitrario no rectángulo.

Las siguientes relaciones se deducen directamente del triángulo rectángulo que se muestra en la figura B.10:

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta &= \text{cos}(90^\circ - \theta) \\ \text{cos } \theta &= \text{sen}(90^\circ - \theta) \\ \text{cot } \theta &= \text{tan}(90^\circ - \theta) \end{aligned}$$

Algunas propiedades de las funciones trigonométricas son las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{sen}(-\theta) &= -\text{sen } \theta \\ \text{cos}(-\theta) &= \text{cos } \theta \\ \text{tan}(-\theta) &= -\text{tan } \theta \end{aligned}$$

Las relaciones que siguen son aplicables a cualquier triángulo, como se muestra en la figura B.11:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 180^\circ \\ \text{Ley de los cosenos} &\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{cos } \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \text{cos } \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \text{cos } \gamma \end{cases} \\ \text{Ley de los senos} &\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} \end{aligned}$$

La tabla B.3 menciona algunas identidades trigonométricas útiles.

Ejemplo B.3

Considere el triángulo rectángulo de la figura B.12 en el que $a = 2.00$, $b = 5.00$ y c es desconocido. **(A)** Encuentre c .

SOLUCIÓN

Usando el teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2 = 2.00^2 + 5.00^2 = 4.00 + 25.0 = 29.0$
 $c = \sqrt{29.0} = 5.39$

(B) Encuentre el ángulo θ .

Utilice la función tangente: $\text{tan } \theta = \frac{a}{b} = \frac{2.00}{5.00} = 0.400$

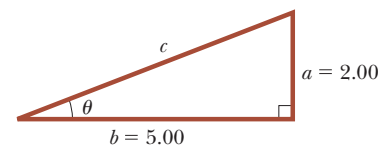


Figura B.12 (Ejemplo B.3)

B.3 continuación

Con una calculadora se encuentra que $\theta = \tan^{-1}(0.400) = 21.8^\circ$

donde $\tan^{-1}(0.400)$ es la notación para “ángulo cuya tangente es 0.400”, que a veces se escribe como $\arctan(0.400)$.

Ejercicios

- En la figura B.13, identifique (a) el lado opuesto a θ , (b) el lado adyacente a ϕ y luego encuentre (c) $\cos \theta$, (d) $\sin \phi$ y (e) $\tan \phi$.

Respuestas (a) 3 (b) 3 (c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{4}{5}$ (e) $\frac{4}{3}$

- En cierto triángulo rectángulo, los dos lados que son mutuamente perpendiculares miden 5.00 m y 7.00 m. ¿Cuál es la longitud del tercer lado?

Respuesta 8.60 m.

- Un triángulo rectángulo tiene una hipotenusa de 3.00 m de largo y uno de sus ángulos mide 30° . (a) ¿Cuál es la longitud del lado opuesto al ángulo de 30° ? (b) ¿Cuál es el lado adyacente al ángulo de 30° ?

Respuestas (a) 1.5 m, (b) 2.6 m.

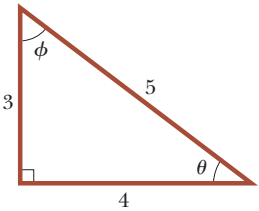


Figura B.13 (Ejercicio 1)

B.5 Desarrollo de series

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1!} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \dots$$

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{1}{2} x^2 \pm \frac{1}{3} x^3 - \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

} x en radianes

Se pueden usar las siguientes aproximaciones:

Para $x \ll 1$: $(1 + x)^n \approx 1 + nx$

Para $x \leq 0.1$ rad: $\sin x \approx x$

$e^x \approx 1 + x$

$\cos x \approx 1$

$\ln(1 \pm x) \approx \pm x$

$\tan x \approx x$

B.6 Cálculo diferencial

En diferentes ramas de la ciencia, a veces, es necesario usar las herramientas básicas del cálculo, inventadas por Newton, para describir fenómenos físicos. El uso del cálculo es fundamental en el tratamiento de diferentes problemas en mecánica newtoniana, electricidad y magnetismo. En esta sección simplemente se establecen algunas propiedades básicas y “reglas empíricas” que deben ser un útil repaso para el estudiante.



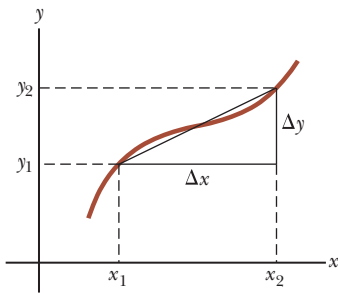


Figura B.14 Las longitudes Δx y Δy se usan para definir la derivada de esta función en un punto.

Primero, se debe especificar una función que relacione una variable con otra (por ejemplo, una coordenada como función del tiempo). Suponga que una de las variables se llama y (la variable dependiente) y la otra x (la variable independiente). Puede tener una relación funcional como

$$y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Si a, b, c y d son constantes específicas, y se puede calcular para cualquier valor de x . Por lo general se trata con funciones continuas, es decir, aquellas para las que y varía “de manera uniforme” con x .

La derivada de y respecto a x se define como el límite a medida que x tiende a cero de las pendientes de las cuerdas dibujadas entre dos puntos sobre la curva y en función de x . En términos matemáticos, esta definición se escribe como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \tag{B.28}$$

donde Δy y Δx se definen como $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$ (figura B.14). Note que dy/dx no significa dy dividido entre dx , simplemente es una notación del proceso de límite de la derivada según se define por la ecuación B.28.

Una expresión útil de recordar cuando $y(x) = ax^n$, donde a es una constante y n es cualquier número positivo o negativo (entero o fracción), es

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1} \tag{B.29}$$

TABLA B.4 Derivadas de varias funciones

$\frac{d}{dx}(a) = 0$
$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$
$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$
$\frac{d}{dx}(\sin ax) = a \cos ax$
$\frac{d}{dx}(\cos ax) = -a \sin ax$
$\frac{d}{dx}(\tan ax) = a \sec^2 ax$
$\frac{d}{dx}(\cot ax) = -a \csc^2 ax$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \sec x$
$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\cot x \csc x$
$\frac{d}{dx}(\ln ax) = \frac{1}{x}$
$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} ax) = \frac{a}{\sqrt{1 - a^2x^2}}$
$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} ax) = \frac{-a}{\sqrt{1 - a^2x^2}}$
$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} ax) = \frac{a}{1 + a^2x^2}$

Nota: Los símbolos a y n representan constantes.

Si $y(x)$ es un polinomio o función algebraica de x , se aplica la ecuación B.29 a cada término en el polinomio y se toma $d[\text{constante}]/dx = 0$. En los ejemplos B.4 al B.7 se evalúan las derivadas de varias funciones.

Propiedades especiales de la derivada

A. Derivada del producto de dos funciones. Si una función $f(x)$ está dada por el producto de dos funciones, por decir, $g(x)$ y $h(x)$, la derivada de $f(x)$ se define como

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}[g(x)h(x)] = g \frac{dh}{dx} + h \frac{dg}{dx} \tag{B.30}$$

B. Derivada de la suma de dos funciones. Si una función $f(x)$ es igual a la suma de dos funciones, la derivada de la suma es igual a la suma de las derivadas:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}[g(x) + h(x)] = \frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx} \tag{B.31}$$

C. Regla de la cadena para cálculo diferencial. Si $y = f(x)$ y $x = g(z)$, entonces dy/dz se puede escribir como el producto de dos derivadas:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dz} \tag{B.32}$$

D. La segunda derivada. La segunda derivada de y respecto a x se define como la derivada de la función dy/dx (la derivada de la derivada). Por lo general se escribe como

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \tag{B.33}$$

Algunas de las derivadas de las funciones más comúnmente usadas se mencionan en la tabla B.4.

Ejemplo B.4

Utilice la ecuación B.28 para encontrar la derivada de la siguiente función: $y(x) = ax^3 + bx + c$, donde a , b , y c son constantes.

SOLUCIÓN

Evalúe la función en $x + \Delta x$:

$$\begin{aligned} y(x + \Delta x) &= a(x + \Delta x)^3 + b(x + \Delta x) + c \\ &= a(x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3) + b(x + \Delta x) + c \end{aligned}$$

Evalúe el numerador de la ecuación B.28:

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = a(3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3) + b \Delta x$$

Sustituya en la ecuación B.28 y tome el límite:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [a(3x^2 + 3x \Delta x + \Delta x^2)] + b \\ \frac{dy}{dx} &= 3ax^2 + b \end{aligned}$$

Ejemplo B.5

Encuentre la derivada de

$$y(x) = 8x^5 + 4x^3 + 2x + 7$$

SOLUCIÓN

Al aplicar la ecuación B.29 a cada término independientemente y recordar que la derivada de una constante es cero, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 8(5)x^4 + 4(3)x^2 + 2(1)x^0 + 0 \\ \frac{dy}{dx} &= 40x^4 + 12x^2 + 2 \end{aligned}$$

Ejemplo B.6

Encuentre la derivada de $y(x) = x^3/(x + 1)^2$ respecto a x .

SOLUCIÓN

Reescriba la función como un producto:

$$y(x) = x^3(x + 1)^{-2}$$

Utilice la ecuación B.30 para encontrar la derivada:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x + 1)^{-2} \frac{d}{dx} (x^3) + x^3 \frac{d}{dx} (x + 1)^{-2} \\ &= (x + 1)^{-2} 3x^2 + x^3 (-2)(x + 1)^{-3} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3x^2}{(x + 1)^2} - \frac{2x^3}{(x + 1)^3} = \frac{x^2(x + 3)}{(x + 1)^3} \end{aligned}$$

Ejemplo B.7

Una fórmula útil que se deduce de la ecuación B.30 es la derivada del cociente de dos funciones. Demuestre que

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{g(x)}{h(x)} \right] = \frac{h \frac{dg}{dx} - g \frac{dh}{dx}}{h^2}$$



B.6 continuación

SOLUCIÓN

El cociente se puede escribir como gh^{-1} y luego se aplican las ecuaciones B.29 y B.30:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{g}{h}\right) &= \frac{d}{dx}(gh^{-1}) = g \frac{d}{dx}(h^{-1}) + h^{-1} \frac{d}{dx}(g) \\ &= -gh^{-2} \frac{dh}{dx} + h^{-1} \frac{dg}{dx} \\ &= \frac{h \frac{dg}{dx} - g \frac{dh}{dx}}{h^2}\end{aligned}$$

B.7 Cálculo Integral

La integración se considera como el inverso de la derivación. Como ejemplo, considere la expresión

$$f(x) = \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + b \quad (\text{B.34})$$

que fue el resultado de derivar la función

$$y(x) = ax^3 + bx + c$$

en el ejemplo B.4. La ecuación B.34 se puede escribir como $dy = f(x)dx = (3ax^2 + b) dx$ y se obtiene $y(x)$ al “sumar” sobre todos los valores de x . En términos matemáticos, esta operación inversa se escribe como

$$y(x) = \int f(x) dx$$

Para la función $f(x)$ dada por la ecuación B.34 se tiene

$$y(x) = \int (3ax^2 + b) dx = ax^3 + bx + c$$

donde c es una constante de integración. Este tipo de integral se llama integral indefinida, porque su valor depende de la elección de c .

Una **integral indefinida** general $I(x)$ se define como

$$I(x) = \int f(x) dx \quad (\text{B.35})$$

donde $f(x)$ se llama *integrando* y $f(x) = dI(x)/dx$.

Para una función *continua general* $f(x)$, la integral se puede describir como el área bajo la curva acotada por $f(x)$ y el eje x , entre dos valores específicos de x , por decir, x_1 y x_2 , como en la figura B.15.

El área del elemento azul en la figura B.15 es aproximadamente $f(x_i) \Delta x_i$. Si suma todos estos elementos de área entre x_1 y x_2 y toma el límite de esta suma cuando $x_i \rightarrow 0$, obtiene el área verdadera bajo la curva acotada por $f(x)$ y el eje x , entre los límites x_1 y x_2 :

$$\text{Área} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_i f(x_i) \Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \quad (\text{B.36})$$

Las integrales del tipo definido por la ecuación B.36 se llaman **integrales definidas**.



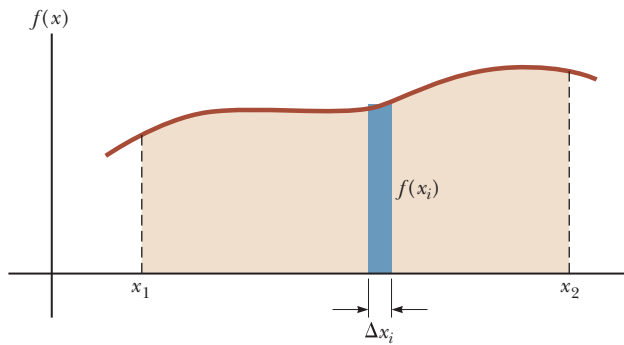


Figura B.15 La integral definida de una función es el área bajo la curva de la función entre los límites x_1 y x_2 .

Una integral común que surge en situaciones prácticas tiene la forma

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1) \quad (\text{B.37})$$

Este resultado es obvio, pues la derivación del lado derecho respecto a x da $f(x) = x^n$ directamente. Si los límites de la integración se conocen, esta integral se vuelve una *integral definida* y se escribe

$$\int_{x_1}^{x_2} x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^{n+1} - x_1^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1) \quad (\text{B.38})$$

Ejercicios

En los ejercicios siguientes, evalúe la integral

	Respuestas		Respuestas
1. $\int_0^a x^2 dx$	$\frac{a^3}{3}$	3. $\int_3^5 x dx$	8
2. $\int_0^b x^{3/2} dx$	$\frac{2}{5} b^{5/2}$		

Integración parcial

A veces es útil aplicar el método de integración parcial (también llamado “integración por partes”) para evaluar ciertas integrales. Este método usa la propiedad

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (\text{B.39})$$

donde u y v se eligen con cuidado para reducir una integral compleja a una más simple. En muchos casos, tienen que hacerse muchas reducciones. Considere la función

$$I(x) = \int x^2 e^x dx$$

que se puede evaluar al integrar por partes dos veces. Primero, si elige $u = x^2$, $v = e^x$, obtiene

$$\int x^2 e^x dx = \int x^2 d(e^x) = x^2 e^x - 2 \int e^x x dx + c_1$$



Ahora, en el segundo término, elija $u = x$, $v = e^x$, que produce

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx + c_1$$

o

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c_2$$

El diferencial perfecto

Otro método útil para recordar es el del diferencial perfecto, en el que se busca un cambio de variable tal que el diferencial de la función sea el diferencial de la variable independiente que aparece en el integrando. Por ejemplo, considere la integral

$$I(x) = \int \cos^2 x \sen x dx$$

Esta integral se vuelve fácil de evaluar si reescribe el diferencial como $d(\cos x) = -\sen x dx$. Entonces la integral se convierte en

$$\int \cos^2 x \sen x dx = - \int \cos^2 x d(\cos x)$$

Si ahora se cambian variables, con $y = \cos x$, obtenemos

$$\int \cos^2 x \sen x dx = - \int y^2 dy = -\frac{y^3}{3} + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + c$$

La tabla B.5 menciona algunas integrales indefinidas útiles. La tabla B.6 da la integral de probabilidad de Gauss y otras integrales definidas. Una lista más completa se puede encontrar en varios textos, como *The Handbook of Chemistry and Physics* (Boca Ratón, FL: CRC Press, que se publica anualmente).

TABLA B.5 Algunas integrales indefinidas (a cada una de estas integrales debe agregar una constante arbitraria.)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ (siempre que } n \neq -1 \text{)}$$

$$\int \ln ax dx = (x \ln ax) - x$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1} dx = \ln x$$

$$\int xe^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln(a+bx)$$

$$\int \frac{dx}{a+be^{cx}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ac} \ln(a+be^{cx})$$

$$\int \frac{x dx}{a+bx} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2} \ln(a+bx)$$

$$\int \sen ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = -\frac{1}{a} \ln \frac{x+a}{x}$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sen ax$$

$$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}$$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln(\cos ax) = \frac{1}{a} \ln(\sec ax)$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \cot ax dx = \frac{1}{a} \ln(\sen ax)$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} \text{ (} a^2-x^2 > 0 \text{)}$$

$$\int \sec ax dx = \frac{1}{a} \ln(\sec ax + \tan ax) = \frac{1}{a} \ln \left[\tan \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} \text{ (} x^2-a^2 > 0 \text{)}$$

$$\int \csc ax dx = \frac{1}{a} \ln(\csc ax - \cot ax) = \frac{1}{a} \ln \left(\tan \frac{ax}{2} \right)$$

continuación



TABLA B.5 Algunas integrales indefinidas (continuación)

$\int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln(a^2 \pm x^2)$	$\int \operatorname{sen}^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a} = -\cos^{-1} \frac{x}{a} \quad (a^2 - x^2 > 0)$	$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax} = -\frac{1}{a} \cot ax$
$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \tan ax$
$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$	$\int \tan^2 ax dx = \frac{1}{a} (\tan ax) - x$
$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{ a } \right)$	$\int \cot^2 ax dx = -\frac{1}{a} (\cot ax) - x$
$\int x \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{3} (a^2 - x^2)^{3/2}$	$\int \operatorname{sen}^{-1} ax dx = x(\operatorname{sen}^{-1} ax) + \frac{\sqrt{1 - a^2 x^2}}{a}$
$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$	$\int \cos^{-1} ax dx = x(\cos^{-1} ax) - \frac{\sqrt{1 - a^2 x^2}}{a}$
$\int x(\sqrt{x^2 \pm a^2}) dx = \frac{1}{3} (x^2 \pm a^2)^{3/2}$	$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}$
$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$	$\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

TABLA B.6 Integral de probabilidad de Gauss y otras integrales definidas

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{Integral de probabilidad de Gauss})$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a}$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{dI_0}{da} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = -\frac{dI_1}{da} = \frac{1}{2a^2}$$

$$I_4 = \int_0^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{d^2 I_0}{da^2} = \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

$$I_5 = \int_0^{\infty} x^5 e^{-ax^2} dx = \frac{d^2 I_1}{da^2} = \frac{1}{a^3}$$

$$\vdots$$

$$I_{2n} = (-1)^n \frac{d^n}{da^n} I_0$$

$$I_{2n+1} = (-1)^n \frac{d^n}{da^n} I_1$$



B.8 Propagación de incertidumbre

En experimentos de laboratorio una actividad común es tomar mediciones que fungen como datos no analizados. Estas mediciones son de varios tipos (longitud, intervalo de tiempo, temperatura, voltaje, y así sucesivamente) y se toman mediante varios instrumentos. Sin importar la medición y la calidad de la instrumentación, **siempre hay incertidumbre asociada con una medición física**. Esta incertidumbre es una combinación de la que se asocia con el instrumento y la relacionada con el sistema a medir. Un ejemplo de lo anterior es la incapacidad de determinar con exactitud la posición de una medición de longitud entre las líneas de una regleta. Otro ejemplo de incertidumbre relacionado con el sistema a medir es la variación de la temperatura dentro de una muestra de agua, de modo que es difícil determinar una sola temperatura para la muestra.

Las incertidumbres se expresan en dos formas. La **incertidumbre absoluta** se refiere a una incertidumbre expresada en las mismas unidades que la medición. Por tanto, la longitud de una etiqueta de disco de computadora se puede expresar como (5.5 ± 0.1) cm. Sin embargo, la incertidumbre de ± 0.1 cm por sí misma no es lo suficientemente descriptiva para algunos propósitos. Esta incertidumbre es grande si la medición es 1.0 cm, pero es pequeña si la medición es 100 m. Para dar una explicación más descriptiva de la incertidumbre, se usa la **incertidumbre fraccionaria** o la **incertidumbre porcentual**. En este tipo de descripción la incertidumbre se divide entre la medición real. Por tanto, la longitud de la etiqueta del disco de computadora podría expresarse como

$$\ell = 5.5 \text{ cm} \pm \frac{0.1 \text{ cm}}{5.5 \text{ cm}} = 5.5 \text{ cm} \pm 0.018 \quad (\text{incertidumbre fraccionaria})$$

o como

$$\ell = 5.5 \text{ cm} \pm 1.8\% \quad (\text{incertidumbre porcentual})$$

Cuando se combinan mediciones en un cálculo, la incertidumbre porcentual en el resultado final por lo general es mayor que la incertidumbre en las mediciones individuales. A esto se le llama **propagación de incertidumbre** y es uno de los retos de la física experimental.

Algunas reglas simples pueden proporcionar estimaciones razonables de incertidumbre en un resultado calculado:

Multiplicación y división: Cuando las mediciones con incertidumbres se multiplican o dividen, sume las *incertidumbres porcentuales* para obtener la incertidumbre porcentual en el resultado.

Ejemplo B.8

Encuentre el área, con incertidumbre asociada, de una placa rectangular de dimensiones $5.5 \text{ cm} \pm 1.8\%$ por $6.4 \text{ cm} \pm 1.6\%$.

SOLUCIÓN

Debido a que el resultado es una multiplicación, agregue la incertidumbre porcentual.

$$\begin{aligned} A &= \ell w = (5.5 \text{ cm} \pm 1.8\%)(6.4 \text{ cm} \pm 1.6\%) \\ &= 35 \text{ cm}^2 \pm 3.4\% = (35 \pm 1) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Suma y resta: Cuando se suman o restan mediciones con incertidumbre, sume las *incertidumbres absolutas* para obtener la incertidumbre absoluta en el resultado.



Ejemplo B.9

Encuentre el cambio en la temperatura, con la incertidumbre asociada, cuando la temperatura aumenta de $(27.6 \pm 1.5)^\circ\text{C}$ a $(99.2 \pm 1.5)^\circ\text{C}$

SOLUCIÓN

Debido a que el resultado es una resta, sume las incertidumbres absolutas:

$$\begin{aligned}\Delta T &= T_2 - T_1 = (99.2 \pm 1.5)^\circ\text{C} - (27.6 \pm 1.5)^\circ\text{C} \\ &= (71.6 \pm 3.0)^\circ\text{C} = 1.6^\circ\text{C} \pm 4.2\%\end{aligned}$$

Potencias: Si una medición se eleva a una potencia, la incertidumbre porcentual se multiplica por dicha potencia para obtener la incertidumbre porcentual en el resultado.

Ejemplo B.10

Encuentre el volumen de una esfera de radio $6.20\text{ cm} \pm 2.0\%$.

SOLUCIÓN

Dado que el resultado se determina elevando una cantidad a una potencia, multiplique la potencia por el porcentaje de incertidumbre:

$$\begin{aligned}V &= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(6.20\text{ cm} \pm 2.0\%)^3 \\ &= 998\text{ cm}^3 \pm 6.0\% = (998 \pm 60)\text{ cm}^3\end{aligned}$$

Para cálculos complicados muchas incertidumbres se suman juntas, lo que puede hacer que la incertidumbre en el resultado final sea indeseablemente grande. Los experimentos se deben diseñar de modo que los cálculos sean tan simples como sea posible.

Note que las incertidumbres en un cálculo siempre se suman. Como resultado, un experimento que involucre una resta se debe evitar, si es posible, en especial si las mediciones a restar están cercanas. El resultado de tal cálculo es una diferencia pequeña en las mediciones e incertidumbres que se suman. ¡Es posible que la incertidumbre en el resultado pueda ser mayor que el resultado mismo!



Apéndice C Tabla periódica de los elementos

Grupo I	Grupo II	Elementos de transición							
H 1 1.007 9 1s									
Li 3 6.941 2s ¹	Be 4 9.0122 2s ²								
Na 11 22.990 3s ¹	Mg 12 24.305 3s ²								
K 19 39.098 4s ¹	Ca 20 40.078 4s ²	Sc 21 44.956 3d ¹ 4s ²	Ti 22 47.867 3d ² 4s ²	V 23 50.942 3d ³ 4s ²	Cr 24 51.996 3d ⁵ 4s ¹	Mn 25 54.938 3d ⁵ 4s ²	Fe 26 55.845 3d ⁶ 4s ²	Co 27 58.933 3d ⁷ 4s ²	
Rb 37 85.468 5s ¹	Sr 38 87.62 5s ²	Y 39 88.906 4d ¹ 5s ²	Zr 40 91.224 4d ² 5s ²	Nb 41 92.906 4d ⁴ 5s ¹	Mo 42 95.96 4d ⁵ 5s ¹	Tc 43 (98) 4d ⁵ 5s ²	Ru 44 101.07 4d ⁷ 5s ¹	Rh 45 102.91 4d ⁸ 5s ¹	
Cs 55 132.91 6s ¹	Ba 56 137.33 6s ²	57-71*	Hf 72 178.49 5d ² 6s ²	Ta 73 180.95 5d ³ 6s ²	W 74 183.84 5d ⁴ 6s ²	Re 75 186.21 5d ⁵ 6s ²	Os 76 190.23 5d ⁶ 6s ²	Ir 77 192.2 5d ⁷ 6s ²	
Fr 87 (223) 7s ¹	Ra 88 (226) 7s ²	89-103**	Rf 104 (267) 6d ² 7s ²	Db 105 (268) 6d ³ 7s ²	Sg 106 (269) 6d ⁴ 7s ²	Bh 107 (270) 6d ⁵ 7s ²	Hs 108 (277) 6d ⁶ 7s ²	Mt ^{††} 109 (278) 6d ⁷ 7s ²	

Símbolo — **Ca** 20 — Número atómico
 Masa atómica[†] — 40.078
 Configuración electrónica — 4s²

*Serie lantánidos

La 57 138.91 5d ¹ 6s ²	Ce 58 140.12 5d ¹ 4f ¹ 6s ²	Pr 59 140.91 4f ³ 6s ²	Nd 60 144.24 4f ⁴ 6s ²	Pm 61 (145) 4f ⁵ 6s ²	Sm 62 150.36 4f ⁶ 6s ²
Ac 89 (227) 6d ¹ 7s ²	Th 90 232.04 6d ² 7s ²	Pa 91 231.04 5f ² 6d ¹ 7s ²	U 92 238.03 5f ³ 6d ¹ 7s ²	Np 93 (237) 5f ⁴ 6d ¹ 7s ²	Pu 94 (244) 5f ⁶ 7s ²

**Serie actínidos

Nota: Los valores de masa atómica son promedios sobre isótopos en los porcentajes en los que existen en la naturaleza.

[†]Para un elemento inestable el número de masa del isótopo conocido más estable aparece entre paréntesis.

^{††}Para los elementos 109 y superiores, las configuraciones electrónicas se predicen teóricamente.

			Grupo III	Grupo IV	Grupo V	Grupo VI	Grupo VII	Grupo 0
							H 1 1.007 9 1s ¹	He 2 4.002 6 1s ²
			B 5 10.811 2p ¹	C 6 12.011 2p ²	N 7 14.007 2p ³	O 8 15.999 2p ⁴	F 9 18.998 2p ⁵	Ne 10 20.180 2p ⁶
			Al 13 26.982 3p ¹	Si 14 28.086 3p ²	P 15 30.974 3p ³	S 16 32.066 3p ⁴	Cl 17 35.453 3p ⁵	Ar 18 39.948 3p ⁶
Ni 28 58.693 3d ⁸ 4s ²	Cu 29 63.546 3d ¹⁰ 4s ¹	Zn 30 65.39 3d ¹⁰ 4s ²	Ga 31 69.723 4p ¹	Ge 32 72.64 4p ²	As 33 74.922 4p ³	Se 34 78.96 4p ⁴	Br 35 79.904 4p ⁵	Kr 36 83.80 4p ⁶
Pd 46 106.42 4d ¹⁰	Ag 47 107.87 4d ¹⁰ 5s ¹	Cd 48 112.41 4d ¹⁰ 5s ²	In 49 114.82 5p ¹	Sn 50 118.71 5p ²	Sb 51 121.76 5p ³	Te 52 127.60 5p ⁴	I 53 126.90 5p ⁵	Xe 54 131.29 5p ⁶
Pt 78 195.08 5d ⁹ 6s ¹	Au 79 196.97 5d ¹⁰ 6s ¹	Hg 80 200.59 5d ¹⁰ 6s ²	Tl 81 204.38 6p ¹	Pb 82 207.2 6p ²	Bi 83 208.98 6p ³	Po 84 (209) 6p ⁴	At 85 (210) 6p ⁵	Rn 86 (222) 6p ⁶
Ds 110 (281) 6d ⁸ 7s ²	Rg 111 (282) 6d ⁹ 7s ²	Cn 112 (285) 6d ¹⁰ 7s ²	Nh 113 (286) 7p ¹	Fl 114 (289) 7p ²	Mc 115 (289) 7p ³	Lv 116 (293) 7p ⁴	Ts 117 (294) 7p ⁵	Og 118 (294) 7p ⁶

Eu 63 151.96 4f ⁷ 6s ²	Gd 64 157.25 4f ⁷ 5d ¹ 6s ²	Tb 65 158.93 4f ⁸ 5d ¹ 6s ²	Dy 66 162.50 4f ¹⁰ 6s ²	Ho 67 164.93 4f ¹¹ 6s ²	Er 68 167.26 4f ¹² 6s ²	Tm 69 168.93 4f ¹³ 6s ²	Yb 70 173.04 4f ¹⁴ 6s ²	Lu 71 174.97 4f ¹⁴ 5d ¹ 6s ²
Am 95 (243) 5f ⁷ 7s ²	Cm 96 (247) 5f ⁷ 6d ¹ 7s ²	Bk 97 (247) 5f ⁸ 6d ¹ 7s ²	Cf 98 (251) 5f ¹⁰ 7s ²	Es 99 (252) 5f ¹¹ 7s ²	Fm 100 (257) 5f ¹² 7s ²	Md 101 (258) 5f ¹³ 7s ²	No 102 (259) 5f ¹⁴ 7s ²	Lr 103 (262) 5f ¹⁴ 6d ¹ 7s ²

Nota: Para obtener una descripción de los datos atómicos, visite physics.nist.gov/PhysRefData/Elements/per_text.html.



Apéndice D Unidades del SI

TABLA D.1 Unidades del SI

Cantidad básica	Unidad básica del SI	
	Nombre	Símbolo
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

TABLA D.2 Algunas unidades derivadas del SI

Otra cantidad	Nombre	Símbolo	Expresión en términos de unidades básicas	Expresión en términos de unidades del SI
Ángulo plano	radián	rad	m/m	
Frecuencia	hertz	Hz	s ⁻¹	
Fuerza	newton	N	kg · m/s ²	J/m
Presión	pascal	Pa	kg/m · s ²	N/m ²
Energía	joule	J	kg · m ² /s ²	N · m
Potencia	watt	W	kg · m ² /s ³	J/s
Carga eléctrica	coulomb	C	A · s	
Potencial eléctrico	volt	V	kg · m ² /A · s ³	W/A
Capacitancia	farad	F	A ² · s ⁴ /kg · m ²	C/V
Resistencia eléctrica	ohm	Ω	kg · m ² /A ² · s ³	V/A
Flujo magnético	weber	Wb	kg · m ² /A · s ²	V · s
Campo magnético	tesla	T	kg/A · s ²	
Inductancia	henry	H	kg · m ² /A ² · s ²	T · m ² /A

Respuestas a exámenes rápidos y problemas con numeración impar

Capítulo 1

Respuestas a los exámenes rápidos

1. (a)
2. Falso
3. (b)

Respuestas a problemas con numeración impar

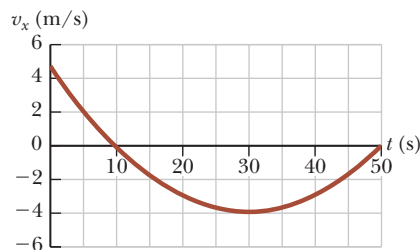
1. (a) $5.52 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ (b) Está entre la densidad del aluminio y del hierro y es mayor que la densidad de las rocas superficiales típicas.
3. 7.69 m
5. El ángulo subtendido por la gran muralla es menor que la agudeza visual del ojo.
7. 0.141 nm
9. (b) sólo
11. $11.4 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
13. 2.86 cm
15. 151 μm
17. (a) $\sim 10^2 \text{ kg}$ (b) $\sim 10^3 \text{ kg}$
19. La distancia media entre los asteroides en el cinturón de asteroides es aproximadamente de 400 000 km.
21. 31 556 926.0 s
23. 19
25. 63
27. ± 3.46
29. 316 m
31. 10^{11} estrellas
33. Las respuestas pueden variar. a) $\sim 10^{29}$ procariontas (b) $\sim 10^{14} \text{ kg}$
35. (a) $478 \text{ cm}^3/\text{s}$ (b) 0.225 cm/s (c) cuando el radio del globo es el doble de grande, su área superficial es cuatro veces mayor. El nuevo volumen agregado en un segundo en el proceso de inflación es igual a esta área más grande por un espesor radial extra que es un cuarto de la longitud que tenía cuando el globo era más pequeño.
37. $V = 0.579t + (1.19 \times 10^{-9})t^2$, donde V está en pies cúbicos y t está en segundos
39. $\frac{d \tan \phi \tan \theta}{\tan \phi - \tan \theta}$

Capítulo 2

Respuestas a los exámenes rápidos

1. (b)
2. (c)
3. (b)
4. Falso. La gráfica debería verse como la que se muestra a continuación. Esta gráfica de $v_x - t$ muestra que la rapidez máxima es aproximadamente de 5.0 m/s, que es de

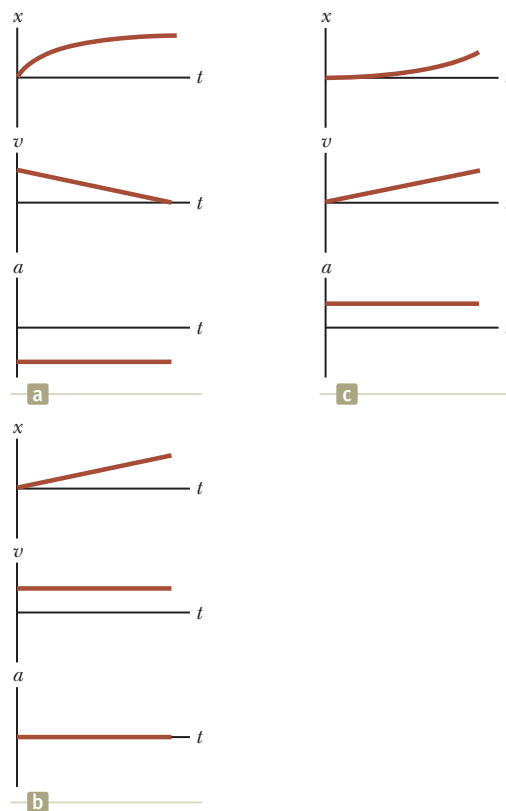
18 km/h (= 11 mi/h), por lo que el conductor no estaba acelerando.



5. (b)
6. (c)
7. (a)-(e), (b)-(d), (c)-(f)
8. (i) (e) (ii) (d)

Respuestas a problemas con numeración impar

1. 0.02 s
3. (a) 2.30 m/s (b) 16.1 m/s (c) 11.5 m/s
5. (a) -2.4 m/s (b) -3.8 m/s (c) 4.0 s
7. (a) 2.80 h (b) 218 km
9. (a) 1.3 m/s^2 (b) $t = 3 \text{ s}$, $a = 2 \text{ m/s}^2$ (c) $t = 6 \text{ s}$, $t > 10 \text{ s}$ (d) $a = -1.5 \text{ m/s}^2$, $t = 8 \text{ s}$
11. (a) 20 m/s, 5 m/s (b) 263 m
- 13.



15. (a) 9.00 m/s (b) 23.00 m/s (c) 17.0 m/s (d) La gráfica de velocidad contra tiempo es una línea recta que pasa por 13 m/s a las 10:05 a.m. y se inclina hacia abajo, disminuyendo 4 m/s cada segundo después de eso. (e) Si y solo si conocemos la velocidad del objeto en un instante, el conocer su aceleración nos dice su velocidad en cualquier otro momento mientras la aceleración sea constante.
17. -16.0 cm/s^2
19. (a) La idea es falsa, a menos que la aceleración sea cero. Definimos la aceleración constante en el sentido de que la velocidad está cambiando constantemente en el tiempo. Así, la velocidad no puede estar cambiando constantemente en el espacio. (b) Esta idea es verdadera. Como la velocidad está cambiando constantemente en el tiempo, la velocidad a la mitad de un intervalo es igual a la media de sus valores iniciales y finales.
21. (a) 19.7 cm/s (b) 4.70 cm/s² (c) La longitud del deslizador se utiliza para encontrar la velocidad media durante un intervalo de tiempo conocido.
23. (a) 3.75 s (b) 5.50 cm/s (c) 0.604 s (d) 13.3 cm, 47.9 cm (e) Los carros se mueven inicialmente acercándose, por lo que pronto llegan a la misma posición x cuando sus velocidades son muy diferentes, dando una respuesta a (c) que no es una respuesta a (a). El primer carro ralentiza su movimiento hacia la izquierda, se da la vuelta, y comienza a moverse hacia la derecha, lentamente al principio y ganando velocidad constantemente. En un determinado momento su velocidad será igual a la velocidad constante hacia la derecha del segundo coche, pero en este momento el carro acelerado se aleja detrás del carro que se mueve con velocidad constante; así, la respuesta a (a) no es una respuesta a (c). Por último, el carro acelerado alcanza al carro con movimiento constante, pero lo pasa a mayor velocidad, lo que da otra respuesta a (c) que no es la respuesta a (a).
25. David no tendrá éxito. El tiempo medio de reacción humana es de 0.2 s (investigado en internet) y un billete de dólar tiene aproximadamente 15.5 cm de largo, así los dedos de David están aproximadamente a 8 cm del extremo del billete antes de que se caiga. El billete caerá cerca de 20 cm antes de que pueda cerrar los dedos.
27. 7.96 s
29. (a) 10.0 m/s hacia arriba (b) 4.68 m/s hacia abajo
31. (a) La caja podría llegar a la ventana de acuerdo a los datos proporcionados. (b) las respuestas variarán.
33. (a) $a_x(t) = a_{xi} + Jt$; $v_x(t) = v_{xi} + a_{xi}t + \frac{1}{2}Jt^2$;
 $x(t) = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_{xi}t^2 + \frac{1}{6}Jt^3$
37. (a) Aquí, v_1 debe ser mayor que v_2 y la distancia entre el atleta principal y la línea de meta debe ser lo suficientemente grande para que el atleta que va detrás tenga tiempo de alcanzarlo.
- $$(b) t = \frac{d_1}{v_1 - v_2} \quad (c) d_2 = \frac{v_2 d_1}{v_1 - v_2}$$
39. (a) 5.46 s (b) 73.0 m
(c) $v_{\text{Sam}} = 22.6 \text{ m/s}$, $v_{\text{Hannah}} = 26.7 \text{ m/s}$
41. 1.60 m/s²
43. (a) 5.32 m/s² para Laura y 3.75 m/s² para Healan
(b) 10.6 m/s para Laura y 11.2 m/s para Healan
(c) Laura, por 2.63 m (d) 4.47 m en $t = 2.84 \text{ s}$

Capítulo 3

Respuestas a los exámenes rápidos

- vectores: (b), (c); escalares: (a), (d), (e)
- (c)
- (b) y (c)
- (b)
- (c)

Respuestas a problemas con numeración impar

- (a) 8.60 m (b) 4.47 m, -63.4° ; 4.24 m, 135°
- (a) $(-3.56 \text{ cm}, -2.40 \text{ cm})$ (b) ($r = 4.30 \text{ cm}$, $\theta = 326^\circ$)
(c) ($r = 8.60 \text{ cm}$, $\theta = 34.08^\circ$) (d) ($r = 12.9 \text{ cm}$, $\theta = 146^\circ$)
- Esta situación *nunca* puede ser cierta porque la distancia es la longitud de un arco de un círculo entre dos puntos, mientras que la magnitud del vector de desplazamiento es una cuerda de línea recta del círculo entre los mismos puntos.
- 9.5 N, 57° arriba del eje x .
- (a) 5.2 m a 60° (b) 3.0 m a 330° (c) 3.0 m a 150°
(d) 5.2 m a 300°
- (a) sí (b) La velocidad del camper debe ser 28.3 m/s o más para satisfacer este requisito.
- 9.48 m a 166°
- (a) 185 N a 77.8° del eje x positivo
(b) $(-39.3 \hat{i} - 181 \hat{j}) \text{ N}$
- (a) 2.83 m a $\theta = 315^\circ$ (b) 13.4 m a $\theta = 117^\circ$
- (a) $8.00 \hat{i} + 12.0 \hat{j} - 4.00 \hat{k}$ (b) $2.00 \hat{i} + 3.00 \hat{j} - 1.00 \hat{k}$
(c) $-24.0 \hat{i} - 36.0 \hat{j} + 12.0 \hat{k}$
- (a) $-3.00 \hat{i} + 2.00 \hat{j}$ (b) 3.61 at 146° (c) $3.00 \hat{i} - 6.00 \hat{j}$
- (a) $a = 5.00$ y $b = 7.00$ (b) Para vectores para ser iguales, todos sus componentes deben ser iguales. Una ecuación vectorial tiene más información que una ecuación escalar.
- $(2.60 \hat{i} + 4.50 \hat{j}) \text{ m}$
- 196 cm a 345°
- (a) $(-20.5 \hat{i} + 35.5 \hat{j}) \text{ m/s}$ (b) $25.0 \hat{j} \text{ m/s}$
(c) $(-61.5 \hat{i} + 107 \hat{j}) \text{ m}$ (d) $37.5 \hat{j} \text{ m}$ (e) 157 km
- $1.43 \times 10^4 \text{ m}$ a 32.2° arriba de la horizontal
- (a) $(5 + 11f) \hat{i} + (3 + 9f) \hat{j}$ metros (b) $(5 + 0) \hat{i} + (3 + 0) \hat{j}$ metros (c) Esto es razonable porque es la ubicación del punto inicial, $5 \hat{i} + 3 \hat{j}$ metros. (d) $16 \hat{i} + 12 \hat{j}$ metros (e) Esto es razonable porque hemos completado el viaje, y éste es el vector de posición del punto final.
- 240 m a 237°
- 1.15°
- (a) 25.4 s (b) 15.0 km/h
- (a) Las componentes x , y , y z son, respectivamente, 2.00, 1.00, 3.00. (b) 3.74 (c) $u_x = 57.78$, $u_y = 74.58$, $u_z = 36.78$
- (a) $-2.00 \hat{k} \text{ m/s}$ (b) su vector velocidad
- (a) $\vec{R}_1 = a \hat{i} + b \hat{j}$ (b) $R_1 = (a^2 + b^2)^{1/2}$
(c) $\vec{R}_2 = a \hat{i} + b \hat{j} + c \hat{k}$

Capítulo 4

Respuestas a los exámenes rápidos

- (a)
- (i) (b) (ii) (a)



3. 15°, 30°, 45°, 60°, 75°
4. (i) (d) (ii) (b)
5. (i) (b) (ii) (d)

Respuestas a problemas con numeración impar

1. (a) $(1.00\hat{i} + 0.750\hat{j})$ m/s (b) $(1.00\hat{i} + 0.500\hat{j})$ m/s, 1.12 m/s
3. (a) $\vec{v} = -12.0t\hat{j}$, donde \vec{v} está en metros por segundo y t está en segundos $\vec{a} = -12.0\hat{j}$ m/s² y $\vec{r} = (3.00\hat{i} - 6.00\hat{j})$ m; $\vec{v} = -12.0\hat{j}$ m/s.
5. (a) $\vec{v}_f = (3.45 - 1.79t)\hat{i} + (2.89 - 0.650t)\hat{j}$
(b) $\vec{r}_f = (-25.3 + 3.45t - 0.893t^2)\hat{i} + (28.9 + 2.89t - 0.325t^2)\hat{j}$
13. (a) (0, 50.0 m) (b) $v_{xi} = 18.0$ m/s; $v_{yi} = 0$ (c) Partícula bajo aceleración constante (d) Partícula bajo velocidad constante (e) $v_{xf} = v_{xi}$; $v_{yf} = -gt$ (f) $x_f = v_{xi}t$; $y_f = y_i - \frac{1}{2}gt^2$ (g) 3.19 s (h) 36.1 m/s, -60.1°
15. (a) 41.7 m/s (b) 3.81 s (c) $v_x = 34.1$ m/s, $v_y = -13.4$ m/s, $v = 36.7$ m/s
17. 1.92 s
19. 7.58×10^3 m/s, 5.80×10^3 s
21. 377 m/s²
23. (a) Sí. La partícula se puede acelerar o frenar, con una componente tangencial de la aceleración de magnitud $\sqrt{6^2 - 4.5^2} = 3.97$ m/s². (b) No. La magnitud de la aceleración no puede ser menor que $v^2/r = 4.5$ m/s².
25. (a) 9.80 m/s² hacia abajo y 2.50 m/s² hacia el sur (b) 9.80 m/s² hacia abajo. (c) El tornillo se mueve sobre una parábola con su eje abajo e inclinando hacia el sur. Aterriza al sur del punto justo debajo de su punto de partida. (d) El tornillo se mueve en una parábola con un eje vertical.
27. 18.2°
29. 15.3 m
31. (a) $\frac{2d/c}{1 - v^2/c^2}$ (b) $\frac{2d}{c}$
(c) El viaje con corriente toma un intervalo de tiempo más largo. El nadador viaja a baja velocidad de subida en un intervalo de tiempo más largo, por lo que su velocidad media se reduce debajo de c . Matemáticamente, $1/(1 - v^2/c^2)$ es siempre mayor que 1. En el extremo, cuando $v \approx c$, el intervalo del tiempo se hace infinito. En ese caso, el estudiante nunca podrá volver al punto de partida porque no puede nadar lo suficientemente rápido como para superar la corriente del río.
33. (a) hacia arriba, a 0° de la vertical (b) 8.25 m/s (c) hacia arriba y en línea descendente (d) una parábola simétrica que abre hacia abajo (e) 12.6 m/s norte a $\tan^{-1}(8.25/9.5) = 41.0^\circ$ arriba de la horizontal.
35. La relación entre la altura h y la rapidez al caminar es $h = (4.16 \times 10^{-3}) v_x^2$, donde h está en metros y v_x está en metros por segundo. Con una velocidad de caminata típica de 4 a 5 kilómetros por hora, la bola tendría que caer de una altura de aproximadamente 1 cm, obviamente demasiado bajo para la mano de una persona. Incluso a la velocidad récord olímpico para el funcionamiento de 100 m (confirme en el internet), esta situación sólo ocurriría si la bola se cae de cerca de 0.4 m, que está también debajo de la mano de una persona normalmente proporcionada.
37. (a) 26.9 m/s (b) 67.3 m (c) $(2.00\hat{i} - 5.00\hat{j})$ m/s²

39. La altura inicial de la bola cuando se le pega es de 3.94 m, que es demasiado alta para que el bateador le pegue a la pelota.
41. (a) 1.69 km/s (b) 1.80 h
43. (a) $x = v_i(0.1643 + 0.002299v_i^2)^{1/2} + 0.04794v_i^2$, donde x está en metros y v_i está en metros por segundo (b) 0.041 0 m (c) 961 m (d) $x \approx 0.405v_i$ (e) $x < 0.0959v_i^2$ (f) La gráfica de x contra v_i comienza desde el origen como una línea recta con pendiente 0.405 s. Luego se curva hacia arriba por encima de esta recta tangente, cada vez más cerca y más cerca de la parábola $x = 0.0959v_i^2$, donde x está en metros y v_i está en metros por segundo.
45. (a) 4.00 km/h (b) 4.00 km/h
47. $\sim 10^2$ m/s²
49. (a) 43.2 m (b) $(9.66\hat{i} - 25.6\hat{j})$ m/s (c) La resistencia del aire normalmente haría la distancia de salto más pequeña y las componentes finales horizontal y vertical de la velocidad ambas un poco más pequeñas. Si una esquiadora experta moldea su cuerpo aerodinámicamente, puede desviar hacia abajo el aire a través del cual pasa para que la desvíe hacia arriba, dándole más tiempo en el aire y un salto más largo.
51. (a) $\Delta t_1 = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2L/c}{1 - v^2/c^2}$
(b) $\Delta t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$
(c) Sarah, que nada perpendicular a la corriente, regresa primero.
53. $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2gh}}{v}\right)$

Capítulo 5

Respuestas a los exámenes rápidos

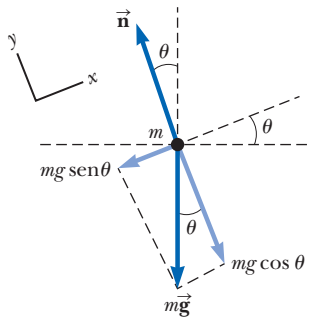
1. (d)
2. (a)
3. (d)
4. (b)
5. (i) (c) (ii) (a)
6. (b)
7. (b) Jalando hacia arriba de la cuerda disminuye la fuerza normal, que, a su vez, disminuye la fuerza de la fricción cinética.

Respuestas a problemas con numeración impar

1. 8.71 N
3. (a) $(6.00\hat{i} + 15.0\hat{j})$ N (b) 16.2 N
5. (a) $(-45.0\hat{i} + 15.0\hat{j})$ m/s (b) 162° del eje x (c) $(-225\hat{i} + 75.0\hat{j})$ m (d) $(-227\hat{i} + 79.0\hat{j})$ m
7. (a) \hat{a} es de 181° (b) 11.2 kg (c) 37.5 m/s (d) $(-37.5\hat{i} - 0.893\hat{j})$ m/s
9. (a) 1.53 m (b) 24.0 N adelante y hacia arriba a 5.29° con la horizontal
11. (a) 3.64×10^{-18} N (b) 8.93×10^{-30} N es 408 mil millones veces más
13. (a) $\sim 10^{-22}$ m/s² (b) $d \sim 10^{-23}$ m
15. (a) 3.43 kN (b) 0.967 m/s horizontalmente hacia adelante

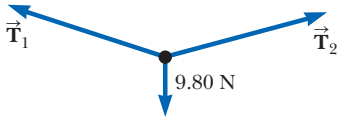


17. (a)



(b) -2.54 m/s^2 (c) 3.19 m/s

19. (a)

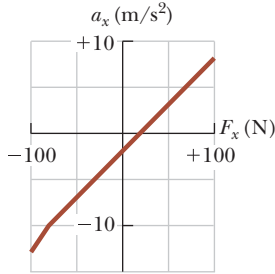


(b) 613 N

21. (a) $a = g \tan \theta$ (b) 4.16 m/s^2

23. (a) $F_x > 19.6 \text{ N}$ (b) $F_x \leq -78.4 \text{ N}$

(c)



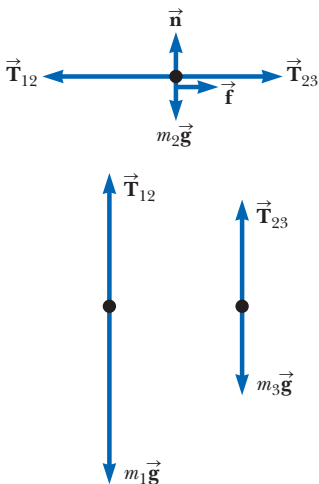
25. (a) $a_2 = 2a_1$ (b) $T_2 = \frac{m_1 m_2}{2m_2 + \frac{1}{2}m_1} g$ y $T_2 = \frac{m_1 m_2}{m_2 + \frac{1}{4}m_1} g$

(c) $\frac{m_1 g}{2m_2 + \frac{1}{2}m_1}$ y $\frac{m_1 g}{4m_2 + m_1}$

27. (a) 14.7 m (b) ninguna masa es necesaria

29. 37.8 N

31. (a)



(b) 2.31 m/s^2 , hacia abajo para m_1 , a la izquierda para m_2 , y hacia arriba para m_3

(c) $T_{12} = 30.0 \text{ N}$ y $T_{23} = 24.2 \text{ N}$

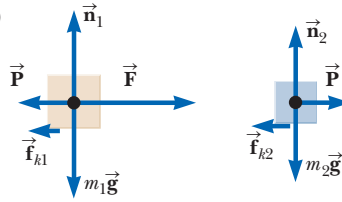
(d) T_{12} disminuye y T_{23} aumenta

33. El conductor viajaba a 67.1 mi/h

35. 834 N

37. (a) 3.43 m/s^2 hacia la chatarra de hierro (b) 3.43 m/s^2 hacia la chatarra de hierro; -6.86 m/s^2 hacia el imán

39. (a)

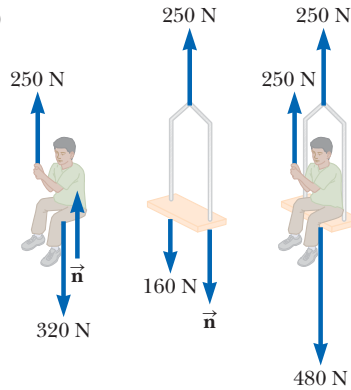


(b) F (c) $F - P$ (d) P (e) $m_1: F - P = m_1 a; m_2: P = m_2 a$

(f) $a = \frac{F - \mu_1 m_1 g - \mu_2 m_2 g}{m_1 + m_2}$

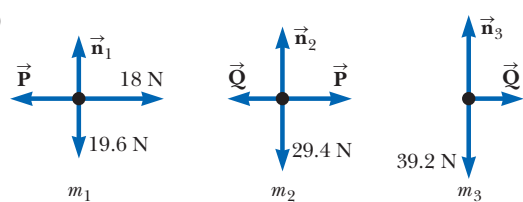
(g) $P = \frac{m_2}{m_1 + m_2} [F + m_1(\mu_2 - \mu_1)g]$

41. (a)



(b) 0.408 m/s^2 (c) 83.3 N

43. (a)



(b) 2.00 m/s^2 a la derecha (c) 4.00 N sobre m_1 , 6.00 N a la derecha sobre m_2 , 8.00 N a la derecha sobre m_3 (d) 14.0 N entre m_1 y m_2 , 8.00 N entre m_2 y m_3 (e) El bloque m_2 modela el pesado bloque de madera. La fuerza de contacto en su espalda se modela por la fuerza entre los bloques m_2 y m_3 , que es mucho menor que la fuerza F . La diferencia entre F y esta fuerza de contacto es la fuerza neta que causa la aceleración del par de objetos de 5 kg . La aceleración es real y distinta de cero, pero dura un tiempo tan corto que nunca se asocia con una gran velocidad. La estructura del edificio y sus piernas ejercen fuerzas pequeñas en magnitud con respecto al golpe de martillo, para partir el bloque, y descansar otra vez en un intervalo de tiempo grande con respecto al golpe de martillo.

45. (b) Si θ es mayor que $\tan^{-1}(1/\mu_s)$, el movimiento es imposible.

47. La nave requiere 1.5 km para detenerse.

49. $(M + m_1 + m_2)(m_1 g / m_2)$

51. (a) 0.931 m/s^2 (b) De un valor de 0.625 m/s^2 para x grandes, la aceleración aumenta gradualmente, pasa a través

de un máximo, y luego cae más rápido, haciéndose negativo y alcanzando -2.10 m/s^2 en $x = 0$. (c) 0.976 m/s^2 en $x = 25.0 \text{ cm}$ (d) 6.10 cm

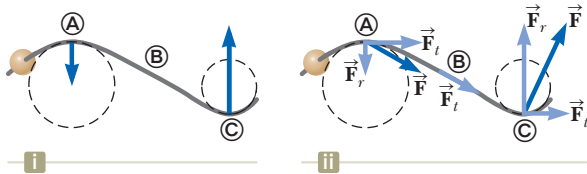
53. (a) $m_2 g \left[\frac{m_1 M}{m_2 M + m_1 (m_2 + M)} \right]$ (b) $\left[\frac{g m_1 (m_2 + M)}{m_2 M + m_1 (m_2 + M)} \right]$
 (c) $\left[\frac{m_1 m_2 g}{m_2 M + m_1 (m_2 + M)} \right]$ (d) $\left[\frac{m_1 M g}{m_2 M + m_1 (m_2 + M)} \right]$

55. $\vec{R} = [m \cos \theta \text{ sen} \hat{i} + (M + m \cos^2 \theta) \hat{j}]g$, donde el eje x es horizontal y eje y es vertical en la figura P5.55.

Capítulo 6

Respuestas a los exámenes rápidos

- (i) (a) (ii) (b)
- (i) Debido a que la rapidez es constante, la única dirección que la fuerza puede tener es la de la aceleración centrípeta. La fuerza es mayor en © que en Ⓐ porque el radio en © es menor. No existe fuerza en Ⓑ porque el cable es recto. (ii) Además de las fuerzas en dirección centrípeta en el inciso (a), ahora hay fuerzas tangenciales para proporcionar la aceleración tangencial. La fuerza tangencial es la misma en los tres puntos porque la aceleración tangencial es constante.

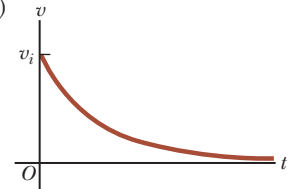


- (c)
- (a)

Respuestas a problemas con numeración impar

- (a) $8.33 \times 10^{-8} \text{ N}$ hacia el núcleo
 (b) $9.15 \times 10^{22} \text{ m/s}^2$ dentro
- (a) $(-0.233 \hat{i} + 0.163 \hat{j}) \text{ m/s}^2$
 (b) 6.53 m/s , $(-0.181 \hat{i} + 0.181 \hat{j}) \text{ m/s}^2$
- $6.22 \times 10^{-12} \text{ N}$
- (a) no (b) si
- (a) 1.33 m/s^2 (b) 1.79 m/s^2 a 48.0° hacia dentro de la dirección de la velocidad
- (a) $v = \sqrt{R \left(\frac{2T}{m} - g \right)}$ (b) $2T$ hacia arriba
- (a) 8.62 m (b) Mg , hacia abajo (c) 8.45 m/s^2 (d) El cálculo de la fuerza normal muestra que será negativa, lo que es imposible. Esto se interpreta como que la fuerza normal tiende a cero en un punto y los pasajeros caerán fuera de sus asientos en la parte superior de la rueda si ellos no son detenidos de alguna manera. Llegaríamos a este mismo resultado sin calcular la fuerza normal indicando que la aceleración en la parte (c) es más pequeña que la debida a la gravedad. La forma de lágrima tiene la ventaja de una mayor aceleración de los pasajeros en la parte superior del arco para una trayectoria que tenga la misma altura que la trayectoria circular, por lo que los pasajeros permanecen en los carros.

- (a) 491 N (b) 50.1 kg (c) 2.00 m/s^2
- 0.527°
- (a) 2.03 N hacia abajo (b) 3.18 m/s^2 hacia abajo
 (c) 0.205 m/s hacia abajo
- (a) $1.47 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ (b) $2.04 \times 10^{-3} \text{ s}$ (c) $2.94 \times 10^{-2} \text{ N}$
- 10^1 N
- 781 N
- (a) $mg - \frac{mv^2}{R}$ (b) \sqrt{gR}
- (a) $v = v_i e^{-bt/m}$ (b)



- (c) En este modelo, el objeto sigue moviéndose para siempre.
 (d) Viaja una distancia finita en un intervalo de tiempo infinito.
- (a) La fuerza gravitacional hacia abajo y la fuerza de la tensión de la cuerda, siempre dirigida hacia el centro de la trayectoria.
 (b) (c) 6.05 N (d) 7.82 m/s

- (a) 1975 lb , dirigida hacia arriba (b) 647 lb , dirigida hacia abajo (c) Cuando $F_g' = 0$, entonces $mg = \frac{mv^2}{R}$.
- (a) La única fuerza horizontal en el auto es la fuerza de fricción, con un valor máximo determinado por la rugosidad de la superficie (descrita por el coeficiente de fricción estática) y la fuerza normal (que aquí es igual a la fuerza gravitacional en el auto). (b) 34.3 m (c) 68.6 m (d) Frenar es mejor. No debe girar el volante. Si utiliza alguna fuerza de fricción disponible para cambiar la dirección del auto, no podría frenar el auto y la distancia de frenado sería mayor. (e) La conclusión es verdadera en general. El radio de la curva apenas puede ser dos veces la mínima distancia de frenado.
- (a) 735 N (b) 732 N (c) La fuerza gravitacional es mayor. La fuerza normal es menor, como es cuando va en la parte superior de una rueda de la fortuna.
- (a) $\sum \vec{F} = km\vec{v}$ (b) En general, la posibilidad de k positiva no es realista en la naturaleza. Usted puede imaginar algunos dispositivos con un mecanismo de retroalimentación que podría utilizarse para aplicar una fuerza que cause que la velocidad aumente en magnitud. En este caso la velocidad aumentaría exponencialmente, así que tal situación sólo podría existir temporalmente. (c) Piense en un pato aterrizando en un lago, donde el agua ejerce una fuerza resistiva sobre el pato proporcional a su velocidad.
- (a) $v_{\min} = \sqrt{\frac{Rg(\tan \theta - \mu_s)}{1 + \mu_s \tan \theta}}$, $v_{\max} = \sqrt{\frac{Rg(\tan \theta + \mu_s)}{1 - \mu_s \tan \theta}}$
 (b) $\mu_s = \tan \theta$

43. (a) Partícula bajo aceleración constante (b) $\Delta t = \frac{2v}{g}$
 (c) Partícula en movimiento circular uniforme (d) $T = \frac{2\pi R}{v}$
 (e) $v = \sqrt{\pi Rg}$ (f) $F = \pi mg$
45. (a) 78.3 m/s (b) 11.1 s (c) 121 m
 47. (a) 8.04 s (b) 379 m/s (c) 1.19 3 1022 m/s (d) 9.55 cm
 49. 0.092 8°

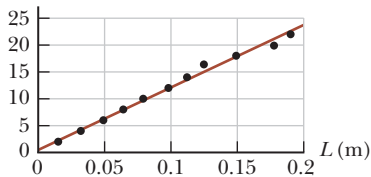
Capítulo 7

Respuestas a los exámenes rápidos

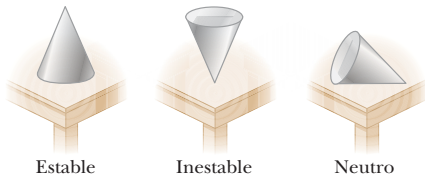
- (a)
- (c), (a), (d), (b)
- (d)
- (a)
- (b)
- (c)
- (i) (c) (ii) (a)
- (d)

Respuestas a con numeración impar

- (a) 1.59×10^3 J (b) menor (c) la misma
- (a) 472 J (b) 2.76 kN
- 5.33 J
- (a) 7.50 J (b) 15.0 J (c) 7.50 J (d) 30.0 J
- (a) 0.938 cm (b) 1.25 J
- Cada resorte debe tener una constante del resorte de 316 N/m.
- (b) mgR
- (a) $F(N)$



- (b) La pendiente de la recta es de 116 N/m. (c) usamos todos los puntos listados y también el origen. No hay ninguna evidencia para una curva en la gráfica o no linealidad cerca de cualquier extremo. (d) 116 N/m (e) 12.7 N
- (a) 50.0 J (b) 87.5 J; trayectoria independiente.
 - (a) 1.20 J (b) 5.00 m/s (c) 6.30 J
 - 878 kN hacia arriba
 - (a) 4.56 kJ (b) 4.56 kJ (c) 6.34 kN (d) 422 km/s² (e) 6.34 kN (f) Las dos teorías concuerdan.
 - (a) 97.8 J (b) $(-4.31\hat{i} + 31.6\hat{j})$ N (c) 8.73 m/s
 - (a) 2.5 J (b) -9.8 J (c) -12 J
 - (a) -196 J (b) -196 J (c) -196 J (d) La fuerza de gravedad es conservativa.
 - (a) 125 J (b) 50.0 J (c) 66.7 J (d) no conservativa.
(e) El trabajo realizado sobre la partícula depende de la trayectoria seguida de la partícula.
 - (a) 40.0 J (b) 240.0 J (c) 62.5 J
 - A/r^2 alejándose de la otra partícula
 - 39.



- 0.559 m/s
- 0.799 N · m
- (a) $\vec{F}_1 = (20.5\hat{i} + 14.3\hat{j})$ N, $\vec{F}_2 = (-36.4\hat{i} + 21.0\hat{j})$ N
(b) $\Sigma \vec{F} = (-15.9\hat{i} + 35.3\hat{j})$ N
(c) $\vec{a} = (-3.18\hat{i} + 7.07\hat{j})$ m/s²
(d) $\vec{v} = (-5.54\hat{i} + 23.7\hat{j})$ m/s
(e) $\vec{r} = (-2.30\hat{i} + 39.3\hat{j})$ m (f) 1.48 kJ (g) 1.48 kJ
(h) El teorema del trabajo-energía cinética es consistente con la segunda ley de Newton.
- 0.131 m
- (a) 19.3° (b) 1.39×10^4 J

Capítulo 8

Respuestas a los exámenes rápidos

- (i) (b) (ii) (b) (iii) (a)
- (a)
- $v_1 = v_2 = v_3$
- (c)

Respuestas a problemas con numeración impar

- (a) $\Delta K + \Delta U = 0$, $v = \sqrt{2gh}$ (b) $\Delta K = W$, $v = \sqrt{2gh}$
- (a) 5.94 m/s, 7.67 m/s (b) 147 J
- 5.49 m/s
- (a) -168 J (b) 184 J (c) 500 J (d) 148 J (e) 5.65 m/s
- (a) 5.60 J (b) 2.29 rev
- (a) 22.0 J, 40.0 J (b) Sí (c) la energía mecánica total ha disminuido, por lo que una fuerza no conservativa debe haber actuado.
- (a) Aislado. La única influencia externa sobre el sistema es la fuerza normal del tobogán, pero esta fuerza siempre es perpendicular a su desplazamiento, así no realiza ningún trabajo sobre el sistema. (b) No, el deslizamiento es sin fricción.
(c) $E_{\text{sistema}} = mgh$ (d) $E_{\text{sistema}} = \frac{1}{5}mgh + \frac{1}{2}mv_i^2$
(e) $E_{\text{sistema}} = mgy_{\text{máx}} + \frac{1}{2}mv_{xi}^2$
(f) $v_i = \sqrt{\frac{8gh}{5}}$ (g) $y_{\text{máx}} = h(1 - \frac{4}{5}\cos^2\theta)$ (h) Si hay fricción, la energía mecánica del sistema no se conserva, así que la energía cinética de la niña en todos los puntos después de salir de la parte superior del tobogán sería reducida comparada con el caso sin fricción. En consecuencia, se reduciría también su rapidez de lanzamiento y su altura máxima.
- Ambos senderos dan la misma velocidad.
- \$145
- $\sim 10^4$ W
- (a) 423 mi/gal (b) 776 mi/gal
- (a) 0.225 J (b) 20.363 J (c) no (d) Es posible encontrar un coeficiente de fricción eficaz, pero no el valor real de μ desde n y f varíe con la posición.
- (a) 1.29×10^4 N (b) 45.4 m/s (c) 3.72×10^4 N; 46.1 m/s (d) 45 m (e) No
- (a) $x = -4.0$ mm (b) -1.0 cm
- (a) -6.08×10^3 J (b) -4.59×10^3 J (c) 4.59×10^3 J
- (a) 1.38×10^4 J (b) 5.51×10^3 W

(c) El valor en el inciso (b) representa sólo la energía que deja el motor y se transforma en energía cinética del coche. La energía adicional deja el motor por el sonido y calor. Más energía del motor se transforma en energía interna por fuerzas de la fricción y resistencia del aire.



33. (a) 0.403 m o 20.357 m (b) Desde un mueble a una altura de 2.80 m sobre la parte superior de una pila de colchones, un niño de 46.0 kg salta hacia arriba a 2.40 m/s. Los colchones se comportan como resorte lineal con constante de 19.4 kN/m de la fuerza. Encuentre la cantidad máxima por la que se comprimen cuando el niño cae sobre ellos. (c) 0.023 2 m (d) este resultado es la distancia que se comprimen los colchones si el niño sólo se pone de pie sobre estos. Esta es la ubicación de la posición de equilibrio del oscilador.
35. (a) 1.53 J en $x = 6.00$ cm, 0 J en $x = 0$ (b) 1.75 m/s (c) 1.51 m/s (d) La respuesta al inciso (c) no es la mitad de la respuesta al inciso (b) porque la ecuación para la velocidad de un oscilador no es lineal en la posición.
37. 48.2°
39. (a) No, la energía mecánica no se conserva en este caso. (b) 77.0 m/s
43. (b) 0.342
45. (a) $-\mu_k gx/L$ (b) $(\mu_k gL)^{1/2}$
47. Menos peligroso

Capítulo 9

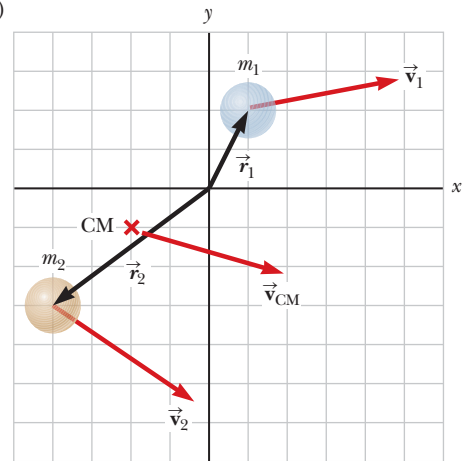
Respuestas a los exámenes rápidos

- (d)
- (b), (c), (a)
- (i) (c), (e) (ii) (b), (d)
- (a) Los tres son iguales (b) tablero de instrumentos, cinturón de seguridad, bolso de aire
- (a)
- (b)
- (b)
- (i) (a) (ii) (b)

Respuestas a problemas con numeración impar

- (b) $p = \sqrt{2mK}$
- $\vec{F}_{\text{sobre el bat}} = (3.26\hat{i} - 3.99\hat{j})$ kN, donde x es positivo es desde el lanzador hacia la base del bateador y positivo es hacia arriba.
- (a) $-6.00\hat{i}$ m/s (b) 8.40 J (c) La energía original está en el resorte. (d) Una fuerza debe ser ejercida sobre un desplazamiento para comprimir el resorte, transfiriendo energía a éste por trabajo. El cable ejerce fuerza, pero sin desplazamiento. (e) La cantidad de movimiento del sistema se conserva con valor cero. (f) Las fuerzas sobre los dos bloques son fuerzas internas que no pueden cambiar la cantidad de movimiento del sistema; el sistema está aislado. (g) Aunque después hay movimiento, las cantidades de movimiento finales son de igual magnitud en direcciones opuestas, así la cantidad de movimiento final del sistema es cero.
- (c) no hay diferencia
- (a) 9.60×10^{-2} s (b) 3.65×10^5 N (c) 26.6g
- 16.5 N
- (a) 2.50 m/s (b) 37.5 kJ
- (a) $v_f = \frac{1}{3}(v_1 + 2v_2)$ (b) $\Delta K = -\frac{m}{3}(v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2)$
- (a) 4.85 m/s (b) 8.41 m
- El acusado viajaba a 41.5 mi/h.
- $v_o = v_i \cos \theta$, $v_y = v_i \sin \theta$
- $v = \frac{v_i}{\sqrt{2}}$, 45.0°, -45.0°
- 3.57×10^8 J

27. (a)



- (b) $(-2.00\hat{i} - 1.00\hat{j})$ m (c) $(3.00\hat{i} - 1.00\hat{j})$ m/s
 (d) $(15.0\hat{i} - 5.00\hat{j})$ kg · m/s

29. El drone fue golpeado por un meteorito.
31. (a) sí (b) no (c) 10^3 kg·m/s, hacia arriba (d) sí (e) 88.2 J (f) No, la energía proviene de la energía potencial almacenada en la persona de las comidas anteriores.
33. (a) 442 toneladas métricas (b) 19.2 toneladas métricas (c) Es mucho menor que el valor sugerido de 442/2.50. Matemáticamente, el logaritmo en la ecuación de propulsión del cohete no es una función lineal. Físicamente, una mayor rapidez de escape tiene un efecto acumulativo extra grande sobre la rapidez final del cuerpo del cohete, al contar una y otra vez en la rapidez que el cuerpo logra segundo tras segundo durante su quema.
35. (a) Ella se mueve, al igual que el arquero en el ejemplo 9.1. (b) $-\frac{m}{(M-m)}\vec{v}_{\text{guantes}}$ (c) mientras jala los guantes y ejerce una fuerza sobre ellos, los guantes ejercen una fuerza igual y opuesta sobre ella que le hace acelerar desde el reposo hasta alcanzar la velocidad $\vec{v}_{\text{patinadora}}$.
37. (a) $1.33\hat{i}$ m/s (b) $-235\hat{i}$ N (c) 0.680 s (d) $-160\hat{i}$ N · s y $+160\hat{i}$ N · s (e) 1.81 m (f) 0.454 m (g) -427 J (h) +107 J (i) Imaginemos una situación ideal en la cual la persona y el carro tienen un perfecto aislante térmico entre ellos, por lo que ninguna energía se puede transferir por calor Q entre la persona y el carro. Entonces, el cambio en la energía cinética de un miembro del sistema, de acuerdo con la ecuación 8.2, será igual al negativo del cambio de energía interna para ese miembro: $\Delta K = -\Delta E_{\text{int}}$. El cambio en la energía interna, a su vez, es el producto de la fuerza de fricción y la distancia a través del cual el miembro se mueve mientras experimenta esa fuerza. Fuerzas de fricción de igual magnitud actúan sobre la persona y el carro, pero la persona y el carro se mueven a través de diferentes distancias, como vemos en los incisos (e) y (f). Por tanto, hay diferentes cambios en la energía interna para la persona y el carro y, a su vez, diferentes cambios en la energía cinética. La persona y el carro experimentarán diferentes cambios en la energía interna y, por tanto, en la temperatura, que, en la situación real sin el aislante térmico, se igualará después del evento por medio de la transferencia de energía por calor Q entre la persona y el carro. El cambio total en la energía cinética del sistema, -320 J, se convierte +320 J de energía interna adicional en el sistema completo en esta colisión perfectamente inelástica.

39. a) La cantidad de movimiento del sistema bala-bloque se conserva en la colisión, así puede relacionar la rapidez de la bala y bloque inmediatamente después de la colisión con la rapidez inicial de la bala. Luego, puede utilizar la conservación de energía mecánica para el sistema bala-bloque-Tierra para relacionar la rapidez después de la colisión con la altura máxima. (b) 521 m/s hacia arriba.
41. (a) $\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ (b) $(v_1 - v_2) \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}$
 (c) $v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$,
 $v_{2f} = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}$
43. (a) 6.29 m/s (b) 6.16 m/s (c) La mayor parte de la diferencia del 2% entre los valores de velocidad podría ser contabilizada por resistencia del aire.
45. 143 m/s
47. (a) 0; inelástica (b) $(-0.250 \hat{i} + 0.75 \hat{j} - 2.00 \hat{k})$ m/s; perfectamente inelástica (c) either $a = -6.74$ con $\vec{v} = -0.419 \hat{k}$ m/s o $a = 2.74$ with $\vec{v} = -3.58 \hat{k}$ m/s
49. (a) $-0.256 \hat{i}$ m/s y $0.128 \hat{i}$ m/s
 (b) $-0.064 \hat{i}$ m/s y 0 (c) 0 y 0
51. (a) $(20.0 \hat{i} + 7.00 \hat{j})$ m/s (b) $4.00 \hat{i}$ m/s² (c) $4.00 \hat{i}$ m/s²
 (d) $(50.0 \hat{i} + 35.0 \hat{j})$ m (e) 600 J (f) 674 J (g) 674 J
 (h) Las aceleraciones comparadas de diversas maneras concuerdan.
 Las energías cinéticas comparadas de diversas maneras concuerdan.
 Las tres teorías son coherentes
53. (a) una partícula de masa $m: \sqrt{2}v_i$; una partícula de masa $3m: \sqrt{\frac{5}{3}}v_i$ (b) 35.3°

Capítulo 10

Respuestas a los exámenes rápidos

- (i) (c) (ii) (b)
- (b)
- (i) (b) (ii) (a)
- (b)
- (b)
- (a)
- (b)

Respuestas a problemas con numeración impar

- (a) 7.27×10^{-5} rad/s (b) Debido a su rapidez angular, la tierra se abulta en el ecuador.
- (a) 4.00 rad/s² (b) 18.0 rad
- (a) 8.21×10^2 rad/s² (b) 4.21×10^3 rad
- (a) $\omega h^{3/2} \left(\frac{2}{g}\right)^{1/2}$ (b) 1.16 cm (c) La desviación es sólo 0.02% de la altura original, por lo que es insignificante en muchos casos prácticos. (d) disminuye
- (a) 25.0 rad/s (b) 39.8 rad/s² (c) 0.628 s
- (a) 54.3 rev (b) 12.1 rev/s
- (a) 3.47 rad/s (b) 1.74 m/s (c) 2.78 s (d) 1.02 rotaciones
- (a) 1.03 s (b) 10.3 rev
- (a) 24.0 N · m (b) 0.035 6 rad/s² (c) 1.07 m/s²
- (a) 0.312 (b) 117 N

21. $\tau_f = -0.039 8 \text{ N} \cdot \text{m}$

23. $I_y' = \int_{\text{todas las masas}} r^2 dm = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^L = \frac{1}{3} ML^2$

25. (a) 92.0 kg·m² (b) 184 J (c) 6.00 m/s, 4.00 m/s, 8.00 m/s (d) 184 J (e) Las energías cinéticas calculadas en los incisos (b) y (d) son las mismas.
27. 1.03×10^{-3} J
29. (a) 11.4 N (b) 7.57 m/s² (c) 9.53 m/s (d) 9.53 m/s
31. (a) $2(Rg/3)^{1/2}$ (b) $4(Rg/3)^{1/2}$ (c) $(Rg)^{1/2}$
33. (a) 2.38 m/s (b) La aceleración centrípeta en la parte superior es $\frac{v_2^2}{r} = \frac{(2.38 \text{ m/s})^2}{0.450 \text{ m}} = 12.6 \text{ m/s}^2 > g$. Por tanto, el balón debe estar en contacto con la pista, con la pista empujando hacia abajo en él. (c) 4.31 m/s (d) La rapidez de la pelota resulta ser imaginaria. (e) Cuando la bola es proyectada con la misma velocidad que antes, pero con sólo la energía cinética traslacional, no hay suficiente energía cinética para la pelota para llegar a la parte superior de la pista.
35. (a) 1.21×10^{-4} kg · m² (b) Conocer la altura de la lata puede ser innecesario. (c) La masa no es uniformemente distribuido; la densidad de la lata de metal es mayor que la de la sopa.
37. (a) 12.5 rad/s (b) 128 rad
39. (a) $d = (1 890 + 80n) \left(\frac{0.459 \text{ m}}{80n - 150} \right)$ (b) 94.1 m (c) 1.62 m
 (d) -5.79 m (e) El carro en ascenso va a la costa a una parada sólo para $n \geq 2$. (f) Para $n = 0$ o $n = 1$, la masa del elevador es menor que el contrapeso, por lo que el carro podría acelerarse hacia arriba si se libera. (g) 0.459 m
43. 54.0°
45. (b) a la izquierda

Capítulo 11

Respuestas a los exámenes rápidos

- (d)
- (i) (a) (ii) (c)
- (b)
- (a)

Respuestas a problemas con numeración impar

- $\hat{i} + 8.00 \hat{j} + 22.0 \hat{k}$
- 45.0°
- (a) $F_3 = F_1 + F_2$ (b) no
- (a) $(-10.0 \text{ N} \cdot \text{m}) \hat{k}$ (b) sí (c) sí (d) sí (e) no (f) $5.00 \hat{j}$ m
- $m(xv_y - yv_x) \hat{k}$
- (a) zero (b) $(-mv_i^3 \sin^2 \theta \cos \theta / 2g) \hat{k}$
 (c) $(-2mv_i^3 \sin^2 \theta \cos \theta / g) \hat{k}$
 (d) La fuerza gravitacional hacia abajo ejerce un par sobre el proyectil en la dirección negativa z.
- $mvR[\cos(vt/R) + 1] \hat{k}$
- (a) $-m/gt \cos \theta \hat{k}$ (b) La tierra ejerce una gravedad esfuerzo de torsión en la bola. (c) $-mg/\cos \theta \hat{k}$
- (a) 0.360 kg · m²/s (b) 0.540 kg · m²/s
- 1.20 kg·m²/s
- 8.63 m/s²
- (a) La energía mecánica del sistema no es constante. Una cierta energía potencial en el cuerpo de la mujer de las

- comidas anteriores se convierten en energía mecánica. (b) La cantidad del movimiento del sistema no es constante. El rodamiento de la placa giratoria ejerce una fuerza externa hacia el norte el eje. (c) El momento angular del sistema es constante. (d) 0.360 rad/s a la izquierda (e) 99.9 J
25. (a) 11.1 rad/s en contra de las manecillas del reloj (b) No; 507 J se transforman en energía interna. (c) No; la tornamesa imparte rápidamente un impulso de 44.9 kg · m/s hacia el Norte en el sistema tornamesa-barro y después de eso sigue cambiando la cantidad de movimiento del sistema.
27. (a) $mv\ell$ hacia abajo (b) $M/(M + m)$
29. (a) $\omega = 2mv_0d/[M + 2m]R^2$ (b) No; la energía mecánica del sistema se transforma en energía interna. (c) La cantidad de movimiento del sistema no es constante. El eje ejerce una fuerza hacia atrás sobre el cilindro cuando el barro pega.
31. $5.46 \times 10^{22} \text{ N} \cdot \text{m}$
33. (a) 2.35 rad/s (b) 0.498 rad/s (c) 5.58°
35. $7.50 \times 10^{-11} \text{ s}$
37. (a) $7md^2/3$ (b) $mgd\hat{k}$ (c) $3g/7d$ sentido contrario a las manecillas del reloj (d) $2g/7$ hacia arriba (e) mgd (f) $\sqrt{6g/7d}$ (g) $m\sqrt{14gd^3/3}$ (h) $\sqrt{2gd/21}$
39. (a) 3 750 kg · m²/s (b) 1.88 kJ (c) 3 750 kg · m²/s (d) 10.0 m/s (e) 7.50 kJ (f) 5.62 kJ
41. (a) $2mv_0$ (b) $2v_0/3$ (c) $4m\ell v_0/3$ (d) $4v_0/9\ell$ (e) mv_0^2 (f) $26mv_0^2/27$ (g) No, las fuerzas horizontales actúan sobre la bola desde afuera después del lanzamiento, así la cantidad de movimiento horizontal se mantiene constante. Su centro de masa se mueve constantemente con la velocidad horizontal que tenía al lanzamiento. No hay momentos de torsión alrededor de su eje de rotación que actúen sobre la bola, así la cantidad de movimiento angular se mantiene constante. Las fuerzas internas no pueden afectar la conservación de la cantidad de movimiento lineal y la conservación de la cantidad de movimiento angular, pero pueden afectar la energía mecánica.
43. 10.7 m/s
45. un aumento de $6.368 \times 10^{-4} \%$ o 0.550 s, que no es significativo
47. 14.0 s
49. (a) 2.0 m/s (b) 1.0 rad/s

Capítulo 12

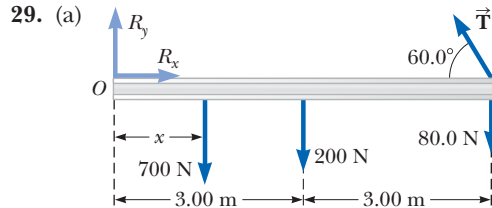
Respuestas a los exámenes rápidos

- (a)
- (b)
- (b)
- (i) (b) (ii) (a) (iii) (c)

Respuestas a problemas con numeración impar

- Arreglos seguros: 2-3-1, 3-1-2, 3-2-1; arreglos peligrosos: 1-2-3, 1-3-2, 2-1-3
- (3.85 cm, 6.85 cm)
- $x = 0.750 \text{ m}$
- 177 kg
- (a) 29.9 N (b) 22.2 N
- (a) 27.7 kN (b) 11.5 kN (c) 4.19 kN
- (a) 1.04 kN a 60.0° hacia arriba y a la derecha (b) $(370\hat{i} + 910\hat{j}) \text{ N}$
- (a) 859 N (b) 1.04 kN a 36.9° a la izquierda y hacia arriba

- (a) -0.0538 m^3 (b) $1.09 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ (c) Con solo un cambio de 5% en volumen en este caso extremo, el agua líquida en efecto es casi incompresible en situaciones de laboratorio biológico y para estudio.
- 23.8 μm
- (a) $3.14 \times 10^4 \text{ N}$ (b) $6.28 \times 10^4 \text{ N}$
- 9.85×10^{-5}
- $n_A = 5.98 \times 10^5 \text{ N}$, $n_B = 4.80 \times 10^5 \text{ N}$
- (a) 0.400 mm (b) 40.0 kN (c) 2.00 mm (d) 2.40 mm (e) 48.0 kN



- (a) $T = 343 \text{ N}$, $R_x = 171 \text{ N}$ a la derecha, $R_y = 683 \text{ N}$ arriba (c) 5.14 m
- (a) $T = F_g(L + d)/[\text{sen}\theta(2L + d)]$ (b) $R_x = F_g(L + d) \cot\theta/(2L + d)$; $R_y = F_gL/(2L + d)$
- (a) 5.08 kN (b) 4.77 kN (c) 8.26 kN
- (a) $\frac{1}{2}m \left(\frac{2\mu_s \text{sen}\theta - \cos\theta}{\cos\theta - \mu_s \text{sen}\theta} \right)$ (b) $(m + M)g\sqrt{1 + \mu_s^2}$ (c) $g\sqrt{M^2 + \mu_s^2(m + M)^2}$
- (a) 9.28 kN (b) El brazo de momento de la fuerza \vec{F}_h no es más largo que los 70 cm desde la articulación del hombro, sino solo de 49.5 cm, por lo tanto, se reduce \vec{F}_m a 6.56 kN.
- (a) 66.7 N (b) aumentando a 0.125 N/s
- (a) $\frac{1}{\sqrt{15}} \frac{mgd}{l}$ (b) $n_A = mg \left(\frac{2l - d}{2l} \right)$, $n_B = \frac{mgd}{2l}$ (c) $R_x = \frac{1}{\sqrt{15}} \frac{mgd}{l}$ a la derecha, $R_y = \frac{mgd}{2l}$ hacia abajo
- (a) $P_1 = P_3 = 1.67 \text{ N}$, $P_2 = 3.33 \text{ N}$ (b) 2.36 N
- 5.73 rad/s
- (a) 443 N (b) 221 N (a la derecha), 217 N (hacia arriba)
- (b) 60.0° (c) Inestable

Capítulo 13

Respuestas a los exámenes rápidos

- (e)
- (c)
- (a)
- (a) perihelio (b) afelio (c) perihelio (d) todos los puntos

Respuestas a problemas con numeración impar

- $7.41 \times 10^{-10} \text{ N}$
- $\sim 10^{-7} \text{ N}$
- (a) 7.61 cm/s² (b) 363 s (c) 3.08 km (d) 28.9 m/s a 72.98 debajo de la horizontal
- (a) $1.31 \times 10^{17} \text{ N}$ (b) $2.62 \times 10^{12} \text{ N/kg}$
- (a) 0.708 años (b) 0.399 año
- 4.99 días
- (a) sí (b) 3.93 años
- $4.17 \times 10^{10} \text{ J}$
- (a) $21.67 \times 10^{-14} \text{ J}$ (b) Las partículas chocan en el centro del triángulo.
- $1.58 \times 10^{10} \text{ J}$



21. 1.78×10^3 m
 23. (a) fuerza del mismo tamaño (b) 15.6 km/s
 25. 492 m/s
 27. 1.30×10^3 m/s
 29. 2.25×10^{-7}
 31. (a) 1.00×10^7 m (b) 1.00×10^4 m/s
 33. (a) 15.3 km (b) 1.66×10^{16} kg (c) 1.13×10^4 s (d) No, su masa es tan grande en comparación con la suya que usted tendría un efecto insignificante en su rotación.
 35. (c) 1.85×10^{-5} m/s²
 37. (a) 2×10^8 años (b) $\sim 10^{41}$ kg (c) 10^{11}
 39. (a) 2.93×10^4 m/s (b) $K = 2.74 \times 10^{33}$ J, $U = -5.39 \times 10^{33}$ J (c) $K = 2.56 \times 10^{33}$ J, $U = -5.21 \times 10^{33}$ J (d) Sí; $E = -2.65 \times 10^{33}$ J tanto para el afelio como para el perihelio.
 41. (a) $(2.77 \text{ m/s}^2) \left(1 + \frac{m}{5.98 \times 10^{24} \text{ kg}}\right)$ (b y c) 2.77 m/s² (d) 3.70 m/s² (e) Cualquier objeto con masa pequeña en comparación con la Tierra comienza a caer con la aceleración 2.77 m/s². A medida que m aumenta para llegar a ser comparable a la masa de la Tierra, la aceleración aumenta y puede convertirse en arbitrariamente grande. Se aproxima a una proporcionalidad directa a m .
 43. 18.2 ms

Capítulo 14

Respuestas a los exámenes rápidos

- (a)
- (a)
- (c)
- (b) o (c)
- (a)

Respuestas a problemas con numeración impar

- 2.96×10^6 Pa
- 5.27×10^{18} kg
- 7.74×10^{-3} m²
- 0.072 1 mm
- (a) 10.5 m (b) No. El vacío no es tan bueno, porque se evaporará algo del agua y el alcohol. Las presiones de vapor de equilibrio del alcohol y del agua son superiores a la presión de vapor de mercurio.
- 3.33×10^3 kg/m³
- (a) 1 250 kg/m³ (b) 500 kg/m³
- (a) 408 kg/m³ (b) Cuando m es menor que 0.310 kg, el bloque de madera se sumerge solo parcialmente en el agua. (c) Cuando m es mayor que 0.310 kg, el bloque de madera y el objeto de acero se hundirán.
- (a) 11.6 cm (b) 0.963 g/cm³ (c) No; la densidad ρ no es lineal en h .
- 20.0 g
- (b) 616 MW
- (a) 15.1 MPa (b) 2.95 m/s
- (a) 28.0 m/s (b) 28.0 m/s (c) Las respuestas coinciden exactamente. Los modelos son coherentes entre sí. (d) 2.11 MPa
- 0.120 N
- 0.200 mm
- (a) 4.43 m/s (b) 10.1 m
- (a) partícula en equilibrio

$$(b) \sum F_y = B - F_b - F_{\text{He}} - F_s = 0$$

$$(c) m_s = \frac{4}{3}(\rho_{\text{aire}} - \rho_{\text{He}})\pi r^3 - m_b$$

$$(d) 0.023 7 \text{ kg} \quad (e) 0.948 \text{ m}$$

- $\sim 10^4$
- (a) 8.01 km (b) sí
- 91.64%
- (a) 3.307 g (b) 3.271 g (c) 3.48×10^{-4} N
- 18.1 N
- 758 Pa
- 4.43 m/s

Capítulo 15

Respuestas a los exámenes rápidos

- (d)
- (f)
- (a)
- (b)
- (c)
- (i) (a) (ii) (a)

Respuestas a problemas con numeración impar

- (a) 17 N a la izquierda (b) 28 m/s² a la izquierda
- (a) 1.50 Hz (b) 0.667 s (c) 4.00 m (d) π rad (e) 2.83 m
- (a) -2.34 m (b) -1.30 m/s (c) -0.076 3 m (d) 0.315 m/s
- (a) $x = 2.00 \cos(3.00\pi t - 90^\circ)$ o $x = 2.00 \sin(3.00\pi t)$ donde x está en centímetros y t está en segundos (b) 18.8 cm/s (c) 0.333 s (d) 178 cm/s² (e) 0.500 s (f) 12.0 cm
- (a) sí (b) El valor k en la ecuación 15.13 es proporcional a la masa m , por lo que la masa se elimina en la ecuación, quedando sólo en la ecuación, la extensión del resorte y la aceleración debida a la gravedad: $T = 0.859$ s.
- 2.60 cm o -2.60 cm
- (a) $\frac{8}{9}E$ (b) $\frac{1}{9}E$ (c) $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}A$ (d) No; la energía potencial máxima es igual a la energía total del sistema. Debido a que la energía total debe permanecer constante, la energía cinética nunca puede ser mayor que la energía potencial máxima.
- (a) 4.58 N (b) 0.125 J (c) 18.3 m/s² (d) 1.00 m/s (e) menor (f) El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie (g) 0.934
- (a) 1.50 s (b) 0.559 m
- 0.944 kg·m²
- (a) 0.820 m/s (b) 2.57 rad/s² (c) 0.641 N (d) $v_{\text{máx}} = 0.817$ m/s, $\alpha_{\text{máx}} = 2.54$ rad/s², $F_{\text{máx}} = 0.634$ N (e) (e) Las respuestas están cerca, pero no son exactamente iguales. Las respuestas calculadas a partir de su conservación de la energía y de la segunda ley de Newton son más precisas.
- (a) 5.00×10^{-7} kg·m² (b) 3.16×10^{-4} N·m/rad
- (a) 3.16 s⁻¹ (b) 6.28 s⁻¹ (c) 5.09 cm
- (a) 0.349 kg·m² (b) demasiado bajo
- (a) 2.09 s (b) 0.477 Hz (c) 36.0 cm/s (d) $E = 0.064$ 8m, donde E está en joules y m está en kilogramos (e) $k = 9.00m$, donde k está en newtons/metro y m está en kilogramos (f) Período, frecuencia y rapidez máxima son todos independientes de la masa en esta situación. La energía y la constante de fuerza son directamente proporcionales a la masa.
- (a) 2.00 cm (b) 4.00 s (c) $\frac{\pi}{2}$ rad/s (d) π cm/s² (e) 4.93 cm/s² (f) $x = 2.00 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ donde x está en centímetros y t está en segundos

35. $\frac{1}{2\pi L} \sqrt{gL + \frac{kh^2}{M}}$
37. (a) 1.26 m (b) 1.58 (c) La energía disminuye en 120 J. (d) La energía mecánica se transforma en energía interna en la colisión perfectamente inelástica.
41. (b) $T = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{\pi M}{\rho g}}$
43. 13.0 s
47. (a) $x = 2 \cos\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$ (b) ± 1.73 m (c) 0.105 s = 105 ms (d) 0.098 0 m
49. (a) $y_f = -0.110$ m (b) mayor
51. (a) $\frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{L_i + \frac{1}{2\rho a^2} \left(\frac{dM}{dt}\right)t}$ (b) $2\pi \sqrt{\frac{L_i}{g}}$

49. (a) $v = \sqrt{\frac{T}{\rho(1.00 \times 10^{-5} x + 1.00 \times 10^{-6})}}$, donde v está en metros por segundo, T está en newtons, ρ está en kilogramos por metro cúbico y x está en metros (b) $v(0) = 94.3$ m/s, $v(10.0 \text{ m}) = 9.38$ m/s
51. (a) $\frac{\mu\omega^3}{2k} A_0^2 e^{-2bx}$ (b) $\frac{\mu\omega^3}{2k} A_0^2$ (c) e^{-2bx}
53. No es razonable, lo que implica un nivel de sonido de 123 dB. Casi toda la disminución de la energía mecánica se convierte en energía interna en el pestillo.
55. 1.34×10^4 N
57. (a) $\mu(x) = \frac{(\mu_L - \mu_0)x}{L} + \mu_0$
 (b) $\Delta t = \frac{2L}{3\sqrt{T}(\mu_L - \mu_0)} (\mu_L^{3/2} - \mu_0^{3/2})$

Capítulo 16

Respuestas a los exámenes rápidos

- (i) (b) (ii) (a)
- (i) (c) (ii) (b) (iii) (d)
- (c)
- (f) y (h)
- (d)
- (c)
- (b)
- (b)
- (e)
- (e)
- (b)

Respuestas a problemas con numeración impar

- 184 km
- (a) $L = (380 \text{ m/s})\Delta t$ (b) 48.2 m (c) 48 cm
- 2.40 m/s
- ± 6.67 cm
- (a) $y = 0.080 0 \text{ sen}(2.5\pi x + 6\pi t)$
 (b) $y = 0.080 0 \text{ sen}(2.5\pi x + 6\pi t - 0.25\pi)$
- 13.5 N
- (a) 0.051 0 kg/m (b) 19.6 m/s
- (a) 1 (b) 1 (c) 1 (d) aumentando en un factor de 4
- (a) $y = 0.075 \text{ sen}(4.19x - 314t)$, donde x y y están en metros y t es en segundos (b) 625 W
- $\sqrt{2}P_0$
- (a) 2.00 μm (b) 40.0 cm (c) 54.6 m/s (d) $-0.433 \mu\text{m}$
 (e) 1.72 mm/s
- 5.81 m
- 335 m/s
- (a) 27.2 s (b) 25.7 s; el intervalo de tiempo en el inciso (a) es el más largo.
- (a) 3.75 W/m² (b) 0.600 W/m²
- (a) 0.691 m (b) 691 km
- 4.28 m
- 2.82×10^8 m/s
- (a) 441 Hz (b) 439 Hz (c) 54.0 dB
- 14.7 kg
- 0.883 cm
- (a) 375 m/s² (b) 0.045 0 N (c) La fuerza máxima transversal es muy pequeña en comparación con la tensión de 46.9 N en la cuerda, más de mil veces más pequeña.

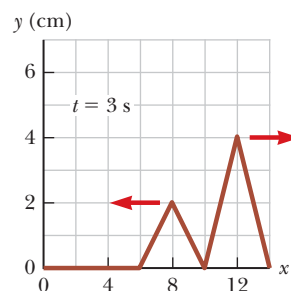
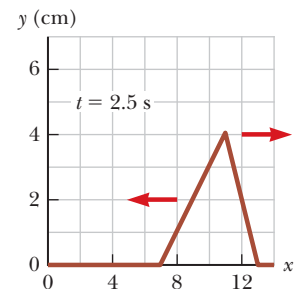
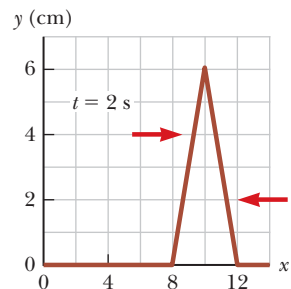
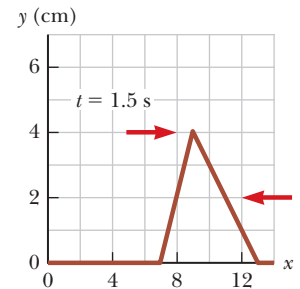
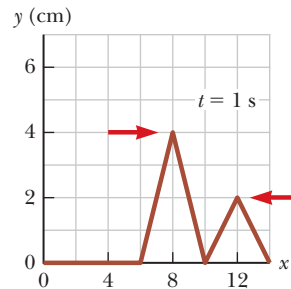
Capítulo 17

Respuestas a los exámenes rápidos

- (c)
- (i) (a) (ii) (d)
- (d)
- (b)
- (c)

Respuestas a problemas con numeración impar

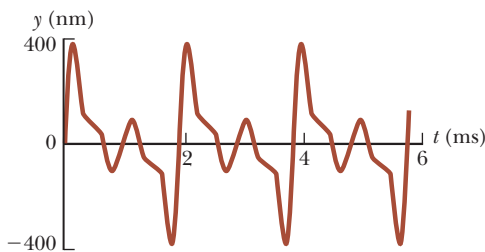
- (a) 21.65 cm (b) 26.02 cm (c) 1.15 cm
- 3.



5. (a) y_1 : positiva, dirección x ; y_2 : negativa, dirección x (b) 0.750 s (c) 1.00 m
 7. (a) 2.72 rad = 156° (b) 0.058 4 cm
 9. (a) La separación de los nodos adyacentes es $\Delta x = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$.

Los nodos siguen separados por media longitud de onda

- (b) Sí. Los nodos se encuentran en $kx + \frac{\phi}{2} = n\pi$, por lo que $x = \frac{n\pi}{k} - \frac{\phi}{2k}$, lo que significa que cada nodo se desplaza $\frac{\phi}{2k}$ a la izquierda por la diferencia de fase entre las ondas viajeras en comparación con el caso en el que $\phi = 0$.
11. (a) 0.600 m (b) 30.0 Hz
 13. (a) 78.6 Hz (b) 157 Hz, 236 Hz, 314 Hz
 15. 1.86 g
 17. (a) 3.8 cm (b) 3.85%
 19. La frecuencia de resonancia de la bahía calculada a partir de los datos proporcionados es de 12 h, 24 min. La frecuencia natural del agua chapoteando en la bahía concuerda precisamente con la de la excitación lunar, por lo que identificamos las mareas extra altas como amplificadas por resonancia.
 21. (a) 0.656 m (b) 1.64 m
 23. (a) 349 m/s (b) 1.14 m
 25. $n(0.252 \text{ m})$ con $n = 1, 2, 3, \dots$
 27. 158 s
 29. -10.0°C
 31. (a) 1.99 batimientos/s (b) 3.38 m/s
 33. Los coeficientes más allá de $n = 1$ son aproximados: $A_1 = 100$, $A_2 = 156$, $A_3 = 62$, $A_4 = 104$, $A_5 = 52$, $A_6 = 29$, $A_7 = 25$.



35. 800 m
 37. (a) más largo (b) 2.43
 39. (a) $r = 0.078 2 \left(1 - \frac{4}{n^2}\right)^{1/3}$ (b) 3 (c) 0.078 2 m
 (d) La esfera flota en el agua.
 41. (a) 3.99 batimientos/s (b) 3.99 batimientos/s
 43. (a) La frecuencia debe reducirse a la mitad. (b) $\left[\frac{n}{n+1}\right]^2 T$
 (c) $\frac{T'}{T} = \frac{9}{16}$
 45. 283 Hz
 47. (a) 78.9 N (b) 211 Hz
 49. (b) $A = 11.2 \text{ m}$, $\phi = 1.11 \text{ rad} = 63.4^\circ$

Capítulo 18

Respuestas a los exámenes rápidos

1. (c)
2. (c)
3. (c)
4. (c)
5. (a)
6. (b)

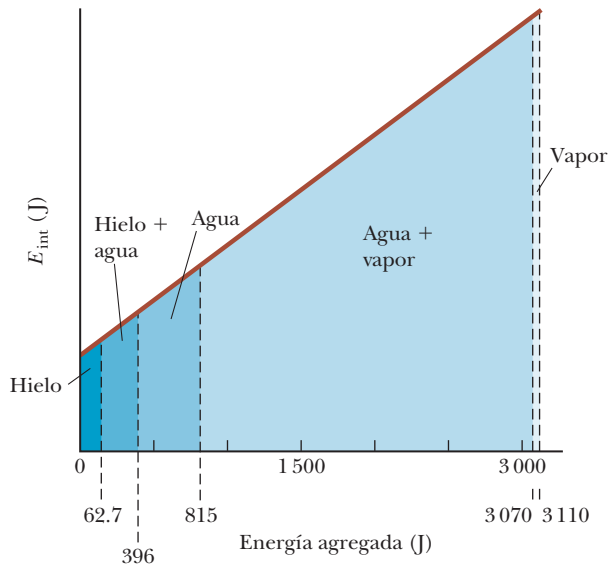
Respuestas a problemas con numeración impar

1. (a) -738°N (b) -105°N (c) 270°N (d) 153°N
3. (a) -109°F , 195 K (b) 98.6°F , 310 K
5. (a) 56.7°C y -62.1°C (b) 330 K y 211 K
7. 3.27 cm
9. 1.54 km. La tubería se puede apoyar en los rodillos. Bucles en forma de Ω se pueden construir entre tramos rectos. Se doblan conforme cambia la longitud del acero.
11. 2.74 m
13. (a) 437°C (b) $2.1 \times 10^3^\circ\text{C}$ (c) No, el aluminio se funde a 660°C (tabla 19.2). También, aunque este no está en la tabla 19.2, una investigación en internet muestra que el latón (una aleación de cobre y zinc) se funde a aproximadamente 900°C .
15. (a) 99.8 mL (b) Está debajo de la marca. La acetona ha reducido en volumen, y el frasco ha aumentado en volumen.
17. (a) 396 N (b) -101°C (c) La longitud original se divide de las ecuaciones en el cálculo, por lo que las respuestas no cambiarían.
19. 1.50×10^{29} moléculas
21. (a) 41.6 mol (b) 1.20 kg (c) Este valor está de acuerdo con la densidad tabulada.
23. 2.42×10^{11} moléculas
25. 473 K
27. $\sim 10^2 \text{ kg}$
31. (a) $\theta = 2 \text{ sen}^{-1}\left(\frac{1 + \alpha_{\text{Al}}T_{\text{C}}}{2}\right)$ (b) sí (c) sí
 (d) $\theta = 2 \text{ sen}^{-1}\left(\frac{1 + \alpha_{\text{Al}}T_{\text{C}}}{2(1 + \alpha_{\text{invar}}T_{\text{C}})}\right)$ (e) 61.0° (f) 59.6°
33. (a) 94.97 cm (b) 95.03 cm
35. (b) A medida que aumenta la temperatura, la densidad disminuye (suponiendo β es positiva). (c) $5 \times 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$ (d) $-2.5 \times 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$.
37. (b) Se supone que $\alpha \Delta T$ es mucho menor que 1.
39. (a) Si, mientras los coeficientes de dilatación permanezcan constantes. (b) Las longitudes L_{Cu} y L_{St} a 0°C deben cumplir $17L_{\text{Cu}} = 11L_{\text{St}}$. Entonces la barra de acero debe ser más larga. Con $L_{\text{St}} = L_{\text{Cu}} = 5.00 \text{ cm}$, la única posibilidad es $L_{\text{St}} = 14.2 \text{ cm}$ y $L_{\text{Cu}} = 9.17 \text{ cm}$.
41. (a) 0.34% (b) 0.48% (c) Todos los momentos de inercia tienen la misma forma matemática: el producto de una constante, la masa y una longitud al cuadrado.
45. 4.54 m

Capítulo 19

Respuestas a los exámenes rápidos

1. (i) Hierro, vidrio, agua (ii) Agua, vidrio, hierro
2. La siguiente figura muestra una representación gráfica de la energía interna del sistema en función de la energía añadida. Observe que esta grafica presenta un aspecto diferente de la figura 19.3 en que no tiene las partes planas durante los cambios de fase. Independientemente de cómo está variando la temperatura en la figura 19.3, la energía interna del sistema simplemente aumenta de forma lineal con la entrada de energía; la recta en la siguiente gráfica tiene una pendiente de 1.



3. Situación	Sistema	Q	W	ΔE_{int}
(a) Inflar rápidamente un neumático de bicicleta	Aire en la bomba	0	+	+
(b) Recipiente con agua a temperatura ambiente puesto sobre una estufa caliente	Agua en el recipiente	+	0	+
(c) Aire que escapa rápidamente de un globo	Aire originalmente en el globo	0	-	-

4. La trayectoria A es isovolumétrica, la trayectoria B es adiabática, la trayectoria C es isotérmica y la trayectoria D es isobárica.
 5. (b)

Respuestas a problemas con numeración impar

- (a) $2.26 \times 10^6 \text{ J}$ (b) 2.80×10^4 escalones (c) 6.99×10^3 escalones
- $23.6 \text{ }^\circ\text{C}$
- 0.918 kg
- (a) $1822 \text{ J/kg}\cdot^\circ\text{C}$ (b) No podemos hacer una identificación definitiva. Tal vez sea berilio. (c) El material puede ser una aleación desconocida o un material que no figura en la tabla.
- (a) $25.8 \text{ }^\circ\text{C}$ (b) El resultado simbólico del inciso (a) muestra que no hay dependencia de la masa. Tanto el cambio en la energía potencial gravitacional y el cambio en la energía interna del sistema depende de la masa, por lo que la masa se elimina.
- 2.27 km
- (a) 0°C (b) 114 g
- (a) $-4P_i V_i$ (b) Según $T = (P_i/nRV_i)V^2$, es proporcional al cuadrado del volumen.
- 720 J
- (a) 0.041 m^3 (b) $+5.48 \text{ kJ}$ (c) -5.48 kJ
- (a) -0.048 kJ (b) 16.2 kJ (c) 16.2 kJ
- 74.8 kJ
- (a) 1.19 (b) 1.19
- (a) $1.85 \text{ ft}^2 \text{ }^\circ\text{F h/Btu}$ (b) 1.78
- (a) $-6.08 \times 10^5 \text{ J}$ (b) $4.56 \times 10^5 \text{ J}$
- 888 K
- $1.90 \times 10^3 \text{ J/kg}\cdot^\circ\text{C}$
- (a) $9.31 \times 10^{10} \text{ J}$ (b) $-8.47 \times 10^{12} \text{ J}$ (c) $8.38 \times 10^{12} \text{ J}$

- (a) Primero, la energía debe ser retirada del agua líquida para enfriarlo a 0°C . A continuación, debe eliminarse la energía del agua a 0°C para congelarla, que corresponde a un líquido-transición de fase a-sólida. Finalmente, una vez que toda el agua se ha congelado, la energía adicional se debe quitar el hielo para enfriarlo de 0° a -8.00°C (b) 32.5 kJ
- (a) 2000 W (b) 4.46°C
- (a) $3.16 \times 10^{22} \text{ W}$ (b) $3.17 \times 10^{22} \text{ W}$ (c) Este es 0.408% más largo. (d) $5.78 \times 10^3 \text{ K}$
- 1.44 kg
- (b) 9.32 kW
- $3.66 \times 10^4 \text{ s} = 10.2 \text{ h}$

Capítulo 20

Respuestas a los exámenes rápidos

- (i) (b) (ii) (a)
- (i) (a) (ii) (c)
- (d)
- (c)

Respuestas a problemas con numeración impar

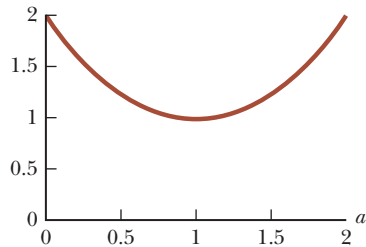
- 3.32 mol
- $5.05 \times 10^{-21} \text{ J}$
- (a) 2.28 kJ (b) $6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$
- 17.4 kPa
- 74.8 J
- (a) $W = 0$ (b) $\Delta E_{\text{int}} = 209 \text{ J}$ (c) 317 K
- entre $10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}$ y $10^{-2} \text{ }^\circ\text{C}$
- (a) 1.08 (b) no
- $5.74 \times 10^6 \text{ Pa}$
- 227 K
- (a) $2.45 \times 10^{-4} \text{ m}^3$ (b) $9.97 \times 10^{-3} \text{ mol}$ (c) $9.01 \times 10^5 \text{ Pa}$ (d) $5.15 \times 10^{-5} \text{ m}^3$ (e) 560 K (f) 53.9 J (g) $6.79 \times 10^{-6} \text{ m}^3$ (h) 53.3 g (i) 2.24 K
- (a) $2.37 \times 10^4 \text{ K}$ (b) $1.06 \times 10^3 \text{ K}$
- (b) 0.278
- (a) 3.90 km/s (b) 4.18 km/s
- (a) 7.89×10^{26} moléculas (b) 37.9 kg (c) $6.07 \times 10^{-21} \text{ J}$ (d) 503 m/s (e) 0 (f) Cuando el horno funciona, el aire se expande y parte de ella sale de la habitación. La masa más pequeña de aire más caliente a la izquierda en la habitación contiene la misma energía interna como el aire fresco inicialmente en la habitación.
- (a) 367 K (b) la velocidad rms del nitrógeno sería mayor porque la masa molar del nitrógeno es menor que la de oxígeno. (c) 572 m/s
- El dióxido de azufre es el gas con mayor peso molecular de los listados. Si las constantes de resorte efectivas para los diversos enlaces químicos son comparables, el SO_2 se puede entonces esperar que tenga frecuencias bajas de vibración atómica. La vibración puede ser excitada en una temperatura más baja que para otros gases. Algunas vibraciones pueden estar ocurriendo a 300 K . Con más grados de libertad para el movimiento molecular, el material tiene un calor específico más alto.
- (a) 300 K (b) 1.00 atm
- (a) $7.27 \times 10^{-20} \text{ J}$ (b) 2.20 km/s (c) $3.51 \times 10^3 \text{ K}$ (d) Las partículas que se evaporan emergen con mucho menos energía cinética, como se realiza trabajo negativo sobre éstas por fuerzas restrictivas a medida que salen del líquido. Gran parte de la energía cinética inicial se utiliza en la superación

del calor de vaporización latente. También hay muy pocos de estos escapando en cualquier momento en el tiempo.

39. (a) 1.09×10^{-3} (b) 2.69×10^{-2} (c) 0.529 (d) 1.00
(e) 0.199 (f) 1.01×10^{-41} (g) 1.25×10^{-1082}

43. (a) 0.510 m/s (b) 20 ms

45. (c) $2 - 2a + a^2$



La gráfica anterior muestra el comportamiento del factor entre paréntesis en el inciso (b) entre los posibles límites de $a = 0$ y $a = 2$. Excepto en el valor de $a = 1$, el factor es siempre mayor que 1. Por tanto, la ecuación muestra que, en general (a excepción del caso especial de $a = 1$), $v_{\text{rms}} > v_{\text{prom}}$.
(d) $a = 1$

Capítulo 21

Respuestas a los exámenes rápidos

- (i) (c) (ii) (b)
- (d)
- C, B, A
- (a) uno (b) seis
- (a)
- falso (el proceso adiabático debe ser *reversible* para que el cambio de entropía sea igual a cero).

Respuestas a problemas con numeración impar

- (a) 10.7 kJ (b) 0.533 s
- 55.4%
- (a) 4.51×10^6 J (b) 2.84×10^7 J (c) 68.1 kg
- (a) 67.2% (b) 58.8 kW
- 1.86
- (a) 564 °C (b) No; un motor real siempre tendrá una eficiencia *menor* que la eficiencia de Carnot porque funciona de una manera irreversible.
- (a) 5.12% (b) 5.27×10^{12} J/h (c) 5.68×10^4 (d) 4.50×10^6 m² (e) sí (f) numéricamente, Sí; factible, probablemente no
- (a) $\frac{Q_c}{\Delta t} = 1.40 \left(\frac{0.5T_h + 383}{T_h - 383} \right)$, donde $Q_c/\Delta t$ está en megawatts y T_h está en kelvins (b) La potencia de escape disminuye a medida que la temperatura del fuego aumenta. (c) 1.87 MW (d) 3.84×10^3 K (e) No existe respuesta. La energía de escape no puede ser tan pequeña.
- 1.17
- (a)

Macroestado	Microestados	Número de maneras de sacar
Todos R	RRR	1
2 R, 1 G	GRR, RGR, RRG	3
1 R, 2 G	GGR, GRG, RGG	3
Todos G	GGG	1

(b)

Macroestado	Microestados	Número de maneras de sacar
Todos R	RRRR	1
4R, 1G	GRRRR, RGRRR, RRGRR, RRRGR, RRRRG	5
3R, 2G	GGRRR, GRGRR, GRRGR, GRRRG, RGGRR, RGRGR, RRRRG, RRGRG, RRGRG, RRRGG	10
2R, 3G	RRGGG, RGRGG, RGGRG, RGGRG, GRRGG, GRGRG, GRGGR, GGRGR, GGGRG	10
1R, 4G	RGGGG, GRGGG, GGRGG, GGGRG, GGGGR	5
Todos G	GGGGG	1

- 1.02 kJ/K
- 195 J/K
- (a) -3.45 J/K (b) +8.06 J/K (c) +4.62 J/K
- 1 W/K
- (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{2}{3}$
- (a) $3nRT_i$ (b) $3nRT_i \ln 2$ (c) $-3nRT_i$ (d) $-nRT_i \ln 2$ (e) $3nRT_i(1 + \ln 2)$ (f) $2nRT_i \ln 2$ (g) 0.273
- (a) 39.4 J (b) 65.4 rad/s = 625 rev/min (c) 293 rad/s = 2.79×10^3 rev/min
- (a) 4.10×10^3 J (b) 1.42×10^4 J (c) 1.01×10^4 J (d) 28.8% (e) Ya que $e_c = 80.0\%$, la eficiencia del ciclo es mucho menor que la de un motor de Carnot operando entre las mismas temperaturas extremas.
- (a) 0.476 J/K (b) 417 J
- (a) 5.97 K (b) más alto (c) 22.6 K
- (a) 13.4 J/K (b) 310 K (c) 13.3 J/K (d) menor por menos de 1%
- (b) sí (c) No, la segunda ley se refiere a un motor operando en un ciclo, mientras que este problema implica nada más un solo proceso

47. (a)

	T (K)	P (kPa)	V (cm ³)
A	293	100	500
B	673	1.84×10^3	62.5
C	1 023	2.79×10^3	62.5
D	445	152	500

(b)

	Q	W _{eng}	ΔE _{int}
A→B	0	-162	162
B→C	149	0	149
C→D	0	246	-246
D→A	-65.0	0	-65.0
ABCD	84.3	84.3	0

- (c) 149 J (d) 65.0 J (e) 84.3 J (f) 0.565
(g) 1.42×10^3 rev/min



Índice

Nota del localizador: **negrita** indica una definición; la letra cursiva indica una figura; *t* indica una tabla; *n* indica una nota al pie.

Σ (sumatoria, símbolo), 44

Absoluta, escalas de temperatura, 485, 485-487, **486**, 486, 487

Absoluta, incertidumbre, **A-20**

Absoluta, presión, **365**

Absorbedor ideal, **523**

Absortividad de radiación, **523**

Acción, fuerza de, **103**

Aceleración (\vec{a})

angular ($\vec{\omega}$), 250-252

angular instantánea, **251**

angular media, **251**

caída libre, 41-44, 43, 335-336, 335*t*

centrípeta, **82-84**, **128**, 128

constante, con movimiento en dos dimensiones, 71-74

cuerpo rígido bajo aceleración angular constante, **252-254**, 253

de dos objetos conectados con fricción, 118, 118-119

del oscilador armónico simple, 390*n*, 391, 391-392

descripción, **32-36**

dimensiones y unidades de, 10*t*

en la primera ley de movimiento de Newton, **98**

no constante, 388

partícula bajo aceleración constante, **37-41**, 38

radial, 84, 84-85

relación tangencial y angular, 255

relativa, 85-88

tangencial, 84, 84-85

vectores para, 70

Aceleración constante, modelo

con movimiento en dos dimensiones, 71-74

partícula bajo, 37-41

Aceleración tangencial, 84, 84-85, 255

Aceleración-tiempo, gráfica, 35

Acelerador, haz de partículas

en. *Véase también* Física de partículas y cosmología

Acondicionadores de aire, 559-560

Adición

de vectores, **55-56**, 61, 70

ley conmutativa de, **56**, 56

Agua

Ahlborn, B., 565*n*

Aislamiento de casa, 521-522, 521*t*, 522

Alcance horizontal, de proyectiles, 75, 75-77, 76

Alcance, ecuación, 76

Álgebra, A-5-A-10

Alturas máximas de proyectiles, 75-77

Amortiguadas, oscilaciones, 404, 404-405, 405

Amplitud (A) de ondas, 420, 423, 457

Amplitud de movimiento, **389**, 389, 406, 406

Análisis de modelos

definición de, 7

efectos frontera, 461, 461-465, 463, 464

etapas de análisis en, 31

interferencia en ondas, **452-456**, 453, 454, 455

objeto rígido bajo aceleración angular constante, **252-254**, 253

objeto rígido bajo momento de torsión neto, 259, 259-263, 261, 262, 263

objeto rígido en equilibrio, 311, **311-312**, 312

onda viajera, 419, **419-423**, 420, 422, 423

partícula bajo aceleración constante, 37-41

partícula bajo fuerza neta, 106-114

partícula bajo velocidad constante, **27-30**

partícula en equilibrio, 105-107

partícula en movimiento armónico simple, **388-394**, 389, 391, 392

partícula en movimiento circular uniforme, 83

partícula en un campo (gravitacional), 336-339, 338

sistema aislado (cantidad de movimiento), **213-215**, 214

sistema no aislado (cantidad de movimiento angular), **288-293**, 290, 292

sistema aislado (cantidad de movimiento angular), **295-300**, 296, 298, 299

sistema aislado (energía), 185-191

caída libre, 187, 187-188, 188

descripción, 185-187, 186

poleas, 188-190, 189, 190

rifle de juguete cargado por resorte, 190, 190-191

sistema no aislado (cantidad de movimiento), 215-219, **217**, 217, 218, 219

sistema no aislado (energía), 182, 182-185, 184

solución de problemas, 30-32

Angular,

aceleración tangencial y, 255

descripción, 250-252

instantánea, **251**

media, **251**

aceleración (α), **251**

rapidez (ω_{med}), **251**

número de onda (k), **421**

objeto rígido bajo constante, 252-254, 253

posición (θ), 250, 250-252

rapidez (ω)

constante, 399-400

instantánea, **251**

media, **251**

rapidez de traslación y, **82-83**

velocidad ($\vec{\omega}$), 250-252

Ángulo pequeño, aproximación de, **401**

Antiderivadas, en cálculo, 44

Antilogaritmos, **A-9**

Antinodos, **457-458**

Año tropical, **18**

Año-luz, 4

Área (A)

de figuras geométricas, **A-10**, A-10*t*

dimensiones y unidades de, 10*t*

integración para determinar, 45

Arfeuille, Walter, 176

Aristarcos de Samos, 339*n*

Aristóteles, 41, 208

Aritmética, para vectores, 55-58

Armónicos, **462**, 473

Arquímedes, principio de, 365, **365-368**

Arrastre, coeficiente de, 141

Arrastre, fuerza de, 377

Ashpole, Ian, 380

Asociativa, ley de adición, **56**, 56



- Atmósfera, de la Tierra, 523
 Atmósferas, ley de, 554
 Atwood, máquina de, 112, 112-113, 271-272, 272
 Audibles, ondas sonoras, 429
 Audición, límites de, 435
 Automóviles, impulsados por celdas de combustible, 1
 Avogadro, número de (N_A), 492-493
 Bahía de Fundy (Nueva Escocia, Canadá), 477
 Balboa, Parque estatal (San Diego), 468
 Base de logaritmos, A-9
 Batimientos: interferencia en el tiempo, 469-471, 470, 471
 Bell, Alexander Graham, 436n
 Bernard, W. H., 191n
 Bernoulli, Daniel, 371, 371
 Bernoulli, principio de, 371-375, 373, 377
Big Ben (Londres, RU), 281, 281, 283, 304
 Bolsas de aire, en pruebas de colisiones, 218, 218
 Boltzmann, constante de (k_B), 493
 Boltzmann, ley de distribución, 547
 Boltzmann, Ludwig, 548
 Bombas térmicas y refrigeradores, 559, 559-562, 560
 Brahe, Tycho, 339
 Caballo de fuerza, unidades, 201
 Caída libre, aceleración de (g), 42, 335-336, 335t
 Cálculo
 diferencial, A-13-A-16
 ecuaciones cinemáticas de, 44-45
 integral, A-16-A-19
 velocidad instantánea derivada de, 25
 Cálculos de orden de magnitud, 12-13
 Calentamiento global, 308
 Calor (Q)
 descripción, 183
 energía interna y, 502-505, 504
 específico, 504-508, 505t, 506, 506
 latente, 509-512, 510, 510t
 Calor específico (c)
 calorimetría y, 504-508, 505, 506t, 507
 molar, para gas ideal, 539, 539-542, 540, 541t
 Calor específico molar de gas ideal, 539, 539-542, 540, 541t, 544
 Calor latente, 509-512, 510, 510t
 de condensación, 509n
 de fusión (L_f), 509, 510t
 de solidificación, 509n
 de vaporización (L_v), 509, 510t
 Calor, capacidad (C), 505
 Calorías, como unidad de calor, 503
 Calorimetría, 504-508, 505t, 507, 507
 Cambio de fase, 509
 Campo de fuerzas, 96, 96, 183n, 338
 Campo Prospect Creek, Alaska, 496
 Campos magnéticos (\vec{B}) Véase también Ondas electromagnéticas
 Canal de onda, 417
 Candela (cd, unidad de densidad luminosa), 3
 Cantidad de movimiento (\vec{p}). Véase Cantidad de movimiento angular; Cantidad de movimiento lineal
 Cantidad de movimiento angular
 \vec{L} , 285-309
 de objeto rígido girando, 293, 293-295, 294
 en movimiento rotacional, 212n
 giroscopios y trompos, movimiento de, 301, 301
 producto vectorial y momento de torsión, 286, 286-288
 semblanza en, 285-286
 sistema aislado (cantidad de movimiento angular), análisis de modelo de, 295-300, 296, 298, 299
 sistema no aislado (cantidad de movimiento angular), análisis de modelo de, 288-293, 290, 292
 Cantidades angulares y de traslación en movimiento rotacional, 254-257, 255, 256
 Cantidades físicas, unidades de, A-2-A-3
 Cantidades vectoriales, 22, 54, 252n
 Carnot, máquina de, 563, 563-567, 564, 565
 Carnot, Sadi, 563
 Carnot, teorema de, 563
 Cartesiano, sistema coordenado, 53, 53, 54, 71
 Categorización, en análisis de modelos, 31
 Cavendish, balanza de, 353
 Cavendish, Sir Henry, 333
 Celsius, escala de temperatura, 484-485, 485, 487
 Centrípeto, aceleración, 82-84, 128, 128
 Centro de Alerta de Tsunamis en el Pacífico, en Hawái, 444
 Centro de gravedad, 312-313, 313
 Centro de masa, 230-234, 231, 232, 233
 Cerenkov, efecto, 448
 Cero, aceleración, 36, 37
 Cesio-133 átomo, en tiempo estándar, 5
 Choque ondas, 442, 442-443, 443
 Ciclo de Carnot en máquina de Carnot,
 cambio de entropía en, 575-576
 descripción de, 563, 563-567, 564, 565
 Ciclo diésel de aire-estándar, 583, 583
 Cifras significativas, 13-15, 14, 26n
 Cinemáticas, ecuaciones, 39, 44-45
 Clásica, mecánica, 1
 Clausius, Rudolf, 560n
 Coeficiente de fricción cinética (μ_k), 115, 117, 117-118
 Coeficiente de fricción estática (μ_s), 114, 115, 116t
 Coeficiente de rendimiento (COP), para bombas térmicas, 560-561, 566
 Coeficiente promedio de expansión lineal (α), 488, 488-489, 489, 489t
 Coeficiente promedio de expansión volumétrica (β), 489, 489t
 Coeficientes, 26n
 Cohete, propulsión de, 239, 239-241
 Cohetes, explosión, 236-237
 Colisiones. Véase también Cantidad de movimiento lineal
 aliviador de estrés, 223, 223-224
 descripción, 219-220, 220
 disco y bastón, 299, 299-300, 300t
 dos cuerpos, con resorte, 226, 226-227
 elástica, 220-222
 en dos dimensiones, 227-230
 en una dimensión, 219-227
 inelástica, 220
 péndulo balístico, 224-225, 225
 perfectamente inelástica, 220
 Columnas de aire, ondas estacionarias en, 466-469, 467, 469
 Comet Halley, 341
 Componentes rectangulares de vectores, 58
 Componentes x y y de vectores, 58

- Compresión razón, para motores de gasolina, **569**
- Compton, Arthur Holly, 146
- Conceptualización, en análisis de modelos, 30-31
- Condensación, calor latente de, 509*n*
- Condición por movimiento de rodamiento puro, **271**, 271
- Conducción térmica
cambio de entropía en, 577-578
descripción, 519, 519-521, 520
- Conducción, térmica, 519, **519-521**, 520, 577-578
- Cónico, péndulo, 129, 129
- Conmutativa, ley, **56**, 56, 154*n*
- Conservación de cantidad de movimiento angular, 295*n*.
Véase también Cantidad de movimiento angular
- Conservación de la cantidad de movimiento, **217**. *Véase también* Cantidad de movimiento Lineal
- Conservación de la energía,
ecuación de, **184**. *Véase también* conservación de la energía,
- Constante de fase (ϕ), **389**, **392**, **421**
- Constante, rapidez angular, 399-400
- Constante, velocidad positiva, 36, 37
- Constructiva, interferencia, **452**, 453
- Contacto, fuerza, **96**, 96, 338
- Continuidad para fluidos, ecuación de, **370**
- Convección forzada, **522**
- Convección, como mecanismo de transferencia de energía, **522-523**
- Conversión de unidades, 12
- Conversión, factores de, A-1-A-2
- COP (coeficiente de rendimiento), para bombas térmicas, **560-561**, 566
- Copérnico, Nicolás, 41, 339
- Coriolis, fuerza de, 136
- Cresta, de ondas, **417**
- Críticos, sistemas, **405**
- Cruz, producto, **286**, 286
- Cuadráticas, ecuaciones, A-7
- Cuántica, mecánica, 1
- Cuantización del movimiento oscilatorio, 461
- Cuerdas
ondas estacionarias en, 457, 457-459, 458
ondas sinusoidales en, 422-423, 426-428
- potencia suministrada a una, vibrante, 427-428
- rapidez de ondas en, 423-426, 424, 425
- Cuerpo libre, diagramas de, **104**, 107, 109, 112, 113
- Cuerpo negro radiación, **523**
- Curzon, F. L., 565*n*
- Curzon-Ahlborn eficiencia de máquinas de, 565*n*
- Death Valley (CA), 496
- Débil, fuerza, 96
- Decibeles (dB), **436-437**
- Dedalo e Icaro, mito de, 529
- Defensas, en pruebas de choques, 219
- Deformables, sistemas, 152, 237-239, 238
- Del inverso al cuadrado, ley, 333
- Delta (Δ) símbolo, **22**
- Densidad (ρ)
de sustancias comunes, 361*t*
definición de, **6**
- Densidad de número, **547**
- Derivada
en cálculo, **A-14**
segunda, aceleración como, 34
velocidad instantánea como, 25
- Derivadas, cantidades, **6**, 10*t*
- Desaceleración, **34**
- Desorden, entropía y, 571
- Desplazamiento (Δx). *Véase también* Superposición y ondas estacionarias
como cambio en la posición, **21-22**, 22, 25*n*
como cantidad vectorial, 54, 54-55
en la definición de trabajo, 152, 152-153, 153, 156-157, 157
función energía potencial (U) y, 172*n*
notación de vector unitario para, 61
tendiendo a cero, 25*n*
- Desplazamiento amplitud de ondas, **430**
- Desplazamiento antinodo, **466**
- Desplazamiento nodo, **466**
- Desplazamiento, vector, **69**, 69
- Destrucción, interferencia, **452**, 453, 455
- Dewar, botella de, **525**, 525
- Día solar medio, como tiempo estándar, 5
- Diapasón, frecuencia de, 469
- Diesel y gasolina, motores, 567-569, 568
- Diez, potencias de, 6*t*
- Diferencial exacta, en cálculo, A-18
- Diferencial, cálculo, A-13-A-16
- Dimensional, análisis, **10-11**
- Dimensiones, A-2-A-3
- Disney World, 93
- Disneylandia, 127, 127
- Dispersión, 416*n*
- Dispersión de energía, cambio de entropía y, 574
- Distancia, **22**, 22
- Doppler efecto, 438, **438-443**, 439, 440, 442, 443
- Doppler, Christian Johann, 438*n*
- Eaton, Ashton, 77
- Ecuaciones
cinemáticas, **39**, 44-45
conservación de energía, 184
continuidad para fluidos, 370
de Bernoulli, 371-375
de estado para gas ideal, **492-493**
de Hagen-Poiseuille, 377
lineal de onda, 428, **428-429**
movimiento de traslación, 253*t*, 270*t*
movimiento rotacional, 270*t*
rango, 76
transformación galileana, **86**
- EER (razón energía eficiencia) para acondicionadores de aire, 584
- Efectos de frontera, 459, 459-460, 460, 461, 463, 464
- Eje de rotación. *Véase* movimiento rotacional
- Eje fijo. *Véase* Movimiento rotacional
- Eje mayor, de la elipse, **340**
- Eje menor, de elipse, 340
- Ejes paralelos, teorema, **265-267**, 266, 271, 403
- Ejes principales, 294*n*
- Elástica, energía potencial, 167
- Elásticas, colisiones, **220-222**, 221
- Elásticas, propiedades de sólidos, 319-323
ejemplo concreto pretensado, 322, 322-323
módulo de corte (S), **320**, 320*t*, **321**
módulo de Young (Y), **320-321**, 320*t*
módulo volumétrico (B), **320**, 320*t*, 321-322
- Elástico, límite, **321**
- Elástico, módulo, **320**
- Elección, entropía y, 570-571
- Electromagnética, fuerza, **96**



- Electromagnética, radiación (T_{ER}), **183**, 183*n*. Véase también Mecánica cuántica
- Electromagnéticas, ondas, **1**
- Elevador hidráulico, ley de Pascal y, **362**, 362-363
- Elipses, **340**, **A-11**
- Emisividad de una superficie, **523**
- Empuje, **377**
- Energía (E), 150-180. Véase también Mecanismos de transferencia de energía; Energía cinética; Energía potencial; Termodinámica, primera ley de fuerzas conservativas y no conservativas, 169-171, **170**, **170**, **171**, **171**
- cinética, **161**, **161**-164, 162*t*, 163, 164
- de oscilador armónico simple, 394-397, **395**, **396**
- diagramas de energía y equilibrio del sistema, **173**, **173**-174, **174**
- en movimiento planetario y satelital, **347**, 347-351, **348**, **350**, **350t**, **351**
- en movimiento rotacional, **269**, 269-272, 270*t*, **271**, **272**
- equipartición de, **538**, 542-545, **543**, **544**, **545**
- factores de conversión para, A-2
- fuerzas conservativas y potencial, 171-173
- interna, **170**, **502**
- modelo de sistema de, **151**
- ondas sinusoidales en cuerdas, transferencia de, **426**, 426-428
- por trabajo hecho
- por fuerza constante, 151-154, **152**, **153**, **154**
- por fuerza variable, 156-161, **157**, **158**, **159**, **160**
- potencial, **165**, **165**-169, **168**, **169**
- semblanza sobre, 150-151
- Energía cinética (K). Véase también Energía;
- Energía, conservación de la;
- Trabajo-energía cinética teorema de la tierra, **215**
- del oscilador armónico simple, **394**, **395**, **396**
- rotacional, **267**, **267**-268, **268**
- Energía eficiencia, razón (EER) para acondicionadores de aire, **584**
- Energía interna (E_{int})
- calor y, **502**-505, **504**
- cambio en, **193**
- de gas ideal, **540**
- en la primera ley de termodinámica, 514-515
- símbolo para, 514*n*
- y temperatura, **538**
- Energía potencial (U). Véase también Potencial eléctrico; Energía; conservación de la Energía;
- de gravitación, **345**, 345-346, **346**
- de oscilador armónico simple, **395**, **396**
- descripción, **165**, 165-169, **168**, **169**
- fuerzas conservativas y, 171-173
- naturaleza asimétrica de la curva de energía potencial, **488n**
- Energía potencial, función (U), 171-172
- Energía total del oscilador armónico simple, **395**, **396**
- Energía, conservación de la, 181-209
- sistema aislado (energía), análisis de modelo de, 185-191
- caída libre, **187**, 187-188, **188**
- cambios en la energía mecánica para fuerzas no conservativas, 196-200, **197**, **198**, **199**, **200**
- descripción, 185-187, **186**
- fricción cinética, 191-196, **192**, **194**
- poleas, **188**, 188-190, **189**, **190**
- potencia, 200-202, **201**, **202**
- principio de, **163**, **170**
- rifle de juguete cargado por resorte, 190-191, **191**
- semblanza sobre, 181-182
- sistema no aislado (energía), análisis de modelo de, **182**, 182-185, **184**
- Energía, cuantización, **544**-545, **545**
- Enlace, energía de, **502**
- Entorno que rodea al sistema, **151**
- Entropía (S)
- bombas térmicas y refrigeradores, **559**, **559**-562, **560**
- descripción, **570**, **570**-572, **571**, **571**
- en sistemas termodinámicos, 572-578, **575**, **576**
- motores de gasolina y diésel, 567-569, **568**
- reversibles e irreversibles, procesos, **562**, **562**-563
- segunda ley de la termodinámica y, **557**, **557**-559, **558**, **558**, 578-580, **579**
- semblanza sobre, 556-557
- Enunciado de Clausius de la segunda ley de la termodinámica, **560**, **579**
- Equilibrio, 310-331
- centro de gravedad, 312-313, **313**
- del sistema, **173**, 173-174
- objeto rígido en (análisis de modelo), **311**, **311**-312, **312**
- objetos rígidos en estática, 313-319
- escalera inclinada, **317**, **317**
- silla de ruedas en el borde, **318**, 318-319
- sube y baja, **314**, 314-315
- viga horizontal, 315-317, **316**
- partícula en (análisis de modelo), 105-107, **117**, **117**
- semblanza sobre, 310-311
- neutro, **173**
- estable, **173**
- inestable, **173**
- térmico, **513**
- Equilibrio posición del sistema, **387**, **387**
- Equipartición de energía, **538**, 542-545, **543**, **544**, **545**
- Equivalente mecánico de calor, 503-505, **504**, **504**
- Escalar, producto, trabajo y, 154-156
- Escalares, cantidades
- adición de, **55**
- descripción de, **22**
- multiplicación de, **56**-57
- presión, **359**
- vectores y, **54**-55, **154**-156, **155**
- Escape, rapidez de, **348**, 348-350, **350t**
- Esféricas, ondas, **435**, **435**
- Espacial, interferencia, **469**
- Estable, equilibrio, **173**, **173**
- Estable, flujo, **368**
- Estación Espacial Internacional, **339**
- Estado base, **545**
- Estado, variables de, **513**
- Estampidos sónicos, **443**
- Estático, equilibrio. Véase Equilibrio
- Estimaciones, **12**-13
- Estroboscópica, fotografía, **36**
- Estructurales, modelos, **7**
- Euler, número de (e , base de logaritmo natural), **140**
- Evaporación, **550**
- Evento horizonte, de hoyos negros, **350**
- Excentricidades, en el movimiento planetario, **340**, 340-341
- Expansión libre, cambio de entropía en, 576-577
- Expansión térmica de sólidos y líquidos, **488**, **488**-491, **489**, 489*t*, **490**, **491**. Véase también Temperatura

- Expansión térmica, comportamiento de, 490, 490
 punto triple de, **486**
Explorer VIII, satélite, 354
 Exponentes, 26*n*, **A-4**, A-6-A-7
 Factorización de ecuaciones, A-7
 Fahrenheit, Daniel, 496
 Fahrenheit, escala de temperatura, **487**
 “Falta de información”, macroestados descritos como, 571*n*
 Fase superior, material de, **509**
 Fermi, Enrico, 18
 Finalización, en análisis de modelos, 31-32
Física (Aristóteles), 208
 Flotación, fuerzas, **365-368**, 366
 Fluido, **358**
 Flujo calorímetro, 530
 Flujo ideal, fluido de, **369**
 Focos, de elipse, **340**
 Ford, W. K., 351*n*
 Forma de onda, **418**
 Forma, elasticidad de, 321
 Forzadas, oscilaciones, 405-407, 406, 407
 Fourier, Jean Baptiste Joseph, 472*n*
 Fourier, series de, **472**
 Fourier, teorema de, **472-473**
 Fraccional, incertidumbre, **A-20**
 Frecuencia (f)
 angular (ω), **389**, **392**, 401, **421**, **423**
 de batimiento, 470, **471**, 471
 de diapasón, 469
 de ondas, 420, **423**
 de oscilador armónico simple, 390, **392**
 del sonido, 436-437, 437
 fundamental, **462**
 natural, 467-468
 resonancia (ω_0), **406**, **465-466**
 tono *contra*, 472
 Frente de onda, **435**
 Fricción
 celdas de combustible, automóviles impulsados por, 1
 cinética, **115**, **115**, 191-196, **192**, **194**
 fuerzas de, **115-118**, **116**, 116
 de rodamiento, 273
 estática, 114, 115
 fuerzas de, 114, 115
 fuerzas de, **114-119**, **115**
 Fuente puntual, de ondas, 436
 Fuerte, fuerza, **96**
 Fuerza (\vec{F}). Véase también Momento de torsión
 aceleración centrípeta de, 128
 aceleración proporcional a, **34**
 centrífuga, 137
 concepto de, 96-97
 constante, **158**, 160
 ficticia, **135-136**, 136
 flotación, 139*n*, **365-368**, 366, 366
 conservativa
 no conservativas y, 169-171, **170**, 170, **171**, 171
 campo, 338
 de arrastre, 377
 de contacto, 338
 de Coriolis, 136
 de fricción, 114-119
 débil, **96**
 empuje, 377
 en el modelo molecular de gas ideal, 535
 energía potencial y, **171-173**
 factores de conversión para, A-1
 ficticia, **135-137**, 136, 137
 fricción cinética, **115-118**, **116**, **116**
 gravitacional, 42, **96**, 102-103, **102-103**, 335-336
 impulso de, neta, **216**, 217
 modelo partícula bajo fuerza neta, **106**, **106**
 newton (N), como unidad SI de, 100
 presión *contra*, 359
 radial, 134, 134
 resistiva, 138-143, 139, 139-141
 restauradora, **387**
 retardadora, 404-405
 sobre una presa, 363-364, 364
 tangencial, 134, 134
 trabajo hecho por, constante, 151-154, **152**, **153**, **154**
 trabajo hecho por, variable, 156-161, **157**, **158**, **159**, **160**
 vectores y, 97, 97
 Fuerza gravitacional (\vec{F}_g)
 aceleración debida a (g), 42
 como campo de fuerzas, **96**
 peso y, **102-103**
 Fuerzas conservativas
 energía potencial y, **171-173**
 fuerzas no conservativas y, 169-171, **170**, **170**, **171**, **171**
 cambios en la energía mecánica para, 196-200, **197**, **198**, **199**, **200**
 Fuerzas resistivas, movimiento y, 138-143
 Función de distribución, **547**
 Función de onda (Ψ), **417-418**, 421
 Funciones trigonométricas de ángulos, 53, 389*n*, 401*t*
 Funciones, en cálculo, **A-14**
 Fundamental, frecuencia, 462
 Fundamentales, cantidades, 6
 Fundamentales, fuerzas, **96**
 Fusión, calor latente de (L_f), 509, 510*t*
 Fusión, como cambio de entropía, 575
 Galaxia Vía Láctea, 19
 Galilei, Galileo, 20, **41**, 41-42, 147
 Gas ideal
 calor específico molar de, 539, **539-542**, 540, 541*t*
 descripción de, 492, **492-494**, **493**, 493
 ecuación de estado para, **492**
 modelo molecular de, 534, 534-539, 535, 538*t*
 proceso adiabático para, **545-547**, 546
 Gases, teoría cinética de, 533-555
 calor específico molar de, 539, **539-542**, 540, 541*t*
 ecuación de estado para, 492
 equipartición de energía, 542-545, 543, 544, 545
 gas ideal
 modelo molecular de, 534, **534-539**, 535, 538*t*
 procesos adiabáticos para, **545-547**, 546
 rapidezces moleculares, distribución de, 547-551, 548, 549
 semblanza sobre, 533-534
 Gasolina y diésel, motores de, 567-569, 568
 Gauss, integral de probabilidad, A-19*t*
 Geometría, A-10-A-11
 Geosíncronos satélites, 344, 344
 Girando, objeto, 130
 Giroscopios y trompos, movimiento de, 301, 301
 Graficas de barras para energía, 168, 169, 200
 Gravedad, centro de, 312-313, 313
 Gravitación, 332-357
 caída libre, aceleración y fuerza de, 335-336
 energía en movimiento planetario y satelital, 347, 347-351, 348, 350, 350*t*, 351
 leyes de Kepler y movimiento planetario, 339-344, 340, 341, 342, 343*t*, 344
 Gravitacional, energía potencial (U_g), 166-167, 166*n*

- Gravitacional, masa, **102**
- Grupos de galaxias, 351
- Guardia Costera de Estados Unidos, 63, 92
- Hagen, Gotthilf Heinrich Ludwig, 377*n*
- Hagen-Poiseuille, ecuación de, 377
- Heinonen, Sami, 176
- Hertz (Hz, unidad de frecuencia), 420
- Hidrógeno
 modelo cuántico del átomo de, 534
 modelo de Bohr del átomo de, 144, 534
- Hidrómetro, **380**, 380
- Hipérbola, ecuación para, **A-11**
- Hipérbola, ecuación rectangular para, **A-11**
- Hooke, ley de, 177, 179, 209, **387**
- Hoyos negros, **350**, 350
- Hubble, telescopio espacial, 332
- Huygens, Christiaan, 401*t*
- Impulso (\vec{I}), 215-219, **216**, 217
- Impulso aproximación, **218**
- Impulso-cantidad de movimiento, teorema, **218**, 235, 535
- Incompresible, fluido, 369
- Inelásticas, colisiones, **220**
- Inercia, momento de, 260, 261, 263-267, 264, 265, 266, 403
- Inercial, masa, **102**
- Inestable equilibrio, 173, 173
- Infrasónicas, ondas sonoras, 429
- Instantánea,
 aceleración, **33**, 33, 35-36
 angular, **251**
 centrípeta, 84
 cantidad de movimiento angular, **289**
 potencia, **201**
 rapidez, 24-27
 angular, **251**
- Integración parcial, en cálculo, A-17-A-18
- Integración, en cálculo, 44
- Integral definida, en cálculo, **44**, **A-16**, A-17, A-19*t*
- Integral indefinida, en cálculo, **A-16**, A-18*t*-A-19*t*
- Integral, cálculo, A-16-A-19
- Intensidad (I), de ondas sonoras, 433-438, **434**, 436*t*, 438
- Interferencia
 análisis de modelo de ondas en, **452-456**, 453, 454, 455
 en el tiempo, 469-471, 471
- Internacional Unión astronómica, 343*n*
- Internacional, Comité de Pesos y Medidas (Sèvres, France), 4
- Internacional, Prototipo de kilogramo, 4
- Intersección y , en ecuaciones lineales, A-7
- Intersecciones, colisiones en, 229, 229
- Invernadero efecto, 527
- Irreversibles y reversibles procesos en máquinas térmicas, 562, **562-563**
- Irrotacional, fluido, **369**
- Isobárico, proceso, **516**, 516
- Isocórico, proceso, **516**
- Isotérmico proceso, 515, **515-518**
- Isovolumétrico proceso, **516**, 516
- Joule (J, unidad de energía), **153**
- Joule, James Prescott, 502, 503, 503-504
- Kelvin (K, SI unidad básica de temperatura absoluta), **486**
- Kelvin escala de temperatura, **486-487**
- Kelvin, Lord (Thomson, William), 557
- Kelvin-Planck forma de la segunda ley de la termodinámica de, **558**, 560, 562, 579
- Kepler, Johannes, 339, 340
- Kepler, leyes de, 339-344, 340, 341, 342, 343*t*, 344
- Kilogramo (kg, unidad básica SI de masa), 2-4, 4
- Kilowatt-hora (kWh), **201**
- Kuiper, cinturón de, 342-343
- Lagrange, Joseph Louis, 357
- Laminar, flujo, **368-369**, 369, 372
- Lavaderos, en los caminos, 412
- Lennard-Jones, función energía potencial de, 174, 396
- Ley cero de termodinámica, 483-484
- Ley de atmósferas, 554
- Ley de conducción térmica, **519**
- Ley de inercia, **97-99**
- Ley distributiva de la multiplicación, **155**
- Leyes de movimiento. Véase Movimiento
- Línea de corriente de flujo, 369, 377
- Lineal, cantidad de movimiento (\vec{P}), 210-248
 centro de masa, **230-234**, 231, 232, 233
 colisiones en una dimensión
 aliviador de estrés, 223, 223-224
 descripción, **219-220**, 220
 dos-cuerpos, con resorte, 226, 226-227
 elásticas, 221, 221-222
 péndulo balístico, 224-225, 225
 perfectamente inelásticas, 220
 colisiones en dos dimensiones, 227-230, 228, 229
 descripción, 211, 211-213, **212**
 propulsión de cohete, 239, 239-241
 semblanza sobre, 210
 sistema aislado (cantidad de movimiento), análisis de modelo de, 213-215, 214
 sistema no aislado (cantidad de movimiento), análisis de modelo de, 215-219, 217, 218, 219
 sistemas de muchas partículas, 234-237
 sistemas deformables, 237-239, 238
- Lineal, ecuación de onda, 428, 428, 428-429
- Lineales, ecuaciones, A-7, A-7-A-9, A-8, A-9
- Logaritmos, **A-9-A-10**
- Loma Prieta, terremoto de 1989 (CA), 446
- Longitud de onda (λ), **419-420**, 420, 423
- Longitud
 ejemplo de valores de, 4*t*
 estándares de, 3-4, 6
 factores de conversión para, A-1
 tiempo conexión con, 402
- Longitudinales, ondas, **416**, **417**, 417, 466-467, 467
- Lugares decimales, 14
- Luna
 datos planetarios sobre, 343*t*
 energía cinética de, 162*t*
 fuerzas que afectan la órbita de la, 96
 masa, 5*t*
 rapidez de escape de, 350*t*, 549
- Lunar y Planetario, Instituto, 527*t*
- Luz, rapidez de, 4
- Macroestado de sistemas, **570**
- Manométrica, presión, 365
- Marco de referencia inercial, 97-99
- Marco de referencia no inercial, 98
- Marcos acelerados, movimiento circular en, 135-138, 136, 137
- Marcos de referencia, 86, 86, **98**
- Masa (m)
 amortiguadores de, 404
 centro de, **230-234**, 231, 232, 233

- datos planetarios, 343*t*
 de planetas, 343*t*
 del Sol, 343
 ejemplo de valores de, 5*t*
 estándares de, 4-6
 factores de conversión para, A-1
 gravitacional, 102
 inercial, 102
 Internacional prototipo de
 kilogramo, 4
 masa de, 5*t*
 momentos de inercia *contra*, 260
 movimiento y, **99**
 órbita de, 340, 350
- Materia oscura, 350, 350-**351**, 351
*Mathematical Principles of Natural
 Philosophy* (Newton), 333
- Maxwell, James Clerk, 548
 Maxwell-Boltzmann función de
 distribución de rapidezces, 548
- Mecánica de fluidos, 358-384
 dinámica de fluidos, 368-371,
 377-378
 ecuación de Bernoulli, 371-375
 fluidos viscosos fluyendo en
 tuberías, 375-377, **376**, 376, 376*t*
 fuerzas de flotación y principio de
 Arquímedes, **365**-368
 presión
 descripción, **359**-360
 medición de, 359, 359, 364-365
 variación con la profundidad,
 360-364
 semblanza sobre, 358
- Mecánica, clásica, 1
 Mecánica, energía
 cambios en, para fuerzas no
 conservativas, 196-200, 197,
 198, 199, 200
 como la suma de energía cinética y
 potencial, **171**
- Media, aceleración ($a_{x,med}$), **32**, 35-36,
70
 Media, rapidez (v_{med}), **22**-23
 Media, velocidad ($v_{x,med}$), 22-23, 69,
 70
 Medición, 2-19
 análisis dimensional para, 10-11
 cálculos de estimaciones y de
 orden de magnitud, 12-13
 cifras significativas, 13-15, 14
 conversión de unidades, 12
 de presión, 359, 359, 364,
 364-365
 longitud, estándares de, 3-4, 6
 masa, estándares de, 4-6
 modelado y alternativo
 representaciones, 6-9
 semblanza sobre, 2-3
 tiempo, estándares de, 5-6
 Metro (m. Unidad básica del SI de
 longitud), 3-4
 Microestado de sistemas, 570-571
 Microscopio electrónico, 90
 Mirai, Toyota Motor Company, 1
 Miranda (satélite de Urano), 353,
 353
 Modelo
 cuántico del átomo de hidrógeno,
 534
 de Bohr del átomo de hidrógeno,
 144
 geocéntrico del universo, 339
 heliocéntrico del universo, 339
 molecular de gas ideal, 534,
 534-539, 535, 538*t*
- Modelos. *Véase también* Análisis
 de modelos de aceleración
 constante
 con movimiento en dos
 dimensiones, 71-74
 definición de, 7
 estructural, **7**, **534**
 geométricos, 7, 7
 máquinas térmicas como base
 para, 557*n*
 medición y, 6-9
 modelo molecular de gas ideal,
 534, 534-539, 535, 538*t*
 objeto rígido, **250**
 para movimiento circular
 uniforme, 83
 para movimiento en dos
 dimensiones, **71**, 71
 para movimiento en una
 dimensión, 30-32
 para partícula bajo aceleración
 constante, 37-41
 para partículas bajo velocidad
 constante, **27**-30
 partícula, 7
 bajo, 37-41
 bajo fuerza neta, 106-114
 en equilibrio, 105-107, 117, 117
 representación matemática de, **28**
 simplificación, **8**
- Modos normales de oscilación, 461,
461-462
 Módulo de corte, 320, 320*t*, **321**, 321,
 376
 Módulo de Young, **320**-321, 320*t*
 Módulo volumétrico, **320**, 320*t*,
321-**322**
- Mol (mol, unidad básica del SI de
 cantidad de sustancia), 3, **492**
 Moleculares, distribución de
 rapidezces, 547-551, 548, 549
 Moléculas y sólidos
 energía cinética promedio de, 537
 rapidez-media-cuadrática (rms),
538, 538*t*
- Momento de inercia (I), 261,
 263-267, 264, 265, 266, 403
 Momento de torsión $\vec{\tau}$
 descripción, 257, **257**-259, 258
 neto cero, 311
 objeto rígido bajo, neto, 259,
 259-263, 261, 262, 263
 producto vectorial y, 286, **286**-288
- Movimiento, 95-126
 análisis de modelo relacionados
 con la segunda ley de Newton,
 105-114
 equilibrio, partícula en, 105-107
 partícula bajo fuerza neta, 106-114
 fuerza, 96-97
 fuerza gravitacional y peso en,
 102-103
 fuerzas de fricción en, 114-119
 inminente, **115**
 masa y, 99
 Newton, primera ley de, 97-99
 Newton, segunda ley de, 99-102
 Newton, tercera ley de, 103,
103-105
 semblanza sobre, 95
- Movimiento armónico simple
 análisis de modelo de, **388**-394,
 389, 391, 392
 de elementos del medio, amplitud
 de, 457
 descripción de, **387**, 387
 energía de, 394-397, 395, 396
 movimiento circular uniforme
contra, 398, 398-400, 399
- Movimiento circular, 127-149
 con fuerzas resistivas presentes,
 138-143
 con rapidez angular constante,
 399-400
 en marcos acelerados, 135-138
 no uniforme, 133-135
 partícula en, uniforme (modelo
 ampliado), 128-133
 partícula en, uniforme, 81, **81**-83
 semblanza sobre, 127-128
 uniforme, 81, **81**-83, 398, 398-400,
 399
- Movimiento de ondas, 415-450. *Véase
 también* Movimiento oscilatorio;



- Ondas electromagnéticas;
Superposición y ondas estacionarias;
de la propagación de una perturbación, 416, 416, 416-419, 417, 418
ecuación lineal de onda, 428, 428, 428-429
ondas sonoras, 429-443
batimientos, 469-471, 471
descripción, 429-431, 430, 431
efecto Doppler, 438-443, 439, 440, 442, 443
estacionarias, en columnas de aire, 466-469, 467
intensidad de, 433-438, 434, 436*t*, 438
rapidez de, 431-433, 433*t*
ondas viajeras, análisis de modelo de, 419, 419-423, 420, 422, 423
rapidez de ondas en cuerdas, 423-426, 424, 425
semblanza sobre, 415-416
transferencia de energía mediante ondas sinusoidales en cuerdas, 426, 426-428
- Movimiento de rodamiento, de objeto rígido, 272, 272-277, 273, 274, 275
- Movimiento de traslación, 22, 162
centro de masa moviéndose en, 271, 272, 273
ecuaciones cinemáticas para, 253*t*
ecuaciones para, 270*t*
en movimiento rotacional, 254-257
- Movimiento en dos dimensiones, 68-94
aceleración constante con, 71, 71-74
aceleración tangencial y radial, 84-85
de proyectiles, 74-80
movimiento circular uniforme, 81-83
semblanza sobre, 68
vectores posición, velocidad, y aceleración en, 69-71
velocidad relativa y aceleración, 85-88
- Movimiento en una dimensión, 20-51
aceleración
descripción, 32-36
partícula bajo constante, 37-41
análisis de modelo aproximarse a, 30-32
diagramas en movimiento, 36-37
ecuaciones cinemáticas del cálculo, 44-45
- objetos cayendo, 41-44
posición, velocidad, y rapidez de partícula, 21-24
semblanza sobre, 20-21
velocidad constante, partícula bajo, 27-30
velocidad instantánea y rapidez, 24-27
- Movimiento planetario
datos en, 343*t*
descripción de, 347, 347-351, 348, 350, 350*t*, 351
Kepler, leyes de, y, 339-344, 340, 341, 342, 343*t*, 344
- Movimiento rotacional, 249-284
cantidad de movimiento angular de objeto rígido, 293, 293-295, 294
cantidad de movimiento angular en, 212*n*
cantidades angular y de traslación, 254-257, 255, 256
consideraciones de energía en, 269, 269-272, 270*t*, 271, 272
descripción, 162
ecuaciones para, 270*t*
momento de torsión, 257, 257-259, 258
momentos de inercia, 263-267, 264, 265, 266
movimiento de rodamiento de objeto rígido, 272, 272-277, 273, 274, 275
objeto rígido bajo aceleración angular constante, análisis de modelo de, 252-254, 253
objeto rígido bajo momento de torsión neto, análisis de modelo de, 259, 259-263, 261, 262, 263
posición, velocidad, y aceleración angulares, 250-252, 251, 251
rotacional, energía cinética, 267, 267-268, 268
semblanza sobre, 249-250
- Multiplicación, ley distributiva de, 155
- Mungan, C. E., 275*n*
- NASA (National Aeronautics and Space Administration), 497
- National Institute of Standards and Technology (NIST), 4, 4
- National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA), 444
- Natural, convección, 522
- Naturales, frecuencias, 467-468
- Naturaleza asimétrica de la curva de energía potencial, 488*n*
- Negativa, aceleración, 34, 37
- Neutro, equilibrio, 173
- Newton (N, unidad de fuerza), 100
- Newton segunda ley de movimiento análogo rotacional a, 289
aplicada en la dirección radial, 128, 135
cantidad de movimiento en, 212
cantidad de movimiento lineal y fuerza sobre la partícula en, 212-213
descripción, 99-102
- Newton, Isaac, 96, 96
- Newton, ley universal de, 333, 333-335, 334
energía potencial de, 345, 345-346, 346
partícula en un campo (gravitacional), análisis de modelo de, 336-339, 338
semblanza de, 332-333
- Newton, tercera ley de movimiento, 103, 103-105, 104, 211, 211
- Newtoniana mecánica, 1
- Nimitz Freeway (CA), 446
- NIST (National Institute of Standards and Technology), 4, 4
- Nivel de sonido (b), en decibeles (dB), 436-437
- Niveles de energía, diagramas de, 545, 545, 548
- No constante aceleración, 388
- No sinusoidales, formas de onda, 472, 472-473, 473
- No uniforme, movimiento circular, 133-135, 134
- NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration), 444
- Notación científica, A-4-A-5
- Notación internacional estándar para grandes números, 4*n*
- Número de onda (*k*), 421
- Objetos cayendo, movimiento de, 41-44, 43
- Objetos flotando, fuerza de flotación sobre, 367, 367
- Objetos rígidos girando, cantidad de movimiento angular de, 293, 293-295, 294
bajo aceleración angular constante, análisis de modelo de, 252-254, 253
bajo momento de torsión neto, análisis de modelo de, 259, 259-263, 261, 262, 263

- definición de, 250
 en equilibrio estático, 313-319
 en equilibrio, análisis de modelo de, 311, 311-312, 312
 escalera inclinada, 317, 317
 modelo de, 250
 momentos de inercia para caracterizar, 260 n
 movimiento de rodamiento de, 272, 272-277, 273, 274, 275
 silla de ruedas en el borde, 318, 318-319
 sube y baja, 314, 314-315
 viga horizontal, 315-317, 316
- Objetos totalmente sumergidos, fuerza de flotación en, 366, 366
- On the Masses de Nebulae and of Clusters de Nebulae* (Zwicky), 351 n
- Ondas estacionarias, 456-459, 457, 458.
- Ondas individuales, amplitud de, 457
- Ondas mecánicas (T_{MW}), 182. Véase también Movimiento oscilatorio
- Ondas sonoras, 429-443
 batimientos, 469-471, 471
 descripción, 429-431, 430, 431
 Doppler, efecto, 438-443, 439, 440, 442, 443
 estacionaria, en columnas de aire, 466-469
 intensidad de, 433-438, 434, 436 t , 438
 rapidez de, 431-433
- Ondas viajeras, análisis de modelo de, 419, 419-423, 420, 422, 423. Véase también Superposición y ondas estacionarias
- Óptica ondulatoria
- Óptica. Véase Óptica de luz y rayos;
- Oscilatorio, movimiento, 385-414.
- Otto, ciclo de, para motores de gasolina, 567-569, 568
- P, ondas, 417
- Parábola, 74, 74-80, 74 n , A-11
- Partícula bajo aceleración constante, modelo de, 37-41, 38
- Partícula bajo fuerza neta, modelo de, 106, 106-114, 134, 134-135, 142-143
- Partícula bajo velocidad constante, modelo de, 27-30
- Partícula en equilibrio, modelo de, 105, 105-107, 117, 117, 129, 129-132, 130, 131, 138
- Partícula en movimiento armónico simple, modelo de, 388-394, 389, 391, 392
- Partícula en movimiento circular uniforme, modelo de, 81, 81-83, 130-133, 131
- Partícula en movimiento circular uniforme, modelo, ampliado, 128-133
- Partícula en un campo (gravitacional), análisis de modelo de, 336-339, 338
- Partícula(s). Véase también Análisis de modelos
 cantidad de movimiento angular de, 290, 290-291
 centro de gravedad a partir de, 313, 313
 centro de masa de, 232, 232-233
 descripción, 7
 masivas que interactúan débilmente (WIMP), 351
 modelo de, 7
 posición, velocidad, y rapidez, 21-24
 sistemas de muchas, 234-237
- Pascal (Pa, unidad de presión), 359
- Pascal, Blaise, 361, 380
- Pascal, ley de, 361-362
- Pegar y-deslizar movimiento, 412
- Pendientes de gráficas, 25
- Péndulo físico, 402, 402-403, 403
- Péndulo, 386, 400, 400-404, 401 t , 402, 403, 404
- Peraltadas, carreteras, 131, 131-132
- Perfectamente inelásticas, colisiones, 220, 220, 239 n
- Periodo (T)
 como intervalo de tiempo, 5 n
 de ondas, 420
 de oscilador armónico simple, 389, 389-390
 de partícula en movimiento armónico simple, 392
 de péndulo físico, 403
 de péndulo simple, 401
 de revolución, 82-83
- Peso
 ejemplo de, 111, 111-112
 en principio de Arquímedes, 365
 fuerza gravitacional y, 102-103
 masa *contra*, 99
- Pico Pike, 304
- Pitágoras, teorema, 53, A-11
- Planas, coordenadas polares, 53, 53
- Planetas, temperaturas en la superficie de los, 527 t , 552 t
- Plano, movimiento en, 73, 73-74
- Poiseuille, Jean Leonard Marie, 377 n
- Poiseuille, ley de, 377
- Polar, sistema coordenado, 53-54, 54, 59
- Porcentaje de incertidumbre, A-20
- Posición (\vec{r})
 angular (θ), 250-252
 de oscilador armónico simple, 391, 391-392
 de partículas, 21-24
 en el modelo de aceleración constante, 38, 72, 72
 en la trayectoria de proyectiles, 75
 vectores de, 69-71
- Posición-tiempo, gráfica, 21, 22, 23, 26, 35
- Potencia (P)
 descripción, 200-202, 201, 202
 en salida de la máquina de Carnot, 565 n
 intensidad de onda sonora y, 434-435
- Potencias de diez, prefijos para, 6 t
- Potencias, manejo algebraico de, A-6-A-7
- Precesión, movimiento de, 301, 301
- Premio Nobel en Física
 Compton, Arthur Holly (Compton efecto), 146
- Presa Grand Coulee, 381
- Presión (P)
 amplitud de ondas, 430
 antinodo de, 466
 calor específico molar de gas ideal a, constante, 539-540, 540
 de degeneración neutrónica, 350
 definición de, 321
 descripción, 359-360
 energía cinética molecular y, 537
 escala absoluta de temperatura y, 486
 factores de conversión para, A-2
 manométrica para, 365
 medición de, 359, 359, 364, 364-365
 variación con la profundidad, 360-364, 361
- Primer on Work-Energy Relationships for Introductory Physics*, A (Mungan), 275 n
- Primera ley de movimiento de Newton, 97, 97, 97-99
- Principio de superposición, 455. Véase también Superposición y ondas estacionarias
- Prisma, luz a través de un. Véase también Óptica de luz y rayos
- Probabilidad, entropía y, 570-571
- Proceso adiabático

- descripción, **516-517**, 524
 expansión libre de gas, 562,
562-563, 574, 577-578
 para gas ideal, **545-547**, 546
 Proceso cíclico, en un diagrama PV,
515, 515
 Producto vectorial, momento de
 torsión y, 286, **286-288**
 Profundidad, variación de presión
 con, 360-364
 Promedio, energía cinética por
 molécula, 537
 Promedio, fuerza, 535*n*
 Promedio, potencia (P_{prom}), **201**
 Propagación de incertidumbre,
A-20-A-21
 Propagación de una perturbación,
 416, 416-419, 417, 418
 Protón-protón colisiones, 229-230
 Prototipo Internacional de, 4
 proyectiles
 explosión de, 236, 236
 movimiento de, **74-80**
 Proyectil-objetivo demostración, 78,
 78
 Ptolomeo, Claudio, 339
 Puente del Milenio de Londres (RU),
 404
 Puente Golden Gate, San Francisco
 (CA), 497
 Pulsos, de ondas, 416, 416-419, 417,
 418, 425
 Punto de apoyo, 314
 Punto triple del agua, **486**
 Punto, producto, **154**, 154*n*
 PV diagrama, 513-514
 Qamdo Bamda Aeropuerto (China),
 358
 Queckenstedt, prueba de, 379
 Quincy Quarries, Reserva de
 (Massachusetts), 415, 415, 447
 Radiación, **523-524**
 Radial aceleración, 84, 84-85
 Radián (rad, unidad de posición
 angular), **250**, 389*n*, 390, A-10
 Rancho Furnace Creek, Death Valley
 (CA), 496
 Rapidez (v)
 angular (ω), 82
 angular constante, 399-400
 angular media (ω), 251
 de escape, 348, 348-350, 350*t*
 de luz en el vacío, 4
 de ondas sobre cuerdas, 423-426,
 424, 425
 de ondas sonoras, 431-433, 433*t*
 de partículas, 21-24
 de pulsos en cuerdas, 425
 de rociado de agua, 370, 370-371
 dimensiones y unidades de, 10*t*
 factores de conversión para, A-1
 instantánea angular, **251**
 instantánea, 24-27, **26**
 máxima, 130-131
 rapidez-media-cuadrática (rms), de
 moléculas, **538**, 538*t*
 resistiva fuerza proporcional a la,
 del objeto, 141, 141-143
 tangencial, 255
 terminal, **140-141**, 142*t*
 trabajo-energía cinética teorema
 relacionado con, 163
 Räsänen, Juha, 176
 Rayos, de frentes de onda, 435
 Rayos, óptica de.
 Véase Óptica de luz y rayos
 Razonables, valores, 3
 Reacción, fuerza de, 103
 Rectangular, sistema coordenado,
 53
Reflexions on the Motive Power of Heat
 (Carnot), 563
 Refrigeradores, bombas térmicas y,
 559, **559-562**, 560
 Regla de la cadena de cálculo
 diferencial, **A-14**
 Relativa, aceleración, 85-88
 Relativa, velocidad, 85-88, 87
 Relatividad, 1
 Reloj atómico con fuente de cesio,
 4
 Repaso de matemáticas
 álgebra, A-5-A-10
 cálculo diferencial, A-13-A-16
 cálculo integral, A-16-A-19
 desarrollo de series, A-13
 geometría, A-10-A-11
 notación científica, A-4-A-5
 propagación de incertidumbre,
 A-20-A-21
 trigonometría, A-11-A-13
 Representaciones
 alternativas en resolución de
 problemas, 8-9
 gráficas, **9**, 9, 22, 23
 matemáticas, **9**
 mentales, 9
 pictóricas, **9**, 9
 Resonancia
 descripción, 406-407, 407
 en ondas estacionarias, 465,
 465-466
 frecuencias (ω_0), 406, 465-466
 Resorte, constante del (k), 158
 Resortes. *Véase también* Movimiento
 oscilatorio
 colisión de dos-cuerpos con, 226,
 226-227
 movimiento de objeto unido a, 387,
 387-388
 presionando, 238, 238-239
 trabajo hecho por, 158, **158-160**,
 159, 160, 168
 Resta de vectores, **56**, 56
 Restauración, fuerza de, 387
 Retardadora fuerza, 404-405
 Reversibles e irreversibles, procesos
 en máquinas térmicas, 562,
 562-563
 Reynolds, número de, para fluidos
 turbulentos, 383
 Rodamiento puro, movimiento,
 condición para, **271**, 271
 Rodamiento, fricción de, 273
 Rotación, razón, 82
 Rotacional, equilibrio, 311
Rotation of the Andromeda Nebula from
a Spectroscopic Survey of Emission
Regions (Rubin y Ford), 351*n*
 Rubin, V. C., 351*n*
 Rueda de la fortuna, movimiento
 circular de, 132, 132-133
 S, ondas, 417
 Salto de esquí, ejemplo movimiento
 de proyectil, 80, 80
 Salto de longitud, ejemplo de
 movimiento de proyectiles, 77, 77
 Satélite, movimiento de, 344, 344,
 347, 347-351, 348, 350, 350*t*, 351
 Schmidt-Nielsen, Knut, 382
 Schmitt, Harrison, 102
 Schwarzschild, radio de, **350**
 Scott, David, 42
 Segunda derivada, en cálculo, **A-14**
 Segunda ley de termodinámica
 entropía y, 578-580, 579
 máquinas térmicas y, 557, **557-559**,
 558, 558
 Segundo (s, unidad de tiempo básica
 SI), **5**
 Semblanza
 cantidad de movimiento angular,
 285-286
 cantidad de movimiento lineal, 210
 energía, 150-151
 conservación de la, 181-182
 equilibrio, 310-311
 gravitación, 332-333
 máquinas térmicas, 556-557
 mecánica de fluidos, 358
 medición, 2-3

- movimiento circular, 127-128
 movimiento en dos dimensiones, 68
 movimiento en una dimensión, 20-21
 movimiento ondulatorio, 415-416
 movimiento rotacional, 249-250
 movimiento, leyes de, 95
 superposición y ondas
 estacionarias, 451-452
 temperatura, 482-483
 teoría cinética de gases, 533-534
 vectores, 52
 Semieje mayor, de elipse, **340**
 Semieje menor, de elipse, **340**
 Senos y tangentes de ángulos, 401*t*
 Serie armónica, **462**
 Series, desarrollo de, A-13
 Servicio Postal de Estados Unidos, 123
 Sherwood, B. A., 191*n*
 SI (Sistema Internacional)
 estándares, 3, A-24
 Símbolos algebraicos para cantidades, 10*n*, 15
 Símbolos, A-2-A-3
 Simple, movimiento, 387. *Véase también* Movimiento oscilatorio
 Simplificación, modelos de, 8
 Simplificadas, representaciones pictóricas, **9**, **9**
 Sinusoidales, ondas, **419**, 419, 420, 422-423, 426, 426-428, 453-455, 454
 Sísmicas ondas, **417**
 Sistema aislado (cantidad de movimiento angular), análisis de modelo de, **295-300**, 296, 298, 299
 Sistema aislado (cantidad de movimiento), análisis de modelo de, **213-215**, 214
 Sistema aislado (energía), análisis de modelo de, 185-191
 caída libre, 187, 187-188, 188
 descripción, 185-187, 186
 poleas, 188-190, 189, 190
 rifle de juguete cargado por resorte, 190-191, 191
 Sistema de coordenados, 53-54
 Sistema de Oleoductos Trans Alaska, 496
 Sistema de unidades acostumbradas de medición en Estados Unidos, 5, 100*n*
 Sistema no aislado (cantidad de movimiento angular), análisis de modelo de, 288-293, 290, **291**, 292
 Sistema no aislado (cantidad de movimiento), análisis de modelo de, 215-219, **217**, 217, 218, 219
 Sistema no aislado (energía), análisis de modelo de, 182, 182-185, **184**, 184
 Sistemas termodinámicos
 cambio de entropía en, 572-578
 descripción, 572-575
 en ciclo de Carnot, 575-576
 en conducción térmica, 577-578
 en expansión libre, 576-577
 Sistemas. *Véase también* Análisis de modelos
 de muchas partículas, 234-237
 deformable, 152, 237-239, 238
 diagramas de energía y equilibrio de, 173, **173-174**, 174
 modelo de energía basado en, **151**
Six Flags Great America Parque de atracciones (II), 145
 Skysurfer, fuerzas sobre, 142, 142
 Slug (unidad de masa), 100*n*
 Sobreamortiguados, sistemas, **405**
 Sobrecalentamiento, 512
 Sol
 datos planetarios del, 343*t*
 electromagnética radiación del, 523-524
 masa del, 5*t*, 343, 343*t*
 rapidez de escape del, 350*t*
 temperatura de, 487
 Solar y Helioesférico, Observatorio (SOHO), 357
 Solidificación, calor latente de, 509*n*
 Sólidos. *Véase también* Moléculas y sólidos
 Stirling, motor de, 584, 584
 Stirling, Robert, 584
 Stonehenge, como observatorio, 2
 Subamortiguados sistemas, **405**
 Sumatoria, símbolo (Σ), 44
 Superficie-agua ondas, 417, 417
 Superposición y ondas estacionarias, 451-480. *Véase también* movimiento ondulatorio
 batimientos: interferencia en el tiempo, 469-471, 471
 condiciones frontera, análisis de modelo de, 461, **461-465**, 463, 464
 descripción, 456, **456-459**, 457, 458
 efectos frontera: reflexión y transmisión, 459, **459-460**, 460
 en columnas de aire, 466-469, 467, 469
 en cuerdas, 457, 457-459, 458
 formas de onda no sinusoidales, 472, 472-473, 473
 ondas en interferencia, análisis de modelo de, **452-456**, 453, 454, 455
 resonancia, 465
 semblanza sobre, 451-452
 Tabla periódica
 ejemplo de, A-22-A-23
 Tabulares, representaciones, **9**, 22
 Tacoma Narrows Puente (WA), 407, 407
 Tangencial, velocidad, 255
 Tangente función, 60
 Tangentes y senos de ángulos, 401*t*
 Tasa metabólica basal (TMB), 530
 Teléfonos inteligentes, actividades en física que implican, 2, 20, 50, 52, 68, 89, 127, 129, 137-138, 144, 228, 307, 354, 415, 445, 447, 475, 495
 Temperatura (T), 482-501
 calor específico molar como función de, 544
 de superficies de los planetas, 527*t*, 552*t*
 diagramas de niveles de energía y, 545
 energía cinética molecular y, 537
 escala Celsius, **484-485**, 485, 487
 escala Fahrenheit, **487**
 escala Kelvin, 487
 expansión térmica de sólidos y líquidos, 488, **488-491**, 489, 489*t*, 490, 491
 gas ideal, descripción macroscópica de, 492, **492-494**, 493
 gradiente de (dT/dx), **519**
 ley cero de la termodinámica y, 483-484, 484
 semblanza sobre, 482-483
 termómetros de gas a volumen constante y escala absoluta, 485, 485-487, **486**, 486, 487
 termómetros y escala Celsius, **484-485**, 485, 487}
 Temporal, interferencia, 470
 Tensión, deformación por, 320, 321
 Tensión, esfuerzo por, 320, 321
 Teorema de equipartición de energía, 538



- Teoría cinética de gases. *Véase* Gases, teoría cinética de
- Térmica, eficiencia (e) de máquinas térmicas, **558-559**
- Térmica, energía, 502
- Térmicas, máquinas, 556-586
- Térmico, equilibrio, **483**
- Terminal, rapidez, 140-141, 142*t*
- Termodinámica, primera ley de la, 501-532
calor específico y calorimetría, 504-508, 505*t*, **506**, 506
calor latente, **509-512**, 510, 510*t*
calor y energía interna, **502-505**, 504
descripción, **514-518**, 515, 516, 517
mecanismos de transferencia de energía
aislamiento de casa, 521-522, 521*t*, 522
Botella de Dewar, 525
conducción térmica, 519, **519-521**, 520
convección, **522-523**
descripción, 518-519
radiación, **523-524**
semblanza sobre, 501-502
trabajo en, 513, 513-514, 514
- Termodinámica. *Véase también* Temperatura
definición de, 1
ley cero de, 483-484, 484
- Termómetro de alcohol en vidrio, 383
- Termómetros, 383. *Véase también* Temperatura
- Termos (Botella de Dewar), 525
- Terremotos, ondas sísmicas de, **417**
- Thompson, Benjamin, 504
- Thomson, William (Lord Kelvin), 557
- Tiempo (t)
ejemplo de valores de, 5*t*
estándares de, 5-6
factores de conversión para, A-1
interferencia en, 469-471, 471
longitud conexión con el, 402
- Tiempo, constante de (τ), 140
- Tierra
aceleración centrípeta de, 83
como marco inercial, 98
densidad de, 336
energía cinética de, 162*t*
rapidez de escape, 350*t*, 549
- TMB (tasa metabólica basal), 530
- Tono, frecuencia *contra*, 472
- Torre inclinada de Pisa, 41
- Torriceili barómetro, 380, 380
- Torriceili, Evangelista, 364, 383
- Torriceili, ley, 374, 374-375
- Torsión, constante de (κ), 404
- Torsión, péndulo de, **404**, 404
- Toyota Motor Company, 1
- Trabajo (W)
definición de, **182**
fuerza constante para, 151-154, 152, 153, 154
fuerza variable para, 156-161, 157, 158, 159, 160
primera ley de termodinámica y, 513, 513-514, 514
- Trabajo-energía cinética, teorema, 161, 161-164, 162*t*, 163, 164.
Véase también Energía cinética
descripción, 161-164, 162*t*, 163, 164
para movimiento rotacional, 269
para partículas, 192
para sistema no aislados, 182
positivo contra negativo, efectos en, 162-163
- Transferencia de energía, 182, 182, **183**
- Transferencia de energía, mecanismos de convección, **522-523**
aislamiento de casa, 521-522, 521*t*, 522
calor (Q), 182-183, **502-505**
conducción térmica, 519, **519-521**, 520
descripción, 182-185, 518-519
ondas mecánicas (T_{MW}), 182, 426-428, 433-438
radiación electromagnética (T_{ER}), 183, 523-524
trabajo (W), 151-161, **152**, 182
transferencia de materia (T_{MT}), 183, 522
transmisión eléctrica (T_{ET}), 183
- Transferencia de materia (T_{MT}), 183
- Transferencia, variables de, **513**
- Transformación de energía, 186
- Transformación galileana, ecuaciones, descripción, **86**
- Transición de fase, 505
- Transmisión de ondas estacionarias, 459, **459-460**, 460
- Transmisión eléctrica (T_{ET}), **183**
- Transversales ondas, **416**, 416, **417**, 466
- Trayectoria de proyectiles, **74-80**
- Trigonometría, A-11-A-13, A-12*t*
- Trompos y giróscopos, movimiento de, 301, 301
- Turbulento, flujo, **369**, 369, 383
- UA (unidad astronómica), 342
- Ultrasónicas, ondas sonoras, 429
entropía y, 570-571
experimental, 508
propagación de, **A-20-A-21**
- Incertidumbre
- Umbral de audición, 435
- Umbral de dolor, 435
- Unidad térmica británica (Btu), **503**
- Unidades de cantidades físicas, A-2-A-3
- Unidades, conversión de, 12
- Uniforme, movimiento circular, 81, **81-83**, 398, 398-400, 399. *Véase también* Movimiento circular
- Unitario, vectores, 59, **59-60**, 60
- Universal, gravitación. *Véase* Gravitación
- Urner, Steve, 91
- Valor R de material aislante, **521-522**, 521*t*, 522
- Valores límites de Δx sobre Δt , 25
- Vapor, máquina de, 567
- Vaporización, calor latente de (L_v), **509**, 510*t*
- Variables termodinámicas de gas ideal, **493**
- Varilla, centro de masa de, 233, 233-234
- Véase también* Superposición y ondas estacionarias
- Véase también* Superposición y ondas estacionarias; movimiento ondulatorio amortiguado, 404, 404-405, 405
de péndulo, 400, **400-404**, 401*t*, 402, 403, 404
energía del oscilador armónico simple, 394-397, 395, 396
forzado, 405-407, 406, 407
movimiento armónico simple, análisis de modelo de, **388-394**, 389, 391, 392
resorte, movimiento de objeto unido a, 387, 387-388
semblanza sobre, 386-387
- Vectores, 52-67
adición de, 61
aritmética para, 55, 55-58
cantidad de movimiento lineal como cantidad vectorial, 212
cantidades escalares y, 54-55
componentes de, 58, 58-62, 59

- en movimiento circular no uniforme, 134, 134
- fuerza y, 97, 97
- multiplicación escalar de, 56-57
- producto cruz de dos, 286, 286
- producto escalar de dos, 154-156, 154
- producto punto de dos, 154-156, 155
- producto vectorial de dos, 286, 286
- semblanza sobre, 52
- sistemas coordenados, 53-54
- Velocidad (\vec{v})
 - angular ($\vec{\omega}$), 250-252
 - como ecuación cinemática, 45
 - constante, 27-30, 28
 - de oscilador armónico simple, 390*n*, 391, 391-392
 - de partículas, 21-24
- en el modelo de aceleración
 - constante, 39, 72, 72
- fuerza resistiva proporcional a la,
 - del objeto, 139, 139-141
- instantánea, 24-27, 69-70, 70
- positiva constante, 36, 37
- relativa, 85-88, 87, 87-88
- tangencial, 255
- vectores de, 69-71
- Velocidad-tiempo, gráfica, 33, 33, 35
- Velocímetro, 12
- Venturi, tubo de, 373, 373-374
- Viscosidad, 369, 375-377, 376, 376, 376*t*
- Volumen (V)
 - calor específico molar de gas ideal a, constante, 539-540, 540
- de figuras geométricas, A-10, A-10*t*
- de sonido, 436-437, 437
- descripción, 10*t*
- elasticidad, 321-322, 322
- Voyager I y 2, satélites, 355
- Watt (W, unidad de potencia), 201
- Watt, James, 201
- White, Jack, 451
- WIMP (partículas masivas que interactúan débilmente), 351
- WIMP (partículas masivas que interactúan débilmente), 351
- Work and Heat Transfer in the Presence of Sliding Friction* (Sherwood y Bernard), 191*n*
- Yellowstone National Park*, 381, 481
- YouTube.com, 143-144
- Zwicky, Fritz, 351*n*





Algunas constantes físicas

Cantidad	Símbolo	Valor ^a
Unidad de masa atómica	u	$1.660\,538\,782\,(83) \times 10^{-27}$ kg $931.494\,028\,(23)$ MeV/ c^2
Número de Avogadro	N_A	$6.022\,141\,79\,(30) \times 10^{23}$ partículas/mol
Magnetón de Bohr	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$	$9.274\,009\,15\,(23) \times 10^{-24}$ J/T
Radio de Bohr	$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2 k_e}$	$5.291\,772\,085\,9\,(36) \times 10^{-11}$ m
Constante de Boltzmann	$k_B = \frac{R}{N_A}$	$1.380\,650\,4\,(24) \times 10^{-23}$ J/K
Longitud de onda Compton	$\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$	$2.426\,310\,217\,5\,(33) \times 10^{-12}$ m
Constante de Coulomb	$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$8.987\,551\,788 \dots \times 10^9$ N·m ² /C ² (exacto)
Masa del deuterón	m_d	$3.343\,583\,20\,(17) \times 10^{-27}$ kg $2.013\,553\,212\,724\,(78)$ u
Masa del electrón	m_e	$9.109\,382\,15\,(45) \times 10^{-31}$ kg $5.485\,799\,094\,3\,(23) \times 10^{-4}$ u $0.510\,998\,910\,(13)$ MeV/ c^2
Electronvolt	eV	$1.602\,176\,487\,(40) \times 10^{-19}$ J
Carga elemental	e	$1.602\,176\,487\,(40) \times 10^{-19}$ C
Constante de gas	R	$8.314\,472\,(15)$ J/mol·K
Constante gravitacional	G	$6.674\,28\,(67) \times 10^{-11}$ N·m ² /kg ²
Masa del neutrón	m_n	$1.674\,927\,211\,(84) \times 10^{-27}$ kg $1.008\,664\,915\,97\,(43)$ u $939.565\,346\,(23)$ MeV/ c^2
Magnetón nuclear	$\mu_n = \frac{e\hbar}{2m_p}$	$5.050\,783\,24\,(13) \times 10^{-27}$ J/T
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ T·m/A (exacto)
Permitividad del espacio libre	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$	$8.854\,187\,817 \dots \times 10^{-12}$ C ² /N·m ² (exacto)
Constante de Planck	h	$6.626\,068\,96\,(33) \times 10^{-34}$ J·s
	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1.054\,571\,628\,(53) \times 10^{-34}$ J·s
Masa del protón	m_p	$1.672\,621\,637\,(83) \times 10^{-27}$ kg $1.007\,276\,466\,77\,(10)$ u $938.272\,013\,(23)$ MeV/ c^2
Constante de Rydberg	R_H	$1.097\,373\,156\,852\,7\,(73) \times 10^7$ m ⁻¹
Rapidez de la luz en el vacío	c	$2.997\,924\,58 \times 10^8$ m/s (exacto)

Nota: Estas constantes son los valores recomendados en 2006 por CODATA, con base en un ajuste de mínimos cuadrados de los datos provenientes de diferentes mediciones. Para una lista más completa, consulte P. J. Mohr y B. N. Taylor, "CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants; 2006." *Rev. Mod. Phys.* **80**:2, 633–730, 2008.

^aLos números entre paréntesis para los valores representan las incertidumbres de los últimos dos dígitos.



Datos del Sistema Solar

Cuerpo	Masa (kg)	Radio medio (m)	Periodo (s)	Distancia desde el Sol (m)
Mercurio	3.30×10^{23}	2.44×10^6	7.60×10^6	5.79×10^{10}
Venus	4.87×10^{24}	6.05×10^6	1.94×10^7	1.08×10^{11}
Tierra	5.97×10^{24}	6.37×10^6	3.156×10^7	1.496×10^{11}
Marte	6.42×10^{23}	3.39×10^6	5.94×10^7	2.28×10^{11}
Júpiter	1.90×10^{27}	6.99×10^7	3.74×10^8	7.78×10^{11}
Saturno	5.68×10^{26}	5.82×10^7	9.29×10^8	1.43×10^{12}
Urano	8.68×10^{25}	2.54×10^7	2.65×10^9	2.87×10^{12}
Neptuno	1.02×10^{26}	2.46×10^7	5.18×10^9	4.50×10^{12}
Plutón ^a	1.25×10^{22}	1.20×10^6	7.82×10^9	5.91×10^{12}
Luna	7.35×10^{22}	1.74×10^6	—	—
Sol	1.989×10^{30}	6.96×10^8	—	—

^aEn agosto de 2006, la Unión Astronómica Internacional adoptó una definición de planeta que separa a Plutón de los otros ocho planetas. Plutón ahora se define como "planeta enano" (como el asteroide Ceres).

Datos físicos usados con frecuencia

Distancia promedio Tierra-Luna	3.84×10^8 m
Distancia promedio Tierra-Sol	1.496×10^{11} m
Radio promedio de la Tierra	6.37×10^6 m
Densidad del aire (20°C y 1 atm)	1.20 kg/m ³
Densidad del aire (0°C y 1 atm)	1.29 kg/m ³
Densidad del agua (20°C y 1 atm)	1.00×10^3 kg/m ³
Aceleración de caída libre	9.80 m/s ²
Masa de la Tierra	5.97×10^{24} kg
Masa de la Luna	7.35×10^{22} kg
Masa del Sol	1.99×10^{30} kg
Presión atmosférica estándar	1.013×10^5 Pa

Nota: Estos valores son los utilizados en el texto.

Algunos prefijos para potencias de diez

Potencia	Prefijo	Abreviatura	Potencia	Prefijo	Abreviatura
10^{-24}	yocto	y	10^1	deca	da
10^{-21}	zepto	z	10^2	hecto	h
10^{-18}	ato	a	10^3	kilo	k
10^{-15}	femto	f	10^6	mega	M
10^{-12}	pico	p	10^9	giga	G
10^{-9}	nano	n	10^{12}	tera	T
10^{-6}	micro	μ	10^{15}	peta	P
10^{-3}	mili	m	10^{18}	exa	E
10^{-2}	centi	c	10^{21}	zetta	Z
10^{-1}	deci	d	10^{24}	yotta	Y



Abreviaturas estándar y símbolos para unidades

Símbolo	Unidad	Símbolo	Unidad
A	ampere	K	kelvin
u	unidad de masa atómica	kg	kilogramo
atm	atmósfera	kmol	kilomol
Btu	unidad térmica británica	L	litro
C	coulomb	lb	libra
°C	grado Celsius	al	año luz
cal	caloría	m	metro
d	día	min	minuto
eV	electronvolt	mol	mol
°F	grado Fahrenheit	N	newton
F	farad	Pa	pascal
ft	pie	rad	radián
G	gauss	rev	revolución
g	gramo	s	segundo
H	henry	T	tesla
h	hora	V	volt
hp	caballo de potencia	W	watt
Hz	hertz	Wb	weber
in.	pulgada	yr	año
J	joule	Ω	ohm

Símbolos matemáticos usados en el texto y su significado

Símbolo	Significado
=	es igual a
\equiv	se define como
\neq	no es igual a
\propto	es proporcional a
\sim	está en el orden de
$>$	es mayor que
$<$	es menor que
\gg (\ll)	es mucho mayor (menor) que
\approx	es aproximadamente igual a
Δx	el cambio en x
$\sum_{i=1}^N x_i$	la suma de todas las cantidades x_i desde $i = 1$ hasta $i = N$
$ x $	la magnitud de x (siempre una cantidad no negativa)
$\Delta x \rightarrow 0$	Δx tiende a cero
$\frac{dx}{dt}$	la derivada de x con respecto a t
$\frac{\partial x}{\partial t}$	la derivada parcial de x con respecto a t
\int	integral



Conversiones

Longitud

- 1 in. = 2.54 cm (exacto)
- 1 m = 39.37 in. = 3.281 ft
- 1 ft = 0.304 8 m
- 12 in. = 1 ft
- 3 ft = 1 año luz
- 1 yd = 0.914 4 m
- 1 km = 0.621 mi
- 1 mi = 1.609 km
- 1 mi = 5 280 ft
- 1 μm = 10^{-6} m = 10^3 nm
- 1 año luz = 9.461×10^{15} m

Área

- 1 m² = 10⁴ cm² = 10.76 ft²
- 1 ft² = 0.092 9 m² = 144 in.²
- 1 in.² = 6.452 cm²

Volumen

- 1 m³ = 10⁶ cm³ = 6.102×10^4 in.³
- 1 ft³ = 1 728 in.³ = 2.83×10^{-2} m³
- 1 L = 1 000 cm³ = 1.057 6 qt = 0.035 3 ft³
- 1 ft³ = 7.481 gal = 28.32 L = 2.832×10^{-2} m³
- 1 gal = 3.786 L = 231 in.³

Masa

- 1 000 kg = 1 t (tonelada métrica)
- 1 slug = 14.59 kg
- 1 u = 1.66×10^{-27} kg = 931.5 MeV/c²

Fuerza

- 1 N = 0.224 8 lb
- 1 lb = 4.448 N

Velocidad

- 1 mi/h = 1.47 ft/s = 0.447 m/s = 1.61 km/h
- 1 m/s = 100 cm/s = 3.281 ft/s
- 1 mi/min = 60 mi/h = 88 ft/s

Aceleración

- 1 m/s² = 3.28 ft/s² = 100 cm/s²
- 1 ft/s² = 0.304 8 m/s² = 30.48 cm/s²

Presión

- 1 bar = 10⁵ N/m² = 14.50 lb/in.²
- 1 atm = 760 mm Hg = 76.0 cm Hg
- 1 atm = 14.7 lb/in.² = 1.013×10^5 N/m²
- 1 Pa = 1 N/m² = 1.45×10^{-4} lb/in.²

Tiempo

- 1 año = 365 días = 3.16×10^7 s
- 1 día = 24 h = 1.44×10^3 min = 8.64×10^4 s

Energía

- 1 J = 0.738 ft · lb
- 1 cal = 4.186 J
- 1 Btu = 252 cal = 1.054×10^3 J
- 1 eV = 1.602×10^{-19} J
- 1 kWh = 3.60×10^6 J

Potencia

- 1 hp = 550 ft · lb/s = 0.746 kW
- 1 W = 1 J/s = 0.738 ft · lb/s
- 1 Btu/h = 0.293 W

Algunas aproximaciones útiles para problemas de estimación

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|
| 1 m \approx 1 yd | 1 m/s \approx 2 mi/h |
| 1 kg \approx 2 lb | 1 año \approx $\pi \times 10^7$ s |
| 1 N \approx $\frac{1}{4}$ lb | 60 mi/h \approx 100 ft/s |
| 1 L \approx $\frac{1}{4}$ gal | 1 km \approx $\frac{1}{2}$ mi |

Nota: Vea la tabla A.1 del Apéndice A para una lista más completa.

El alfabeto griego

Alfa	A	α	Iota	I	ι	Rho	P	ρ
Beta	B	β	Kappa	K	κ	Sigma	Σ	σ
Gamma	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	Mu	M	μ	Ípsilon	Y	ν
Épsilon	E	ϵ	Nu	N	ν	Fi	Φ	ϕ
Zeta	Z	ζ	Xi	Ξ	ξ	Ji	X	χ
Eta	H	η	Ómicron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Theta	Θ	θ	Pi	Π	π	Omega	Ω	ω



Esta edición de *Física para ciencias e ingeniería* tiene tres objetivos principales: proporcionar al estudiante una presentación clara de los principios de la física, fortalecer la comprensión de los conceptos básicos a través de interesantes aplicaciones al mundo real y desarrollar habilidades para resolver problemas por medio de un enfoque efectivamente organizado.

Entre sus principales características destacan:

- *Ejemplos.* Todos los ejemplos del libro se presentan en un formato de dos columnas para reforzar mejor los conceptos de física. La columna de la izquierda presenta información textual que describe los pasos para resolver el problema, mientras que la derecha muestra las manipulaciones matemáticas y los resultados que se obtienen al seguir estos pasos.
- *Prevención de riesgos ocultos.* Se incluyen más de 200 prevenciones de riesgos para ayudar al estudiante a evitar desacuerdos y errores comunes.
- *¿Qué pasaría si?* La pregunta ofrece una variante de la situación planteada en el ejemplo del libro, la cual busca desarrollar el pensamiento crítico en los resultados posibles y también contribuye a la comprensión conceptual de los principios.
- *Problemas.* Al final de cada capítulo se incluye un extenso conjunto de problemas; en total, el libro contiene más de 2 000.

Se enfatiza en argumentos físicos estructurados de forma adecuada y en estrategias efectivas para resolver problemas. Al mismo tiempo motivamos al estudiante mediante ejemplos prácticos que demuestren el papel de la física en otras disciplinas, como ingeniería, química y medicina.



Visite nuestro sitio en <http://latinoamerica.cengage.com>

ISBN-13: 978-607-526-671-8
ISBN-10: 607-526-671-2



9 786075 266718