CENGAGE Learning®

Matemáticas con APLICACIONES

Cálculo integral de una variable, cálculo diferencial de varias variables y álgebra matricial

Dora **Cienfuegos** • Delia **Galván** • José **Romero** • María **Fabela**
Elvira **Rincón** • Isabel **Elizondo** • Ana **Rodríguez**

Matemáticas con APLICACIONES

Cálculo integral de una variable, cálculo diferencial de varias variables y álgebra matricial

Dora **Cienfuegos** • Delia **Galván** • José **Romero** • María **Fabela**
Elvira **Rincón** • Isabel **Elizondo** • Ana **Rodríguez**

CENGAGE Learning®

Australia · Brasil · Corea · España · Estados Unidos · Japón · México · Reino Unido · Singapur

CENGAGE Learning®

Matemáticas con aplicaciones. Cálculo integral de una variable, cálculo diferencial de varias variables y álgebra matricial
Delia Aurora Galván Sánchez, Dora Elia Cienfuegos Zurita, José de Jesús Romero Álvarez, María de la Luz Fabela Rodríguez, Isabel Cristina Elizondo Ordóñez, Ana María Rodríguez López, Elvira Guadalupe Rincón Flores

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Fernando Valenzuela Migoya

Director Editorial, de Producción y de Plataformas Digitales para Latinoamérica:
Ricardo H. Rodríguez

Gerente de Procesos para Latinoamérica:
Claudia Islas Licona

Gerente de Manufactura para Latinoamérica:
Raúl D. Zendejas Espejel

Gerente Editorial de Contenidos en Español:
Pilar Hernández Santamarina

Gerente de Proyectos Especiales:
Luciana Rabuffetti

Gerente Editorial de Contenidos en Inglés:
Ivor Williams

Coordinador de Manufactura:
Rafael Pérez González

Editora:
Cinthia Chávez Ceballos

Diseño de portada:
Anneli Daniela Torres Arroyo

Imágenes de portada:
© Solarseven/Dreamstime

Composición tipográfica:
Anneli Daniela Torres Arroyo
Humberto Núñez Ramos

Datos para catalogación bibliográfica:
Galván/Delia et al.
Matemáticas con aplicaciones. Cálculo integral de una variable, cálculo diferencial de varias variables y álgebra matricial
ISBN: 978-607-519-133-1

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 17 16 15 14

ÍNDICE DE CONTENIDO

CAPÍTULO uno. Integral indefinida 1

1.1 Integración de funciones básicas 2
1.2 Integración de funciones compuestas 26
1.3 Integración por partes 56
1.4 Ecuaciones diferenciales 76
1.5 Modelos de ecuaciones diferenciales 90

CAPÍTULO dos. Integral definida 109

2.1 Integral definida 110
2.2 Sumas de Riemann 121
2.3 Teorema fundamental 133
2.4 Integral impropia 146
2.5 Cambio total y promedio 162
2.6 Área bajo una curva y entre dos curvas 176

CAPÍTULO tres. Funciones de “n” variables **203**

3.1 Funciones de varias variables 204
3.2 Gráficas de funciones de dos variables 212
3.3 Derivada de una función de “*n*” variables 232
3.4 Derivadas de orden superior 244
3.5 Interpretación en términos prácticos de la derivada parcial 254
3.6 Máximos y mínimos para una función de dos variables 272
3.7 Multiplicadores de Lagrange 288

CAPÍTULO cuatro. Sucesiones y series **311**

4.1 Conceptos de sucesión y de serie 312
4.2 Series aritméticas 319
4.3 Series geométricas 329

CAPÍTULO cinco. Álgebra de matrices **343**

5.1 Definiciones y conceptos básicos 344
5.2 Operaciones con matrices 364
5.3 Determinantes 389
5.4 Matriz Inversa 409
5.5 Sistemas de ecuaciones lineales 420
5.6 Método de la matriz inversa 428
5.7 Regla de Cramer 436
5.8 Método de eliminación de Gauss 444
5.9 Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales 458

anexos **465**

Hojas de trabajo 465

CAPÍTULO

uno

Integral indefinida

1.1 Integración de funciones básicas

1.2 Integración de funciones compuestas

1.3 Integración por partes

1.4 Ecuaciones diferenciales

1.5 Modelos de ecuaciones diferenciales

1.1 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES BÁSICAS

Todas las operaciones que se realizan entre números, funciones, vectores, matrices, etc. se pueden "deshacer" al realizar la operación inversa. Por ejemplo, la suma y la resta, la multiplicación y la división, elevar a un exponente y extraer raíz son operaciones inversas.

Similarmente, la derivada es un operador que al aplicarlo a una función da como resultado una nueva función, y al operador inverso a la derivada se le llama *antiderivada* o *integral.*

En el lado derecho del esquema siguiente aparecen las derivadas de tres funciones; para encontrar la integral de cada una de ellas debemos de "pensar al revés", es decir, debemos responder a la pregunta ¿qué función, al derivarla, da como resultado la función dada? Por ejemplo: ¿qué función, al derivarla, da como resultado la función $2x$? Completa el esquema.

	diferenciación →	
$f(x)=$__________		$f'(x)=2x$
$h(x)=$__________		$h'(x)=e^x$
$g(x)=$__________		$g'(x)=\dfrac{1}{x}$
	← **integración**	

Cabe destacar que para funciones muy sencillas, como las anteriores, es muy fácil obtener su integral: basta con pensar al revés; sin embargo, para funciones más complicadas debemos de sistematizar el proceso.

En la siguiente tabla aparecen, en la columna izquierda, tres funciones y en la columna derecha, sus derivadas, pero en desorden. Traza una línea que relacione cada función con su derivada.

Tabla 1. Funciones y derivadas

FUNCIONES	DERIVADAS
$H(x)=e^{3x-1}$	$h(x)=\dfrac{1}{x-1}$
$G(x)=x^3-7x^4$	$g(x)=3e^{3x-1}$
$F(x)=\ln(x-1)$	$f(x)=3x^2-28x^3$

De acuerdo con la relación dada en la tabla, podemos decir que la función g es la derivada de la función H; sin embargo, también podemos decir que H es *antiderivada* de g, porque si se deriva H, se obtiene g.

Utiliza la relación que estableciste entre el resto de las funciones dadas en la tabla y sus derivadas y responde las siguientes preguntas:

La antiderivada de $h(x)$ es: ________________. Justifica tu respuesta (por qué) ________________.

La antiderivada de $f(x)$ es: ________________. Justifica tu respuesta (por qué) ________________.

En general, cuando nos dan la derivada de una función y nos piden encontrar la función "original", a esta se le llama *antiderivada*.

Si utilizamos una letra mayúscula, digamos F, para denotar a la antiderivada y usamos la letra minúscula correspondiente f para denotar a la derivada, podemos establecer la siguiente definición:

Se dice que F es una *antiderivada* de una función f si cumple que $F' = f$.

Es decir, para determinar si una función F es antiderivada de una función f hay que comprobar que al derivar la función F se obtiene la función f.

Determina si las funciones $F(x)=x^2+1$, $H(x)=x^2+3$ y $G(x)=x^2-\frac{1}{4}$ son antiderivadas de la función $y=2x$. ¿Lo son? Sí __________. No __________.

¿Qué hiciste para decidir? ____________________.

Las funciones F, G y H ¿son iguales? Sí __________. No __________. ¿Cuál es la diferencia entre ellas? ____________________. ¿A qué se debe que al derivarlas el resultado sea el mismo?

____.

¿Se te ocurre alguna otra antiderivada para la función $y=2x$? Sí ______. No ______. ¿Cuál? Escríbela: ____.

¿Cuál sería la notación para representar a la familia de antiderivadas de la función $y=2x$? ____.

¿Es factible que cualquier otra función tenga muchas antiderivadas? ____.

Del análisis anterior podemos asegurar que la antiderivada de una función *no es única;* sin embargo, también podemos concluir que cada derivada tiene asociada una *única familia* de antiderivadas, la cual representaremos por la expresión $F(x)+C$ y la llamaremos *antiderivada más general.*

Al proceso de encontrar la antiderivda más general de una función se le conoce con el nombre de *integración,* y el símbolo que se utiliza para denotarlo es $\int$.

Así que, cuando veamos la expresión $\int f(x)\,dx$, significa que debemos encontrar la antiderivada más general de la función $f(x)$.

Nota: A la expresión $\int f(x)\,dx$ también se le conoce con el nombre de *integral indefinida*.

NOTACIÓN

$$\text{Integral} \longrightarrow \int \underbrace{f(x)}_{\text{Integrando}} \overset{\substack{\text{Diferencial}\\ \downarrow}}{dx} = \overbrace{\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Antiderviada}\\ \text{particular}}}{F(x)} + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Constante de}\\ \text{integración}}}{C}}^{\substack{\text{Antiderivada}\\ \text{más general}}}$$

¿Cómo encontrar la antiderivada más general de una función?
Así como existe un conjunto de fórmulas y propiedades para derivar funciones, es lógico que existan una serie de fórmulas y propiedades para integrar funciones, es decir, para obtener sus antiderivadas. A continuación veremos algunas de ellas.

Fórmulas básicas de integración

Primero veremos las fórmulas para obtener la antiderivada de funciones que están escritas en su forma más simple, las llamaremos *funciones básicas* y podemos identificarlas, ya que en su argumento aparece solamente la variable x.

Función potencia x^n

La función $F(x)=\frac{x^2}{2}$ ¿es antiderivada de $f(x)=x$? $\boxed{\text{sí}}$ $\boxed{\text{no}}$

La función $F(x)=\frac{x^3}{3}$ ¿es antiderivada de $f(x)=x^2$? $\boxed{\text{sí}}$ $\boxed{\text{no}}$

La función $F(x)=\frac{x^4}{4}$ ¿es antiderivada de $f(x)=x^3$? $\boxed{\text{sí}}$ $\boxed{\text{no}}$

Observa la relación entre cada función $f(x)$ y la correspondiente antiderivada, de acuerdo a lo anterior. ¿Cuál sería una antiderivada para $f(x)=x^4$? $F(x)=$ ____________; ¿cuál una antiderivada para $f(x)=x^n$? $F(x)=$ __________, y ¿cuál la antiderivada más general de x^n ?
$F(x)=$ __________________.

Observa que la antiderivada que acabas de proponer no existe si el valor de n es –1. Del análisis anterior podemos establecer la siguiente fórmula de integración:

FÓRMULA BÁSICA 1 (FB1). FUNCIÓN POTENCIA CON EXPONENTE DIFERENTE DE –1

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad si\ \ n \neq -1$$

Para esta fórmula existe una gran variedad de ejemplos pues el exponente n puede ser cualquier número excepto −1. Para aplicarla, primero se debe reconocer si la función del integrando es una función potencia, y para obtener su antiderivada basta con sumar una unidad a la potencia y dividirla entre el resultado obtenido de la suma.

Ejemplo 1

Encuentra la integral indefinida $\int x^{-2/5}\,dx$.

Solución

Al analizar la integral, vemos que la función del integrando es una función potencia con exponente $n=\frac{-2}{5}$. Al aplicar la FB1 obtenemos $\int x^{-2/5}\,dx = \dfrac{x^{(-2/5)+1}}{\left(\frac{-2}{5}\right)+1}+C$.

Cuando la potencia es una fracción, es importante recordar que *para sumar fracciones estas deben tener el mismo denominador*, por ello, es recomendable que al agregar a la fracción una unidad, la conviertas de acuerdo con el denominador de la fracción que se suma; por ejemplo, para sumar $\frac{-2}{5}+1$, convierte el 1 a quintos, es decir, deberás calcular la suma $\frac{-2}{5}+\frac{5}{5}=\frac{3}{5}$.

Así que la integral queda como sigue:

$$\int x^{-2/5}\,dx = \frac{x^{(-2/5)+1}}{\left(\frac{-2}{5}\right)+1}+C = \frac{x^{3/5}}{\frac{3}{5}}+C .$$

Recuerda además que de acuerdo con la ley de extremos, para eliminar fracciones del denominador tenemos que: $\dfrac{1}{\frac{a}{b}}=\dfrac{b}{a}$, así que $\dfrac{1}{\frac{3}{5}}=\dfrac{5}{3}$; por tanto, la integral queda como:

$$\int x^{-2/5}\,dx = \frac{x^{(-2/5)+1}}{\left(\frac{-2}{5}\right)+1}+C = \frac{x^{3/5}}{\frac{3}{5}}+C = \frac{5\,x^{3/5}}{3}+C .$$

Ejemplo 2

Resuelve la integral indefinida $\int \sqrt[3]{y^5}\,dy$.

Solución

Observemos que la función en el integrando tiene forma de radical, por lo que cabe recordarte que los radicales en realidad son potencias y que pueden convertirse si aplicas cualquiera de las siguientes leyes: $\sqrt[q]{x^n}=x^{n/q}$ o bien $\left(\sqrt[q]{x}\right)^n=x^{n/q}$.

Entonces lo primero que debemos hacer es transformar la función $\sqrt[3]{y^5}$ a la función potencia.

Al utilizar la primera de las leyes anteriores obtenemos: $\int \sqrt[3]{y^5}\,dy=\int y^{5/3}dy$.

Ahora aplicando la FB1 nos queda $\int \sqrt[3]{y^5}\,dy = \int y^{5/3}dy = \dfrac{y^{(5/3)+1}}{\frac{5}{3}+1} + C$.

Al sumar $\frac{5}{3}+1=\frac{5}{3}+\frac{3}{3}=\frac{8}{3}$, por lo que la integral se puede escribir como:

$$\int \sqrt[3]{y^5}\,dy = \int y^{5/3}dy = \frac{y^{(5/3)+1}}{\frac{5}{3}+1} + C = \frac{y^{8/3}}{\frac{8}{3}} + C = \frac{3\,y^{8/3}}{8} + C.$$

Nota: Observa como el recíproco de la potencia aparece como coeficiente de la antiderivada.

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Utiliza la FB1: Integral de una función potencia x^n, con $n \neq -1$, para resolver las siguientes integrales indefinidas.

1. $\int w\,dw =$ __________	2. $\int y^6\,dy =$ __________
3. $\int x^5\,dx =$ __________	4. $\int z^9\,dz =$ __________
5. $\int x^{-2}\,dx =$ __________	6. $\int t^{-3}\,dt =$ __________
7. $\int z^{3/4}\,dz =$ __________	8. $\int x^{-2/5}\,dx =$ __________

En las integrales 9 a 14, primero transforma la función del integrando para que quede como una función potencia x^n y después integra.

9. $\int \sqrt{x}\,dx = \int$ __________ $dx=$ __________
10. $\int \sqrt[7]{y^5}\,dy = \int$ __________ $dy =$ __________
11. $\int \frac{1}{x^6}\,dx = \int$ __________ $dx =$ __________
12. $\int \frac{1}{x^{3/2}}\,dx = \int$ __________ $dx =$ __________

13. $\int \frac{1}{\sqrt{w}}\,dw = \int$ ______________ $dw =$ ______________________	
14. $\int \frac{x^8}{x^{5/4}}\,dx = \int$ ______________ $dx =$ ______________________	

Caso particular

Si nos pidieran encontrar la integral $\int dx$, sería imposible imaginar que es una función potencia; sin embargo, lo es, ya que $\int dx = \int 1\,dx = \int x^0\,dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C$.

Por supuesto, no necesitas repetir ese proceso cada vez que quieras obtener una integral como esta $\int dx$, sino basta con que te aprendas la siguiente fórmula:

FÓRMULA BÁSICA 2 (FB2). FUNCIÓN POTENCIA CON EXPONENTE CERO

$$\int dx = x + C$$

En esta fórmula no hay variedad de ejemplos; la única diferencia es que sepas reconocerla si se te presenta con cualquier otra variable.

¡A trabajar!

EJERCICIO 2

Encuentra las siguientes antiderivadas integrales, observa el ejemplo resuelto.

$\int dz = z + C$	$\int dt =$	$\int dw =$

Función potencia con exponente n = –1

Observa lo que ocurre si utilizamos la FB1 para obtener la integral $\int x^{-1}\,dx$:

$$\int x^{-1}\,dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} + C = \frac{x^0}{0} + C. \longleftarrow \text{¡error!}$$

Utilizar la FB1 para obtener esta integral nos conduce a un error, ya que el denominador se hace cero y no está definido dividir entre cero. Esto implica que es necesario encontrar otra fórmula para integrar dicha función.

Sabemos que la función $F(x) = \ln x$ es una antiderivada de $f(x) = \frac{1}{x}$, pero es importante aclarar que este resultado será válido solamente si x es positiva, ya que el ln x no existe si x es negativa.

Sin embargo, la función $F(x) = \ln(-x)$ también es una antiderivada de $f(x) = \frac{1}{x}$, pero esto será válido solamente si x es negativa.

Podemos escribir estos dos resultados como uno solo si decimos que la función $\ln|x|$ es una antiderivada de la función $\frac{1}{x}$.

Observa que la función $f(x)=\frac{1}{x}$ se puede escribir como $f(x)=x^{-1}$, que es una función potencia con exponente −1, de donde obtenemos la siguiente fórmula:

FÓRMULA BÁSICA 3 (FB3). FUNCIÓN POTENCIA CON EXPONENTE n = −1

$$\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C \qquad \text{o bien} \qquad \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

En esta fórmula tampoco hay variedad de ejemplos; la única diferencia es que sepas reconocerla si se te presenta con cualquier otra variable.

¡A trabajar!

EJERCICIO 3

Utiliza la FB3 para resolver las siguientes integrales integrales, observa el ejemplo resuelto.

$\int z^{-1}\,dz = \ln\|z\| + C$	$\int \frac{dt}{t} =$	$\int w^{-1}\,dw =$

Función exponencial con base "*e*"

Encontrar la antiderivada más general de la función e^x es muy sencillo: basta con responder la siguiente pregunta: ¿qué función, al derivarla, da como resultado e^x?

Dado que la derivada de la función e^x es la misma e^x y como integrar es el proceso inverso a derivar, entonces se cumple también que e^x es antiderivada de e^x. De este razonamiento podemos establecer una fórmula más:

FÓRMULA BÁSICA 4 (FB4). FUNCIÓN EXPONENCIAL CON BASE "*e*"

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

Nuevamente, en esta fórmula no hay variedad de ejemplos; la única diferencia es que sepas reconocerla si se te presenta con cualquier otra variable.

¡A trabajar!

EJERCICIO 4

Utiliza la FB4 para resolver las siguientes integrales integrales, observa el el ejemplo resuelto.

Usa la fórmula anterior para encontrar las siguientes antiderivadas.

$\int e^z\,dz = e^z + C$	$\int e^t\,dt =$	$\int e^w\,dw =$

Función exponencial con base "*a*"

Si nos pidieran encontrar la antiderivada más general de una función exponencial con base diferente de la base *e*, por ejemplo $\int 2^x\,dx$, no podríamos utilizar la fórmula anterior, ya que la función 2^x es una función exponencial con base 2 (su base no es el número *e*), por lo cual requerimos otra fórmula. Para obtenerla responde lo siguiente:

¡Reflexiona!

La función $F(x)=\dfrac{2^x}{\ln 2}$ ¿es una antiderivada de $f(x)=2^x$? ____________________.

¿Por qué? ____.

La función $F(x)=\dfrac{(1.03)^x}{\ln 1.03}$ ¿es una antiderivada de $f(x)=(1.03)^x$? ____________________.

¿Por qué? ____.

La función $F(x)=\dfrac{(0.5)^x}{\ln 0.5}$ ¿es una antiderivada de $f(x)=(0.5)^x$? ____________________.

Observa la relación entre cada función $f(x)$ y la correspondiente antiderivada $F(x)$.

De acuerdo con lo anterior, ¿cuál sería una antiderivada para $f(x)=8^x$? $F(x)=$ __________.

Si la base fuera cualquier número *a* mayor que cero y diferente de 1, ¿cuál sería una antiderivada para $f(x)=a^x$? $F(x)=$ ______________ . Y, ¿cuál la antiderivada más general de la función a^x ? $F(x)=$ ______________. Concluimos que la fórmula para la función exponencial base "*a*" es:

FÓRMULA BÁSICA 5 (FB5). FUNCIÓN EXPONENCIAL CON BASE "*a*", DONDE $a>0$ Y DIFERENTE DE 1

$$\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$$

La variedad de ejemplos para esta fórmula es muy amplia, ya que el valor de la constante *a* puede ser cualquier valor positivo diferente de 1. Para aplicarla, primero se debe reconocer si la función del integrando es una función exponencial con base *a*; para lograrlo basta con observar que *la variable esté como exponente*.

Ejemplo 3

Resuelve la siguiente integral indefinida $\int 1.5^w\,dw$.

Solución

Al observar la función del integrando, nos percatamos de que la base es una constante y que la variable *w* aparece en el exponente; por ello, concluimos que corresponde a una función exponencial con base $a = 1.5$. Así que al aplicar la FB5, la integral nos queda como:

$$\int 1.5^w\,dw \;=\; \frac{1.5^w}{\ln 1.5}+C\,.$$

¡A trabajar!

EJERCICIO 5

Utiliza la fórmula anterior para encontrar las siguientes integrales.

1. $\int 6^x\,dx=$ ____________________	2. $\int\left(\sqrt{3}\right)^x dx=$ ____________________

(continúa)

3. $\int \pi^x\, dx =$ ______	5. $\int (1.75)^p\, dp =$ ______
5. $\int (\ln 5)^x\, dx =$ ______	6. $\int \left(\frac{5}{3}\right)^t dt =$ ______

Funciones trigonométricas seno y coseno

FÓRMULA BÁSICA 6 (FB6). FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA SENO

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$$

FÓRMULA BÁSICA 7 (FB7). FUNCIÓN TRIGONOMÉTRICA COSENO

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$$

En estas fórmulas no hay variedad de ejemplos; la única diferencia es que sepas reconocerla si se te presenta con cualquier otra variable.

¡A trabajar!

EJERCICIO 6

Utiliza la fórmula anterior para resolver las integrales siguientes.

$\int \cos z\, dz =$	$\int \operatorname{sen} t\, dt =$	$\int \operatorname{sen} w\, dw =$

¡A trabajar!

EJERCICIO 7

Observa la función del integrando, marca con una √ el tipo de función al que pertenece y utiliza la fórmula de integración correspondiente para resolver las integrales dadas.

INTEGRAL	FUNCIÓN POTENCIA x^n CON $n \neq -1$	FUNCIÓN POTENCIA CON $n = 0$	FUNCIÓN POTENCIA x^{-1}	FUNCIÓN EXPONENCIAL e^x	FUNCIÓN EXPONENCIAL a^x	FUNCIÓN TRIGONO-MÉTRICA $\operatorname{sen} x$	FUNCIÓN TRIGONO-MÉTRICA $\cos x$	RESPUESTA
1. $\int e^y\, dy$								
2. $\int x^{99}\, dx$								

INTEGRAL	FUNCIÓN POTENCIA x^n CON $n \neq -1$	FUNCIÓN POTENCIA CON $n = 0$	FUNCIÓN POTENCIA x^{-1}	FUNCIÓN EXPONENCIAL e^x	FUNCIÓN EXPONENCIAL a^x	FUNCIÓN TRIGONO-MÉTRICA $\operatorname{sen} x$	FUNCIÓN TRIGONO-MÉTRICA $\cos x$	RESPUESTA
3. $\int \left(\frac{1}{2}\right)^t dt$								
4. $\int \cos t\, dt$								
5. $\int \frac{1}{w^{10}} dw$								
6. $\int y^{-2/7}\, dy$								
7. $\int (0.26)^t\, dt$								
8. $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}\, dx$								
9. $\int \operatorname{sen} v\, dv$								
10. $\int dz$								
11. $\int \left(\sqrt{w}\right)^7 dw$								

Propiedades de la integral

En ocasiones se requería derivar operaciones con funciones; al integrar, ocurre algo similar. Cuando en el integrando aparece la suma y/o la diferencia de dos o más funciones o una función multiplicada por una constante, existen ciertas reglas que se pueden aplicar en el proceso de solución y que no afectan el resultado de la integral. A estas reglas las llamaremos *propiedades*.

PROPIEDAD 1. INTEGRAL DE UNA SUMA O DIFERENCIA DE FUNCIONES

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones cualesquiera, entonces se cumple

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx.$$

Esta propiedad indica que si se tiene la integral de una suma o de una resta de funciones, se podrá separar como la suma o resta de la integral de cada función; además, si en el integrando aparece la suma y/o resta de más de dos funciones, la propiedad seguirá siendo válida.

Ejemplo 4

Resuelve la siguiente integral indefinida $\int\left(w^2+\frac{1}{w}-1.5^w\right)dw$.

Solución

Al observar la función del integrando, vemos que está formada por la suma (y resta) de tres funciones; por tanto, para resolverla aplicaremos la propiedad 1. Al hacerlo nos queda:

$$\int\left(w^2+\frac{1}{w}-1.5^w\right)dw = \underbrace{\int w^2\,dw}_{Integral\ 1} + \underbrace{\int\frac{1}{w}\,dw}_{Integral\ 2} - \underbrace{\int 1.5^w\,dw}_{Integral\ 3}$$

Para obtener la respuesta basta con resolver cada una de las tres integrales en el lado derecho. La primera es una función potencia con $n = 2$, por lo que se resuelve con la FB1; la segunda es una función potencia con $n = -1$, por lo cual la solución se obtiene con la FB3; mientras que la tercera integral corresponde a una función exponencial con base $a = 1.5$ y se resuelve con la FB5. Al aplicar cada una de las fórmulas obtenemos:

$$\int\left(w^2+\frac{1}{w}-1.5^w\right)dw = \frac{w^3}{3}+C_1 + \ln w + C_2 - \frac{1.5^w}{\ln 1.5}+C_3.$$

El lado derecho de la igualdad anterior podemos escribirlo como:

$$\int\left(w^2+\frac{1}{w}-1.5^w\right)dw = \frac{w^3}{3}+\ln w-\frac{1.5^w}{\ln 1.5}+C_1+C_2+C_3$$

Como C_1, C_2 y C_3 son constantes arbitrarias, la suma de ellas $C_1+C_2+C_3$ sigue siendo una constante arbitraria y se puede remplazar con una única constante C. El resultado queda como sigue:

$$\int\left(w^2+\frac{1}{w}-1.5^w\right)dw = \frac{w^3}{3}+\ln w-\frac{1.5^w}{\ln 1.5}+C\ .$$

Nota: Cuando una integral se separa en dos o más integrales, no hay necesidad de agregar una constante de integración en cada integral, sino basta con agregar una sola constante al final, ya que por ser términos semejantes siempre se podrán agrupar en una sola constante, que llamaremos *C*.

¡A trabajar!

EJERCICIO 8

Utiliza la propiedad 1 y las fórmulas básicas para resolver la integral $\int\left(\sqrt{x}-e^x\right)dx$.

Solución

¿Puede usarse la propiedad 1 para separar la integral? ________. Si tu respuesta es sí escribe la integral con los términos separados: $\int\left(\sqrt{x}-e^x\right)dx =$ ______________________________.

¡Reflexiona!

¿Con qué fórmula vamos a resolver cada una de las integrales?

La primera integral se resuelve con la fórmula ________________________.

La segunda integral se resuelve con la fórmula ________________________.

Al aplicar las fórmulas, la solución es $F(x) =$ ________________________.

Al simplificar la antiderivada obtenemos que $F(x) =$ ________________________.

Nota: Recuerda que no es necesario agregar una constante de integración *C* en cada integral: con escribir una sola constante al final es suficiente.

¡A trabajar!

EJERCICIO 9

Utiliza la propiedad 1 y las fórmulas básicas para resolver la integral $\int\left(\frac{1}{x}+3^x-x^{-2}\right)dx$.

Solución

¿Puede usarse la propiedad 1 para separar la integral? ________. Si tu respuesta es sí escribe la integral con los términos separados: $\int\left(\frac{1}{x}+3^x-x^{-2}\right)dx =$ ________________________.

¡Reflexiona!

¿Con qué fórmula vamos a resolver cada integral?

La primera integral se resuelve con la fórmula ________________________.

La segunda integral se resuelve con la fórmula ________________________.

La tercera integral se resuelve con la fórmula ________________________.

Al aplicar las fórmulas, la solución es $F(x) =$ ________________________.

Al simplificar la antiderivada, obtenemos que $F(x) =$ ________________________.

PROPIEDAD 2. INTEGRAL DEL MÚLTIPLO CONSTANTE DE UNA FUNCIÓN

Si *c* es una constante diferente de cero, entonces se cumple

$$\int c \bullet f(x)dx = c \bullet \int f(x)dx .$$

Esta propiedad indica que cuando la función del integrando se encuentra multiplicada por una constante, esta se puede escribir fuera del símbolo de integración.

Ejemplo 5

Resuelve la integral indefinida $\int 8\, dx$.

Solución

Observemos que en el integrando se encuentra un producto de la constante 8 por el diferencial *dx*, por lo que al aplicar la propiedad 2, podemos sacar la constante 8 del símbolo de integración.

Al hacerlo obtenemos $\int 8\, dx = 8\int dx$.

La integral en el lado derecho de la igualdad corresponde a una función potencia con exponente cero, así que al aplicar la fórmula FB2, la integral queda expresada como

$$\int 8\,dx \;=\; 8\int dx \;=\; 8(x+C).$$

Sin embargo, $8(x+C)=8x+8C$, pero $8C$ sigue siendo una constante arbitraria que podemos rescribir simplemente como una única constante arbitraria C, y la respuesta queda como sigue:

$$\int 8\,dx \;=\; 8\int dx \;=\; 8x + C.$$

Nota: Si aplicamos la definición para comprobar el resultado y derivamos la antiderivada $F(x)=8x+C$, obtenemos $F'(x)=8=f(x)$.

Ejemplo 6

Resuelve la integral indefinida $\int 2x^3\,dx$.

Solución

Observemos que en el integrando se encuentra un producto de una constante por una función potencia x^3, por lo que al aplicar la propiedad 2, podemos sacar la constante 2 del símbolo de integración. Al hacerlo obtenemos $\int 2x^3\,dx \;=\; 2\int x^3\,dx$.

La integral en el lado derecho de la igualdad corresponde a una función potencia con exponente 3, así que al aplicar la fórmula FB1, la integral queda expresada como:

$$\int 2x^3\,dx \;=\; 2\int x^3\,dx \;=\; 2\left(\frac{x^4}{4}\right) + C.$$

Para simplificar el resultado, sacamos mitad y el resultado queda como sigue:

$$\int 2x^3\,dx \;=\; \frac{x^4}{2} + C.$$

Nota: Si aplicamos la definición para comprobar el resultado y derivamos la antiderivada $F(x)=\frac{x^4}{2}+C$, obtenemos $F'(x)=\frac{4x^3}{2}=2x^3=f(x)$.

Ejemplo 7

Resuelve la integral indefinida $\int \frac{2^t}{3}\,dt$.

Solución

Observemos que en el integrando se encuentra una división donde el numerador es una función y en la que el denominador es una constante. Si aplicamos la siguiente ley algebraica $\frac{a}{b}=\frac{1}{b}\cdot a$, podremos reescribir el integrando como $\frac{1}{3}\cdot 2^t$. Esto nos permite aplicar directamente la propiedad 2; al hacerlo, la integral queda expresada como sigue: $\int \frac{2^t}{3}\,dt \;=\; \frac{1}{3}\int 2^t\,dt$.

Ahora observamos que la integral en el lado derecho de la igualdad corresponde a una función exponencial con base $a = 2$, así que podemos aplicar la FB5 para encontrar su antiderivada. Al hacerlo obtenemos

$$\int \frac{2^t}{3} dt \;=\; \frac{1}{3}\int 2^t \; dt \;=\; \frac{1}{3}\left(\frac{2^t}{\ln 2}\right) + C\,.$$

Podremos simplificar el resultado si aplicamos propiedades de los logaritmos en la expresión que se encuentra en el denominador; así, la integral se puede expresar como:

$$\int \frac{2^t}{3} dt \;=\; \frac{1}{3}\int 2^t \; dt \;=\; \frac{1}{3}\left(\frac{2^t}{\ln 2}\right) + C = \frac{2^t}{3\ln 2} + C\,.$$

Nota: Para comprobar el resultado, aplicamos la definición, es decir, derivamos la antiderivada.

¡A trabajar!

EJERCICIO 10

Resuelve la integral $\int 3x^5 dx$.

Solución

¿Se puede aplicar alguna propiedad? ______________. ¿Por qué? ________________________.

Al hacerlo se obtiene $\int 3x^5 dx \;=$ ______________________________.

Ahora, al utilizar la fórmula básica que resuelve la integral resultante, se tiene que:

$F(x) =$ ______________________________.

Nota: La constante que sacamos de la integral se debe multiplicar por el resultado de la integral.

¡A trabajar!

EJERCICIO 11

Utiliza la propiedad 2 y las fórmulas básicas para resolver la integral $\int \frac{5}{x}\, dx$.

Solución

¿Se puede aplicar alguna propiedad? ______________. ¿Por qué? ________________________.

Al hacerlo se obtiene: $\int \frac{5}{x}\, dx \;=$ ______________________________.

Ahora, al utilizar la fórmula básica que resuelve la integral resultante, se tiene que:

$F(x) =$ ______________________________.

En los ejercicios 7 a 11, has practicado el uso de las propiedades por separado, en virtud de que las integrales que se presentan son sumamente sencillas; sin embargo, es muy común que necesites resolver integrales en las cuales tengas que utilizar las dos propiedades y varias de las fórmulas básicas de integración. Es importante aclarar que en estos casos primero se aplican las propiedades y después las fórmulas.

A continuación te presentamos algunos ejemplos de este tipo de integrales.

Ejemplo 8

Resuelve la integral indefinida $\int \left(5x^2 - 3x + 4\right) dx$.

Solución

Al observar la función del integrando vemos que está formada por la suma (y resta) de tres funciones; por tanto, para resolverla aplicaremos la propiedad 1. Al hacerlo nos queda:

$$\int\left(5x^2-3x+4\right)dx \;=\; \int 5x^2\,dx \;-\int 3x\,dx \;+\int 4\,dx\,.$$

Luego observamos que en cada una de las tres integrales de la derecha podemos aplicar la propiedad 2, pues hay constantes multiplicando a cada función en cada integrando.

En la primera integral sacamos el número 5; en la segunda, el 3 y en la tercera, el 4. Ahora la integral quedaría expresada como:

$$\int\left(5x^2-3x+4\right)dx \;=\; 5\int x^2\,dx \;-3\int x\,dx \;+4\int dx\,.$$

Las primeras dos integrales del lado derecho corresponden a funciones potencia con exponente diferente de –1, por lo que para obtener sus antiderivadas utilizaremos la fórmula FB1; mientras que la tercera integral se resuelve con la fórmula FB2. Al aplicar las fórmulas se obtiene:

$$\int\left(5x^2-3x+4\right)dx \;=\; 5\left(\frac{x^3}{3}\right) \;-3\left(\frac{x^2}{2}\right) \;+4x\;+C\,.$$

Recuerda que no es necesario agregar una constante de integración a cada una de las integrales: una sola constante al final es suficiente.

La respuesta también se puede escribir como $F(x)=\dfrac{5x^3}{3}-\dfrac{3x^2}{2}+4x+C$, o bien, $F(x)=\dfrac{5}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+4x+C$.

Ejemplo 9

Resuelve la integral indefinida $\displaystyle\int\left(\frac{-3}{x}+2e^x+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$.

Solución

Al observar la función del integrando vemos que está formada por la suma de tres funciones; por tanto, para resolverla aplicaremos la propiedad 1. Al hacerlo nos queda:

$$\int\left(\frac{-3}{x}+2e^x+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx \;=\; \int\frac{-3}{x}\,dx \;+\int 2e^x\,dx \;+\int\frac{4}{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

Luego observamos que podemos aplicar la propiedad 2, pues hay constantes que multiplican a cada función en los integrandos.

En la primera integral sacamos el número –3; en la segunda el 2, y en la tercera, el 4, por lo que la integral queda expresada como:

$$\int\left(\frac{-3}{x}+2e^x+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx \;=\; -3\int\frac{1}{x}\,dx \;+2\int e^x\,dx \;+4\int\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

Las funciones en las integrales 1 y 3 se pueden transformar a funciones potencia. Al hacerlo obtenemos:

$$\int\left(\frac{-3}{x}+2e^{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx = -3\int x^{-1}\,dx + 2\int e^{x}\,dx + 4\int x^{-1/2}\,dx.$$

La primera integral de la derecha se resuelve al utilizar la FB3, la segunda se resuelve con la FB4 y la tercera, con la fórmula FB1. Al aplicar las fórmulas mencionadas obtenemos:

$$\int\left(\frac{-3}{x}+2e^{x}+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx = -3\ln|x| + 2e^{x} + 4\left(\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right)+C.$$

Al simplificar la respuesta nos queda:

$$F(x) = -3\ln|x| + 2e^{x} + 8x^{1/2} + C.$$

Hasta el momento hemos resuelto integrales en las que las propiedades se pueden aplicar directamente; sin embargo, existen muchas integrales en las que la función del integrando primero debe ser transformada, por medio de leyes algebraicas, de tal manera que quede expresada como una suma y/o resta de funciones.
Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 10

Resuelve la integral indefinida $\int \frac{(t-3)^2}{t}\,dt$.

Solución

Observemos que el integrando es un cociente de funciones, por lo cual no es posible aplicar ninguna de las propiedades directamente. Así, lo primero que debemos hacer es utilizar leyes algebraicas para transformar este cociente de tal manera que quede expresada una suma y/o resta de funciones. En el numerador hay un binomio al cuadrado, y al desarrollarlo logramos que la integral quede expresada como: $\int \frac{(t-3)^2}{t}dt = \int \frac{\left(t^2-6t+9\right)}{t}\,dt$.

Para eliminar el cociente dividimos cada uno de los términos del numerador entre el denominador, en cuyo caso obtenemos $\int \frac{(t-3)^2}{t}dt = \int\left(\frac{t^2}{t}-\frac{6t}{t}+\frac{9}{t}\right)dt$.

Al simplificar cada uno de los términos, la integral al lado derecho de la igualdad nos queda

$$\int \frac{(t-3)^2}{t}dt = \int\left(t-6+\frac{9}{t}\right)dt.$$

El integrando quedó expresado en sumas y restas, por lo cual podemos aplicar directamente la propiedad 1:

$$\int \frac{(t-3)^2}{t}dt = \int\left(t-6+\frac{9}{t}\right)dt = \int t\,dt - \int 6\,dt + \int \frac{9}{t}dt.$$

Luego observamos que podemos aplicar la propiedad 2, sacando las constantes –6 de la segunda integral y 9 de la tercera, entonces la integral queda expresada como:

$$\int \frac{(t-3)^2}{t}dt = \int\left(t-6+\frac{9}{t}\right)dt = \int t\,dt - 6\int dt + 9\int \frac{1}{t}dt.$$

Si utilizamos la FB1 en la primera integral, la FB2 en la segunda integral y la FB3 en la tercera integral, obtenemos que la antiderivada es:

$$F(t)=\frac{t^2}{2}-6t+9\ln t+C\cdot$$

¡A trabajar!

EJERCICIO 12

Resuelve la integral $\int\left(4x^3-2\cdot 3^x\right)dx$.

Solución

Por la propiedad 1, la integral queda expresada como: ____________________.

Por la propiedad 2, la integral queda expresada como: ____________________.

¡Reflexiona!

¿Con qué fórmula vamos a resolver cada una de las integrales?

La primera integral se resuelve con la fórmula ________________.

La segunda integral se resuelve con la fórmula ________________.

Aplicando las fórmulas la solución es $F(x)=$ ________________.

Simplifica la antiderivada: $F(x)=$ ____________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 13

Resuelve la integral $\int\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{3x}\right)dx$.

Solución

Por la propiedad 1, la integral queda expresada como: ________________.

Por la propiedad 2, la integral queda expresada como: ________________.

¡Reflexiona!

¿Con qué fórmula vamos a resolver cada una de las integrales?

La primera integral se resuelve con la fórmula ________________.

La segunda integral se resuelve con la fórmula ________________.

Al aplicar las fórmulas, la solución es $F(x)=$ ________________.

Simplifica la antiderivada: $F(x)=$ ____________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 14

Resuelve la integral $\int\frac{3x^2-1}{x}dx$.

Solución

¿Puedes aplicar directamente propiedades? ____________. ¿Por qué? __________.

¿Qué debes hacer para aplicar propiedades? ____________________.

Al hacerlo, la integral queda expresada como:

$$\int \frac{3x^2-1}{x}\,dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

Utiliza la propiedad 1 ____________________________.

Utiliza la propiedad 2 ____________________________.

¡Reflexiona!

¿Con qué fórmula vamos a resolver cada una de las integrales?

La primera integral se resuelve con la fórmula ______________.

La segunda integral se resuelve con la fórmula ______________.

Al aplicar las fórmulas, la solución es $F(x) =$ ______________.

Simplifica la antiderivada: $F(x) =$ ______________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 15

Resuelve la integral $\int \sqrt[5]{x^3}\left(2x+x^3-4\right)dx$.

Solución

¿Puedes aplicar directamente propiedades? ______________. ¿Por qué? ______________.

¿Qué debes hacer para aplicar propiedades? ____________________________.

Al hacerlo, la integral queda expresada como:

$$\int \sqrt[5]{x^3}\left(2x+x^3-4\right)dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

Utiliza la propiedad 1 ____________________________.

Utiliza la propiedad 2 ____________________________.

¡Reflexiona!

¿Con qué fórmula vamos a resolver cada una de las integrales?

La primera integral se resuelve con la fórmula ______________.

La segunda integral se resuelve con la fórmula ______________.

La tercera integral se resuelve con la fórmula ______________.

Al aplicar las fórmulas, la solución es $F(x) =$ ______________.

Simplifica la antiderivada: $F(x) =$ ______________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 16

Resuelve la integral $\int (2x-3)^2\,dx$.

Solución

¿Puedes aplicar directamente propiedades? ______________.¿Por qué? ______________.

¿Qué debes hacer para aplicar propiedades? ______________________________.

Al hacerlo la integral queda expresada como: $\int (2x-3)^2 dx$ = ______________________.

Utiliza la propiedad 1 ____.

Utiliza la propiedad 2 ____.

¡Reflexiona!

¿Con qué fórmula vamos a resolver cada una de las integrales?

La primera integral se resuelve con la fórmula ____________________.

La segunda integral se resuelve con la fórmula ____________________.

La tercera integral se resuelve con la fórmula ____________________.

Al aplicar las fórmulas, la solución es $F(x)$ = ____________________.

Simplifica la antiderivada: $F(x)$ = ____________________________.

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.1

Sección 1.1.Antiderivadas por fórmulas básicas y propiedades

Obtén la integral indefinida de los problemas siguientes:

1. $\int w^{2/3}\, dw$

2. $\int t^{-5}\, dt$

3. $\int \pi^2\, dx$

4. $\int e^{0.1}\, dx$

5. $\int \ln 7\, dx$

6. $\int 6x^{-1}\, dx$

7. $\int (12.18)^x\, dx$

8. $\int e^z\, dz$

9. $\int t^{-2/5}\,dt$

10. . $\int \left(e^{-1}+\ 5\right)^{-3} dw$

11. $\int \frac{7}{5x^2}\,dx$

12. $\int \frac{2}{3x}\,dx$

13. $\int -\frac{8}{(3x)^3}\,dx$

14. $\int \frac{5^x}{2}\,dx$

15. $\int \frac{3}{x^{-5}}\,dx$

16. $\int \left(3t^2-4t+5\right)dt$

17. $\int \left(7x^5-e^x\right)dx$

18. $\int \frac{(3.2)^x}{5}\,dx$

19. $\int \frac{12}{x^2}\,dx$

20. $\int \left(\ln^2 2.8\right)^x dx$

21. $\int \left(1.35^2\right)^x dx$

22. $\int x^{\sqrt{5}}\,dx$

23. $\int x^{\pi^2}\,dx$

24. $\int (\pi^2)^x\,dx$

25. $\int \left(\frac{3w^2}{2}-\frac{2}{3w^2}\right)dw$

26. $\int \left(\frac{5}{x}+\frac{4}{\sqrt[3]{x^5}}\right)dx$

27. $\int \left(\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}\right)dx$

28. $\int \left(-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{5}-\frac{7}{2\sqrt{x}}+6x\right)dx$

29. $\int \left(\frac{2z-5}{7}\right)dz$

30. $\int \left(\frac{3-x^2}{4}\right)dx$

31. $\int \left(\frac{8x+3x^2}{x^2}\right)dx$

32. $\int \frac{1}{(4)\left(2^{-x}\right)}dx$

33. $\int \frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^3}dx$

34. $\int \frac{5w^2-3w+4}{w^{1/5}}dw$

35. $\int \frac{e^y+e^{2y}}{e^y}dy$

36. $\int x^3(x-2)^2\,dx$

37. $\int (3x+4)\left(x^2-1\right)dx$

38. $\int \left(\frac{7}{x^3}+\frac{1}{2x}\right)x^2\,dx$

39. $\int \left(\sqrt[4]{x}-x\right)\sqrt{x}\,dx$

40. $\int \frac{10}{e^{-x}}dx$

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 1.1

1. $\frac{3}{5}w^{5/3}+c$

2. $-\frac{t^{-4}}{4}+c$

3. $\pi^2 x+c$

4. $e^{0.1}x+c$

5. $(\ln 7)t+c$

6. $6\ln|x|+c$

7. $\frac{(12.18)^x}{\ln 12.18}+c$

8. e^z+c

9. $\frac{5}{3}t^{3/5}+c$

10. $\left(e^{-1}+5\right)^{-3}w+c$

11. $-\frac{7}{5x}+c$

12. $\frac{2}{3}\ln|x|+c$

13. $\frac{4}{27x^2}+c$

14. $\frac{5^x}{2\ln 5}+c$

15. $\frac{x^6}{2}+c$

16. t^3-2t^2+5t+c

17. $\frac{7}{6}x^6-e^x+c$

18. $\frac{(3.2)^x}{5\ln 3.2}+c$

19. $-\frac{12}{x}+c$

20. $\frac{\left(\ln^2 2.8\right)^x}{\ln\left(\ln^2 2.8\right)}+c$

21. $\frac{\left(1.35^2\right)^x}{\ln\left(1.35^2\right)}+c$

22. $\frac{x^{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{5}+1}+c$

23. $\frac{x^{\pi^2+1}}{\pi^2+1}+c$

24. $\frac{\left(\pi^2\right)^x}{\ln\left(\pi^2\right)}+c$

25. $\frac{1}{2}w^3+\frac{2}{3w}+c$

26. $5\ln|x|-\dfrac{6}{\sqrt[3]{x^2}}+c$

27. $\dfrac{4}{5}x^{5/4}-\dfrac{2}{3}x^{3/2}+c$

28. $-\dfrac{3}{25}\sqrt[3]{x^5}-7\sqrt{x}+6x+c$

29. $\dfrac{1}{7}z^2-\dfrac{5}{7}z+c$

30. $\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}x^3+c$

31. $8\ln|x|+3x+c$

32. $\dfrac{2^x}{4\ln 2}+c$

33. $\dfrac{x^2}{2}+2\ln|x|-\dfrac{1}{2x^2}+c$

34. $\dfrac{25}{14}w^{14/5}-\dfrac{5}{3}w^{9/5}+5w^{4/5}+c$

35. $y+e^y+c$

36. $\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{4}{5}x^5+x^4+c$

37. $\dfrac{3}{4}x^4-\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{4}{3}x^3-4x+c$

38. $-\dfrac{7}{2x^2}+\dfrac{1}{2}\ln|x|+c$

39. $\dfrac{4}{7}x^{7/4}-\dfrac{2}{5}x^{5/2}+c$

40. $10e^x+c$

1.2 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES COMPUESTAS

En la sección anterior aprendiste a integrar funciones básicas; ahora aprenderás a integrar funciones compuestas. Es importante saber distinguir entre estos dos tipos de funciones, lo cual te permitirá utilizar la fórmula adecuada al resolver una integral. Recuerda que llamamos función básica a aquella función cuyo argumento es solamente *x*. En una función compuesta, el argumento es otra función; recordemos el concepto de función compuesta:

Sabemos que una función compuesta es de la forma $g\big(f(x)\big)$, donde tanto *g* como *f* son funciones. Esto lo aprendimos en el curso de Cálculo diferencial; observa cómo en esa nueva función están implícitas dos funciones: *g* y *f*.

El método para integrar una función de tal tipo se conoce como *regla de la cadena*.

¿Cómo integrar funciones compuestas?

Para integrar una función compuesta recordemos primero cómo se deriva.

Para derivar la función $g\big(f(x)\big)$ se utiliza la regla de la cadena, que consiste en derivar la función *externa* y multiplicarla por la derivada de la función *interna*, es decir:

$$\frac{d\,g\big(f(x)\big)}{dx} = \underbrace{\overset{\text{Derivada de la función externa}}{\overset{\downarrow}{g'}}\big(f(x)\big)}_{\text{Función compuesta}}\ \overset{\text{Derivada de la función interna}}{\overset{\swarrow}{f'(x)}}$$

Observa que el resultado de derivar una función compuesta es un producto de funciones, en el que uno de los factores es nuevamente una función compuesta.

Si integramos en ambos lados la ecuación anterior obtendremos:

$$\int \frac{d\,g\big(f(x)\big)}{dx} = \int g'\big(f(x)\big)\, f'(x).$$

Dado que la integración y la derivación son procesos inversos, en el lado izquierdo se cancelan la integral y la derivada:

$$\cancel{\int} \frac{\cancel{d}\,g\big(f(x)\big)}{dx} = \int g'\big(f(x)\big)\, f'(x).$$

Al hacerlo obtenemos:

$$g\big(f(x)\big) = \int g'\big(f(x)\big)\, f'(x).$$

Observa que la integral quedó expresada como el producto de dos funciones: una *función compuesta por la derivada de la función argumento* $f(x)$.

El hecho de que aparezca multiplicando la derivada de la función argumento $f(x)$ es indispensable, pero si esto no se cumple, no se debe aplicar directamente la fórmula, la cual llamaremos *condición necesaria* para integrar la función compuesta.

Para resolver la integral de una función compuesta, lo primero que haremos será expresar el integrando como un producto de dos factores, uno de los cuales nos ayudará a elegir la fórmula que debemos utilizar para integrar (esto dependerá de "la forma general" que tenga el factor). El otro factor debe ser la derivada de la función argumento $f(x)$.

Nota: En algunos casos el integrando queda expresado como el producto de tres o más factores; sin embargo, solo uno de ellos nos ayudará a identificar la fórmula que debemos utilizar para integrar y los *demás* factores serán parte de la derivada de la función argumento $f(x)$.

Fórmulas para integrar funciones compuestas

Las fórmulas para integrar funciones compuestas se deducen de las fórmulas para derivar funciones básicas. No es de nuestro interés deducirlas o demostrarlas porque esto ya lo hicimos para las funciones básicas; sin embargo, destacaremos aprender a reconocerlas y utilizarlas.

Tenemos seis tipos de funciones que debemos aprender a reconocer e integrar, a saber:

F1C. Función potencia con exponente *n* ≠ − 1: $\left[f(x)\right]^n$

$$\int \left(f(x)\right)^n \cdot f'(x)dx = \frac{\left(f(x)\right)^{n+1}}{n+1} + C$$

F2C. Función potencia con exponente *n* = − 1: $\left[f(x)\right]^{-1}$

$$\int \left[f(x)\right]^{-1} \cdot f'(x)dx = \ln f(x) + C$$

F3C. Función exponencial de base *e*: $e^{f(x)}$

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\, dx = e^{f(x)} + C$$

F4C. Función exponencial con base *a*, donde *a* es un número positivo diferente de 1: $a^{f(x)}$

$$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$$

F5C. Función trigonométrica seno: $\operatorname{sen}\left(f(x)\right)$

$$\int \operatorname{sen}\left(f(x)\right) \cdot f'(x)dx = -\cos\left(f(x)\right) + C$$

F6C. Función trigonométrica coseno: $\cos\left(f(x)\right)$

$$\int \cos\left(f(x)\right) \cdot f'(x)dx = \operatorname{sen}\left(f(x)\right) + C$$

Nota: Observa que las fórmulas son similares a las de las funciones básicas; la diferencia es que ahora aparece como argumento no solo *x*, sino también una función *f* (*x*) y en el integrando se muestra multiplicando la derivada de esa función. Esto sucede porque en todas las fórmulas para derivar funciones compuestas al final se multiplica por la derivada de la función interna. Insistimos en que esta será una condición necesaria para integrar una función compuesta, es decir, para integrar una función compuesta es necesario que "*en el integrando esté multiplicando la derivada de la función argumento $f(x)$*".

¿Cómo se utilizan las fórmulas?

Paso 1. Transforma

Para integrar una función compuesta, primero expresaremos el integrando como un producto de factores, ya que en las fórmulas anteriores así se encuentra expresado el integrando.

Paso 2. Identifica la fórmula

Observamos la forma general que tiene cada uno de los factores que quedaron expresados e identificamos cuál tipo de función está presente en alguno de los factores (potencia con exponente distinto de -1, potencia con exponente igual a -1, exponencial con base e, exponencial con base a, trigonométrica seno o trigonométrica coseno). Siempre ten en cuenta que en una integral de este tipo debe aparecer el producto de una función compuesta por la derivada de su función argumento. Esto te ayudará a identificar la fórmula que debes utilizar para resolver la integral.

Paso 3. Comprueba la condición

En seguida comprobamos que se cumple la condición. El procedimiento siguiente es una sugerencia de cómo hacerlo:

Realiza la *sustitución* que sigue:

Llamamos $f(x)$ al argumento de la función compuesta. Si nos basamos en la fórmula que debemos utilizar para integrar (eso lo concluimos en el paso anterior), podremos reconocer fácilmente cuál es $f(x)$, porque, de acuerdo con las seis fórmulas que tenemos, solamente hay dos posibles opciones:

a) Fórmula 1 y 2, funciones potencia: $f(x)$ es la función que se encuentra dentro del paréntesis, sin tomar el exponente.
b) Fórmula 3 y 4, funciones exponenciales: $f(x)$ es la función que se encuentra en el exponente de la e o del inciso a.
c) Fórmula 5 y 6, funciones trigonométricas: $f(x)$ es la función argumento de la función trigonométrica.

Comprobemos la condición:

$f(x) = \text{función argumento}$.

Obtenemos su derivada: $f'(x)dx$.

Comparamos este resultado de la derivada con el factor (o factores) que aparecen multiplicando a la función compuesta y que deben ser iguales. Al hacer esto se puede presentar uno de los casos siguientes:

- La condición *sí* se cumple, es decir, lo que obtuvimos como resultado de $f'(x)dx$ es igual al *factor* que multiplica a la función compuesta.

- La condición *no* se cumple, en cuyo caso debemos hacer que se cumpla sin alterar el integrando original. En los ejemplos verás una muestra de cómo hacer esto.

Paso 4. Utiliza la fórmula

Si ya se cumple la condición, utiliza la fórmula que mencionaste en el segundo paso y obtén la antiderivada de la función.

Ejemplo 1

Resuelve la integral indefinida $\int 2x \bullet e^{x^2}\, dx$.

Solución

Paso 1. Transforma

La integral ya está expresada como un producto de factores, por lo que el primer paso para resolverla lo omitimos.

Paso 2. Identifica la fórmula

Observa que en el integrando aparece la multiplicación de $2x$ con la función exponencial de base e compuesta e^{x^2} . Tenemos entonces que:

INTEGRANDO	FACTOR 1	FACTOR 2
$2xe^{x^2}$	$2x$	e^{x^2}

¡Reflexiona!

¿Qué tipo de función se encuentra presente en uno de los factores?

1. $[f(x)]^n$ con $n \neq -1$	2. $[f(x)]^{-1}$	3. $e^{f(x)}$	4. $a^{f(x)}$	5. $\operatorname{sen}(f(x))$	6. $\cos(f(x))$

Observa que el factor 2 tiene la forma general de la función 3: $e^{f(x)}$, por lo cual, para integrar, debemos utilizar la fórmula 3 de las compuestas (ver formulario). Entonces el factor 1 debe ser la derivada de la función $f(x)$. Veamos si se cumple.

Paso 3. Comprueba la condición

Para comprobarlo hacemos la sustitución. De acuerdo con la fórmula 3, $f(x)$ es la función que se encuentra en el exponente del número e. Tenemos entonces que:

$f(x)=x^2$; al derivarla obtenemos $f'(x)=2x$.

Comparamos el resultado obtenido en $f'(x)$ con el factor 1, que deben ser iguales.
Observamos que esto sí se cumple. Entonces podemos utilizar directamente la fórmula.

Paso 4. Utiliza la fórmula

Aplicamos la fórmula y obtenemos la antiderivada:

$$F(x)=e^{x^2}+C$$

Ejemplo 2

Resuelve la integral indefinida $\int 3\sqrt{(3x-2)}\ dx$.

Solución

Expresamos la raíz con exponente, ya que así se maneja en las fórmulas. No tenemos fórmula para integrar una raíz:

$$\int 3\ (3x-2)^{1/2} dx\ .$$

Paso 1. Transforma

La integral está expresada como un producto de factores, por lo que el primer paso para resolverla lo omitimos.

Paso 2. Identifica la fórmula

Observa que en el integrando aparece la multiplicación de 3 con la función $(3x-2)^{1/2}$. Tenemos entonces que:

INTEGRANDO	FACTOR 1	FACTOR 2
$3(3x-2)^{1/2}$	3	$(3x-2)^{1/2}$

¡Reflexiona!

¿Qué tipo de función se encuentra presente en uno de los factores?

1. $[f(x)]^n$ con $n \neq -1$	2. $[f(x)]^{-1}$	3. $e^{f(x)}$	4. $a^{f(x)}$	5. $\operatorname{sen}(f(x))$	6. $\cos(f(x))$

Observa la forma general que tiene el factor 2: es una función elevada a un número, es decir, $[f(x)]^n$, por lo cual para integrar usaremos la fórmula 1 de las compuestas (consulta el formulario).

Entonces el factor 1 debe ser la derivada de la función $f(x)$. Veamos si se cumple.

Paso 3. Comprueba la condición

Para comprobarlo hacemos la sustitución. De acuerdo con la fórmula 1, $f(x)$ es la función que se encuentra dentro del paréntesis. Entonces tenemos que:

$f(x)=3x-2$. Al derivarla obtenemos que $f'(x)=3$.

Comparamos el resultado obtenido en $f'(x)$ con el factor 1, que deben ser iguales.

Observamos que esto sí se cumple. Entonces podemos usar la fórmula:

Paso 4. Utiliza la fórmula

Directamente aplicamos la fórmula y obtenemos la antiderivada:

$$F(x)=\frac{(3x-2)^{3/2}}{3/2}+C .$$

Utilizamos la ley de extremos. Para que no queden fracciones en el denominador obtenemos:

$$F(x)=\frac{2}{3}(3x-2)^{3/2}+C .$$

¿Qué hacemos si en el integrando *no* está completa la derivada de la función?

Los ejercicios que hemos visto cumplen con la condición de que en el integrando esté multiplicando la derivada de la función. Veamos cómo resolver una integral que no cumple con esto.

Ejemplo 3

Resuelve la integral indefinida $\int \frac{e^{2t}}{(e^{2t}-1)}\,dt$.

Solución

Paso 1. Transforma

Expresamos la integral como un producto de factores, para ello subimos la función del denominador, al hacerlo cambia el signo del exponente y obtenemos $\int e^{2t}(e^{2t}-1)^{-1}\,dt$.

Paso 2. Identifica la fórmula

Observa que en el integrando aparece la multiplicación de e^{2t} con la función potencia $\left(e^{2t}-1\right)^{-1}$. Tenemos entonces que:

INTEGRANDO	FACTOR 1	FACTOR 2
$e^{2t}\left(e^{2t}-1\right)^{-1}$	e^{2t}	$\left(e^{2t}-1\right)^{-1}$

¡Reflexiona!

¿Qué tipo de función se encuentra presente en uno de los factores?

1. $\left[f(x)\right]^n$ con n ≠ −1	2. $\left[f(x)\right]^{-1}$	3. $e^{f(x)}$	4. $a^{f(x)}$	5. $\operatorname{sen}\left(f(x)\right)$	6. $\cos\left(f(x)\right)$

Observa la forma general que tiene el factor 2: es una función elevada al número −1, es decir, $\left[f(x)\right]^{-1}$. Por ello, para integrar usaremos la fórmula 2 de las compuestas (consulta el formulario). Entonces el factor 1 debe ser la derivada de la función $f(x)$; veamos si se cumple.

Paso 3. Comprueba la condición

Para comprobarlo hacemos la sustitución. De acuerdo con la fórmula 2, $f(t)$ es la función que se encuentra dentro del paréntesis. Entonces tenemos que: $f(t)=e^{2t}-1$.

Al derivarla obtenemos $f'(t)=e^{2t}\cdot 2$, que es equivalente a $f'(t)=2e^{2t}$.

Comparamos el resultado obtenido en $f'(t)$ con el factor 1 y vemos que no son iguales; por ello, decimos que la condición no se cumple y no podemos aplicar directamente la fórmula.

Nota: Observa que lo que hace falta es solo la constante 2, por lo cual la agregamos en el integrando. Pero debemos asegurarnos de que no se altere la función original; para ello agregamos un 2 multiplicando y uno dividiendo. De esta forma no alteramos el integrando original, ya que es como si se multiplicara por 1.

Lo anterior queda expresado como:

$$\int \frac{2}{2} e^{2t}\left(e^{2t}-1\right)^{-1} dt .$$

El 2 que agregamos dividiendo no lo necesitamos dentro de la integral ya que no forma parte de la derivada de la función argumento $f(t)$. Entonces, por la propiedad 1 de la sección anterior, podemos dejarlo afuera del símbolo de integración. Al hacer esto nos queda expresada la integral como:

$$\frac{1}{2}\int 2e^{2t}\left(e^{2t}-1\right)^{-1} dt .$$

Con esto que hicimos se cumple la condición y no se alteró el integrando original, por lo que ahora podemos aplicar la fórmula para obtener la antiderivada.

Paso 4. Utiliza la fórmula

La constante que quedó fuera de la integral se multiplica por el resultado final. Entonces la solución queda como:

$$F(t)=\frac{1}{2} Ln\left|e^{2t}-1\right|+C .$$

Nota: Sólo se pueden agregar constantes para hacer que se cumpla la condición de que en el integrando esté la derivada de la función argumento (función interna). La constante que se agrega para no alterar el integrando original se puede poner directamente fuera del símbolo de integración.

En el ejercicio anterior la integral por resolver es: $\int e^{2t}(e^{2t}-1)^{-1} dt$.

INTEGRANDO	FACTOR 1	FACTOR 2
$e^{2t}\left(e^{2t}-1\right)^{-1}$	e^{2t}	$\left(e^{2t}-1\right)^{-1}$

Lo primero que debemos hacer para resolver la integral es identificar la fórmula que utilizaremos. Para ello contestamos lo siguiente:

¡Reflexiona!

¿Qué tipo de función se encuentra presente en uno de los factores?

1. $\left[f(x)\right]^{n}$ con n $\neq -1$	2. $\left[f(x)\right]^{-1}$	3. $e^{f(x)}$	4. $a^{f(x)}$	5. $\operatorname{sen}\left(f(x)\right)$	6. $\cos\left(f(x)\right)$

Observa que el factor 1 tiene la forma general $e^{f(t)}$. Entonces, ¿por qué no se utilizó la fórmula 3 compuesta para resolver la integral?______________________________ .

Ejemplo 4

Resuelve la integral indefinida $\int \frac{5^{\ln x^3}}{x}dx$.

Solución

Paso 1. Transforma

Expresamos la integral como un producto de factores, para ello subimos la función del denominador con exponente negativo y al hacerlo obtenemos: $\int x^{-1}\cdot 5^{\ln x^3}\,dx$.

Paso 2. Identifica la fórmula

Observa que en el integrando aparece la multiplicación de x^{-1} con la función exponencial de base a $5^{\ln x^3}$. Tenemos entonces que:

INTEGRANDO	FACTOR 1	FACTOR 2
$x^{-1}\cdot 5^{\ln x^3}$	x^{-1}	$5^{\ln x^3}$

¡Reflexiona!

¿Qué tipo de función se encuentra presente en uno de los factores?

1. $\left[f(x)\right]^{n}$ con $n \neq -1$	2. $\left[f(x)\right]^{-1}$	3. $e^{f(x)}$	4. $a^{f(x)}$	5. $\operatorname{sen}\left(f(x)\right)$	6. $\cos\left(f(x)\right)$

Observa la forma general que tiene el factor 2: es un número elevado a una función, es decir, $a^{f(x)}$; por ende, para integrar usaremos la fórmula 4 de las compuestas (consulta el formulario). Entonces el factor 1 debe ser la derivada de la función $f(x)$. Veamos si se cumple.

Paso 3. Comprueba la condición

Para comprobarlo hacemos la sustitución. De acuerdo con la fórmula 4, $f(x)$ es la función que se encuentra en el exponente del número 5. Tenemos entonces que:

$f(x)=\ln x^3$. Al derivarla obtenemos $f'(x)=\frac{1}{x^3}\cdot 3x^2$. Al multiplicar y simplificar tenemos que: $f'(x)=\frac{3x^2}{x^3}=\frac{3}{x}=3x^{-1}$.

Comparamos el resultado obtenido en $f'(x)$ con el factor 1 y vemos que no son iguales; por ello, decimos que la condición no se cumple y no podemos aplicar directamente la fórmula.

Nota: Observa que solo hace falta la constante 3, en cuyo caso lo que hacemos es agregarla en el integrando. Para que no se altere la función original agregamos afuera de la integral un 3 dividiendo. Esto queda expresado como:

$$\frac{1}{3}\cdot\int 3x^{-1}\cdot 5^{\ln x^3}\,dx\,.$$

Con esto que hicimos, se cumple la condición y no se alteró el integrando original, por lo que ahora podemos aplicar la fórmula 4 para obtener la antiderivada,

Paso 4. Utiliza la fórmula

La solución queda como $F(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{5^{\ln x^3}}{\ln 5}+C$.

Nota: Recuerda que la habilidad para integrar se logra con base en mucha práctica y dedicación.

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Resuelve la integral indefinida $\int \frac{8^{\sqrt{y}+5}}{\sqrt{y}}\,dy$.

Solución

Paso 1. Transforma

Expresa la integral como un producto ____________________________________ .

Paso 2. Identifica la fórmula

Los factores son:

INTEGRANDO	FACTOR 1	FACTOR 2

¡Reflexiona!

¿Qué tipo de función se encuentra presente en uno de los factores?

1. $[f(x)]^n$ con $n \neq -1$	2. $[f(x)]^{-1}$	3. $e^{f(x)}$	4. $a^{f(x)}$	5. $\operatorname{sen}(f(x))$	6. $\cos(f(x))$

De acuerdo con lo anterior:
¿Qué fórmula vamos a utilizar para resolver la integral? ________________________.

Paso 3. Comprueba la condición

Hacemos la sustitución:

$f(y)=$ ________ . Al derivar esta función tenemos que $f'(y)=$ ____________________ .

La condición que se debe cumplir es que $f'(y)$ sea igual al factor ______________ .

¿Se cumple lo anterior? ____________________ . ¿Qué le falta? ______________ .

¿Se puede agregar en el integrando lo que falta? ________ . ¿Por qué? ______________ .

¿Qué debemos hacer para no alterar el integrando original? ______________ .

Paso 4. Utiliza la fórmula

La solución es: $F(y)=$ ______________________________ .

¡A trabajar!

EJERCICIO 2

Resuelve la siguiente integral indefinida $\int \frac{1}{x(\ln x^3-2)^{1/2}}\,dx$.

Solución

Paso 1. Transforma

Expresa la integral como un producto ______________________________ .

Paso 2. Identifica la fórmula

Los factores son:

INTEGRANDO	FACTOR 1	FACTOR 2

¿Qué tipo de función se encuentra presente en uno de los factores?

1. $[f(x)]^n$ con n ≠ −1	2. $[f(x)]^{-1}$	3. $e^{f(x)}$	4. $a^{f(x)}$	5. $\operatorname{sen}(f(x))$	6. $\cos(f(x))$

De acuerdo con lo anterior:
¿Qué fórmula vamos a utilizar para resolver la integral? ______________ .

Paso 3. Comprueba la condición

Hacemos la sustitución:

$f(x)=$ ________ . Al derivar esta función tenemos que $f'(x)=$ ____________________ .

La condición que se debe cumplir es que $f'(x)$ sea igual al factor ____________________ .

¿Se cumple lo anterior? __________ . ¿Qué le falta? ______________________________ .

¿Se puede agregar en el integrando lo que falta? ____________ . ¿Por qué? ____________ .

¿Qué debemos hacer para no alterar el integrando original? ________________________ .

Paso 4. Utiliza la fórmula

La solución es: $F(x)=$ ______________________________ .

¡A trabajar!

EJERCICIO 3

Resuelve la siguiente integral indefinida $\int(\ln x+1)\cdot e^{x\ln x}dx$

Solución

Paso 1. Transforma

Expresa la integral como un producto ____ .

Paso 2. Identifica la fórmula

Los factores son:

INTEGRANDO	FACTOR 1	FACTOR 2

¡Reflexiona!

¿Qué tipo de función se encuentra presente en uno de los factores?

1. $[f(x)]^n$ con $n \neq -1$	2. $[f(x)]^{-1}$	3. $e^{f(x)}$	4. $a^{f(x)}$	5. $\operatorname{sen}(f(x))$	6. $\cos(f(x))$

De acuerdo con lo anterior:
¿Qué fórmula vamos a utilizar para resolver la integral? ________________________ .

Paso 3. Comprueba la condición

Hacemos la sustitución:

$f(x)=$ __________ . Al derivar esta función tenemos que $f'(x)=$ ____________________ .

La condición que se debe cumplir es que $f'(x)$ sea igual al factor ____________________ .

¿Se cumple lo anterior? __________ . ¿Qué le falta? ______________________________ .

¿Se puede agregar en el integrando lo que falta? ____________ . ¿Por qué?____________ .

¿Qué debemos hacer para no alterar el integrando original? ________________________ .

Paso 4. Utiliza la fórmula

La solución es: $F(x) =$ ____________________ .

¡A trabajar!

EJERCICIO 4

Resuelve la siguiente integral indefinida $\int \frac{te^{t^2}}{\left(e^{t^2}-5\right)} dt$.

Solución

Paso 1. Transforma

Expresa la integral como un producto ____________________ .

Paso 2. Identifica la fórmula

Los factores son:

INTEGRANDO	FACTOR 1	FACTOR 2	FACTOR 3

¡Reflexiona!

¿Qué tipo de función se encuentra presente en uno de los factores?

1. $\left[f(x)\right]^n$ con $n \neq -1$	2. $\left[f(x)\right]^{-1}$	3. $e^{f(x)}$	4. $a^{f(x)}$	5. $sen\left(f(x)\right)$	6. $\cos\left(f(x)\right)$

De acuerdo con lo anterior:
¿Qué fórmula vamos a utilizar para resolver la integral? ____________________ .

Paso 3. Comprueba la condición

Hacemos la sustitución:

$f(t) =$ __________ . Al derivar esta función tenemos que $f'(t) =$ ____________________ .

La condición que se debe cumplir es que $f'(t)$ sea igual al factor ____________________ .

¿Se cumple lo anterior? __________ . ¿Qué le falta? ____________________ .

¿Se puede agregar en el integrando lo que falta? __________ . ¿Por qué? __________ .

¿Qué debemos hacer para no alterar el integrando original? ____________________ .

Paso 4. Utiliza la fórmula

La solución es: $F(t) =$ ____________________ .

¡A trabajar!

EJERCICIO 5 Resuelve la siguiente integral indefinida $\int e^{\frac{1}{5}x} \cdot \sqrt[3]{\left(1+e^{\frac{1}{5}x}\right)}dx$.

Solución

Paso 1. Transforma

Expresa la integral como un producto ____________________________________ .

Paso 2. Identifica la fórmula

Los factores son:

INTEGRANDO	FACTOR 1	FACTOR 2

¡Reflexiona!

¿Qué tipo de función se encuentra presente en uno de los factores?

1. $\left[f(x)\right]^n$ con $n \neq -1$	2. $\left[f(x)\right]^{-1}$	3. $e^{f(x)}$	4. $a^{f(x)}$	5. $\operatorname{sen}\left(f(x)\right)$	6. $\cos\left(f(x)\right)$

De acuerdo con lo anterior:
¿Qué fórmula vamos a utilizar para resolver la integral? ____________________ .

Paso 3. Comprueba la condición

Hacemos la sustitución:

$f(x) =$ ________ . Al derivar esta función tenemos que $f'(x) =$ ________________ .

La condición que se debe cumplir es que $f'(x)$ sea igual al factor _______________ .

¿Se cumple lo anterior? ________ . ¿Qué le falta? _________________________ .

¿Se puede agregar en el integrando lo que falta? _________ . ¿Por qué?__________ .

¿Qué debemos hacer para no alterar el integrando original? ____________________ .

Paso 4. Utiliza la fórmula

La solución es: $F(x)=$ ____________________________ .

¡A trabajar!

EJERCICIO 6

Resuelve la siguiente integral indefinida $\int \frac{xe^{\sqrt{(x^2+1)}}}{\sqrt{(x^2+1)}}dx$.

Solución

Paso 1. Transforma

Expresa la integral como un producto ______________________________.

Paso 2. Identifica la fórmula

Los factores son:

INTEGRANDO	FACTOR 1	FACTOR 2	FACTOR 3

¡Reflexiona!

¿Qué tipo de función se encuentra presente en uno de los factores?

1. $[f(x)]^n$ con $n \neq -1$	2. $[f(x)]^{-1}$	3. $e^{f(x)}$	4. $a^{f(x)}$	5. $\operatorname{sen}(f(x))$	6. $\cos(f(x))$

De acuerdo con lo anterior:
¿Qué fórmula vamos a utilizar para resolver la integral? ________________.

Paso 3. Comprueba la condición

Hacemos la sustitución:

$f(x) =$ ________. Al derivar esta función tenemos que $f'(x) =$ ______________.

La condición que se debe cumplir es que $f'(x)$ sea igual al factor ____________.

¿Se cumple lo anterior? ________. ¿Qué le falta? ______________________.

¿Se puede agregar en el integrando lo que falta? ________. ¿Por qué? ________.

¿Qué debemos hacer para no alterar el integrando original? ________________.

Paso 4. Utiliza la fórmula

La solución es: $F(x) =$ ______________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 7

Resuelve la siguiente integral indefinida $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$.

Solución

Paso 1. Transforma

Expresa la integral como un producto ______________________ .

Paso 2. Identifica la fórmula

Los factores son:

INTEGRANDO	FACTOR 1	FACTOR 2

¡Reflexiona!

¿Qué tipo de función se encuentra presente en uno de los factores?

1. $[f(x)]^n$ con $n \neq -1$	2. $[f(x)]^{-1}$	3. $e^{f(x)}$	4. $a^{f(x)}$	5. $\operatorname{sen}(f(x))$	6. $\cos(f(x))$

De acuerdo con lo anterior:
¿Qué fórmula vamos a utilizar para resolver la integral? ______________ .

Paso 3. Comprueba la condición

Hacemos la sustitución:

$f(x) =$ ________ . Al derivar esta función tenemos que $f'(x) =$ ______________ .

La condición que se debe cumplir es que $f'(x)$ sea igual al factor______________ .

¿Se cumple lo anterior? ________ . ¿Qué le falta? ______________________ .

¿Se puede agregar en el integrando lo que falta? ________. ¿Por qué? ________ .

¿Qué debemos hacer para no alterar el integrando original? ______________ .

Paso 4. Utiliza la fórmula

La solución es: $F(x) =$ ______________________ .

¡A trabajar!

EJERCICIO 8

Resuelve la siguiente integral indefinida $\int \frac{8^{e^{-2x}}}{e^{2x}}\,dx$.

Solución

Paso 1. Transforma

Expresa la integral como un producto ________________________.

Paso 2. Identifica la fórmula

Los factores son:

INTEGRANDO	FACTOR 1	FACTOR 2

¡Reflexiona!

¿Qué tipo de función se encuentra presente en uno de los factores?

1. $[f(x)]^n$ con $n \neq -1$	2. $[f(x)]^{-1}$	3. $e^{f(x)}$	4. $a^{f(x)}$	5. $\operatorname{sen}(f(x))$	6. $\cos(f(x))$

De acuerdo con lo anterior:
¿Qué fórmula vamos a utilizar para resolver la integral? ________________.

Paso 3. Comprueba la condición

Hacemos la sustitución:

$f(x) =$ ________. Al derivar esta función tenemos que $f'(x) =$ ____________.

La condición que se debe cumplir es que $f'(x)$ sea igual al factor ____________.

¿Se cumple lo anterior? ________. ¿Qué le falta? ________________.

¿Se puede agregar en el integrando lo que falta? ________. ¿Por qué? ________.

¿Qué debemos hacer para no alterar el integrando original?____________.

Paso 4. Utiliza la fórmula

La solución es: $F(x) =$ ____________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 9

Resuelve la siguiente integral indefinida $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+x\right)\cdot 7^{\sqrt{x}+\frac{x^2}{4}}\,dx$.

Solución

Paso 1. Transforma

Expresa la integral como un producto ________________________________ .

Paso 2. Identifica la fórmula

Los factores son:

INTEGRANDO	FACTOR 1	FACTOR 2

¡Reflexiona!

¿Qué tipo de función se encuentra presente en uno de los factores?

1. $\left[f(x)\right]^n$ con $n \neq -1$	2. $\left[f(x)\right]^{-1}$	3. $e^{f(x)}$	4. $a^{f(x)}$	5. $\operatorname{sen}\left(f(x)\right)$	6. $\cos\left(f(x)\right)$

De acuerdo con lo anterior:
¿Qué fórmula vamos a utilizar para resolver la integral? __________________ .

Paso 3. Comprueba la condición

Hacemos la sustitución:

$f(x)=$ ________ . Al derivar esta función tenemos que $f'(x)=$ ______________ .

La condición que se debe cumplir es que $f'(x)$ sea igual al factor ______________ .

¿Se cumple lo anterior? ________ . ¿Qué le falta? ________________________ .

¿Se puede agregar en el integrando lo que falta? ________ . ¿Por qué? __________ .

¿Qué debemos hacer para no alterar el integrando original? __________________ .

Paso 4. Utiliza la fórmula

La solución es: $F(x)=$ __________________________ .

¡A trabajar!

EJERCICIO 10

Resuelve la siguiente integral indefinida $\int \frac{\ln x}{x \cdot \left(\ln^2 x + 5\right)} dx$.

Solución

Paso 1. Transforma

Expresa la integral como un producto ____ .

Paso 2. Identifica la fórmula

Los factores son:

INTEGRANDO	FACTOR 1	FACTOR 2	FACTOR 3

¡Reflexiona!

¿Qué tipo de función se encuentra presente en uno de los factores?

1. $\left[f(x)\right]^n$ con $n \neq -1$	2. $\left[f(x)\right]^{-1}$	3. $e^{f(x)}$	4. $a^{f(x)}$	5. $\operatorname{sen}\left(f(x)\right)$	6. $\cos\left(f(x)\right)$

De acuerdo con lo anterior:
¿Qué fórmula vamos a utilizar para resolver la integral? _______________________ .

Paso 3. Comprueba la condición

Hacemos la sustitución:

$f(x)=$ ________ . Al derivar esta función tenemos que $f'(x)=$ ___________________ .

La condición que se debe cumplir es que $f'(x)$ sea igual al factor __________________ .

¿Se cumple lo anterior? _________ . ¿Qué le falta? _____________________________ .

¿Se puede agregar en el integrando lo que falta? __________ . ¿Por qué? _____________ .

¿Qué debemos hacer para no alterar el integrando original? _______________________ .

Paso 4. Utiliza la fórmula

La solución es: $F(x)=$ __________________________________ .

¡A trabajar!

EJERCICIO 11 Resuelve la siguiente integral indefinida $\int \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx$.

Solución

Paso 1. Transforma

Expresa la integral como un producto ________________________________ .

Paso 2. Identifica la fórmula

Los factores son:

INTEGRANDO	FACTOR 1	FACTOR 2

¡Reflexiona!

¿Qué tipo de función se encuentra presente en uno de los factores?

1. $[f(x)]^n$ con $n \neq -1$	2. $[f(x)]^{-1}$	3. $e^{f(x)}$	4. $a^{f(x)}$	5. $\operatorname{sen}(f(x))$	6. $\cos(f(x))$

De acuerdo con lo anterior:
¿Qué fórmula vamos a utilizar para resolver la integral? ____________________ .

Paso 3. Comprueba la condición

Hacemos la sustitución:

$f(x) =$ ________ . Al derivar esta función tenemos que $f'(x) =$ ____________________ .

La condición que se debe cumplir es que $f'(x)$ sea igual al factor ________________ .

¿Se cumple lo anterior? ________ . ¿Qué le falta? ____________________ .

¿Se puede agregar en el integrando lo que falta? ________ . ¿Por qué? ____________ .

¿Qué debemos hacer para no alterar el integrando original? ____________________ .

Paso 4. Utiliza la fórmula

La solución es: $F(x) =$ ______________________________ .

¡A trabajar!

EJERCICIO 12

Resuelve la siguiente integral indefinida $\int \frac{\cos\sqrt{x} \cdot e^{\operatorname{sen}\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$.

Solución

Paso 1. Transforma

Expresa la integral como un producto ____ .

Paso 2. Identifica la fórmula

Los factores son:

INTEGRANDO	FACTOR 1	FACTOR 2	FACTOR 3

¡Reflexiona!

¿Qué tipo de función se encuentra presente en uno de los factores?

1. $[f(x)]^n$ con $n \neq -1$	2. $[f(x)]^{-1}$	3. $e^{f(x)}$	4. $a^{f(x)}$	5. $\operatorname{sen}(f(x))$	6. $\cos(f(x))$

De acuerdo con lo anterior:
¿Qué fórmula vamos a utilizar para resolver la integral? __________________________ .

Paso 3. Comprueba la condición

Hacemos la sustitución:

$f(x) =$ _________ . Al derivar esta función tenemos que $f'(x) =$ ______________________ .

La condición que se debe cumplir es que $f'(x)$ sea igual al factor ____________________ .

¿Se cumple lo anterior? __________ . ¿Qué le falta? ____________________________________ .

¿Se puede agregar en el integrando lo que falta? ____________ . ¿Por qué? ______________ .

¿Qué debemos hacer para no alterar el integrando original? __________________________ .

Paso 4. Utiliza la fórmula

La solución es: $F(x) =$ ____________________________________ .

¡A trabajar!

EJERCICIO 13

Resuelve la siguiente integral indefinida $\int \frac{\cos\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}}\,dx$.

Solución

Paso 1. Transforma

Expresa la integral como un producto ______________________________ .

Paso 2. Identifica la fórmula

Los factores son:

INTEGRANDO	FACTOR 1	FACTOR 2

¡Reflexiona!

¿Qué tipo de función se encuentra presente en uno de los factores?

1. $\left[f(x)\right]^n$ con $n \neq -1$	2. $\left[f(x)\right]^{-1}$	3. $e^{f(x)}$	4. $a^{f(x)}$	5. $\operatorname{sen}\left(f(x)\right)$	6. $\cos\left(f(x)\right)$

De acuerdo con lo anterior:
¿Qué fórmula vamos a utilizar para resolver la integral? ________________ .

Paso 3. Comprueba la condición

Hacemos la sustitución:

$f(x)=$ ________ . Al derivar esta función tenemos que $f'(x)=$ ________________ .

La condición que se debe cumplir es que $f'(x)$ sea igual al factor ________________ .

¿Se cumple lo anterior? ________ . ¿Qué le falta? ________________ .

¿Se puede agregar en el integrando lo que falta? ________ . ¿Por qué? ________ .

¿Qué debemos hacer para no alterar el integrando original? ________________ .

Paso 4. Utiliza la fórmula

La solución es: $F(x)=$ ______________________ .

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.2

Resuelve las siguientes integrales de funciones:

1. $\int \frac{e^4}{e^{-x}} dx$
2. $\int (2x^3)(x^3 - 5x) dx$
3. $\int (7\pi + e^2) dx$
4. $\int \frac{16^x}{4^x} dx$
5. $\int 3^w \cdot \ 6^w \, dw$
6. $\int \frac{4}{x^{-4/5}} dx$
7. $\int \pi \, x^{\pi - 1} \, dx$
8. $\int e^{3\ln x} \, dx$
9. $\int \ln\left(e^{(3^x - \ 4)}\right) dx$
10. $\int e^{\ln(x^5+1)} \, dx$
11. $\int \frac{2x^2 + 9x - 5}{(x+5)} dx$
12. $\int \frac{x^2 - 9}{x - 3} dx$
13. $\int w^{-5} (2w + 5w^{1/5} - 3w^{-2}) dw$
14. $\int \frac{t^2 + t - 6}{t^2 + 3t} dt$
15. $\int \frac{y^2 - 16}{y^2 + 4y} dy$
16. $\int 3 \text{ sen } x \ \ dx$

17. $\int (\operatorname{sen} w + \cos w)\ dw$

18. $\int \frac{\cos t}{5}\ dt$

19. $\int \left(\frac{1}{8}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\cos t\right)\ dt$

20. $\int \left(\pi \operatorname{sen} x + 2^{\pi}\right)\ dx$

21. $\int 2x\left(x^2+3\right)^{-5} dx$

22. $\int e^x \sqrt{e^x+8}\ dx$

23. $\int \frac{e^{-x}}{\left(e^{-x}+3\right)^{3}} dx$

24. $\int e^{-x}\left(e - e^{-x}\right)^{-2} dx$

25. $\int 3^{2x}\left(3^{2x}-1\right)^{1/4} dx$

26. $\int 6w^3\left(4-w^4\right)^{-1/5} dw$

27. $\int 30x^2\left(5x^3 - e\right)^{20} dx$

28. $\int \frac{(\ln x)^{4/5}}{x} dx$

29. $\int (2x+1)\ e^{\left(x^2+x\right)} dx$

30. $\int 5x^4 e^{x^5}\ dx$

31. $\int \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$

32. $\int \frac{3^x}{e^{3^x}} dx$

33. $\int \left(4x^2+1\right)\ e^{\left(4x^3+3x\right)} dx$

34. $\int x^2 e^{\left(7-2x^3\right)} dx$

35. $\int 32x^3 e^{-4x^4}\,dx$

36. $\int \dfrac{15}{e^{(6x+3)}}\,dx$

37. $\int 9^{3x^2} 6x\,dx$

38. $\int \dfrac{\pi^{\ln x}}{x}dx$

39. $\int 4^{4x^3-1}x^2\,dx$

40. $\int \dfrac{\ln x\, 8^{\ln^2 x}}{x}dx$

41. $\int \dfrac{8(14.2)^{\ln(5x)}}{x}\,dx$

42. $\int \dfrac{5e^{2x}}{3^{e^{2x}}}\,dx$

43. $\int \dfrac{1}{x\ln x}\,dx$

44. $\int \dfrac{3}{1+3x}\,dx$

45. $\int \dfrac{2x+14x^6}{x^2+2x^7+4}\,dx$

46. $\int \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}\,dx$

47. $\int \dfrac{x^2+4x}{x^3+6x^2}\,dx$

48. $\int \dfrac{7^x}{7^x+\pi}\,dx$

49. $\int \dfrac{(6x+3)\;\;4^{x^2+x}}{4^{x^2+x}+e}dx$

50. $\int \dfrac{2\ln x - x^{1/2}}{3x\left(\ln^2 x - 2x^{1/2}\right)}\,dx$

51. $\int \dfrac{1}{4}x\left(\left(3-5x^2\right)^3\right)^{1/2}\,dx$

52. $\int \frac{x^2}{\left(\left(6x^3-8\right)^4\right)^{1/12}}\,dx$

53. $\int \left(6^x + x^6\right)dx$

54. $\int \left(\pi^{2x} + (2x)^{\pi}\right)dx$

55. $\int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)dx$

56. $\int \left(\frac{e^{\ln x+1}}{x} - x\sqrt{x^2-1}\right)dx$

57. $\int \left(\frac{5x^2}{x^3+1} - \frac{6x}{x^2+3}\right)dx$

58. $\int \left(x^{-1}\left(\ln x^2\right)^{1/3} + 12\,e^{-2x}\right)dx$

59. $\int \left(\frac{3^x}{3^x+5} - x^2\,2^{\left(5x^3-4\right)}\right)dx$

60. $\int \frac{(3+\ln x)}{x^{2/3}}\,6^{x^{1/3}\ln x}\,dx$

61. $\int 7x^3 e^{x^4+3}dx$

62. $\int \frac{1}{x\,\sqrt[3]{\left(\ln x^5\right)}}\,dx$

63. $\int \sqrt[7]{\left(2x-x^4\right)^3}\,\left(1-2x^3\right)dx$

64. $\int x^{-2/3}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^7 dx$

65. $\int \frac{e^{3x}+x^2}{e^{3x}+x^3}dx$

66. $\int \operatorname{sen}(\cos(3x))\ \operatorname{sen}(3x)\ dx$

67. $\int \operatorname{sen}^2(2x)\ \cos(2x)\ dx$

68. $\int \frac{\cos(5x)}{\operatorname{sen}(5x)+1}\ dx$

69. $\int \sqrt{\cos(\pi x) - 3}\ \operatorname{sen}(\pi x)\ dx$

70. $\int e^{\operatorname{sen}(x/2)}\ \cos(x/2)\ dx$

71. $\int 2^{\cos(3x)}\ \operatorname{sen}(3x)\ dx$

72. $\int \cos^{1/3}(6x)\ \operatorname{sen}(6x)\ dx$

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 1.2

1. $e^4 e^x + c$

2. $\frac{2}{5}x^5 - \frac{5}{2}x^4 + c$

3. $\left(7\pi + e^2\right)x + c$

4. $\frac{4^x}{\ln 4} + c$

5. $\frac{18^w}{\ln 18} + c$

6. $\frac{20}{9}x^{9/5} + c$

7. $x^{\pi} + c$

8. $\frac{x^4}{4} + c$

9. $\frac{3^x}{\ln 3} - 4x + c$

10. $\frac{x^6}{6} + x + c$

11. $x^2 - x + c$

12. $\frac{x^2}{2} + 3x + c$

13. $-\frac{2}{3}w^{-3} - \frac{25}{19}w^{-19/5} + \frac{1}{2}w^{-6} + c$

14. $t - 2\ln|t| + c$

15. $y + 4\ln|y| + c$

16. $3 \cos x + c$

17. $\cos\ w - \text{sen}\ w + c$

18. $-\ \frac{1}{5}\text{sen}\ t + c$

19. $\frac{1}{8}\ \cos t + \frac{1}{2}\text{sen}\ t + c$

20. $\pi\ \cos t + 2^{\pi} t + c$

21. $-\frac{1}{4}\left(x^2 + 3\right)^{-4} + c$

22. $\frac{2}{3}\left(e^x + 8\right)^{3/2} + c$

23. $\frac{1}{2}\left(e^{-x} + 3\right)^{-2} + c$

24. $-\ \left(e - e^{-x}\right)^{-1} + c$

25. $\frac{2}{5\ln(3)}\left(3^{2x} - 1\right)^{5/4} + c$

26. $-\frac{15}{8}\left(4 - w^4\right)^{4/5} + c$

27. $\frac{2}{21}\left(5x^3-e\right)^{21}+c$

28. $\frac{5}{9}(\ln x)^{9/5}+c$

29. $e^{x^2+x}+c$

30. $e^{x^5}+c$

31. $2e^{\sqrt{t}}+c$

32. $-\frac{1}{\ln 3}e^{-3^x}+c$

33. $\frac{1}{3}e^{4x^3+3x}+c$

34. $-\frac{1}{6}e^{7-2x^3}+c$

35. $-2e^{-4x^4}+c$

36. $-\frac{5}{2}e^{-6x-3}+c$

37. $\frac{1}{\ln 9}9^{3x^2}+c$

38. $\frac{\pi^{\ln x}}{\ln \pi}+c$

39. $\frac{4^{4x^3-1}}{12\ln 4}+c$

40. $\frac{1}{2\ln 8}8^{\ln^2 x}+c$

41. $\frac{8}{\ln(14.2)}(14.2)^{\ln(5x)}+c$

42. $\frac{5}{3}x+c$

43. $\ln(\ln(x))+c$

44. $\ln(1+3x)+c$

45. $\ln\left(x^2+2x^7+4\right)+c$

46. $\ln\left(e^{2x}-1\right)+c$

47. $\frac{1}{3}\ln\left(x^3+6x^2\right)+c$

48. $\frac{\ln\left(7^x+\pi\right)}{\ln 7}+c$

49. $\frac{3\ln\left(4^{x^2+x}+e\right)}{\ln 4}+c$

50. $\frac{1}{3}\ln\left(\ln^2 x-2x^{1/2}\right)+c$

51. $-\frac{1}{100}\left(3-5x^2\right)^{5/2}+c$

52. $-\frac{1}{18}\left(\frac{1}{6x^3-8}\right)+c$

53. $\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{x^7}{7}+c$

54. $\frac{\pi^{2x}}{2\ln 2}+\frac{(2x)^{\pi+1}}{2(\pi+1)}+c$

55. $\ln(x+1)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)+c$

56. $e^{\ln x+1}-\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)^{3/2}+c$

57. $\frac{5}{3}\ln\left(x^3+1\right)-3\ln\left(x^2+3\right)+c$

58. $\frac{3}{8}\left(\ln x^2\right)^{4/3}-6e^{-2x}+c$

59. $\frac{1}{\ln 3}\ln\left(3^x+5\right)-\frac{2^{5x^3-4}}{15\ln(2)}+c$

60. $\frac{3}{\ln 6}\left(6^{x^{1/3}\ln x}\right)+c$

61. $\frac{7}{4}e^{x^4+3}+c$

62. $\frac{3}{10}\left(\ln x^5\right)^{2/3}+c$

63. $\frac{7}{20}\left(2x-x^4\right)^{10/7}+c$

64. $\frac{3}{8}\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^8+c$

65. $\frac{1}{3}\ln\left(e^{3x}+x^3\right)+c$

66. $-\frac{1}{3}\cos(\cos(3x))+c$

67. $\frac{1}{6}\operatorname{sen}^3(2x)+c$

68. $\frac{1}{5}\ln\left|\operatorname{sen}(5x)+1\right|+c$

69. $-\frac{2}{3\pi}\left(\cos(\pi x)-3\right)^{3/2}+c$

70. $2e^{\operatorname{sen}(x/2)}+c$

71. $-\frac{2^{\cos(3x)}}{3\ln 2}+c$

72. $-\frac{1}{8}\cos^{4/3}(6x)+c$

1.3 INTEGRACIÓN POR PARTES

Las fórmulas de integración aprendidas en las secciones anteriores son útiles únicamente cuando la función del integrando es una función básica o es el producto de una función compuesta y la derivada de la función argumento. Desafortunadamente, no todas las integrales cumplen con las condiciones para resolverse con las fórmulas y reglas vistas hasta el momento; sin embargo, existen estrategias para transformar ciertas integrales a expresiones que resulten más fáciles de integrar, por lo que en esta sección aprenderás otra técnica, llamada *integración por partes*.

Esta técnica se puede utilizar si se presenta alguno de los siguientes casos:

a) Cuando en el integrando aparece un logaritmo natural y no está acompañado de su derivada, por ejemplo: $\int \ln x\, dx$, $\int x \ln\left(x^3\right) dx$, es decir, *faltan variables* a fin de que se cumpla la condición para integrar.

b) Cuando la función del integrando es un **producto** de dos funciones "arbitrarias", es decir:
- Los factores son funciones básicas y no se pueden simplificar por medio de operaciones algebraicas, por ejemplo: $\int x e^x\, dx$, $\int x^2 3^x\, dx$.
- Uno de los factores es una función compuesta y el otro no es la derivada de la función argumento, ya que sobran variables, por ejemplo: $\int x^2 e^{x^2}\, dx$, $\int x\sqrt{x-1}\, dx$.

La técnica de integración por partes tiene su fundamento en la fórmula para derivar el producto de dos funciones, la cual establece que $(u\cdot v)' = u\cdot v' + v\cdot u'$. Si esta fórmula la expresamos en notación de diferenciales, queda como $d(u\cdot v) = u\,dv + v\,du$.

Al integrar ambos lados de la ecuación, se obtiene $\int d(u\cdot v) = \int (u\,dv + v\,du)$.

En el lado izquierdo de la igualdad, la integral y la diferencial se pueden anular debido a que son procesos inversos, y en el lado derecho la integral se puede separar en la suma de dos integrales.

La integral queda como: $\cancel{\int}\cancel{d}(uv) = \int u\,dv + \int v\,du$, es decir, $uv = \int u\,dv + \int v\,du$. Al pasar la segunda integral al lado izquierdo de la igualdad se obtiene la siguiente ecuación:

$uv - \int v\,du = \int u\,dv$, que a su vez se puede escribir como $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Nota: Esta última fórmula $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ es la que se aplica para integrar por partes.

Cómo integrar por partes

Observa que para utilizar esta fórmula se deben identificar en el integrando dos factores o "partes", lo cual equivale a hacer dos cambios de variable. A continuación se da una explicación más detallada del comentario anterior.

Supongamos que la integral $\int f(x)\,g(x)\,dx$ se debe resolver por partes; así, al observar el integrando vemos que se pueden identificar dos factores o "partes", por lo cual habrá que seleccionar una de las funciones como u y la parte restante será el dv; es decir, si por ejemplo se selecciona $u = f(x)$, entonces $dv = g(x)\,dx$. Por el contrario, si se selecciona $u = g(x)$, entonces $dv = f(x)\,dx$. Obsérvese que el diferencial dx siempre acompaña al dv.

Una clave que puede ayudar a seleccionar u y dv es:

La función que se selecciona como u debe simplificarse al derivarla, mientras que la parte seleccionada como dv debe ser fácil de integrar.

Una vez hecha la selección, se deriva u para encontrar el du y se integra el dv para encontrar v; luego se aplica la fórmula de integración por partes.

¿Cómo seleccionar *u* y *dv*?

Los siguientes ejercicios ayudarán a establecer una regla para determinar qué función seleccionar como u.

Construcción

Resuelve la siguiente integral: $\int x \ln x \, dx$.

Solución

Primero debemos determinar la fórmula o método de integración que deberá utilizarse:

a) Veamos si se puede utilizar la regla de la cadena:
Observa que en el integrando aparece una función logaritmo natural; ¿está la derivada de ella en el integrando? ____________________. ¿Se puede agregar en el integrando lo que falta? ____. ¿Por qué? ____.
Si tus respuestas fueron negativas, entonces no se podrá aplicar la regla de la cadena.

b) ¿Se puede aplicar la técnica de integración por partes? _______. ¿Por qué? __________
____.

Una vez determinado que debemos utilizar integración por partes, vemos que en el integrando aparece un producto de dos funciones: una algebraica (x) y otra logarítmica ($\ln x$). Ahora debemos decidir cuál de ellas será u y cuál dv. Recuerda que para aplicar la fórmula se debe derivar u y que dv se integre.

c) Si seleccionamos $u = x$, la parte restante será $dv = \ln x \, dx$.
Al derivar u queda $du =$ ____________________ y al integrar dv se obtiene $v = \int \ln x \, dx$.
Al derivar u ¿se simplifica la derivada?______________. ¿Es fácil de integrar dv?__________
____.

d) Si *no* puedes integrar *dv*, entonces cambia la selección como sigue:
Selecciona $u = \ln x$ y entonces la parte restante será $dv = xdx$.

Al derivar *u* queda du = ________________________. Al integrar *dv* se obtiene

v = ________________. ¿Fue fácil integrar el dv ? ________________.

e) Si tu respuesta fue *sí*, entonces sustituye cada uno de los elementos en la fórmula.

$$\int u\ dv \quad = \quad u\,v \quad - \quad \int v\ du$$

$$\int \ (\_\_\_\_\_)\ (\_\_\_\_\_) = (\_\_\_\_\_)\ (\_\_\_\_\_) - \int \ (\_\_\_\_\_\_\_)\ (\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$$

f) ¿Puedes resolver la integral que corresponde a $\int v\,du$? ________________.

g) ¿Cuál es el resultado de la integral $\int v\,du$? ________________________.

Nota: Al hacer una adecuada selección de *u* y *dv* se logra que la integral $\int v\,du$ que aparece a la derecha de la fórmula de integración por partes sea más sencilla de integrar.

Construcción

Resuelve la siguiente integral: $\int xe^x\,dx$.

Solución

Primero debemos determinar la fórmula o método de integración que deberá utilizarse.

a) Veamos si se puede utilizar la regla de la cadena.

Observa el integrando: ¿aparece en él alguna función compuesta?______________. Si tu respuesta fue *no*, entonces no se puede aplicar la regla de la cadena.

b) ¿Se puede aplicar la técnica de integración por partes? ________. ¿Por qué? ____________

____.

Una vez determinado que debemos utilizar integración por partes, vemos que en el integrando aparece un producto de dos funciones: una algebraica (x) y una exponencial (e^x). Ahora hay que decidir cuál de ellas será *u* y cuál *dv*. Una vez seleccionadas, recuerda que se debe derivar *u* y que *dv* se integra.

c) Si seleccionamos $u = e^x$, entonces la parte restante será $dv = xdx$.

Al derivar *u* queda du = ____________. Al integrar *dv* se obtiene v = ____________.

Al derivar *u* ¿se simplifica la derivada? ____________. ¿Se complica? ________.

¿Fue fácil integrar *dv*? ____.

d) Veamos qué ocurre al sustituir cada uno de los elementos en la fórmula.

$$\int u\ dv \quad = \quad u\,v \quad - \quad \int v\,du$$

$$\int \;(\_\_\_\_\_)\,(\_\_\_\_\_\_) = (\_\_\_\_)\,(\_\_\_\_\_) - \int \;(\_\_\_\_\_\_\_)\,(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$$

e) La integral que corresponde a $\int v\,du$ ¿puedes resolverla?____________________.

Observa que esta última integral es más complicada que la original. La potencia de la función algebraica x aumentó, lo cual implica que se hizo una elección equivocada para u y dv. Cambiemos la selección.

f) Si seleccionamos $u = x$, la parte restante será $dv = e^{x}\ dx$.

Al derivar u queda $du =$ ____________ y al integrar dv se obtiene $v = \int e^{x}\ dx =$ __________

____.

Al derivar u ¿se simplifica la derivada? ______________. ¿Es fácil de integrar dv? __________

____.

Si tu respuesta fue *sí*, sustituye cada uno de los elementos en la fórmula.

$$\int u\ dv \quad = \quad u\,v \quad - \quad \int v\,du$$

$$\int \;(\_\_\_\_\_)\,(\_\_\_\_\_\_) = (\_\_\_\_)\,(\_\_\_\_\_) - \int \;(\_\_\_\_\_\_\_)\,(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$$

g) Ahora, ¿puedes resolver la integral que corresponde a $\int v\,du$? __________________.

h) ¿Cuál es el resultado de la integral $\int v\,du$? _________________________________.

Construcción

Resuelve la siguiente integral: $\int x \ \text{sen}\, x\ dx$.

Solución

Primero debemos determinar la fórmula o método de integración que habrá de utilizarse.

a) Veamos si se puede utilizar la regla de la cadena.
Observa que en el integrando aparece una función trigonométrica; ¿está la derivada de esta en el integrando? ______________________., ¿Se puede agregar en el integrando lo que falta? _____________. ¿Por qué? ____.

Si tus respuestas fueron *no*, entonces no se puede aplicar la regla de la cadena.

b) ¿Se puede aplicar la técnica de integración por partes? ________. ¿Por qué? ____________

____.

Una vez determinado que debemos utilizar integración por partes, vemos que en el integrando aparece un producto de dos funciones: una algebraica (x) y una trigonométrica ($\operatorname{sen} x$). Ahora hay que decidir cuál de ellas será *u* y cuál *dv*. Recuerda que para aplicar la fórmula se debe derivar *u* y que *dv* se integra.

c) Si seleccionamos $u = \operatorname{sen} x$, entonces la parte restante será $dv = x\,dx$.

Al derivar *u* queda $du =$__________ y al integrar *dv* se obtiene $v = \int x\,dx$.

Al derivar *u* ¿ se simplifica la derivada?____________. ¿Es fácil de integrar *dv*? ________

d) Se deja como ejercicio comprobar que al sustituir en la fórmula, la integral de *du* se complica, por tanto, te sugerimos cambiar la selección de *u*:
Selecciona $u = x$, en cuyo caso la parte que resta será $dv = \operatorname{sen} x \; dx$.

Al derivar u queda $du =$ __________y al integrar *dv* se obtiene $v =$ __________.

¿Fue fácil integrar dv ? ____.

e) Si tu respuesta fue *sí*, sustituye cada uno de los elementos en la fórmula.

$$\int u \; dv \quad = \quad u\,v \quad - \quad \int v\,du$$

$\int$ (______) (______) = (_____) (______) − $\int$ (________) (______________)

f) ¿Puedes resolver la integral que corresponde a $\int v\,du$? ____________.

g) ¿Cuál es el resultado de la integral $\int v\,du$? ______________________.

Nota: Al hacer una adecuada selección de *u* y *d*, se logra que la integral $\int v\,du$ que aparece a la derecha de la fórmula de integración por partes sea más sencilla de integrar.

Los ejercicios anteriores serán de utilidad para establecer una regla que permita hacer una selección adecuada para *u* y *dv*, sin necesidad de hacerlo a prueba y error.

Construcción

Utiliza los resultados de los ejercicios 1, 2 y 3 para contestar lo que se te pide a continuación:

INTEGRAL	TIPO DE FUNCIONES QUE APARECEN EN EL INTEGRANDO	FUNCIÓN QUE FUE LA SELECCIÓN MÁS ADECUADA PARA *u*
$\int xe^{x}\,dx$	Algebraica ☐ Logarítmica ☐ Exponencial ☐ Trigonométrica ☐	

INTEGRAL	TIPO DE FUNCIONES QUE APARECEN EN EL INTEGRANDO	FUNCIÓN QUE FUE LA SELECCIÓN MÁS ADECUADA PARA u
$\int x \ln x \, dx$	Algebraica ☐ Logarítmica ☐ Exponencial ☐ Trigonométrica ☐	
$\int x \operatorname{sen} x \, dx$	Algebraica ☐ Logarítmica ☐ Exponencial ☐ Trigonométrica ☐	

Al resolver una integral utilizando el método de integración por partes, ¿cuál de las siguientes funciones se debería seleccionar primero como u? Escribe al lado de cada una ellas un número (del 1 al 4), considera el 1 como mayor prioridad (la que sería bueno seleccionar en primer lugar) y el 4 como menor prioridad.

Algebraica (A) _____ Logarítmica (L) _____ Exponencial (E) _____ Trigonométrica (T) _____

De acuerdo con tu selección, escribe las letras mayúsculas en los paréntesis en orden de mayor a menor prioridad. ¿Qué siglas se forman?__________________.

Utilizar esta nemotecnia evita, en la mayoría de los casos, que la selección de u se haga a prueba y error.

Nota: Estas siglas no se aplican en todos los casos, pero funcionan en la mayoría de ellos.

Ejemplo 1

Resuelve la integral indefinida $\int x^3 \ln x \, dx$.

Solución

Primero hay que determinar la fórmula o método que debemos utilizar para resolverla.

Observa que el integrando consta del producto de dos funciones —una algebraica (x^3) y una logarítmica ($\ln x$)— y la derivada de esta última no aparece en el integrando; por tanto, concluimos que para resolver esa integral debemos utilizar la técnica de integración por partes.

Ahora, de acuerdo con las siglas LATE que obtuvimos en el ejercicio anterior, la función que tiene prioridad para ser seleccionada como u es la logarítmica. Así, $u = \ln x$ y, por tanto, el diferencial dv será $dv = x^3 dx$.

Luego, al derivar u obtenemos que $du = \frac{1}{x} dx$ y al integrar dv obtenemos que $v = \frac{x^4}{4}$.

Ahora hay que sustituir en la fórmula cada uno de los elementos obtenidos, para integrar por partes.

$$\int u \, dv = u \, v - \int v \, du$$

$$\int x^3 \ln x \, dx = (\ln x)\left(\frac{x^4}{4}\right) - \int \left(\frac{x^4}{4}\right)\left(\frac{1}{x} dx\right)$$

En la integral que aparece en el lado derecho de la igualdad efectuamos el producto de las funciones que se encuentran dentro del integrando:

$$\int x^3 \ln x \, dx = (\ln x)\left(\frac{x^4}{4}\right) - \int \frac{x^4}{4x} \, dx$$

Ahora sacamos las constantes de la integral y simplificamos el integrando:

$$\int x^3 \ln x \, dx = (\ln x)\left(\frac{x^4}{4}\right) - \frac{1}{4}\int x^3 \, dx$$

Por último, al aplicar la fórmula para integrar una función potencia, obtenemos

$$\int x^3 \ln x \, dx = (\ln x)\left(\frac{x^4}{4}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4}\right) + C$$

que se puede escribir como:

$$\int x^3 \ln x \, dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C \, .$$

Ejemplo 2

Resuelve la integral indefinida $\int x^2 e^{3x} \, dx$.

Solución

Primero se ha de determinar la fórmula o método que debemos utilizar para resolverla.

Observa que el integrando consta del producto de dos funciones —una algebraica (x^2) y una función exponencial compuesta (e^{3x})— y, aunque la derivada de la interna se puede completar, en este caso *sobra* en el integrando la función x^2. Esto implica que el integrando es el producto de dos funciones arbitrarias; por tanto, concluimos que para resolver esa integral hay que utilizar la técnica de integración por partes.

Ahora, como en el integrando no aparece una función logarítmica, de acuerdo con las siglas LATE, la función que tiene prioridad para ser seleccionada como u es la algebraica. Así que, $u = x^2$ y, por tanto, el diferencial dv será $dv = e^{3x} dx$.

Luego, al derivar u obtenemos que $du = 2x \, dx$ y al integrar dv obtenemos que $v = \frac{1}{3}e^{3x}$.

Ahora en la fórmula hay que sustituir cada uno de los elementos obtenidos, para integrar por partes.

$$\int u \, dv = u\, v - \int v \, du$$

$$\int x^2 \boxed{e^{3x} \, dx} = \left(x^2\right)\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right) - \int \left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)(2x dx)$$

Efectuamos el producto de funciones que aparece en la integral que se encuentra a la derecha de la igualdad:

$$\int x^2 e^{3x} \, dx = \left(x^2\right)\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right) - \int \left(\frac{2x\, e^{3x}}{3}\right) dx \, .$$

Ahora sacamos las constantes de dicha integral:

$$\int x^2 e^{3x} \, dx = \left(x^2\right)\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right) - \frac{2}{3}\int x\, e^{3x} \, dx \, .$$

Observamos que la integral obtenida en el lado derecho $\left(\int x\, e^{3x}\, dx\right)$ requiere nuevamente integración por partes, debido a que es un producto de funciones arbitrarias muy similar a la original, pero resulta en sí más simple, ya que la potencia en la variable x es menor.

Hacemos la selección para u y dv utilizando las siglas LATE; para ello, escogemos $u = x$ y $dv = e^{3x}dx$.

Luego, al derivar u obtenemos $du = dx$ y al integrar dv obtenemos $v = \frac{1}{3}e^{3x}$.

Ahora, si se sustituye cada uno de los elementos obtenidos en la fórmula para integrar por partes, obtenemos $\int x\, e^{3x}\, dx = x\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right) - \int \frac{1}{3}e^{3x}\, dx$. De este modo, si sustituimos este resultado en la integral original nos queda:

$$\int x^2 e^{3x}\, dx = \left(x^2\right)\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right) - \frac{2}{3}\overbrace{\left[x\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right) - \int \frac{1}{3}e^{3x}\, dx\right]}^{\int x\, e^{3x}\, dx}.$$

Al multiplicar el 2/3 por cada uno de los términos que se encuentran dentro del corchete, el lado derecho de la igualdad se puede escribir como:

$$\int x^2 e^{3x}\, dx = \left(\frac{1}{3}x^2 e^{3x}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x\, e^{3x}\right) + \frac{2}{9}\int e^{3x}\, dx .$$

Resolvemos la última integral que nos falta y obtenemos:

$$\int x^2 e^{3x}\, dx = \left(\frac{1}{3}x^2 e^{3x}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x\, e^{3x}\right) + \frac{2}{9}\left(\frac{1}{3}e^{3x}\right) + C ,$$

que al efectuar los productos de fracciones puede escribirse como:

$$\int x^2 e^{3x}\, dx = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{9}x\, e^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C .$$

Nota: Observa que en este ejemplo aplicamos dos veces la fórmula para integrar por partes. Esto podrá llevarse a cabo tantas veces como sea necesario si la integral resultante $\int v\, du$ puede resolverse por partes, siempre y cuando sea más sencilla que la original.

Ejemplo 3

Resuelve la integral indefinida $\int x\sqrt{x+1}\, dx$.

Solución

Primero hay que determinar la fórmula o método que debemos utilizar para resolverla.

Observa que el integrando consta del producto de dos funciones: una función potencia básica (x) y una función potencia compuesta ($\sqrt{x+1}$) y, aunque la derivada de la interna está completa, en este caso sobra en el integrando la función x ; esto implica que el integrando es el producto de dos funciones arbitrarias. Por tanto, concluimos que esa integral se podrá resolver si se utiliza la técnica de integración por partes.

Ahora, como en el integrando aparecen dos funciones algebraicas, las siglas LATE no nos ayudan a seleccionar la u; sin embargo, recuerda que la función que selecciones como u debe simplificarse al derivarla. Por tanto, la función que en este caso tiene prioridad para ser seleccionada como u es x, ya que al derivarla su potencia se disminuye en una unidad.

Así, $u = x$; por tanto, el diferencial dv será $dv = \sqrt{x+1}\,dx$.

Luego, al derivar u obtenemos que $du = dx$ y al integrar dv obtenemos que $v = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$.

Ahora debemos sustituir en la fórmula cada uno de los elementos obtenidos, para integrar por partes.

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = (x)\left(\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right) - \int\left(\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right)dx$$

En la integral del lado derecho, sacamos como factor al 2/3 y al resolver la integral nos queda:

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = (x)\left(\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\right) - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{5}(x+1)^{5/2}\right] + C.$$

Al efectuar los productos de fracciones obtenemos:

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{3}x(x+1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+1)^{5/2} + C.$$

Nota: Algunas integrales como la del ejemplo 3 también se pueden resolver si se utiliza la regla de la cadena. En estos casos se deja al lector la opción de decidir el método que más le guste.

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Resuelve la integral $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.

Primero debes determinar la fórmula o método que vas utilizar; para ello, observa el integrando y contesta las siguientes preguntas:

¿Cumple con alguno de los casos para aplicar la técnica de integración por partes? __________.

¿Con cuál? ____.

Si la integral se resuelve mediante integración por partes, utiliza las siglas LATE para seleccionar u y dv:

u = ____________________	dv = ____________________
Deriva u. du = ____________________	Integra dv. v = ____________________

Por último, utiliza la fórmula para integrar por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

¡A trabajar!

EJERCICIO 2

Resuelve la integral $\int xe^{-x}dx$.

Primero debes determinar la fórmula o método que vas utilizar; para ello, observa el integrando y contesta las siguientes preguntas:

¿Cumple con alguno de los casos para aplicar la técnica de integración por partes? ____________.

¿Con cuál? ____.

Si la integral se resuelve mediante integración por partes, utiliza las siglas LATE para seleccionar u y dv:

$u =$ ____________	$dv =$ ____________
Deriva u. $du =$ ____________	Integra dv. $v =$ ____________

Por último, utiliza la fórmula para integrar por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

¡A trabajar!

EJERCICIO 3

Resuelve la integral $\int \ln(x+1)\,dx$.

Primero debes determinar la fórmula o método que vas utilizar; para ello, observa el integrando y contesta las siguientes preguntas:

¿Cumple con alguno de los casos para aplicar la técnica de integración por partes? ____________.

¿Con cuál? ____.

Si la integral se resuelve mediante integración por partes, utiliza las siglas LATE para seleccionar u y dv:

$u =$ ______________________	$dv =$ ______________________
Deriva ***u***. $du =$ ______________________	Integra ***dv***. $v =$ ______________________

Por último, utiliza la fórmula para integrar por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

¡A trabajar!

EJERCICIO 4

Resuelve la integral $\int xe^{x/2}dx$.

Primero debes determinar la fórmula o método que vas a utilizar; para ello, observa el integrando y contesta las siguientes preguntas:

¿Cumple con alguno de los casos para aplicar la técnica de integración por partes? ____________.

¿Con cuál? ____.

Si la integral se resuelve mediante integración por partes, utiliza las siglas LATE para seleccionar u y dv:

$u =$ ____________________	$dv =$ ____________________
Deriva *u*. $du =$ ____________________	Integra *dv*. $v =$ ____________________

Por último, utiliza la fórmula para integrar por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

¡A trabajar!

EJERCICIO 5

Resuelve la integral $\int \ln^2 x\,dx$.

Primero debes determinar la fórmula o método que vas utilizar; para ello, observa el integrando y contesta las siguientes preguntas:

¿Cumple con alguno de los casos para aplicar la técnica de integración por partes? __________.

¿Con cuál? ____.

Si la integral se resuelve mediante integración por partes, utiliza las siglas LATE para seleccionar *u* y *dv*:

$u =$ ____________________	$dv =$ ____________________
Deriva *u*. $du =$ ____________________	Integra *dv*. $v =$ ____________________

Por último, utiliza la fórmula para integrar por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

¡A trabajar!

EJERCICIO 6

Resuelve la integral $\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$.

Primero debes determinar la fórmula o método que vas utilizar; para ello, observa el integrando y contesta las siguientes preguntas:

¿Cumple con alguno de los casos para aplicar la técnica de integración por partes? ______.

¿Con cuál? ______________________________.

Si la integral se resuelve mediante integración por partes, en este caso las siglas LATE no funcionan. Para seleccionar *u*, piensa que al derivarla se debe simplificar y que *dv* ha de ser fácil de integrar. (**Sugerencia:** escribe x^3 como el producto de $x^2 \cdot x$ para que puedas completar el *dv*.)

u = ______________	dv = ______________
Deriva ***u***. du = ______________	Integra ***dv***. v = ______________

Por último, utiliza la fórmula para integrar por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

¡A trabajar!

EJERCICIO 7

Resuelve la integral $\int x\cos x\,dx$.

Primero debes determinar la fórmula o método que vas utilizar; para ello, observa el integrando y contesta las siguientes preguntas:

¿Cumple con alguno de los casos para aplicar la técnica de integración por partes? ______.

¿Con cuál? ______________________________.

Si la integral se resuelve mediante integración por partes, en este caso las siglas LATE no funcionan. Para seleccionar *u*, piensa que al derivarla se debe simplificar y que *dv* ha de ser fácil de integrar.

$u =$ ______________________	$dv =$ ______________________
Deriva *u*. $du =$ ______________________	Integra *dv*. $v =$ ______________________

Por último, utiliza la fórmula para integrar por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

¡A trabajar!

EJERCICIO 8

Resuelve la integral $\int \operatorname{sen} x \cdot e^{x}\,dx$.

Primero debes determinar la fórmula o método que vas utilizar; para ello, observa el integrando y contesta las siguientes preguntas:

¿Cumple con alguno de los casos para aplicar la técnica de integración por partes? __________.

¿Con cuál? ____.

Si la integral se resuelve mediante integración por partes, en este caso las siglas LATE no funcionan. Para seleccionar *u*, piensa que al derivarla se debe simplificar y que *dv* ha de ser fácil de integrar.

$u =$ ______________________	$dv =$ ______________________
Deriva *u*. $du =$ ______________________	Integra *dv*. $v =$ ______________________

Por último, utiliza la fórmula para integrar por partes: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

¡A trabajar!

EJERCICIO 9

Resuelve la integral $\int x^3 e^{x^2} dx$.

Primero debes determinar la fórmula o método que vas utilizar; para ello, observa el integrando y contesta las siguientes preguntas:

¿Cumple con alguno de los casos para aplicar la técnica de integración por partes? ________.

¿Con cuál? ____.

Si la integral se resuelve mediante integración por partes, utiliza las siglas LATE para seleccionar u y dv. (**Sugerencia:** recuerda que $x^3 = x^2 x$.)

$u =$ ______________	$dv =$ ______________
Deriva ***u***. $du =$ ______________	Integra ***dv***. $v =$ ______________

Por último, utiliza la fórmula para integrar por partes: $\int u\, dv = uv - \int v\, du$.

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.3

Obtener la integral indefinida utilizando integración por partes.

1. $\int \ln(2x+1)dx$

2. $\int 6\ln\left(x^2\right)dx$

3. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[4]{x}}\, dx$

4. $\int (x-1)^{-3} \ln(1-x)dx$

5. $\int x^2 e^{-x}\, dx$

6. $\int te^{2t}\, dt$

7. $\int \ln(3t)\, dt$

8. $\int \ln\left(x^{2/3}\right) dx$

9. $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$

10. $\int \left(x^4 - 8\right) \ln x\ dx$

11. $\int \frac{4x-1}{e^{2x}}\, dx$

12. $\int 3xe^{\left(-\frac{x}{3}+2\right)} dx$

13. $\int 5xe^{2x}\, dx$

14. $\int x^2 e^x\, dx$

15. $\int 2^{-x} x\, dx$

16. $\int 4^{3x}(6x-1)\, dx$

17. $\int x(2.8)^x\, dx$

18. $\int x^2 \pi^x\, dx$

19. $\int 20x\ e^{x/3}\, dx$

20. $\int \frac{1}{2} x \, e^{-\frac{x}{5}} dx$

21. $\int 12 \ln \sqrt{2x} \, dx$

22. $\int 3x \ln \sqrt{x^2+1} \, dx$

23. $\int \left(6x^2+6\right) \ln\left(2x^3+6x\right) dx$

24. $\int x^5 e^{x^3} \, dx$

25. $\int \frac{x}{\sqrt{3x+16}} \, dx$

26. $\int \frac{2}{3} x (5-x)^{-2/3} \, dx$

27. $\int t^3 3^{t^2} \, dt$

28. $\int x^3 e^{5^{x^2}} \, dx$

29. $\int \frac{x 4^x}{(x \ln 4 + 1)^2} \, dx$

30. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^3}} \, dx$

31. $\int \left(e^x + 3x\right)^2 dx$

32. $\int (\ln x + x)^2 \, dx$

33. $\int e^{-2x} \left(e^{-x}+4\right)^{1/5} dx$

34. $\int e^{-x} \cos x \, dx$

35. $\int x^3 \cos\left(x^2\right) \, dx$

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 1.3

1. $x\ln(2x+1)-x+\frac{1}{2}\ln(2x+1)+C$

2. $6x^2\ln x-3x^2+C$

3. $\frac{4}{3}x^{3/4}\ln x-\frac{16}{9}x^{3/4}+C$

4. $-\frac{1}{2}(x-1)^{-2}\ln(1-x)-\frac{1}{4}(x-1)^{-2}+C$

5. $-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C$

6. $-te^{2-t}-e^{2-t}+C$

7. $t\ln(3t)-t+C$

8. $x\ln(x^{2/3})-\frac{2}{3}x+C$

9. $-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$

10. $\left(x^5-8x\right)\ln x-\frac{x^5}{25}+8x+C$

11. $-\frac{1}{2}(4x-1)e^{-2x}-e^{-2x}+C$

12. $-9xe^{\left(-\frac{x}{3}+2\right)}-27e^{\left(-\frac{x}{3}+2\right)}+C$

13. $\frac{5}{2}xe^{2x}-\frac{5}{4}e^{2x}+C$

14. $x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$

15. $\dfrac{-x2^{-x}}{\ln 2}-\dfrac{2^{-x}}{(\ln 2)^2}+C$

16. $\dfrac{(9x-1)4^{3x}}{3\ln 4}-\dfrac{2(4^{3x})}{3(\ln 4)^2}+C$

17. $\dfrac{x(2.8)^x}{\ln 2.8}-\dfrac{(2.8)^x}{(\ln 2.8)^2}+C$

18. $\dfrac{x^2(\pi)^x}{\ln \pi}-\dfrac{2x(\pi)^x}{(\ln \pi)^2}+\dfrac{2(\pi)^x}{(\ln \pi)^3}+C$

19. $60xe^{\left(\frac{x}{3}\right)}-180e^{\left(\frac{x}{3}\right)}+C$

20. $-\dfrac{5}{2}xe^{\left(-\frac{x}{5}\right)}-\dfrac{25}{2}e^{\left(-\frac{x}{5}\right)}+C$

21. $12x\ln\sqrt{2x}-6x+C$

22. $\dfrac{3}{2}x^2\ln\sqrt{x^2+1}-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{3}{4}\ln\left(x^2+1\right)+C$

23. $\left(2x^3+6x\right)\ln\left(2x^3+6x\right)-2x^3-6x+C$

24. $\dfrac{1}{3}x^3e^{x^3}-\dfrac{1}{3}e^{x^3}+C$

25. $\dfrac{2}{3}x(3x+16)^{1/2}-\dfrac{4}{27}(3x+16)^{3/2}+C$

26. $-3x(5-x)^{1/3}-\dfrac{4}{9}(5-x)^{4/3}+C$

27. $\dfrac{t^2(3)^{t^2}}{2\ln 3}-\dfrac{(3)^{t^2}}{2(\ln 3)^2}+C$

28. $\dfrac{1}{10}xe^{5x^2}-\dfrac{1}{50}e^{5x^2}+C$

29. $\dfrac{-x4^x}{\ln 4(x\ln 4+1)}+\dfrac{4^x}{(\ln 4)^2}+C$

30. $-\frac{2}{3}x^3\left(1-x^3\right)^{1/2}-\frac{4}{9}\left(1-x^3\right)^{3/2}+C$

31. $\frac{1}{2}e^{2x}+6xe^x-6e^x+3x^3+C$

32. $x(\ln x+x)^2-2\left(x+\frac{x^2}{2}\right)(\ln x+x)+2x+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+C$

33. $-\frac{5}{6}\left(e^{-x}+4\right)^{6/5}+\frac{25}{66}\left(e^{-x}+4\right)^{11/5}+C$

34. $\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\operatorname{sen} x)+C$

35. $\frac{1}{2}x^2\cos\left(x^2\right)-\frac{1}{2}\cos\left(x^2\right)+C$

1.4 ECUACIONES DIFERENCIALES

Muchas situaciones de la vida diaria —especialmente aquellas en las que se conoce la tasa (ritmo o razón) con la cual una cantidad crece o decrece, o cuando nos dan los costos, ingresos o utilidades marginales, o bien la rapidez a la que un objeto se calienta o se enfría, etc., y en general todas aquellas situaciones en las que nos proporcionan información acerca de la rapidez con que cambia una función— se representan mediante ecuaciones matemáticas en las que se utilizan derivadas. Estas ecuaciones se conocen con el nombre de *ecuaciones diferenciales*.

Una *ecuación diferencial* es una ecuación que nos da información con respecto a la rapidez de cambio de una función desconocida.

Las ecuaciones diferenciales se pueden reconocer fácilmente porque contienen derivadas y/o diferenciales.

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Determina si las ecuaciones dadas a continuación se pueden considerar o no ecuaciones diferenciales.

a) $(\ln y)\,y' = 5x + y'$

b) $\dfrac{dy}{x} = (e^x - 1)\,dx$

c) $y'' = x$

d) $x^2 + 5x + 6 = 0$

Solución

La ecuación $(\ln y)\,y' = 5x + y'$ ¿contiene por lo menos una derivada? ______.

¿Es entonces una ecuación diferencial? ______.

La ecuación $\dfrac{dy}{x} = (e^x - 1)\,dx$ no contiene derivadas; sin embargo, ¿contiene diferenciales? ______.

¿Es entonces una ecuación diferencial? ______.

La ecuación $y'' = x$ ¿contiene por lo menos una derivada? ______.

¿Es entonces una ecuación diferencial? ______.

La ecuación $x^2 + 5x + 6 = 0$ ¿contiene derivadas o diferenciales? ______.

¿Es entonces una ecuación diferencial? ______.

Nota: Cuando las ecuaciones diferenciales contienen derivadas (o diferenciales) respecto a una sola variable independiente se llaman *ecuaciones diferenciales ordinarias*.

Solución de una ecuación diferencial

Cuando nos dan una ecuación diferencial, solo tenemos información acerca de la rapidez de cambio de una función, pero si necesitamos conocer la función, esta se puede obtener mediante el proceso de integración. Sin embargo, a menudo hay que hacer transformaciones o sustituciones algebraicas sobre la ecuación para escribirla de tal forma que se pueda integrar.

La forma más simple de una ecuación diferencial es aquella en la cual la derivada está escrita en forma explícita como una función de la variable independiente x, es decir, tiene la forma $y' = f(x)$, o en notación de diferenciales se puede escribir como $\frac{dy}{dx} = f(x)$.

A su vez, esta ecuación se puede expresar como $dy = f(x)dx$; sin embargo, estas forman parten de un tipo de ecuación diferencial más general, conocido como *variables separables*.

Ecuaciones diferenciales de variables separables

Estas ecuaciones son de primer orden, es decir, en ellas solo se involucra a la primera derivada de la función desconocida. La forma general de estas ecuaciones es $g(y)y' - f(x) = 0$.

Su nombre se debe a que sus variables se pueden separar, es decir, la ecuación se puede escribir como $g(y)y' = f(x)$, con lo cual se logra que en el lado izquierdo de la igualdad aparezcan, por ejemplo, las y´s, mientras que en el lado derecho se encuentren las x´s.

Otra forma como se pueden representar estas ecuaciones es mediante el uso de la notación de diferenciales: $g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$ o bien $g(y)dy = f(x)dx$.

En general, decimos lo siguiente:

Una ecuación diferencial será de *variables separables* si se puede escribir en la forma:
$$g(y)dy = f(x)dx\,.$$

El proceso de solución de una ecuación diferencial de variables separables lo ilustraremos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1

Resuelve la siguiente ecuación: $y' = \frac{y}{x}$.

Solución

Paso 1. Lo primero que debemos hacer es separar las variables, es decir, que la ecuación se vea de la forma $g(y)dy = f(x)dx$; para lograrlo se aplican las leyes del álgebra.

En este caso primero sustituiremos y' por su equivalente en diferenciales $\frac{dy}{dx}$ y la ecuación queda como $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

Observa que las variables se podrán separar si el diferencial dx se pasa multiplicando al lado derecho de la igualdad y la variable y se pasa dividiendo al lado izquierdo; al hacerlo la ecuación queda como $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$.

Paso 2. Una vez separadas las variables, se integran ambos lados de la igualdad: $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$.

Al integrar se obtiene $\ln y = \ln x + C$.

Se dice que esta ecuación es la solución general de la ecuación diferencial.

Nota: Observa que la variable y no se encuentra despejada en términos de la variable x; cuando esto ocurre diremos que la solución general está expresada en forma implícita.

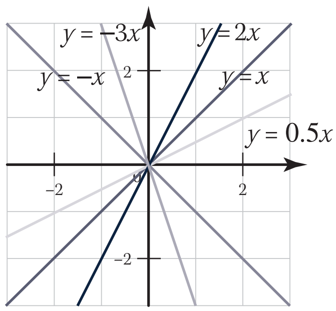
Para obtener la solución general en forma explícita debemos despejar la variable y en términos de la variable x.

Para despejar la variable y de la ecuación $\ln y = \ln x + C$ aplicamos la función exponencial en ambos lados de la igualdad, en cuyo caso se obtiene $e^{\ln y} = e^{(\ln x + C)}$.

Al utilizar las propiedades de las funciones exponenciales nos queda $y = e^{\ln x} e^{C}$, pues C es una constante arbitraria. Entonces podemos suponer que $e^{C} = C$. De esta manera se llega a que $y = Cx$ es la solución general de la ecuación diferencial (expresada en forma explícita).

Observa que para cada valor de C se puede obtener una solución diferente que satisface la ecuación diferencial; por ello, esta solución se llama *solución general* y constituye una familia de soluciones de acuerdo con el valor de la constante C. En la figura 1 se representan gráficamente varios valores del parámetro C de esta familia de soluciones.

Figura 1. Familia de soluciones



La *solución general* de una ecuación diferencial es una función que satisface la ecuación y que contiene una o más constantes arbitrarias.

Si quisiéramos obtener solo una de estas soluciones, simplemente deberíamos asignar un punto específico (a, b), llamado *condición inicial*, por donde debe pasar la curva solución. Al sustituir este punto en la solución general, se obtiene un valor específico para la constante de integración C; esto hace que la solución general se convierta en una solución particular.

La *solución particular* de una ecuación diferencial es una función que satisface la ecuación y cuya constante de integración toma un valor específico, de acuerdo con las condiciones iniciales (también llamadas *condiciones de frontera*).

Notas:

1. Cuando se tiene una ecuación diferencial y un punto, se dice que se tiene un problema con *condición inicial*.
2. La condición inicial también se conoce con el nombre de *valor inicial* o *condición de frontera*.

Ejemplo 2

Encuentra la solución particular de la ecuación diferencial $e^y y' - x + 1 = 0$ sujeta a la condición inicial $y(1) = 0$.

Solución

Paso 1. Lo primero que debemos hacer es separar las variables, es decir, que la ecuación se vea de la forma $g(y)dy = f(x)dx$; para lograrlo se aplican las leyes del álgebra. En este caso, al despejar $e^y y'$ nos queda $e^y y' = x - 1$.

Ahora al sustituir y' por su equivalente $\frac{dy}{dx}$ obtenemos $e^y \frac{dy}{dx} = x - 1$.

Por último, al multiplicar ambos lados de la igualdad por dx nos queda $e^y dy = (x-1)dx$.

Paso 2. Una vez separadas las variables, se integran ambos lados de la igualdad:
$\int e^y\, dy = \int (x-1)dx$.

Al aplicar fórmulas y propiedades para integrar obtenemos $e^y = \frac{x^2}{2} - x + C$, que es la solución general expresada de forma implícita.

Paso 3. Se sustituye la condición inicial en la ecuación obtenida en el paso 2 para encontrar el valor de la constante C y así obtener la solución particular.

La condición inicial en este caso $y(1) = 0$ es equivalente a $f(1) = 0$, lo cual implica que $x = 1$ y $y = 0$. Esto significa que la función buscada debe pasar por el punto (1, 0). Así, al sustituir los valores $x = 1$ y $y = 0$ en la ecuación anterior obtenemos $e^0 = \frac{1^2}{2} - 1 + C$.

Si en el lado izquierdo de la igualdad sustituimos e^0 por 1 y en el derecho efectuamos operaciones para simplificar, obtenemos $1 = -\frac{1}{2} + C$ y al despejar C obtenemos $C = 3/2$.

Al sustituir este valor en la solución general obtenida en el paso 2 obtenemos $e^y = \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2}$. Esta es la solución particular, pero expresada en forma implícita, ya que la variable dependiente y no está despejada.

Paso 4. De la ecuación obtenida en el paso 3 se despeja la variable y (si es posible). En este ejemplo la variable y se encuentra en el exponente. Recuerda al respecto lo siguiente: para despejar una variable que se encuentra en un exponente se utiliza la función logaritmo natural.

Al hacerlo obtenemos: $\ln(e^y) = \ln\left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2}\right)$.

Al utilizar las leyes de los logaritmos nos queda $y = \ln\left(\frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2}\right)$. Esta función es la solución particular (expresada en forma explícita).

El proceso seguido en los ejemplos anteriores se presenta en el siguiente recuadro:

Estrategia para resolver ecuaciones diferenciales de variables separables

Paso 1. Separación de variables.
Se utilizan las leyes del álgebra para agrupar las variables x´s junto con el dx en el lado derecho de la igualdad y las variables y´s junto con el dy en el lado izquierdo, es decir, hay que transformar la ecuación original a la forma $g(y)dy = f(x)dx$.
Si en la ecuación aparece y', deberá transformarse a la forma $\frac{dy}{dx}$. Los diferenciales dx y dy nunca deben quedar en el denominador.

Paso 2. Una vez que la ecuación se ha transformado a la forma $g(y)dy = f(x)dx$, se integran ambos lados de la igualdad.

Paso 3. Si hay condiciones iniciales, se sustituyen en la solución general obtenida en el paso anterior y se obtiene la solución particular.

Paso 4. Se despeja la variable y (si es posible).

Ejemplo 3

Encuentra la solución general de la ecuación diferencial $y' = \frac{x\sqrt{1+y^3}}{y^2}$.

Solución

Paso 1. Separar las variables
Al sustituir y' por su equivalente $\frac{dy}{dx}$ se obtiene $\frac{dy}{dx} = \frac{x\sqrt{1+y^3}}{y^2}$.

Observa que la ecuación es de variables separables, ya que si se multiplican ambos lados de la igualdad por y^2dx se obtiene $(y^2dx)\frac{dy}{dx} = \frac{x\sqrt{1+y^3}}{y^2}(y^2dx)$.

Simplificando se llega a $y^2dy = x\sqrt{1+y^3}\,dx$.

Ahora, si el radical se pasa dividiendo, nos quedan separadas las variables $\frac{y^2dy}{\sqrt{1+y^3}} = xdx$.

Paso 2. Integrar ambos lados de la igualdad

$$\int \frac{y^2dy}{\sqrt{1+y^3}} = \int x\,dx.$$

Al aplicar las fórmulas de integración básicas en el lado derecho y las fórmulas para funciones compuestas en el lado izquierdo, se obtiene:

$$\frac{2(1+y^3)^{1/2}}{3} = \frac{x^2}{2} + C \text{ (solución general de forma implícita).}$$

Paso 3. No se aplica en este caso, ya que no hay condiciones iniciales.

Paso 4. Despejar la variable y
Al multiplicar ambos lados de la ecuación anterior por 3/2 se obtiene:

$$\frac{3}{2}\left[\frac{2(1+y^3)^{1/2}}{3}\right] = \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2} + C\right].$$

Al simplificar nos queda $(1+y^3)^{1/2} \;=\; \frac{3x^2}{4}+\frac{3C}{2}$.

Si consideramos que $\frac{3C}{2}=C$ y si se elevan al cuadrado ambos lados de la igualdad para eliminar la raíz, se obtendrá $1+y^3=\left(\frac{3x^2}{4}+C\right)^2$. Luego se resta 1 en ambos lados y, por último, se extrae raíz cúbica para despejar y; se obtiene: $y=\sqrt[3]{\left(\frac{3x^2}{4}+C\right)^2-1}$ (solución general explícita).

¡A trabajar!

EJERCICIO 2

Encuentra la solución general de la ecuación diferencial $y'-y=1$.

Paso 1. Separar variables

Paso 2. Integrar en ambos lados

Paso 3. Obtener C

Paso 4. Despejar la variable y

¡A trabajar!

EJERCICIO 3

Encuentra la solución particular de la ecuación diferencial $x\frac{dy}{dx}=y\cdot\ln y\cdot\ln x$ sujeta a la condición inicial x = e y y = e.

Paso 1. Separar variables

Paso 2. Integrar en ambos lados

Paso 3. Obtener C

Paso 4. Despejar la variable y

¡A trabajar!

EJERCICIO 4

Encuentra la solución particular de la ecuación diferencial $y' - y = \frac{y}{e^x}$ con la condición inicial $f(2) = 1$.

Paso 1. Separar variables

Paso 2. Integrar en ambos lados

Paso 3. Obtener C

Paso 4. Despejar la variable y

¡A trabajar!

EJERCICIO 5

Encuentra la solución particular de la ecuación diferencial $x^2 y' - 6x + 12 = 0$ con la condición inicial $y(1) = 20$.

Paso 1. Separar variables

Paso 2. Integrar en ambos lados

Paso 3. Obtener C

Paso 4. Despejar la variable y

¡A trabajar!

EJERCICIO 6

Resuelve el siguiente problema con valor inicial $y\,y' = e^{x+y^2}$; (0, 0).

Paso 1. Separar variables

Paso 2. Integrar en ambos lados

Paso 3. Obtener C

Paso 4. Despejar la variable y

¡A trabajar!

EJERCICIO 7

Encuentra la solución particular de la ecuación diferencial $\dfrac{\sqrt{q^2-2}\cdot dp}{q\cdot dq}-e^{2p+1}=0$ con la condición inicial $p = 0$ y $q = 4$.

Paso 1. Separar variables

Paso 2. Integrar en ambos lados

Paso 3. Obtener C

Paso 4. Despejar la variable y

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.4

En los problemas del 1 al 17 obtén la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $\frac{dy}{dx}=\left(8x^4-e^x\right)y$

2. $\frac{dy}{dx}=6x^2y^3-2xy^3+y^3$

3. $ydy=\left(\pi^t+t^\pi\right)dt$

4. $\frac{dy}{dx}=6^x\sqrt{y}$

5. $\frac{1}{2}dy=\frac{3^x\ln 8}{5y^2}dx$

6. $xdy=e^{2y}\ln x dx$

7. $\frac{dy}{(6x+5)}=y^{1/3}e^{\left(3x^2+5x\right)}dx$

8. $y\frac{dy}{dx}=\frac{(20x-2)\ 8^{5x^2-x}}{8^{5x^2-x}+\frac{2}{5}}$

9. $\frac{1}{28.3}\ \frac{dP}{dt}=(1.045)^{t+3}$

10. $(1+x-y^2-xy^2)\frac{dy}{dx}=1$

11. $\sqrt{y^3+3}\ \frac{dy}{dx}=\frac{\ln x}{x^2y^2}$

12. $x^{-2}dy=e^{-5x}e^y dx$

13. $(2xy^2+8y^2)\ \pi^y dy-\ln(x+4)\ dx=0$

14. $y\ \frac{dy}{dx}=\frac{\ln\sqrt{x}}{y^2+2}$

15. $e^{-y}\ \sqrt{1-t^3}\ dy=t^5dt$

16. $\cos x \; dy - y \operatorname{sen} x \; dx = 0$

17. $e^{y} \operatorname{sen} x \; dx - \cos^{2} x \; dy = 0$

En los problemas del 18 al 32 obtén la solución particular de las siguientes ecuaciones diferenciales:

18. $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{6}{\sqrt[4]{x}}\right) y^{1/4}; \quad y = 16; \quad x = 1$

19. $\dfrac{dr}{ds} = \dfrac{7s^{3}}{r^{2}}; \quad r = 0; \quad s = 2$

20. $e^{-t} dr = 10^{-r} dt; \quad r = 1; \quad t = 0$

21. $\dfrac{dQ}{dt} = 275\ (0.825)^{\,t}; \quad t = 2; \quad Q = 24.98$

22. $\dfrac{dy}{dx} = ye^{x} + yx^{3}; \quad y = e; \quad x = 5$

23. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{1}{9}y^{2} + \frac{4}{3}y + 4}{4x^{2} - 4x + 1}; \quad x = 0; \quad y = 3$

24. $8 \; \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{9y}{2 + 3x}; \quad x = 0; \quad y = 1/2$

25. $\dfrac{dt}{x^{2}} = \dfrac{\left(\left(2 + 3x^{3}\right)^{5}\right)^{1/3}}{t^{4}} dx; \quad t = 1; \quad x = 2$

26. $\dfrac{dy}{12x + 8x^{3}} = \dfrac{dx}{y^{2}\left(x^{4} + 3x^{2}\right)}; \quad x = 1; \quad y = 3/2$

27. $3^{-x} \; \left(y^{4} - 1\right) \; dy - \sqrt{y^{5} - 5y} \; dx = 0; \quad x = 0; \quad y = 3$

28. $e^{-3x} y \; dy = (2x + 3) \; dx; \quad x = 0; \quad y = 2$

29. $\dfrac{1}{t} \; \dfrac{dP}{dt} = (9.2)^{t}; \quad t = 4; \quad P = 37.5$

30. $\dfrac{dy}{\ln(3x + 1)} = dx; \quad x = 1; \quad y = 24.53$

31. $e^{y^{3}} dy = \dfrac{1 - 3x + 3x^{2} - x^{3}}{y^{5}} dx; \quad x = 2; \quad y = 0$

32. $dy = 4xy^{-2} \ln\sqrt{x^{2} + 1} \; dx; \quad x = 0; \quad y = 3$

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 1.4

1. $\ln y = \frac{8}{5}x^5 - e^x + C$

2. $-\frac{1}{2y^2} = 2x^3 - x^2 + x + C$

3. $y^2 = \frac{2(\pi^t)}{\ln \pi} + \frac{2(t^{\pi+1})}{\pi+1} + C$

4. $y = \frac{6^{2x}}{4\ln^2 6} + C$

5. $y^3 = (2.2713)\ \ 3^x + C$

6. $e^{-2y} = -\ln^2 x + C$

7. $y^{2/3} = \frac{2}{3}e^{3x^2+5} + C$

8. $\frac{8^{y^2}}{2\ln 8} + \frac{y^2}{5} = \frac{2}{\ln 8}8^{5x^2-x} + C$

9. $P = 643\ \ (1.045)^{t+3} + C$

10. $y - \frac{y^3}{3} = \ln(1+x) + C$

11. $\frac{2}{9}\left(y^3+5\right)^{3/2} = -\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C$

12. $e^{-2x}\left(\frac{x^2}{5}+\frac{2x}{25}+\frac{2}{125}\right)=e^{-y}+C$

13. $\frac{\pi^y}{\ln\pi}\left(y^2-\frac{2y}{\ln\pi}+\frac{2}{\ln^2\pi}\right)=\frac{1}{4}\ln^2(x+4)+C$

14. $y^2\left(\frac{y^2}{4}+1\right)=x\left(\ln\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)+C$

15. $e^{-y}=\frac{2}{3}\sqrt{1-t^3}+\frac{4}{9}\sqrt{(1-t^3)^3}+C$

16. $\ln y=-\ln|\cos x|+C$

17. $\frac{1}{\cos x}=-e^{-y}+C$

18. $4y^{3/4}=6\ln x+24x^{3/4}+8$

19. $r^3=\frac{21}{4}s^4-84$

20. $e^t+3.343=\frac{10^r}{\ln r}$

21. $\frac{Q}{275}=\frac{(0.825)^t}{\ln(0.825)}+3.629$

22. $\ln y=e^x+\frac{x^4}{4}-303.66$

23. $\frac{3}{\frac{1}{3}y+2}=\frac{1}{4x-2}+1.5$

24. $\frac{8}{9}\ln y = \frac{1}{3}\ln(2+3x) - 0.8472$

25. $\frac{1}{5}t^5 = \frac{1}{24}\left(2-3x^3\right)^{8/3} - 274$

26. $\frac{1}{3}y^3 = 2\ln\left(x^4 + 3x^2\right) - 1.648$

27. $\frac{2}{5}\sqrt{y^5 - 5y} = \frac{3^x}{\ln 3} + 5.13$

28. $\frac{1}{2}y^2 = \frac{(2x+3)}{3}e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + \frac{11}{9}$

29. $P = \frac{t(9.2)^t}{\ln(9.2)} - \frac{(9.2)^t}{\ln^2(9.2)} - 11420.47$

30. $y = x\ln(3x+1) - x + \frac{1}{3}\ln(3x+1) + 23.68$

31. $\frac{1}{3}e^{y^3}(y^3 - 1) = x - \frac{3}{2}x^2 + x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}$

32. $\frac{1}{3}y^3 = 2x^2\ln\sqrt{x^2+1} - x^2 + \ln\left(x^2+1\right) + 9$

1.5 MODELOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Sabemos que en la vida real todo cambia: la temperatura, la inflación, el saldo en una cuenta bancaria, la producción, la población, los costos, etc.; pero también sabemos que las ecuaciones diferenciales sirven para describir situaciones en las que la rapidez de cambio está presente. Por ello, ahora no se te dará la ecuación diferencial (ED), sino que aprenderás a plantear la ecuación diferencial que represente una situación de cambio a partir de un enunciado; sin embargo, a fin de facilitar el proceso para plantear un modelo, es importante comprender el significado de algunas relaciones entre cantidades. En consecuencia, al inicio traduciremos a lenguaje matemático algunos enunciados.

Traducción de enunciados a lenguaje matemático

Escribe la expresión matemática correspondiente a cada uno de los enunciados dados en la tabla o describe la expresión matemática dada.

ENUNCIADO DESCRIBE LA RELACIÓN ENTRE LAS VARIABLES x Y y	*EXPRESIÓN MATEMÁTICA* DESCRIBE EN FORMA SIMBÓLICA LA RELACIÓN ENTRE LAS VARIABLES x Y y
y es igual a x	
y es el doble de x	
	$y = 3x$
y es la mitad de x	
y es 4% de x	
	$y = kx$

¿Te faltó completar el último enunciado? Observa cómo en los demás enunciados que aparecen en la tabla se cumple que la variable y es igual a una constante multiplicada por la variable x. Cuando esta relación se cumple, pero no podemos especificar el valor de la constante, simplemente se dice que la "variable y es *proporcional* a la variable x". Ahora ya puedes completar la tabla.

También podemos encontrar enunciados que incluyen descripciones como *inversamente proporcional* o *conjuntamente proporcional*; todos ellos se definen en el siguiente recuadro.

- **Se dice que una cantidad y será *proporcional* a otra cantidad x si se cumple que $y = kx$.**
- **Se dice que una cantidad y será *conjuntamente proporcional* a otras cantidades x y z si se cumple que $y = kxz$.**
- **Se dice que una cantidad y será *inversamente proporcional* a otra cantidad x si se cumple que $y = \dfrac{k}{x}$.**

En todos los casos k es una constante llamada *constante de proporcionalidad.*

Te recomendamos ir a la sección de Anexos, al final del libro, para responder el ejercicio: "¡A escribir en símbolos!". En este encontrarás una serie de enunciados con los que podrás practicar la habilidad para traducirlos a lenguaje matemático.

Planteamiento de modelos de ecuaciones diferenciales

Cuando nos dan un enunciado y necesitamos plantear una ecuación diferencial, es útil formularnos dos preguntas: *¿qué cambia?* y *¿cómo cambia?*

Para ***definir*** las variables respondemos a la pregunta **¿qué cambia?**

Primero se identifican las variables que intervienen en el enunciado, luego se clasifican las variables como dependiente o independiente y se les asigna una letra a cada una de ellas.

Una vez definidas las variables se conoce la derivada a la cual se refiere el enunciado, pues sabemos que debe ser de la forma $\dfrac{d(\text{variable dependiente})}{d(\text{variable independiente})}$.

Para **plantear la ecuación diferencial** respondemos a la pregunta **¿cómo cambia la variable dependiente?** A veces hay necesidad de volver a leer el enunciado para identificar la información acerca de la derivada.

Recuerda que las palabras *ritmo, razón, rapidez, tasa y velocidad* se refieren a que hay involucrada una derivada y lo que debemos escribir en lenguaje matemático es si la derivada es proporcional a…, es inversamente proporcional a…, o es igual a…, etc., de acuerdo con la información dada.

Ejemplo 1

Un material radiactivo se desintegra a una razón proporcional a la cantidad presente.

Plantea una ecuación diferencial que describa la situación anterior.

Solución

Para *definir las variables* nos hacemos la pregunta *¿qué cambia?*

Si el material radiactivo se está desintegrando, significa que está cambiando la cantidad que existe conforme transcurre el tiempo. Por tanto, podemos definir las variables como sigue:

Variable dependiente: cantidad de material radiactivo = Q.

Variable independiente: tiempo = t.

Una vez definidas las variables, sabemos que la derivada de la que se habla en el enunciado se puede expresar como $\dfrac{dQ}{dt}$.

Para *plantear la ecuación* nos formulamos la pregunta **¿cómo cambia la cantidad de material radiactivo?**

Al volver a leer el enunciado podemos entender que la razón con la cual disminuye la cantidad de material radiactivo es proporcional a la cantidad presente, que en lenguaje matemático queda escrito como sigue: $\frac{dQ}{dt} = -kQ$.

Ejemplo 2

Un estudiante del último semestre de su carrera tiene que reunir $50 000 a fin de cubrir gastos de graduación; para ello, organiza una rifa. La razón a la que aumenta la cantidad de dinero recolectada es proporcional a lo que le falta para reunir la cantidad que necesita.

Plantea una ecuación diferencial que describa la situación anterior

Solución

Para *definir las variables* nos preguntamos *¿qué cambia?*

En este enunciado vemos que la cantidad de dinero recolectada aumenta respecto al tiempo, así que las variables son:

Variable dependiente: cantidad de dinero recolectada = *P*.

Variable independiente: tiempo = *t*.

Una vez definidas las variables, sabemos que la derivada de la que se habla en el enunciado se puede expresar como $\frac{dP}{dt}$.

Para *plantear la ecuación* nos formulamos la pregunta ¿cómo cambia la cantidad de dinero recolectada? Al volver a leer el enunciado vemos que $\frac{dP}{dt}$ cambia de manera proporcional lo que le falta para reunir la cantidad deseada; ya no podemos utilizar otra variable, sino pensar si la cantidad que necesita es $50 000 y P es lo que ha recolectado. Entonces 50 000 – P es lo que le falta reunir. Así, la ecuación diferencial es:

$$\frac{dP}{dt} = k(50000 - P).$$

Ejemplo 3

El costo marginal de una compañía por fabricar x unidades de cierto producto es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número de unidades producidas.

Plantea una ecuación diferencial que describa la situación dada.

Solución

En este caso *definir las variables* es muy sencillo, ya que sabemos que el costo depende del número de unidades producidas. Así, las variables son:

Variable dependiente: costo = *C*.

Variable independiente: número de unidades producidas = *x*.

Una vez definidas las variables, sabemos que la derivada de la que se habla en el enunciado se puede expresar como $\dfrac{dC}{dx}$.

Para *plantear la ecuación* nos formulamos la pregunta ¿cómo cambia el costo? Al releer el enunciado vemos que el costo marginal $\dfrac{dC}{dx}$ es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del número de unidades producidas. Así, la ecuación diferencial es:

$$\frac{dC}{dx} = \frac{k}{\sqrt{x}} .$$

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

La razón a la que disminuyen las ventas de cierto artículo es inversamente proporcional al cuadrado de la suma del precio inicial P_o y del precio actual del artículo p.

Plantea una ecuación diferencial para las ventas V en función del precio p.

Solución

Define las variables (*¿qué cambia?*):

Variable dependiente: ____________________.

Variable independiente: ____________________.

Plantea la ecuación (*¿cómo cambia la variable dependiente?*):

¡A trabajar!

EJERCICIO 2

Al tomar una taza de café, el organismo de una persona absorbe 100 mg de cafeína. La razón con la que disminuye la cantidad de cafeína en el organismo es proporcional a la cantidad de cafeína existente.

Plantea una ecuación diferencial para la cantidad de cafeína en el organismo Q respecto al tiempo t, desde el momento en que se toma la taza de café.

Solución

Define las variables (*¿qué cambia?*):

Variable dependiente: ____________________.

Variable independiente: ____________________.

Plantea la ecuación (*¿cómo cambia la variable dependiente?*):

¡A trabajar!

EJERCICIO 3

En una comunidad de 250 000 habitantes hay una epidemia que se propaga a un ritmo conjuntamente proporcional a la cantidad de personas que ha enfermado y a la cantidad sin enfermar.

Plantea una ecuación diferencial que describa la situación anterior.

Solución

Define las variables (*¿qué cambia?*):

Variable dependiente: ______________________.

Variable independiente: ____________________.

Plantea la ecuación (*¿cómo cambia la variable dependiente?*):

Planteamiento y solución de modelos de ecuaciones diferenciales

Para llevar a cabo la construcción y solución de un modelo de ecuación diferencial, se sugiere realizar los siguientes pasos:

Paso 1. Definir las variables (*¿qué cambia*?)
Paso 2. Plantear la ED con las variables elegidas (*¿cómo cambia la variable dependiente*?)
Paso 3. Obtener la solución general.
Paso 4. Identificar la(s) condición(es) inicial(es).
Paso 5. Obtener la solución particular.
Paso 6. Utilizar la solución particular para contestar lo que se pide.

Ejemplo 4

Supón que dentro de t años el saldo S de una cuenta bancaria estará cambiando a un ritmo de 7% del saldo actual al año; además, considera que el depósito inicial es de 1000 dólares y que no se hace ningún otro depósito ni retiro. ¿Cuál será el saldo de esta cuenta a los 10 años?

Solución

Se conoce la razón de crecimiento del saldo y necesitamos obtener una fórmula para saber el saldo en función del tiempo. Esto es simplemente resolver una ecuación diferencial y evaluarla en 10. Para ello vamos aplicar los pasos sugeridos:

Paso 1. Definir las variables

Lo que cambia es el saldo y el tiempo, así que definimos las variables como
S = saldo (en dólares) y t = tiempo (en años)

Paso 2. Plantear la ecuación

Se sabe que la razón a la que cambia el saldo es a un ritmo de 7% del saldo actual al año. Esto lo podemos expresar en términos de una ecuación como $\frac{dS}{dt} = 7\%S$.

Paso 3. Obtener la solución general

Al utilizar el método de variables separables, la ecuación nos queda $\frac{dS}{S} = 0.07dt$ e integramos ambos lados de la ecuación:

$$\int \frac{dS}{S} = 0.07\int dt$$

La solución general es $\ln S = 0.07t + C$.

Paso 4. Identificar las condiciones iniciales

La condición inicial corresponde a la frase: *el depósito inicial es de 1000 dólares*, que se interpreta: si $t = 0$, entonces $S = 1000$.

Paso 5. Obtener la solución particular

Sustituimos $t = 0$ y $S = 1000$ en la solución general para obtener el valor de la constante de integración C y nos queda: $\ln(1000) = 0.07(0) + C$.

De aquí podemos decir que $\ln(1000) = C$.

Al sustituir el valor de C en la solución general, obtenemos que la solución particular es $\ln S = 0.07t + \ln(1000)$.

Paso 6. Utilizar la solución particular para contestar lo que se pide

¿Cuál sería el saldo de esta cuenta a los 10 años?, es decir si $t = 10$, entonces S =...

Si se sustituye $t = 10$ en la solución particular, se obtiene $\ln S = 0.07(10) + \ln(1000)$. Lo que da es $\ln S = 7.60776$. Para despejar S se aplica la función exponencial a ambos lados de la igualdad y se obtiene el saldo buscado.

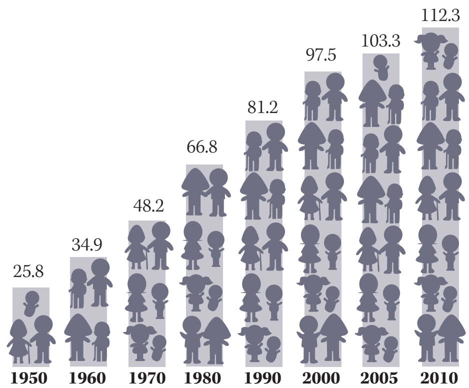
$$S = e^{7.60776} \approx 2013.75 \text{ dólares}$$

Más aplicaciones de las ecuaciones diferenciales

1. Crecimiento poblacional

Según los datos del INEGI, (2010) la población mexicana crece a razón de 1% anual.

Gráfica 1. INEGI (2010): http://cuentame.inegi.org.mx/default.aspx



Si en 2010 la población era de 112 336 538 habitantes, plantea una ecuación diferencial en la que se pueda obtener la población en función del tiempo. Luego predice la población para 2012.

La ecuación diferencial queda planteada de la siguiente manera:

$\frac{dP}{dt} = 0.01P$ es decir, los cambios de la población respecto al tiempo es de 1 %.

Para obtener la función que prediga la población en función del tiempo es necesario resolver la ecuación diferencial y sus siguientes equivalencias:

$$\frac{dP}{dt} = 0.01P$$

$$\frac{dP}{0.01P} = dt$$

$$\int \frac{dP}{P} = 0.01 \int dt$$

$$\ln P = 0.01t + C$$

$$e^{\ln P} = e^{0.01t+C}$$

$$P = e^{0.01t} e^{C}$$

$$P(t) = Ce^{0.01t}$$

Para obtener la solución particular, es necesario sustituir las condiciones iniciales (en este caso, la población de 2010), que se registran cuando se observa el fenómeno, es decir, en el tiempo $t = 0$:

$$112{,}336{,}538 = Ce^{0.01*0}$$
$$112{,}330{,}538 = C$$

Por tanto, el modelo matemático queda:

$$P(t) = 112{,}336{,}538e^{0.01t}$$

Para predecir la población en 2012 solo basta con sustituir t=2 ya que las unidades de tiempo de 2012 a 2014 son dos:

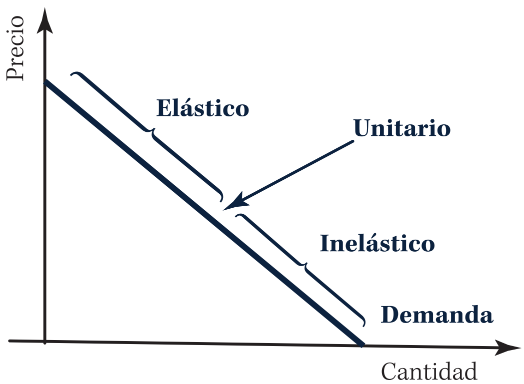
$$P(2) = 112{,}336{,}538e^{0.01(2)}$$
$$P(2) = 114{,}605{,}887$$

Es decir, en 2012 la población será de 114 605 887 habitantes si la tasa de crecimiento se mantiene en 1%.

2. Elasticidad de la demanda

La elasticidad de la demanda o del precio de la demanda es un parámetro que indica cuánto varía la demanda de un bien o servicio cuando varía su precio. Cuando este parámetro es mayor que 1 significa que la demanda es *elástica* es decir, que la demanda es sensible a una variación del precio. Si el parámetro se encuentra entre 0 y 1, se dice que la demanda es *inelástica* (observa la gráfica 2). Generalmente los productos de lujo (como alcohol, viajes, perfumes, etc.) tienen una demanda elástica, mientras que los de necesidad básica tienen una demanda inelástica.

Gráfica 2. Precio en función de la demanda



La elasticidad de la demanda está dada por la ecuación diferencial: $\eta = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$, donde p representa el precio y q la cantidad de bienes demandados. Por ejemplo, si la demanda de viajes al extranjero es de 1.8, con esta información se puede conocer la función que determine la cantidad demandada de acuerdo con el precio:

$\eta = -1.8$.

Observa que se ha colocado un signo negativo a la razón de cambio, lo cual sucede porque esta es negativa (observa la gráfica 2). Al sustituir la razón de cambio, tenemos la ecuación diferencial siguiente: $-1.8 = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$.

Ahora, procedamos a resolverla encontrando la solución particular en la que la demanda dependa del precio, suponiendo que la demanda es de 100 unidades cuando el precio es de \$50 (dado en miles):

$$-1.8 = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$$

$$-1.8\frac{q}{p} = \frac{dq}{dp}$$

$$-1.8\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$$

$$\frac{dq}{q} = -1.8\frac{dp}{p}$$

$$\ln q = -1.8\ln p + C$$

$$e^{\ln q} = e^{\ln p^{-1.8}}e^{C}$$

$$q(p) = Cp^{-1.8}$$

Sustituimos las condiciones iniciales para obtener la solución particular:

$$100 = C(50)^{-1.8}$$
$$C = 114326.26$$

Por tanto, la solución particular es: $Q(p) = 114{,}326.26\,p^{-1.8}$.

Con este modelo se puede predecir la demanda de acuerdo con el precio. Por ejemplo, ¿cuál será la demanda si el precio es de $55?

$$Q(55) = 114{,}326.26(55)^{-1.8} = 84$$

La demanda será de 84 paquetes de viajes si el precio es de $55 (miles).

Es importante aclarar que en Matemáticas suele considerarse a la demanda en función del precio por cuestiones didácticas; sin embargo, en Economía se estima que el precio es la variable dependiente, y la demanda, la variable independiente. Por ello, para obtener el precio en función de la demanda bastará con invertir la función o, cuando se resuelve la ecuación, dejar despejado el precio.

La ecuación debe quedar de la siguiente manera: $p(q) = 645.77q^{-0.5555}$. Si queremos comprobar que el despeje es correcto, sustituyamos la demanda de 84 que calculamos y obtengamos el precio, el cual debe darnos aproximadamente $55:

$p(84) = 645.77(84)^{-0.5555} = 55$. Es decir, cuando la demanda es de 84 paquetes de viajes, el precio es de $55 (miles). El modelo de la demanda en función del precio y el modelo del precio en función de la demanda son válidos.

¡A trabajar!

EJERCICIO 4

El valor V de un automóvil disminuye a razón de 5% del valor del vehículo cada año. Si el automóvil se compró nuevo en 1998 en $ 200 000, plantea una ecuación diferencial para el valor del automóvil en función del tiempo y resuélvela para calcular su valor en 2003.

Paso 1. Definir variables, es decir, con qué letra vamos a representarlas.

El valor del auto cada año = ________________ y el tiempo = ________________.

Paso 2. Plantear la ED con las variables elegidas ________________________.

Paso 3. Obtener la solución general:

Paso 4. Identificar la condición inicial ____________________________.

Paso 5. Obtener la solución particular

Paso 6. Utilizar la solución particular para contestar lo que se pide __________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 5

La población de cierta ciudad cambia a razón inversamente proporcional a la población existente cada año si al inicio se tenía una población de 2.5 millones de personas y en 5 años aumenta a 3.2 millones, plantea una ED para la población en función del tiempo y resuélvela para calcular el tiempo de duplicación de la población.

Paso 1. Definir variables, es decir, con qué letra vamos a representarlas.

La población cada año = ____________________ y el tiempo = __________________.

Paso 2. Plantear la ED con las variables elegidas ______________________________.

Paso 3. Obtener la solución general:

Paso 4. Identificar la condición inicial ______________________________________.

Paso 5. Obtener la solución particular.

Observa que no conocemos el valor de la constante de proporcionalidad, por lo cual todavía no podemos contestar la pregunta. Primero debemos obtener el valor de K, para lo cual se nos da otro valor de población y tiempo diferentes del valor original y con ellos obtenemos el valor de la constante de proporcionalidad.

¡Resuélvelo!

¿Cuáles son los valores que vamos a utilizar para obtener K?_______________________ .

Por último, utiliza la solución particular para contestar lo que se pide_______________ .

¡A trabajar!

EJERCICIO 6

En una guardería la razón con la cual se expande una epidemia por virus es igual a la mitad de los que aún no se han enfermado. Si en la guardería están inscritos 200 niños, plantea una ecuación diferencial para el número de niños contagiados N respecto al tiempo t en días.

Resuelve la ecuación diferencial para contestar lo siguiente: Si un niño enfermo inició la epidemia, ¿estarán todos los niños contagiados tres días después?

Paso 1. Definir variables, es decir, con qué letra vamos a representarlas.

Número de niños contagiados = ______________ y el tiempo = __________________.

Paso 2. Plantear la ED con las variables elegidas ________________________________.

Paso 3. Obtener la solución general:

Paso 4. Identificar la condición inicial ____.

Paso 5. Obtener la solución particular

Paso 6. Utilizar la solución particular para contestar lo que se pide ____________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 7

Pesca de atún

Según la Sagarpa (2011), la producción de atún está disminuyendo a razón de 4.85% a partir de 2003, cuando se registró una pesca de 185 558 toneladas. Esto se debe a que se han perfeccionado los procesos de pesca, de tal manera que la mortandad de delfines ha disminuido a 0.01%, lo cual propició que se ganara el juicio de embargo impuesto por Estados Unidos. A pesar del descenso de la producción atunera, México está colocado entre los mejores productores a nivel mundial.

(Fuente: http://www.iaes.gob.mx/index.php?pag=m_blog&gad=detalle_entrada&entry=116&filters=201110&n_pag=2)

a) Plantea una ecuación diferencial que muestre el comportamiento de la pesca atunera.

b) Encuentra la función que permita predecir la producción atunera en función del tiempo.

¡A trabajar!

EJERCICIO 8

Tasas de interés

Supón que se hace un depósito en una cuenta bancaria que paga una tasa de intereses anual de 7% capitalizado continuamente. No se hacen otros depósitos ni retiros a la cuenta.

a) Escribe una ecuación diferencial que satisfaga por S, que es el saldo en la cuenta después de t años.

b) Resuelve la ecuación diferencial.

c) Si el depósito inicial es de $5000, da la solución particular que satisfaga esta condición inicial.

d) ¿Cuánto habrá en la cuenta después de 10 años?

Exportaciones de aguacate

¡A trabajar!

EJERCICIO 9

En 2006, las exportaciones de aguacate, según la Sagarpa, estaban creciendo a una tasa aproximada de 9% anual. En ese año las exportaciones de aguacate ascendieron a 185.9 miles de toneladas y Estados Unidos y Japón fueron los importadores más importantes, seguidos de Canadá, Francia y El Salvador.
(Fuente: http://w4.siap.sagarpa.gob.mx/sispro/IndModelos/SP_AG/aguacate/ce_nacional.pdf)

En abril de 2012, la publicación *El Economista* afirmó que las exportaciones de aguacate se habían triplicado en los últimos cinco años, por lo cual se habían registrado un total de 1.1 millones de toneladas de ese año.
(Fuente: http://eleconomista.com.mx/industrias/2012/04/08/triplica-mexico-exportaciones-aguacate-cinco-anos)

Con base en la información y por medio de una ecuación diferencial, ¿puedes declarar matemáticamente que lo afirmado por *El Economista* es verdad? Justifica tu respuesta,

a) ¿Cuál es la ecuación diferencial que permite determinar los cambios en las exportaciones respecto al tiempo? Plantéala.

b) ¿Cuáles son las condiciones iniciales?

c) Resuelve la ecuación.

d) ¿Qué harás para determinar si lo declarado por *El Economista* es cierto?

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 1.5

Resuelve los siguientes problemas.

1. Supón que S representa el saldo final de una cuenta bancaria a los t años de la fecha de inversión inicial, la cual fue de $5000. Si se sabe que cuando el interés se capitaliza continuamente la rapidez está dada por rS $/año, ¿cuál será el saldo a los 3 años si se paga un interés de 2.1%?

2. La población infantil p que ingresa a las escuelas primarias en Nuevo León aumenta a razón de 0.031 pt alumnos/año, donde t son los años a partir de 2000. Si la población en ese año fue de 2 500 000 alumnos, encuentra la población que ingresó a la primaria en 2010.
3. La rapidez con que cambia el precio p de un artículo respecto a la demanda q de este se halla dada por $-p/q$ pesos/unidad. Si suponemos que el precio es de \$252 cuando la demanda es de 16 unidades, ¿cuál es el precio cuando la cantidad demandada es de 36 unidades?
4. Una sustancia se desintegra a razón de 0.12% de la cantidad presente Q cada día. Si inicialmente se tienen 750 g,
   a) Plantea la ecuación diferencial de la cantidad de sustancia Q en función del tiempo t.
   b) ¿Calcula la cantidad de sustancia a los 13 días?
5. La razón con la que una inversión cambia es proporcional a la diferencia entre la cantidad máxima de inversión (\$50 000) y la cantidad invertida I. Si al inicio se invierten \$18 000 y a los 3 años la inversión asciende a \$23 500,
   a) Plantea la ecuación diferencial para el valor de la inversión I en función del tiempo t.
   b) Calcula el valor de la inversión a los 8 años.
6. La razón con la que cambia el precio p de un producto respecto al tiempo t (meses) es proporcional a la diferencia entre la demanda y la oferta del producto, donde la ecuación de demanda y oferta son: $x = 30 - 0.6\,p$ y $= 0.25\,p - 15$, respectivamente:
   a) Plantea la ecuación diferencial para el precio del producto en función del tiempo.
   b) Si actualmente el precio es de \$20 y luego de un mes el precio fue de \$21, ¿cuál será el precio dentro de 6 meses?
7. La razón con la que cambia una población p en millones de personas es inversamente proporcional al cuadrado de la población existente. Si actualmente se tienen 2.5 millones de habitantes y 2 años después la población fue de 3.1 millones:
   a) Plantea la ecuación diferencial para la población en función del tiempo en años.
   b) ¿Cuál será la población 7 años después?
8. La razón a la que disminuyen las ventas de cierto modelo de chamarras es inversamente proporcional al cuadrado de la suma de 800 y su precio p. Si suponemos que cuando el precio fue de \$800 se vendieron 500 chamarras y si el precio es de \$200 se vendieron 620, calcula la cantidad de chamarras vendidas cuando el precio sea de \$425.
9. Cierto artículo se lanza al mercado, el cual se venderá únicamente por 180 días. La razón a la que cambian las ventas de dicho artículo es proporcional al tiempo faltante para que termine la temporada de ventas. Si inicialmente se vendieron 1250 unidades y a los 20 días de estar en el mercado se vendieron 2950 unidades, ¿cuáles serán las ventas a los 44 días?
10. Un alumno de último semestre de su carrera tiene que reunir \$50 000 para gastos de graduación; para ello, organiza una rifa, la razón con la que aumenta la cantidad de dinero recolectada p respecto al tiempo t en meses es proporcional a la que le falta para reunir la cantidad necesaria. Si inicialmente tenía \$10 000 y un mes después \$45 565 recolectado, ¿qué cantidad habrá recolectada a los 3 meses?
11. Al tomar una taza de café, el organismo absorbe 100 mg de cafeína. La razón con la que disminuye la cantidad de cafeína Q en el organismo respecto al tiempo t en horas es proporcional a la cantidad de cafeína existente. Si media hora después de haberse tomado el café quedaban en el organismo 48.7 mg de cafeína, ¿qué cantidad habrá a las 3 horas?
12. Si se invierte un capital de \$10 000 en una cuenta bancaria y se sabe que la razón con la cual cambia el capital Q respecto al tiempo t en años es proporcional al capital existente, ¿cuál es la tasa de interés que se paga si a los 3 años el capital asciende a \$11 584?

13. Banquetes Elizondo fue contratada para un evento, para el cual ocupa pollos que tiene en sus congeladores, los cuales saca a las 8:00 con una temperatura de – 6 °C. Para preparar los platillos es necesario que los pollos estén a una temperatura de 20 °C. Si la razón con que cambia la temperatura *T*, de los pollos respecto al tiempo *t* en horas es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura de la cocina (30 °C), ¿a qué hora se inicia la preparación de los platillos si a las 10:00 los pollos tenían una temperatura de 3.858 °C?

14. La razón con la que el valor de un automóvil *V* se deprecia respecto al tiempo *t* en años es proporcional a la diferencia entre el valor de compra ($152 000) y el valor en cualquier tiempo *t*. Si un año después de su compra el valor fue de $143 000 y a los 4 años era de la cantidad $114 000, ¿cuántos años deben transcurrir para que el valor del automóvil sea de $50 000?

15. El número de marginados *M* en cierta ciudad aumenta respecto al tiempo *t* a una razón proporcional a la población de marginados existente en ese momento. En 1997 la cantidad de marginados era de 3.5 miles de personas y en 2004 de 5000 marginados. De continuar con esta tendencia, ¿cuántos marginados se espera que haya en 2010?

16. El crecimiento de una ciudad es proporcional al número de habitantes que hay en un instante cualquiera. Si la población inicial es de 400 000 y al cabo de 3 años llega a 450 000,

    a) ¿Cuánto tardará en duplicarse?
    b) ¿Qué población habrá en 10 años?

17. Un producto nuevo de cereal se introduce por medio de unas campañas de publicidad a una población de 1 millón de clientes potenciales. Se supone que la velocidad a la cual la población se entera del producto es proporcional al número de personas que todavía no están conscientes del producto. Al final de un año, la mitad de la población ha oído hablar del producto. ¿Cuántos han oído hablar de él al final de 2 años?

18. En cierto cultivo de bacterias, la velocidad de crecimiento de la población es proporcional al cuadrado de la población presente. Si la población después de 3 horas es de 10^4 individuos y al cabo de dos horas más es de 4×10^4 individuos, calcula cuántos individuos había en un principio.

19. La ley de enfriamiento de Newton afirma que la rapidez a la que un cuerpo varía su temperatura es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio que lo rodea. Un cuerpo con temperatura inicial de 80 °C se coloca en un medio cuya temperatura se mantiene a 50 °C. Al cabo de 5 minutos el cuerpo se ha enfriado hasta 70 °C.

    a) Halla la temperatura del cuerpo al cabo de 10 minutos.
    b) ¿Cuándo su temperatura será de 60 °C?

20. Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de 150 °C y al cabo de 3 minutos ha descendido hasta 85 °C. Calcula cuánto tiempo tardará en enfriarse a la temperatura ambiente de 20 °C.

21. Se saca una botella de vino tinto de una bodega, que es un lugar frío a temperatura constante de 10 °C, y se deja reposar en una habitación a temperatura constante de 22 °C. Si sabemos que al dejar la botella en esa habitación durante 12 horas su temperatura alcanzará los 18 °C, ¿cuál será el momento óptimo para beber el vino si queremos que su temperatura sea de 12 °C?

22. Un cultivo tiene inicialmente una cantidad *N* de bacterias. Transcurrida una hora, el número de bacterias medido es de (3/2)*N*. Si sabemos que la velocidad con la que se multiplican las bacterias es proporcional al número de bacterias presentes en cada instante, determina el tiempo necesario para que el número de bacterias se triplique.

23. Si la población de un país se duplica en 50 años, ¿cuánto tiempo tardará en triplicarse si se supone que la velocidad de crecimiento es proporcional al número de habitantes?

24. Disponemos de café a 120 °C y queremos hacer un granizado, lo que se consigue a –3 °C. Colocamos el café en un local a –5 °C y al cabo de 10 minutos observamos que está a 30 °C. ¿Cuánto tiempo tiene que pasar hasta obtener el granizado?

25. En 1990 se arrojaron a un lago 1000 ejemplares de cierta especie de peces, de la que previamente no había ninguno. En 1997 se estimó que la cantidad de peces de esa especie que había en el lago en aquel momento era de 1000. Si suponemos que la velocidad de crecimiento de la población de peces es constante, calcula la cantidad de peces en los años 2000 y 2010.

26. Si el número de bacterias contenidas en un litro de leche se duplica en 4 horas y se supone que la tasa a la cual se multiplica la población de bacterias es constante, calcula en cuánto tiempo se hará 25 veces mayor.

27. Un cadáver es encontrado en una nave industrial que está a una temperatura constante de 20 °C. En el momento de hallarlo, la temperatura del cadáver es de 35 °C. Al cabo de una hora su temperatura ha descendido a 34 °C. Si suponemos que en el momento de la muerte la temperatura del cuerpo era de 37 °C y que se cumple la ley de enfriamiento de Newton, calcula a qué hora se produjo el homicidio.

28. Un termómetro se lleva de un recinto interior hasta el ambiente exterior, donde la temperatura del aire es de 5 °C. Después de un minuto, el termómetro indica 55 °C y luego de cinco marca 30 °C. ¿Cuál era la temperatura del recinto interior?

29. Una masa de metal se extrae de un horno a 1000 °C y se pone a enfriar en un lugar cuya temperatura se mantiene aproximadamente constante a 30 °C. Si después de 10 horas su temperatura desciende a 200 °C, ¿cuánto tardará en llegar a 31 °C?, ¿llegará en algún instante la temperatura a ser igual a la temperatura ambiente de 30 °C?

30. Cuando el interés se capitaliza (o compone) continuamente, en cualquier momento la cantidad de dinero, *S*, aumenta a una tasa proporcional a la cantidad presente: $\frac{dS}{dt} = rS$ donde *r* es la tasa de interés anual.

    a) Calcula la cantidad reunida al término de cinco años cuando se depositan $5000 en una cuenta de ahorro que rinde $5\frac{3}{4}\%$ de interés anual compuesto continuamente.

    b) ¿En cuántos años se habrá duplicado el capital inicial?

31. El Pb-209, isotopo radiactivo del plomo, se desintegra a una razón proporcional a la cantidad presente en cualquier momento y tiene un periodo medio de vida de 3.3 horas. Si al principio había 1 gramo de plomo, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que se desintegre 99%?

32. Cuando $t = 0$ había 100 mg de una sustancia radiactiva. Al cabo de 6 horas, esa cantidad disminuyó 3%. Si la razón de desintegración, en cualquier momento, es proporcional a la cantidad de la sustancia presente, calcula la cantidad que queda después de 24 horas.

33. La población de una comunidad crece con una tasa proporcional a la población en cualquier momento. Si su población inicial es de 500 y aumenta 15% en 10 años, ¿cuál será la población pasados 30 años?

34. Un barco retrasa su movimiento por la acción de la resistencia del agua, que es proporcional a la velocidad del barco. La velocidad inicial del barco es de 10 m/s y al cabo de 5 segundos es de 8 m/s. Calcula al cabo de cuánto tiempo su velocidad será de 1 m/s.

35. Una bola de nieve se derrite de tal manera que la razón de cambio de su diámetro es el doble de su constante de proporcionalidad. El diámetro de la bola de nieve es inicialmente de 4 cm y al cabo de 30 minutos su diámetro pasa a ser de 3 cm.
    a) ¿Cuándo será de 2 cm su diámetro?
    b) ¿Cuándo desaparecerá la bola de nieve?
36. Un recipiente con agua en ebullición (100 °C) se retira del fuego en el instante $t = 0$ y se deja enfriar en una habitación grande. Si sabemos que pasados 5 minutos la temperatura del agua se ha enfriado hasta 80 °C y que pasados otros 5 minutos la temperatura es de 65 °C, determina la temperatura de la habitación M y la constante de proporcionalidad k.
37. (Modelo de Bertalanffy) Sea $L(t)$ la longitud (en centímetros) de un pez en el tiempo t, medido en meses. Se supone que el pez crece de acuerdo con la siguiente ley (de Von Bertalanffy):
    $L' = k\,(34- L)$
    $L(0) = 2$
    a) Si se sabe que a la edad de 4 meses el pez mide 10 centímetros, determina la constante de crecimiento k.
    b) Calcula la longitud del pez a los 10 meses.
    c) Calcula el límite conforme $t \to +\infty$ de L (t) y da una interpretación del resultado en el marco de la dinámica del crecimiento del pez.
38. Una bola de nieve se derrite de forma tal que la razón de cambio de su diámetro es proporcional al área de la superficie. Si el diámetro inicial de la bola de nieve es de 4 pulgadas y al cabo de 30 minutos es de 3 pulgadas, ¿cuándo será su diámetro de 2 pulgadas?. En términos matemáticos ¿cuándo desaparecerá la bola de nieve?
39. Si una barra metálica pequeña —cuya temperatura inicial es de 20 °C— se deja caer en un recipiente con agua en ebullición, ¿cuánto tiempo tardará en alcanzar 90 °C si se sabe que su temperatura aumentó 2 °C en un segundo? y ¿cuánto tiempo tardará en llegar a 98 °C?
40. Supón que un alumno de esta universidad es portador del virus de la gripa y a pesar de ello asiste a la escuela donde hay 5000 estudiantes. Si se supone que la razón con la que se propaga el virus es proporcional no solo a la cantidad de infectados, sino también a la cantidad de no infectados, determina la cantidad de estudiantes infectados a los 6 días después si se observa que a los 4 días la cantidad de infectados era de 50.

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 1.5

1. $S\,(3) = \$5\,325.13$

2. $P\,(10) = 1;\ 177\,868$ alumnos

3. $P\,(36) = \$186$

4. *a)* $Q = 750e^{-0.12t}$ *b)* $Q\,(13) = 157.602$ g.

5. *a)* $I = 50000 - 32000e^{-0.05663t}$ *b)* $I(8)$ = \$29 657.83

6. *a)* $p = \frac{45}{0.85} - \frac{28}{0.85}e^{-0.03082t}$ *b)* $p(6)$ = \$25.56

7. *a)* $p = \sqrt[3]{7.083t + 15.625}$ *b)* $p(7)$ = 4 024 968 habitantes

8. $V(425)$ = 561 chamarras

9. $V(44)$ = 4 726 unidades

10. $C(3)$ = \$49 945.48

11. $Q(3)$ = 1.334 mg

12. K = 4.9%

13. 16:00 h

14. 15.54 años

15. $M(13)$ = 6788 marginados

16. *a)* t = 17.65 Años *b)* P = 592 337 habitantes

17. ¾ de la población

18. 4 706 individuos inicialmente

19. *a)* $T = 63.33$ °C *b)* 13.55 min

20. $t = 8.10$ min

21. $t = 2$ h aproximadamente

22. $t = 2.71$ h

23. 79.25 años

24. 32.48 min

25. En el año 2000 había 3857 peces y en 2010,6714 peces.

26. $t = 96$ horas

27. $t \approx 1$: 8141 horas ≈ 1 hora 49 minutos. Así, el cadáver fue encontrado 1 hora y 49 minutos después de producirse el homicidio.

28. $T = 64.46$ °C

29. Para $t = 39.49$ h. la temperatura llegará a ser de 31 °C

30. *a)* $S(5) =$ \$ 6665.45 *b)* $t = 12$ años

31. t ≈ 12 años

32. $N(24) \approx 88.5$ mg

33. 760 habitantes aproximadamente

34. 51.59 s

35. *a)* t = 60 min *b)* t = 120 min

36. $k \approx 0.0575$, M = 20 °C

37. *a)* k = 0.0719, *b)* L (10) ≈ 18.4 cm. *c)* El límite solicitado es = 34, lo cual significa que la curva que representa la longitud del pez tiene una asíntota horizontal en L = 34. El pez sigue creciendo, pero cada vez a menor velocidad, y su longitud tiende a acercarse al valor 34, aunque sin nunca llegar a alcanzarlo.

38. t = 90 min; nunca pues la solución que nos da es $d = \dfrac{1}{8.841941283 \text{ x } 10^{-4}\, \pi\, t + .25}$

39. t = 82.1 segundos; t = 145.7 segundos

40. 353 estudiantes

CAPÍTULO

dos

Integral definida

2.1 Integral definida

2.2 Sumas de Riemann

2.3 Teorema fundamental

2.4 Integral impropia

2.5 Cambio total y promedio

2.6 Áreas bajo una curva y entre dos curvas

2.1 INTEGRAL DEFINIDA

En el curso anterior aprendiste que cuando se habla de la *velocidad* a la que se mueve un objeto, el *ritmo* al que cambia la producción de una empresa, la *tasa* a la cual aumenta o disminuye una población o una inversión, la *rapidez* con la que cambian las ventas, etc., en cualquiera de esas situaciones se habla de la *derivada*, ya que en general la derivada representa la razón instantánea de cambio.

Por otro lado, en el capítulo anterior aprendiste diferentes estrategias para obtener la antiderivada (o integral indefinida) de una función cuya derivada se conoce; es decir, si te daban la velocidad, al integrar obtenías la función de posición; si se conocía la rapidez de cambio de las ventas, al integrar se tenía la función de ventas, etcétera.

En esta sección estamos interesados no solo en obtener la función original ya sea de ventas, población, distancia, producción…, sino también cuando se conoce la razón a la que cambia cualquiera de ellas y queremos encontrar una forma para determinar cuál es el *cambio total* que se produce (ya sea en las ventas, la población, la distancia, la producción…) debido a un cambio en la variable independiente.

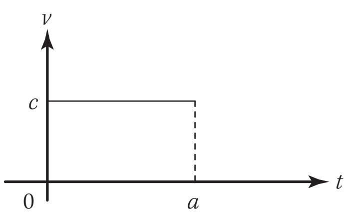
Es decir, si se conoce la razón $f(t)=\dfrac{dF}{dt}$ a la que cambia una cantidad F y deseamos saber cuánto cambiará esta cantidad debido a que la variable t cambió de $t = a$ hasta $t = b$, lo hacemos obteniendo la antiderivada de $f(x)$ y para indicar que solo estamos interesados en analizar el intervalo $[a, b]$ utilizamos la notación $\int_a^b f(x)\,dx$, que recibe el nombre de *integral definida* debido a que tiene especificado el intervalo de integración.

Por ejemplo, si conocemos la velocidad $v(t)$ a la que se mueve un objeto y queremos encontrar la distancia recorrida por dicho objeto en un intervalo de tiempo $[a, b]$, lo denotamos como $\int_a^b v(t)\,dt$. Ya sabemos que al obtener la antiderivada de la velocidad se tiene la función de posición y con ella podemos calcular la distancia total recorrida en el intervalo de tiempo deseado; sin embargo, no siempre tenemos la función que describe la razón de cambio. A veces dicha razón está dada mediante una gráfica o una tabla de valores. Al iniciar nuestro estudio analizaremos este problema.

¿Cómo calcular la distancia recorrida por un objeto?

Construcción

La siguiente figura muestra la gráfica de la velocidad de un objeto como una función del tiempo y se quiere calcular la distancia total recorrida en el intervalo de tiempo dado:



¿Es constante la velocidad a la que se mueve el objeto? ______. ¿Cuál es esa velocidad? ______.

En cursos previos de Física aprendiste que cuando la velocidad es constante la distancia se obtiene con la fórmula distancia = velocidad × tiempo; que en símbolos se escribe como $d = vt$. Así, al utilizar esta fórmula para calcular la distancia recorrida por el objeto durante el intervalo de tiempo $[0, a]$ se obtiene que $d =$ ____________.

Ahora observa nuevamente la grafica anterior: ¿Qué figura forma la gráfica de velocidad en el intervalo $[0, a]$? ______________________. ¿Cuál es el área de esa figura? $A =$ ______________.

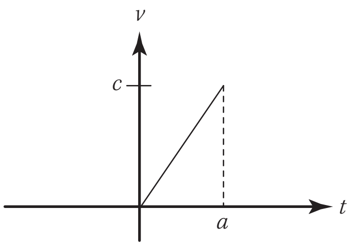
¿Son iguales el valor obtenido de la distancia y el del área? ____________.

CONCLUSIÓN

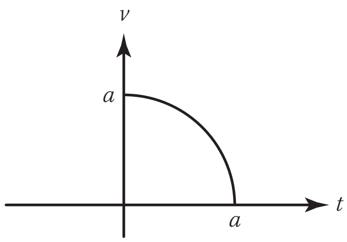
Podemos concluir que el calcular una distancia total recorrida por un objeto en un intervalo de tiempo $[a, b]$ es equivalente a obtener el área de la figura que se forma con la gráfica de la función velocidad dentro de ese intervalo.

Si nuestro objeto en cuestión se moviera de acuerdo con las siguientes gráficas de velocidad, no sería posible obtener la distancia con la fórmula anterior, $d = vt$, ya que en ambos casos la velocidad *no* es constante. Entonces, ¿de qué otra forma podrías calcular la distancia recorrida por el objeto durante el intervalo de tiempo $[0, a]$? ________________________________.

Calcula la distancia



Distancia = ________________



Distancia = ________________

Es importante mencionar que esta estrategia para obtener la distancia recorrida se podrá utilizar de igual forma si las gráficas correspondieran a la razón de cambio de cualquier cantidad, es decir, si, en vez de representar la velocidad a la que se mueve un objeto, representaran, por ejemplo, la razón de cambio de las ventas. Entonces los valores obtenidos para la distancia corresponderían a las ventas totales durante el periodo $[0, a]$.

En los tres casos anteriores, para calcular la distancia recorrida se determinó el valor del área de la región que forma la gráfica de la velocidad con el eje x desde $t = 0$ hasta $t = a$; sin embargo, cabe mencionar que dichas regiones corresponden a figuras geométricas conocidas: por ello, el cálculo de su área resultó sumamente fácil y aquí surge una pregunta: ¿cómo haríamos para calcular la distancia recorrida, las ventas totales, la población total, etc., si la región que forma la gráfica de la derivada no fuera una figura conocida? Contestaremos esta pregunta al analizar la siguiente situación.

¿Cómo calcular el cambio de una cantidad si la gráfica de la razón de cambio de dicha cantidad *no* es una figura conocida?

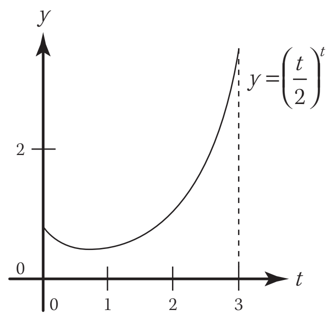
Construcción

Supongamos que la rapidez de cambio de las ventas de un nuevo producto respecto al tiempo está dada por la función $y = \left(\frac{t}{2}\right)^t$, medida en cientos de artículos por semana; queremos encontrar cuánto cambiaron las ventas totales durante las primeras tres semanas.

Sabemos que si integramos la razón de cambio de las ventas, obtendremos la función de ventas y con ella podemos obtener las ventas totales que nos piden; sin embargo, la función dada ¿corresponde a una función potencia o a una función exponencial? ______________.

¿Corresponde algún modelo conocido? ____________.

Como no podemos obtener la antiderivada de la función dada mediante los métodos vistos en el capítulo anterior, vamos a utilizar la estrategia de encontrar el área de la región que forma la gráfica de la razón de cambio de las ventas con el eje *x*. En la siguiente figura se muestra la gráfica de la rapidez de cambio de las ventas en el intervalo [0, 3].



Como la figura que se forma no es conocida (cuadrado, círculo, triángulo, rectángulo…), aproximaremos el valor del área. Al dividir la región en tres rectángulos de igual base, calcularemos el área de cada uno de ellos y sumaremos las tres áreas.

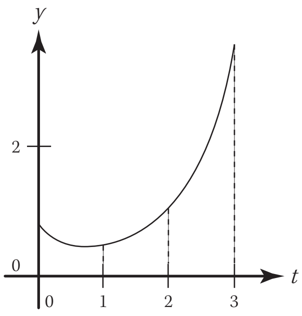
Primero dividimos el intervalo [0, 3] en tres partes iguales: [0, 1], [1, 2] y [2, 3], que en matemáticas llamamos *subintervalos*.

¿Cuál será la longitud de cada uno de los subintervalos? __________. Esta longitud corresponde a la medida de la base de cada uno de los rectángulos en que quedará dividida la figura.

Ahora encuentra la altura de la gráfica en cada uno de los extremos de los subintervalos, sustituyendo los valores de $t = 1$, 2 y 3 en la función $y = \left(\frac{t}{2}\right)^t$ y registra en la siguiente tabla los valores obtenidos. El valor correspondiente a $t = 0$ ya está dado en la tabla.

T	0	1	2	3
Y	1			

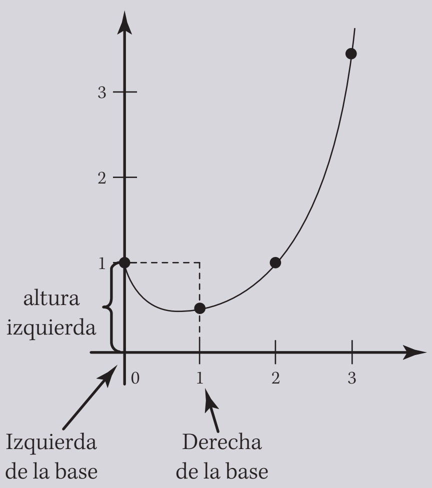
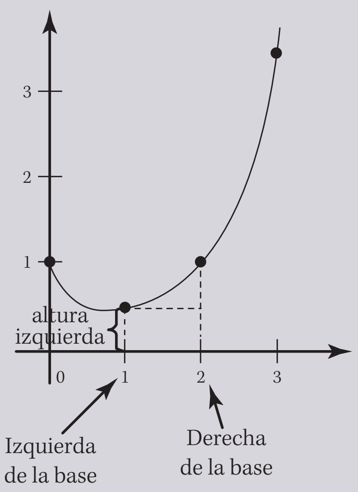
Al marcar las alturas en la gráfica se obtiene la siguiente figura:



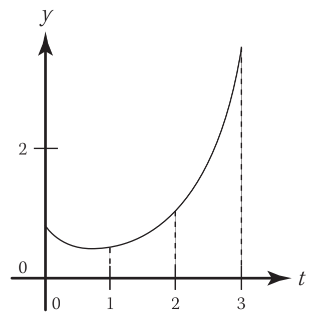
Observa que la región ha quedado dividida en tres partes; sin embargo, ninguna de ellas forma un rectángulo; por lo cual debemos *transformar en rectángulos* cada una de las partes, para aproximar el área de la región. Existen muchas formas para hacer dicha aproximación; en este texto lo haremos mediante la obtención de la *suma por la izquierda* y la *suma por la derecha*, que a continuación explicamos.

Para aproximar el área de la región utilizando la *suma por la izquierda*.

1. Se forman los rectángulos utilizando la altura de la función que se encuentra al lado izquierdo de la base de cada rectángulo.
2. Se calcula el área de cada rectángulo y se suman las áreas.

Rectángulo cuya base es [0, 1]	Rectángulo cuya base es [1, 2]
¿Cuál es la altura en el lado izquierdo de la base? ____________. ¿Cuál es el área de este rectángulo? ____________.	¿Cuál es la altura en el lado izquierdo de la base? ____________. ¿Cuál es el área de este rectángulo? ____________.
	

Utiliza el análisis anterior para construir el tercer rectángulo y encontrar su área y marca la suma izquierda en la siguiente gráfica:



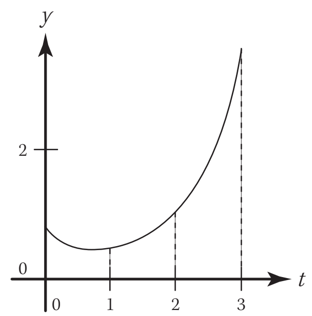
Encuentra la suma izquierda, para lo cual suma las áreas de cada uno de los rectángulos que marcaste.

Suma por la izquierda = ______________________________.

Para aproximar el área de la región utilizando la *suma por la derecha.*

1. Se forman los rectángulos mediante el uso de la altura de la función que se encuentra al lado derecho de la base de cada rectángulo.
2. Se calcula el área de cada rectángulo y se suman las áreas.

Utiliza un análisis similar al que se hizo para la suma por la izquierda, marca en la siguiente gráfica la suma por la derecha y encuentra el área de cada uno de los rectángulos:



Encuentra la suma derecha, para lo cual suma las áreas de cada uno de los rectángulos que marcaste:

Suma por la derecha = ______________________________.

El valor aproximado del área se obtiene al promediar los valores de las sumas por la izquierda y por la derecha.

El valor aproximado del área al utilizar tres rectángulos es: ________________.

Repite el proceso mediante el uso de nueve rectángulos.

Para obtener la longitud de la base de cada rectángulo divide la longitud del intervalo entre el número de rectángulos.

Ahora, ¿cuál será la longitud de la base de cada rectángulo? ________________.

Encuentra las alturas para cada uno de los valores de t y regístralos en la siguiente tabla:

t	0									
y	1									

Encuentra las sumas por la izquierda y por la derecha:

Suma por la izquierda = ____.

Suma por la derecha = ____.

El valor aproximado del área al utilizar nueve rectángulos es: ____________________.

¿Qué hacer para obtener una mejor aproximación?

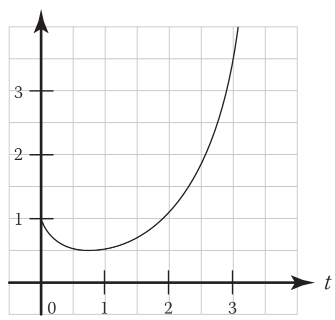
Completa la siguiente tabla con los valores obtenidos para las sumas por la izquierda y por la derecha cuando se usaron tres y nueve rectángulos.

n = NÚMERO DE RECTÁNGULOS	SUMA POR LA IZQUIERDA	SUMA POR LA DERECHA	DIFERENCIA ENTRE LAS SUMAS POR LA IZQUIERDA Y POR LA DERECHA
3			
9			

Utiliza los datos de la tabla para contestar las siguientes preguntas:

A medida que se usan más rectángulos, ¿aumenta o disminuye la diferencia entre las sumas por la izquierda y las sumas por la derecha? ____________________.

Visualización de lo aprendido

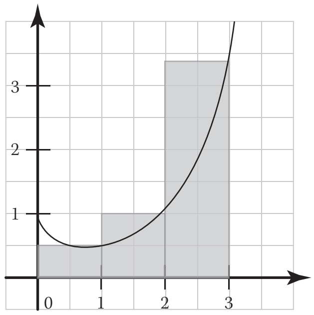


La gráfica de la razón de cambio de las ventas como una función del tiempo aparece en la figura de la derecha.

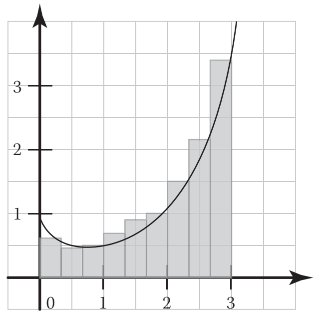
El valor de las ventas durante las primeras tres semanas está dado por el área de la figura formada por la curva y el eje t desde $t = 0$ hasta $t = 3$. Como la forma de la región no corresponde a una figura conocida, fue necesario dividir la región en rectángulos y aproximar el área mediante la suma del área de dichos rectángulos.a

En las siguientes gráficas el área sombreada de los rectángulos corresponde al valor de las ventas (mediante sumas por la derecha), tomando diferentes números de rectángulos.

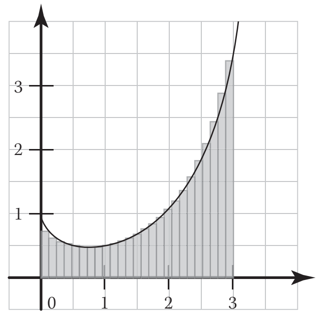
Con tres rectángulos



Con nueve rectángulos



Con 25 rectángulos



¿En cuál de los tres casos se obtiene una mejor estimación del valor de las ventas? __________.

¿Por qué? ____.

¡Reflexiona!

¿Qué debes hacer para obtener una mejor estimación del valor de las ventas? ______________.

Nota: Cuando todos los rectángulos quedan por arriba de la gráfica de la función, se dice que la suma de sus áreas corresponde a una *estimación superior* y de igual forma si quedan todos por debajo de la gráfica de la función, la suma de sus áreas corresponderá a una *estimación inferior*.

¡A trabajar!

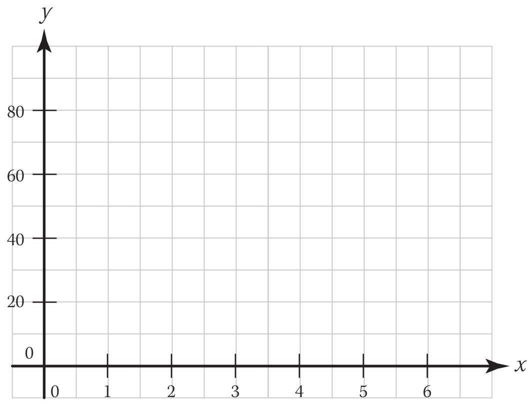
EJERCICIO 1

Resuelve el siguiente problema:

Un auto se detiene 5 segundos después de que su conductor aplica los frenos; mientras estos se aplican, se registran las siguientes velocidades:

TIEMPO (s)	0	1	2	3	4	5
VELOCIDAD (pies/s)	88	60	40	25	10	0

a) Utiliza la siguiente gráfica para trazar la velocidad contra tiempo:



b) ¿Cuál es la distancia recorrida en todo el intervalo? Márcala en la gráfica; para ello, utiliza tinta de colores diferentes a fin de marcar los rectángulos que dan la suma por la izquierda y la suma por la derecha.

Suma izquierda = ____.

¿Es una estimación superior o inferior? __________________.

¿Por qué? ____.

Suma derecha = ____.

¿Es una estimación superior o inferior? __________________.

¿Por qué? ____.

¡Reflexiona!

El valor obtenido en la distancia ¿representa exactamente la distancia recorrida? __________.

¿Cómo harías para obtener una mejor estimación de la distancia recorrida? ______________

____.

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.1

1. La siguiente tabla muestra los tiempos (en segundos) y la velocidad (en km/s) que registra un auto de carreras.

TIEMPO	5	10	15	20	25
VELOCIDAD	40	70	120	160	220

a) ¿Cuál es la distancia recorrida entre los 10 y 20 segundos?

b) ¿Cuál es la distancia recorrida en todo el intervalo de 5 a 25 segundos?

2. La siguiente tabla muestra las velocidades que alcanzó un maratonista en diferentes tiempos.

TIEMPO (s)	0	150	300	450	600
VELOCIDAD (m/s)	0	1.4	2.3	2.5	2.66

a) ¿Cuál es la distancia recorrida durante los primeros 300 segundos?

b) ¿Cuál es la distancia recorrida en los primeros 10 minutos?

3. En la siguiente tabla aparecen valores para la función $f(x)$ en el intervalo [20, 30]. Estima el valor de $\int_{20}^{30} f(x)dx$.

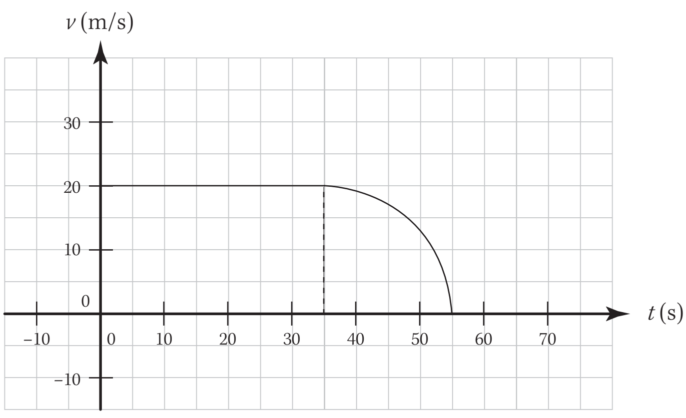
x	20	22	24	26	28	30
$f(x)$	5	7	11	18	29	45

4. En la siguiente tabla aparecen valores para la función $f(x)$ en el intervalo [0, 12]. Estima el valor de $\int_{0}^{12} f(x)dx$.

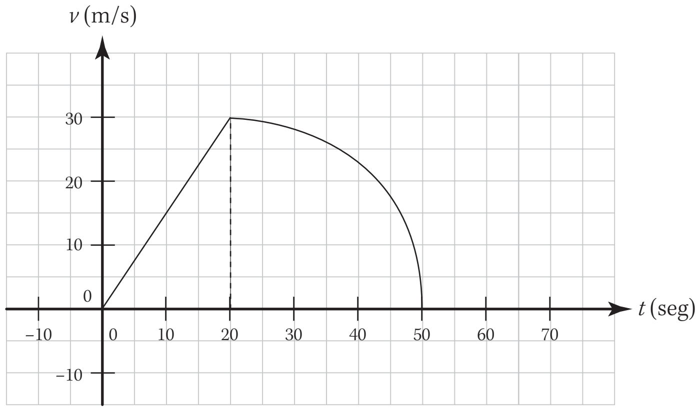
x	0	3	6	9	12
$f(x)$	25	7.69	2.50	1.18	0.68

En los problemas del 5 al 7 se dan las gráficas que representan la velocidad de un objeto en función del tiempo. Obtén la distancia recorrida en el intervalo dado.

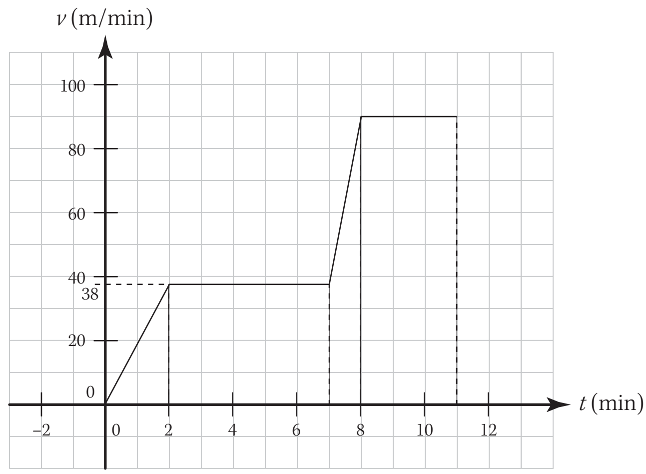
5.



6.

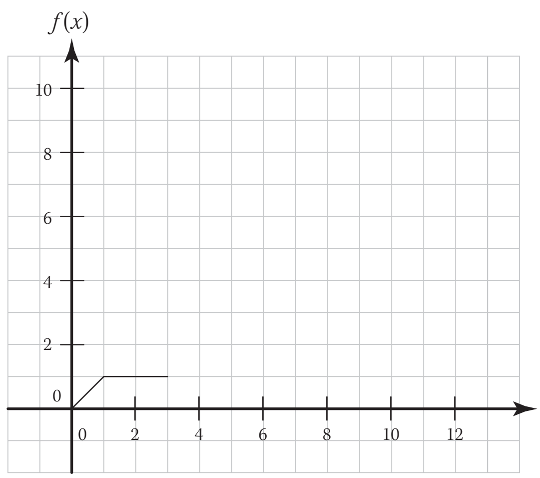


7.

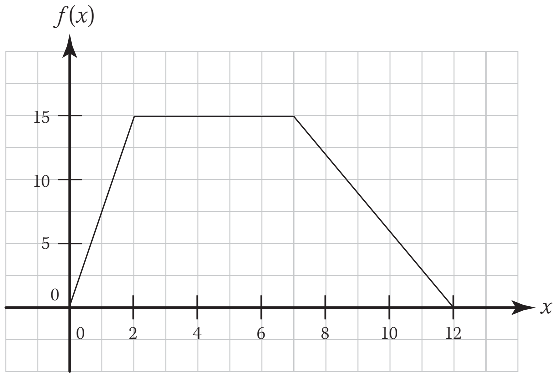


En los problemas del 9 al 10, estima el valor de la integral definida de la función que se muestra en la gráfica.

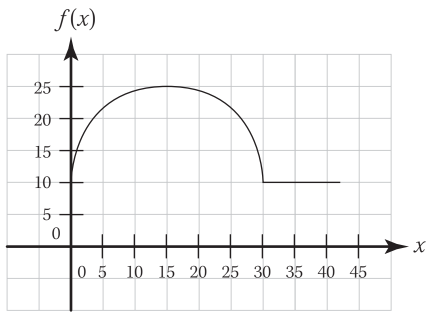
8. $\int_0^3 f(x)dx$



9. $\int_{3}^{12} f(x)dx$



10. $\int_{0}^{42} f(x)dx$



RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 2.1

1. *a*) 1175 km aproximadamente

   b) 400 km aproximadamente

2. *a*) 382.5 m aproximadamente

   b) 1129.5 m aproximadamente

3. ≈ 180
4. ≈ 72.63
5. $(700 + 100\pi)$ metros
6. $(300 + 225\pi)$ metros
7. 562 metros
8. 2.5
9. 97.5
10. $420 + 112.5\pi$

2.2 SUMAS DE RIEMANN

Si observas las gráficas de la razón de cambio que se manejaron en todos los ejemplos y ejercicios de la sección 2.1, podrás darte cuenta de que dichas gráficas eran siempre positivas, es decir, se encontraban situadas por arriba del eje de las x. Por esta razón, fue posible relacionar el concepto de integral definida con el problema de obtener el área de una región; sin embargo, sabemos que la derivada (o razón de cambio) de una función puede ser positiva o negativa, lo cual depende de si la función original es creciente o decreciente, por lo que ampliaremos nuestro análisis a este tipo de funciones. Para llegar a la definición general de integral definida se utilizará la misma estrategia de aproximar su valor mediante las sumas por la izquierda y por la derecha.

La siguiente figura muestra la gráfica de la razón de cambio de una función F, es decir, $f(x)=\dfrac{dF}{dx}$ y queremos obtener el valor de $\int_a^b f(x)dx$. De la sección anterior sabemos que podremos aproximar su valor si utilizamos las sumas por la izquierda y por la derecha.

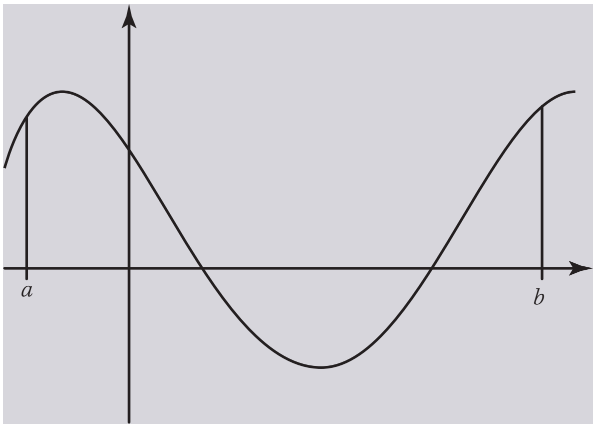
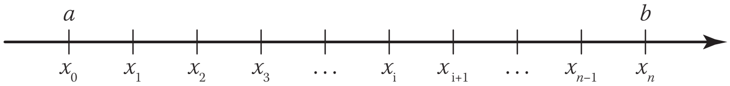


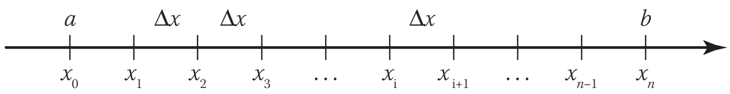
Figura 1. Gráfica de la razón de cambio de una función *F*

Para iniciar dividiremos el intervalo [a, b] en n partes iguales. Cada marca sobre el eje x corresponde a un valor diferente, por lo que utilizaremos subíndices para distinguirlos: el extremo $x = a$ del intervalo lo renombraremos como x_0 y el extremo $x = b$ deberá ser x_n. Observa el dibujo.



Cada parte en la que se dividió el intervalo [a, b] corresponde a la base de un rectángulo. Como se dividió en n partes iguales, todas las bases de los rectángulos tienen la misma longitud, que denotaremos como Δx.

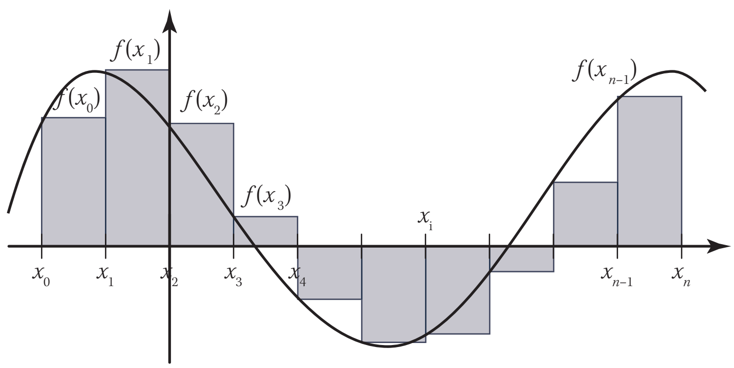
Nota: para saber el valor de Δx se divide la longitud total del intervalo entre el número total de partes, es decir, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.



Ahora hay que evaluar la función $f(x)$ en cada uno de los valores x_0, x_1, x_2, x_3, ... x_i .... x_n; al hacerlo obtenemos los correspondientes valores de y o $f(x)$. Observa la siguiente tabla de valores:

x	x_0	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_{n-1}	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	...	$f(x_i)$	...	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$

Para obtener la suma por la izquierda tomamos como altura del rectángulo el valor de la función que se encuentra a la izquierda de la base de cada rectángulo, como se muestra en la siguiente figura.



El área del primer rectángulo sería $f(x_0)\Delta x$, la del segundo rectángulo sería $f(x_1)\Delta x$, y así sucesivamente, en cuyo caso obtendríamos:

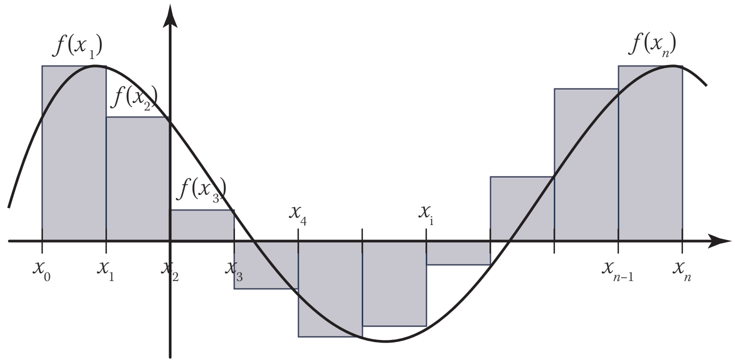
$$\text{Suma por la izquierda} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_i)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x.$$

Observa que todos los términos de la suma tienen la misma forma y que solo varían los valores de los subíndices. Por ello, la suma anterior se podrá expresar de una manera más concisa si se utiliza la notación sigma, la cual consiste en representar la suma con el símbolo Σ, que corresponde a la letra sigma del alfabeto griego, equivalente a nuestra S mayúscula:

$$\text{Suma por la izquierda} = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x.$$

El símbolo Σ indica que debemos sumar todos los términos de la forma $f(x_i)\Delta x$. La expresión $i = 0$ que aparece en la parte inferior del símbolo indica el valor de i con el que debemos iniciar, y la expresión $n - 1$ en la parte superior muestra el último valor de i que debemos tomar.

Para obtener la suma por la derecha seguimos un proceso similar al anterior, pero ahora tomamos como altura de cada rectángulo el valor de la función que se encuentra a la derecha de la base de cada rectángulo, como se ve en la siguiente figura.



La expresión para la suma por la derecha quedaría como sigue:

Suma por la derecha = $f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots + f(x_i)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$,

y en notación sigma queda:

Suma por la derecha = $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$.

Observa los valores que aparecen en las partes inferior y superior del símbolo Σ tanto en la suma por la izquierda como en la suma por la derecha y completa el siguiente cuadro:

	EMPIEZA	TERMINA
SUMA POR LA IZQUIERDA	i empieza en ______	i termina en ____
SUMA POR LA DERECHA	i empieza en ______	i termina en ____

Recuerda que las sumas por la izquierda y por la derecha solo dan un valor aproximado para la integral definida. Si queremos obtener el valor exacto, es necesario que el número de rectángulos n en que dividimos la región sea cada vez más grande hasta que los valores de las sumas por la izquierda y por la derecha sean iguales. En matemáticas, esto se conoce con el nombre de *tomar el límite cuando n tiende a infinito* y se denota por la expresión $\lim\limits_{n\to\infty}$. A su vez, el valor límite donde coinciden las sumas por la izquierda y por la derecha se llama *integral definida*.

Sin embargo, *debemos tener cuidado*: aunque geométricamente da la impresión de que el resultado de esta suma es una aproximación al valor del área sombreada en las figuras anteriores, *no* es así, pues los rectángulos que se encuentran por debajo del eje x tienen alturas negativas; por ende, al sumar dichos productos, en realidad se restaron. Por ello, si la gráfica de la razón de cambio $f(x)$ toma valores positivos y negativos dentro del intervalo $[a, b]$, entonces el valor de la integral definida no es igual al valor del área superficial.

Nota: Las sumas por la izquierda y por la derecha se conocen con el nombre de *sumas de Riemann*.

Definición

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. La integral definida de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ se denota por $\int_a^b f(x)dx$ y se define como el valor límite en el cual coinciden la suma por la izquierda y la suma por la derecha, es decir:

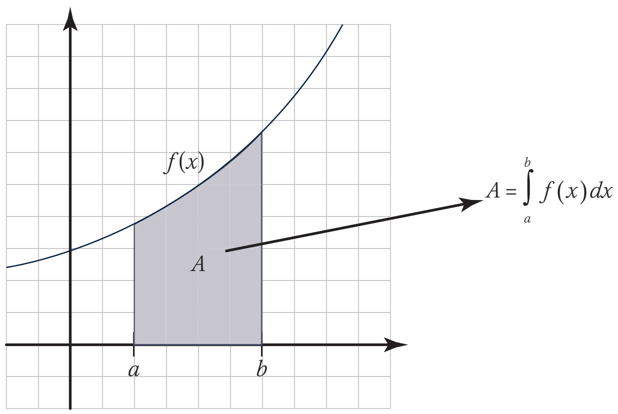
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} (\text{suma por la izquierda}) = \lim_{n\to\infty} (\text{suma por la derecha}).$$

En símbolos se escribe:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x,$$

donde n representa el número de rectángulos en que se dividió la región.

Nota: Si la gráfica de la razón de cambio $f(x)$ es positiva, o sea, se encuentra por arriba del eje x, entonces podemos asegurar que la integral definida representa el área bajo la curva $f(x)$ en el intervalo desde a hasta b, como se muestra en la siguiente gráfica.



Por ello, el símbolo de la integral "∫" tiene forma de una ***S*** (estirada), pues representa la *suma* de las áreas (rectángulos en que dividimos la región), $f(x)$ representa la altura de cada rectángulo, dx representa la longitud de las bases de los rectángulos y así podemos sumar todas esas áreas desde a hasta b.

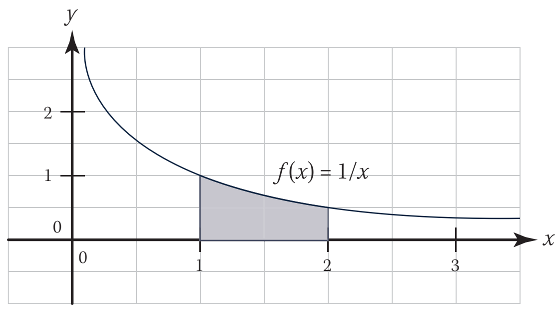
Recuerda que en sumas por la izquierda y por la derecha se obtiene una estimación del área, *no* el valor exacto. Para lograr una mejor estimación debemos dividir la región en una cantidad de rectángulos cada vez más grande; por ello, en la definición se exige que n tienda a infinito.

Ejemplo 1

Obtén el valor de la integral definida $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ en el intervalo indicado [1, 2].

Solución

Dibujemos el área que representa esta integral definida:



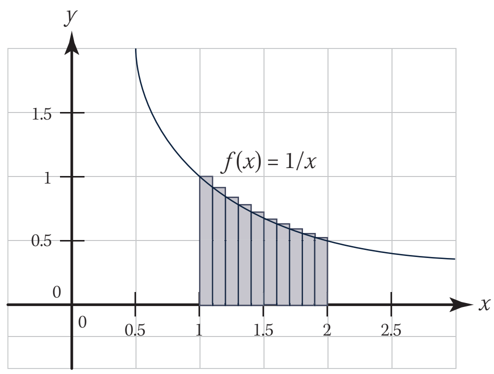
Para obtener el valor de la integral usamos sumas por la izquierda y por la derecha.

Dividimos la región en n rectángulos de igual base, con $n = 10$. Esto significa que el intervalo de integración, que mide una unidad, se va a dividir en 10 partes, por lo cual cada una de ellas medirá $\frac{1}{10} = 0.1$.

Obtenemos el valor de $y = f(x)$ para cada valor de x, pues representan las alturas de los rectángulos. Observa la siguiente tabla:

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$f(x) = \frac{1}{x}$	1	0.9090	0.8333	0.7692	0.7142	0.6666	0.625	0.5882	0.5555	0.5263	0.5

Ahora obtenemos la *suma por la izquierda*, dibujamos la gráfica y marcamos los rectángulos:



$$\sum \text{izquierda} \approx [(.1)\,f(1)+(.1)\,f(1.1)+(.1)\,f(1.2)+\ldots+(.1)\,f(1.9)]$$

Al sustituir los valores de las alturas obtenemos:

$$\sum \text{izquierda} \approx [(.1)(1)+(.1)(.9090)+(.1)(.8333)+\ldots+(.1)(.5263)] \approx 0.7188$$

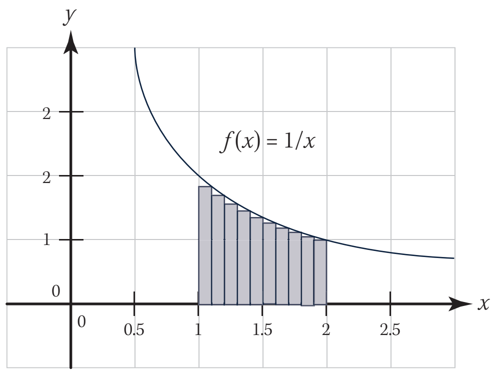
Nota: observa que el cálculo de la suma anterior se simplifica si la expresamos como:

$$\sum \text{izquierda} \approx (.1)[(1)+(.9090)+(.8333)+\ldots+(.5263)] \approx 0.7188$$

Es posible hacer lo anterior ya que la base tiene el mismo valor para todos los rectángulos, así que lo sacamos como factor común.

De la gráfica se puede ver que la suma por la izquierda es mayor que el área bajo la curva, por ende, el resultado obtenido representa una *estimación mayor* para el valor de la integral definida.

Suma por la derecha



$$\sum \text{derecha} \approx [(.1)\,f(1.1)+(.1)\,f(1.2)+(.1)\,f(1.3)+\ldots+(.1)\,f(2)]$$

Al sustituir los valores de las alturas obtenemos:

$$\sum \text{derecha} \approx [(.1)(.9090)+(.1)(.8333)+(.1)(.7692)+\ldots+(.1)(.5)] \approx 0.6688.$$

Escrito en forma simplificada:

$$\sum \text{derecha} \approx (.1)[(.9090)+(.8333)+(.7692)+\ldots+(.5)] \approx 0.6688.$$

De la gráfica se puede ver que la suma por la derecha es menor que el área bajo la curva, por lo cual el resultado obtenido representa una *estimación menor* para el valor de la integral definida.

De acuerdo con los resultados obtenidos, el valor de la integral definida está entre 0.6688 y 0.7188. Esto podemos representarlo como $0.6688 \leq \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \leq 0.7188$.

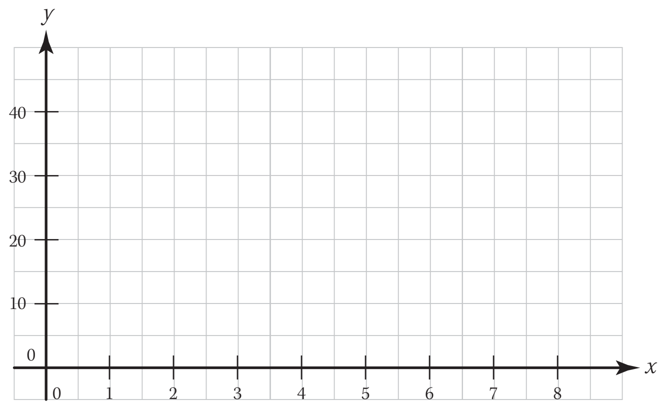
También se puede obtener el promedio de las estimaciones, pero este aún representa una estimación (valor aproximado) para la integral definida, la cual quedaría como: $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx 0.6938$. Las sumas de Riemann son una alternativa viable cuando la función no se puede integrar por fórmula o técnica.

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Obtén el valor de $\int_1^6 x^x\,dx$

Paso 1. Dibuja la gráfica que representa el área que se pide obtener



Paso 2. Reflexiona

¿Es la gráfica una figura conocida? ________.

¿Cómo lo resolverás? ____.

El número de divisiones que va a tomar es: ___10___.

¿Cuánto va a medir la base de cada rectángulo? ____________________.

¿Cómo lo obtuviste? ______________________________.

Paso 3. Elabora una tabla de valores para las divisiones elegidas, lo cual es necesario para conocer las alturas (valores de y) de cada rectángulo

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
$y = f(x)$											

Paso 4. Con la tabla anterior obtén la suma por la izquierda y la suma por la derecha

$\Sigma_{\text{Izq}} =$ ______________________________ $= 8088.93488.$

$\Sigma_{\text{Der}} =$ ______________________________ $= 31416.43488$

Los resultados obtenidos representan, respectivamente, una estimación superior y una estimación inferior para la integral definida, de las cuales concluimos que el valor de la integral definida es:

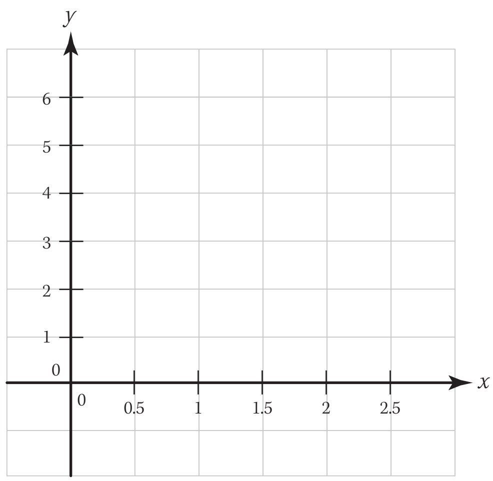
________ $< \int_1^6 x^x\,dx <$ ________ o el promedio $\int_1^6 x^x\,dx \approx$ ________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 2

Obtén el valor de $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$.

Paso 1. Dibuja la gráfica que representa el área que se pide obtener



Paso 2. Reflexiona

¿Cómo vas a resolverlo? ______________________________.

El número de divisiones que va a tomar es: ____4____.

¿Cuánto va a medir la base de cada rectángulo? ________. ¿Cómo lo obtuviste? ________.

Paso 3. Realiza una tabla de valores con las divisiones elegidas:

x	0				1
$y = f(x)$					

Paso 4. Con la tabla anterior obtén la suma por la izquierda y la suma por la derecha:

$\Sigma_{\text{Izq}} =$ ____ = __________.

$\Sigma_{\text{Der}} =$ ____ = __________.

Concluimos que el valor de la integral definida es:

__________ $< \int_0^1 e^{x^2}\,dx <$ __________ o el promedio $\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx$ ______________.

Propiedades de la integral definida

Las siguientes reglas se cumplen para toda integral definida: Las primeras dos son las mismas que se estudiaron en el capítulo anterior, las cuales se cumplen para la integral indefinida; por tanto, siguen siendo válidas para integrales definidas.

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces se cumple que:

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

2. $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$ donde k es una constante

3. $\int_a^a f(x)dx = 0$

4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ Si a > b

5. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ donde c es un número tal que $a < c < b$

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.2

En los problemas del 1 al 6 estima manualmente el valor de la integral definida, para lo cual utiliza sumas de Riemann y toma n subintervalos (redondea el valor de la función a cuatro decimales).

1. $\int_{1}^{4} \sqrt{x^2+1}\,dx \;;\; n=6$

2. $\int_{0}^{3} e^{\sqrt{x}}\,dx \;;\; n=12$

3. $\int_{4}^{6} \frac{x^2}{x^3+2}\,dx \;;\; n=10$

4. $\int_{-2}^{2} 2^{x^3}\,dx \;;\; n=8$

5. $\int_{1}^{3} \left[10+\ln\left(\frac{6x}{5+x^4}\right)\right]dx \;;\; n=5$

6. $\int_{0.2}^{2} x^{-x^2}\,dx \;;\; n=6$

En los problemas del 7 al 20, obtén el valor de la integral definida y utiliza como tecnología un graficador, tomando 1000 divisiones.

7. $\int_{0.5}^{1.4} \operatorname{sen} x^3\,dx$

8. $\int_{1}^{2.5} \ln(\operatorname{sen} x)\,dx$

9. $\int_{2}^{5} 4x^{\operatorname{sen} x}\,dx$

10. $\int_{1.5}^{3} 20\,(\ln x)^{e^x}\,dx$

11. $\int_{-2}^{0} \sqrt[3]{x^3-5x}\,dx$

12. $\int_{-1}^{1} \tan^2 x \; dx$

13. $\int_{-0.5}^{0.5} 3\cos(x^2+1)dx$

14. $\int_{3}^{6} \frac{e^x}{3x^2-1}dx$

15. $\int_{1}^{4} (\ln x)^{x^2} dx$

16. $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2+1}dx$

17. $\int_{0.5}^{2} \left(6^x\right)^{\ln x} dx$

18. $\int_{3}^{5.5} \left(\sqrt{x}\right)^{\ln x} dx$

19. $\int_{-3}^{1} e^{\sqrt{x^2+1}} dx$

20. $\int_{-1}^{6} \frac{10}{\sqrt[3]{x^3+2}}dx$

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 2.2

1. ≈ 12.56
2. ≈ 10
3. ≈ 0.4
4. ≈ 72
5. ≈ 18.744
6. ≈ 1.35936
7. 0.5625
8. 0.17975

9. 10.3593
10. 20.44985
11. 2.7944
12. 1.1148
13. 1.4014
14. 5.2519
15. 37.0067
16. 2.2143
17. 4.40085
18. 7.29075
19. 27.97995
20. 24.47475

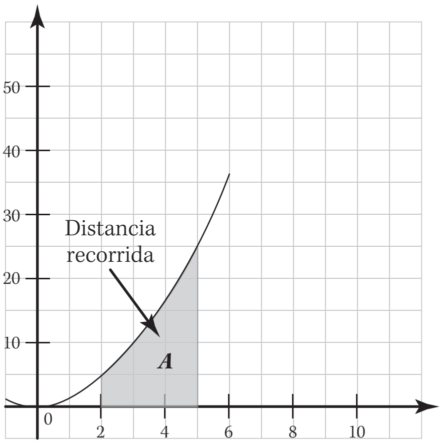
2.3 TEOREMA FUNDAMENTAL

La importancia del teorema fundamental del cálculo (conocido también como *regla de Barrow*) reside en que este relaciona el cálculo diferencial con el cálculo integral, ya que establece una estrecha relación entre el problema del cálculo de áreas y la obtención de la antiderivada de una función. Gracias a este teorema se puede decir que la derivación y la integración son operadores inversos y que para calcular el valor de la integral definida se podrá hacer si se obtiene la antiderivada de la función del integrando. Analicemos la siguiente situación.

Construcción del teorema fundamental

Supongamos que la velocidad de un auto (en metros/s) aumenta según la función $f(t)=t^2$ y deseamos encontrar la distancia total recorrida por el auto en el intervalo de tiempo desde $t = 2$ hasta $t = 5$ segundos.

Abordaremos dicho problema desde dos puntos de vista diferentes. Por un lado, en la sección 2.1 aprendiste que la distancia total recorrida está representada geométricamente por el área limitada por la gráfica de la función de velocidad y el eje t desde $t = 2$ hasta $t = 5$, la cual aparece en la siguiente figura.



Como la forma de la región no corresponde a una figura conocida, tendríamos que utilizar sumas de Riemann para encontrar el valor del área; además, sabemos que, como la función de velocidad es positiva en el intervalo de tiempo [2, 5], también podemos asegurar que el área de la región está dada por $A=\int_2^5 t^2\,dt$.

Por otro lado, en el capítulo uno aprendiste que si se integra la función de velocidad se obtendrá la función de distancia. Usa este conocimiento para encontrar la fórmula general que representa la distancia recorrida por el auto en cualquier segundo t: ____________________.

¿Cuál es la distancia recorrida por el auto en los primeros 5 segundos? ____________________.

¿Cuál es la distancia recorrida por el automóvil en los primeros 2 segundos? ____________________.

¿Qué harías para calcular la distancia total recorrida por el auto entre $t = 2$ y $t = 5$ segundos?

____.

¿Cuál es esa distancia? ____________________.

De acuerdo con los dos puntos de vista anteriores podemos concluir que la distancia total recorrida en el intervalo $[2, 5] = \int_2^5 t^2\,dt =$ ____.

¿Fue necesario calcular la distancia total recorrida por el auto mediante las sumas por la izquierda y por la derecha? ____________. ¿Por qué? ________________________________.

Resume con tus palabras el proceso que se siguió para encontrar la distancia total recorrida:

Paso 1. ____.

Paso 2. ____.

Paso 3. ____.

Paso 4. ____.

Esta estrategia que acabas de describir es la que planteó Isaac Barrow y que ahora se conoce como ***regla de Barrow*** o ***teorema fundamental del cálculo.*** Gracias a las aportaciones de Newton y Leibniz se pudo demostrar su validez, cuyo enunciado se da a continuación.

Teorema fundamental del cálculo

Si $f(x)$ es una función continua en todo punto del intervalo $[a, b]$ y si $F(x)$ es una antiderivada de f, se podrá asegurar que

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

El teorema fundamental es otra forma para obtener el valor de una integral definida, pero desafortunadamente solo podrá utilizarse si es factible obtener la antiderivada de la función del integrando con las fórmulas del capítulo 1: básica, compuesta o integración por partes. Cuando no sea posible obtener dicha antiderivada, solo se podrá aproximar su valor mediante las sumas de Riemann.

¡Reflexiona!

¿Se puede resolver mediante el teorema fundamental del cálculo la integral $\int_1^2 x^x\,dx$? __________.

¿Por qué? ____.

Al resolver una integral *indefinida* $\int f(t)\,dt$, ¿qué se obtiene como respuesta? ☐ Una función ☐ Un número	Al resolver una integral *definida* $\int_a^b f(t)\,dt$, ¿qué se obtiene como respuesta? ☐ Una función ☐ Un número

A continuación se dan algunos ejemplos de cómo resolver integrales definidas mediante el teorema fundamental del cálculo.

Ejemplo 1

Obtén el valor de la integral definida $\int_1^4 \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

Solución

Para utilizar el teorema fundamental es necesario obtener la antiderivada de la función mediante las fórmulas y métodos vistos en el capítulo anterior. Olvidémonos por un momento de los límites de integración y veamos si se puede obtener la antiderivada. La integral por resolver es:

$$\int \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx\,.$$

Observa que aparece una resta de funciones, por lo cual podemos separar en una resta de integrales; al hacerlo obtenemos:

$$\int \sqrt{x}\,dx-\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

Para identificar las fórmulas por utilizar y para resolver la integral, quitamos la raíz y la expresamos como potencia; además, en la segunda integral pasamos la x al numerador. Al hacerlo obtenemos

$$\int x^{1/2}dx-\int x^{-1/2}\,dx\,.$$

Observa que la función del integrando es una función potencia de la forma x^n con $n \neq -1$. Por ello, para integrar utilizamos la fórmula 1 de funciones básicas. La antiderivada queda como:

$F(x)=\dfrac{x^{3/2}}{3/2}-\dfrac{x^{1/2}}{1/2}+C$, que simplificada queda como

$$F(x)=\frac{2}{3}x^{3/2}-2x^{1/2}+C\,.$$

El teorema fundamental indica que debemos evaluar la antiderivada en los límites de integración y restar los resultados obtenidos. Esto lo expresamos como $F(x)=\frac{2}{3}x^{3/2}-2x^{1/2}\Big|_1^4$.

Evaluamos la antiderivada en los límites:

Superior: $F(4)=\frac{2}{3}(4)^{3/2}-2(4)^{1/2}+C=\frac{2}{3}(8)-2(2)+C=\frac{16}{3}-4+C=\frac{16-12}{3}+C=\frac{4}{3}+C$.

Inferior: $F(1)=\frac{2}{3}(1)^{3/2}-2(1)^{1/2}+C=\frac{2}{3}-2+C=\frac{2-6}{3}+C=-\frac{4}{3}+C$.

Y restamos: $F(4)-F(1)$

$$\left(\frac{4}{3}+C\right)-\left(-\frac{4}{3}+C\right)=\frac{4}{3}+C+\frac{4}{3}-C=\frac{8}{3}.$$

Nota: Observa que la constante de integración se cancela, lo cual sucede siempre en una integral definida, por lo cual en adelante no se agregará en la antiderivada.

Ejemplo 2

Obtén el valor de la integral definida $\int_0^2 (e^{2x}+e^{-2x})dx$.

Solución

Para utilizar el teorema fundamental es necesario obtener la antiderivada de la función con las fórmulas y métodos vistos en el capítulo anterior. Olvidémonos por un momento de los límites de integración y veamos si se puede obtener la antiderivada. La integral por resolver es:

$$\int\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)dx.$$

Observa que aparece una suma de funciones, por lo cual podemos separar en una suma de integrales; al hacerlo obtenemos:

$$\int e^{2x}\,dx+\int e^{-2x}\,dx.$$

Observa que ambas funciones son exponenciales con base e de la forma $e^{f(x)}$; por ende, para integrar usamos la fórmula 3 de funciones compuestas. La antiderivada queda como:

$$F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}.$$

Nota: Recuerda que ya no ponemos la constante de integración.

El teorema fundamental indica que debemos evaluar la antiderivada en los límites de integración y restar los resultados obtenidos. Esto lo expresamos como: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^2$.

Evaluamos la antiderivada en los límites:

Superior: $F(2)=\frac{1}{2}e^{2(2)}-\frac{1}{2}e^{-2(2)}=\frac{1}{2}e^{4}-\frac{1}{2}e^{-4}=27.289917.$

Inferior $F(0)=\frac{1}{2}e^{2(0)}-\frac{1}{2}e^{-2(0)}=\frac{1}{2}e^{0}-\frac{1}{2}e^{0}=0.$

Y restamos: $F(2)-F(0) = (27.289917)-(0)=27.289917.$

Aplicación de la integral definida

Ejemplo 3

Costo e ingreso marginal

El costo marginal de cierto producto está dado por $C'(q)=\frac{1}{3}\sqrt{q\ +150}$, si cada producto es vendido a \$600. Calcula la utilidad cuando son vendidos de 100 a 150 productos.

Solución

Recordemos que utilidad= ingreso-costo.

Entonces debemos plantear la función utilidad e integrarla en el intervalo indicado. Al plantearla nos queda:

$$\int_{100}^{150}\left(600-\frac{1}{3}\sqrt{q+150}\right)dq$$

$$=600q-\frac{2}{9}(q+150)^{\frac{3}{2}}\Big|_{100}^{150}$$

$$=\left(600*150-\frac{2}{9}(150+150)^{\frac{3}{2}}\right)-\left(600*100-\frac{2}{9}(100+150)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$=\$29723.7$ es la utilidad al vender de 100 a 150 productos.

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Determina si la integral definida se puede resolver con el teorema fundamental del cálculo (TFC) o se debe resolver con sumas de Riemann. Si se puede resolver con el TFC, obtén su valor.

Determina el valor de la integral $\int_{0}^{3}\frac{1}{\sqrt{4-x}}dx$

¿Puedes obtener la antiderivada con las fórmulas (básica, compuesta o por partes)? ____________.

¿Con qué fórmula se resuelve la integral? ____.

Aplica la fórmula y obtén $F(x)$____.

Utiliza el teorema fundamental:

$F(\,3\,) =$ ____.

$F(\,0\,) =$ ____.

Y la resta ____.

Por ello, concluimos que: $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{4-x}}\,dx =$ ________________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 2 Determina el valor de la integral $\int_1^2 \sqrt{x^2+1}\;dx$.

¿Puedes obtener la antiderivada con las fórmulas (básica, compuesta o por partes)? ______.

¿Por qué? ____.

Entonces, ¿qué método debes utilizar para obtener el valor de la integral definida?

________________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 3 Determina el valor de la integral $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{3x}}}{\sqrt{3x}}\,dx$

¿Puedes obtener la antiderivada con las fórmulas (básica, compuesta o por partes)? ______.

¿Con qué fórmula se resuelve la integral? ________________________.

Aplica la fórmula y obtén $F(x) =$ ________________________.

Utiliza el teorema fundamental:

$F(\,1\,) =$ ____.

$F(\,0\,) =$ ____.

Y la resta ____.

Por tanto, concluimos que: $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{3x}}}{\sqrt{3x}}\,dx =$ ________________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 4

Determina el valor de la integral $\int_2^3 4^{x^2}\,dx$.

¿Puedes obtener la antiderivada con las fórmulas (básica, compuesta o por partes)? ________.

¿Por qué? ____.

Entonces ¿qué método debes utilizar para obtener el valor de la integral definida? ________.

________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 5

Determina el valor de la integral $\int_1^5 x^{\sqrt{x}}\,dx$.

¿Puedes obtener la antiderivada con las fórmulas (básica, compuesta o por partes)? ________.

¿Por qué? ____.

Entonces, ¿qué método debes utilizar para obtener el valor de la integral definida? ________

________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 6

Determina el valor de la integral $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cdot \cos x dx$.

¿Puedes obtener la antiderivada con las fórmulas (básica, compuesta o por partes)? ________

________________.

¿Con qué fórmula se resuelve la integral? ________________.

Aplica la fórmula y obtén $F(x) =$ ________________.

Utiliza el teorema fundamental:

$F(\pi/2) =$ ________________________________.

$F(0) =$ ________________________________.

Y la resta ________________________________.

Por ello, concluimos que: $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \cdot \cos x d x =$ ________________.

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.3

Resuelve las siguientes integrales definidas:

1. $\int_{1}^{3} 20e^{x}\,dx$

2. $\int_{0}^{2} \left(8x^{4}+e^{x}\right)dx$

3. $\int_{-1}^{1} \frac{(6.1)^{x}}{3}\,dx$

4. $\int_{1}^{3} x^{-2}\,dx$

5. $\int_{-5}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 3x^{2}\right)dx$

6. $\int_{0}^{10} \left(x^{5}-3x^{2}+2x-8\right)dx$

7. $\int_{1}^{7/2} \left(\pi^{x}+x^{5}\right)dx$

8. $\int_{-1}^{1} \left(\sqrt[5]{x}+e^{x}\right)dx$

9. $\int_{6}^{10} \left(x^{3}-2\right)^{2}dx$

10. $\int_{1}^{3} \left(\frac{x^{3}-2x^{5}+x}{x^{2}}\right)dx$

11. $\int_{7}^{12} \frac{(2x-1)^{2}}{x}\,dx$

12. $\int_{-3}^{2} \left(\frac{x^{2}-5x+6}{x-3}\right)dx$

13. $\int_{-1}^{3}\left(\frac{x^2-25}{x+5}\right)dx$

14. $\int_{1}^{7}\frac{e^3}{e^{-x}}dx$

15. $\int_{-1}^{1}\sqrt[5]{x}\left(x^2+2x\right)dx$

16. $\int_{4}^{6}\left(\frac{t^2+3t-10}{t^2-2t}\right)dt$

17. $\int_{1}^{2}\left(\frac{y^2-9}{2y^2-6y}\right)dy$

18. $\int_{1/2}^{3/2}\left(\frac{24^x}{8^x}\right)dx$

19. $\int_{4}^{7}e^{\ln\left(x^2-3x\right)}\,dx$

20. $\int_{-2}^{5}\ln e^{\left(5t+e^t\right)}\,dx$

21. $\int_{3}^{8}\frac{\ln(x+1)}{5(x+1)}dx$

22. $\int_{0}^{2}(8x+1)e^{\left(8x^2+2x\right)}\,dx$

23. $\int_{2}^{5}\sqrt{x^3+2x-8}\left(9x^2+6\right)dx$

24. $\int_{6}^{10}(4.2)^{3x}\,dx$

25. $\int_{1}^{2}2w\left(5-w^2\right)^{-1/3}\,dw$

26. $\displaystyle\int_{-4}^{-1} \frac{e^{-3x}}{\left(e^{-3x}-1\right)^2}\,dx$

27. $\displaystyle\int_{5.2}^{7.4} \frac{20}{x(\ln x)^3}\,dx$

28. $\displaystyle\int_{-3}^{0} e^{x^4} x^3\,dx$

29. $\displaystyle\int_{1}^{5/2} \frac{(\ln x)^{1/3}}{x}\,dx$

30. $\displaystyle\int_{2.5}^{6} \frac{(\ln 2)^{\ln x}}{x}\,dx$

31. $\displaystyle\int_{3}^{5} \frac{(\ln x)4^{\ln^2 x}}{x}\,dx$

32. $\displaystyle\int_{10}^{12} \frac{x^6+x^3}{\sqrt[3]{4x^7+7x^4}}\,dx$

33. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^4+2}{x^5+10x+e}\,dx$

34. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\pi^{3x}+(5x)^{\pi}\right)dx$

35. $\displaystyle\int_{5}^{22} \frac{x^3}{\left(\left(2x^4-1\right)^3\right)^{1/4}}\,dx$

36. $\displaystyle\int_{-4}^{2} \frac{7^{-x}+3x^5}{4}\,dx$

37. $\displaystyle\int_{4.5}^{5.1} \left(\frac{1}{x-3}+\frac{x^2}{\left(3x^2+8\right)^{1/5}}\right)dx$

38. $\displaystyle\int_{-2}^{1.5} \frac{5e^{3x}}{4^{e^{3x}}}\,dx$

39. $\int_{0}^{8} 12t^3 \sqrt[3]{t^2+8}\, dt$

40. $\int_{-2}^{0} 5x^3 e^{\left(x^2-4\right)}\, dx$

41. $\int_{1}^{5} \ln(6x-3)\, dx$

42. $\int_{-2}^{1} 3xe^{x/3}\, dx$

43. $\int_{4}^{16} \frac{\ln x}{\sqrt[6]{x}}\, dx$

44. $\int_{12}^{21} x(3.1)^x\, dx$

45. $\int_{9}^{12} \ln\left(x^{5/2}\right) dx$

46. $\int_{2}^{3} \pi^{2x}\left(x^2\right) dx$

47. $\int_{0}^{6} \left(2^x+5x\right)^2\, dx$

48. $\int_{-2}^{1} 2x^3 e^{6x^2}\, dx$

49. $\int_{0}^{3} \frac{x3^x}{(x\ln 3+8)^2}\, dx$

50. $\int_{2}^{4} \left(6x^2+5\right)\ln\left(2x^3+5x\right) dx$

51. $\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(\pi \cos x) \operatorname{sen} x\, dx$

52. $\int_{\pi/2}^{\pi} 2^{\cos x} \operatorname{sen} x \, dx$

53. $\int_{-\pi/3}^{0} \sqrt[3]{\cos(3x)-1} \operatorname{sen}(3x) \, dx$

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 2.3

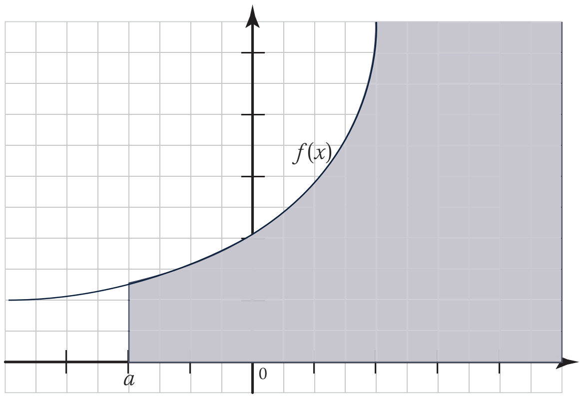
1. 347.35
2. 57.59
3. 1.094
4. 0.667
5. −126.89
6. 165 686.67
7. 351.48
8. 2.3504
9. 1 379 892.572
10. −34.901
11. 170.539
12. −12.5
13. −16
14. 21 971.87
15. 1.82
16. 4.027
17. 1.54
18. 3.153
19. 43.5
20. 200.78
21. 0.291
22. 2.156×10^{15}
23. 2846.43

24. 1.57×10^{18}
25. 2.28
26. 1.746×10^{-2}
27. 1.183
28. -3.765×10^{34}
29. 0.667
30. 0.5353
31. 11.158
32. 8 408.722
33. 0.324
34. 46.64
35. 10.11
36. −195.54
37. 4.65
38. 1.198
39. 43 457.069
40. −1.51
41. 10.282
42. −2.0173
43. 18.311
44. $3.702662933 \times 10^{11}$
45. 17.61
46. 2518.733
47. 8982.60
48. $-1.692360575 \times 10^{10}$
49. 4.38
50. 532.88
51. 0
52. 0.7213
53. 0
54. 0.63

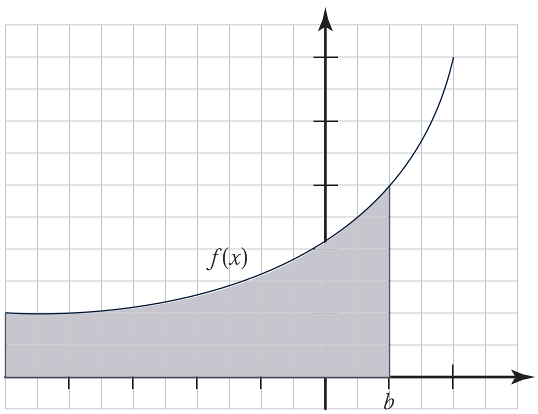
2.4 INTEGRAL IMPROPIA

Una integral definida se llamará *integral impropia* si tiene un intervalo de integración infinito; puede ser que uno o ambos extremos de integración sean infinitos, por ejemplo:

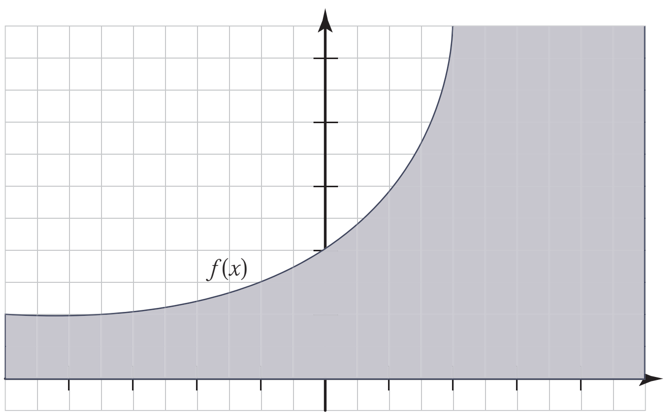
$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$$



$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$



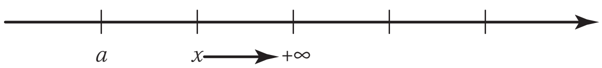
¿Cómo resolver una integral impropia?

Utilizaremos el teorema fundamental del cálculo para obtener el valor de una integral impropia, pero el teorema indica que la función debe existir en el intervalo cerrado $[a, b]$, donde a y b son números finitos. Para resolver la integral impropia es necesario reescribir la integral de tal forma que no aparezca el símbolo ∞ en ninguno de los límites de integración, por ejemplo:

Caso 1: Si el extremo superior de la integral es infinito, lo sustituimos por una nueva variable (por ejemplo, x) y luego hacemos que esa variable se mueva hasta infinito, agregando la palabra *límite* para revisar qué pasa con el resultado de la integral.

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{x \to +\infty} \int_a^{x} f(x)dx$$

Geométricamente lo que estamos haciendo es



Nota: Al escribir que x tiende a infinito significa que la x va a tomar valores cada vez más grandes, por ejemplo: 10 000, 100 000, 1 000 000, y así sucesivamente.

¡Reflexiona!

Al resolver la integral impropia de esta forma, le damos un valor al símbolo de infinito, que sabemos representa un número grande, es decir, estamos resolviendo las siguientes integrales definidas (no impropias):

Para $x = 10\,000$ nos queda la integral $\int_a^{10000} f(x)dx = \#$ (cuyo resultado es un valor numérico),

para $x = 100\,000$ nos queda la integral $\int_a^{100000} f(x)dx = \#$ (cuyo resultado es un valor numérico),

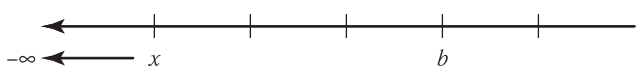
y así sucesivamente. Dado que a representa un número real, el resultado de las integrales anteriores es un valor numérico. Para dar el resultado de la integral impropia revisamos lo siguiente: si el resultado de las diferentes integrales es el mismo o muy parecido entre sí (diferencia de décimas), se dice que *la integral impropia es convergente*, pues esto significa que en el resultado de la integral se observa una tendencia hacia un cierto valor. Si los resultados de las integrales son diferentes (no se observa una tendencia a cierto número), concluimos que *la integral impropia es divergente*, es decir, su resultado es infinito.

Nota: En forma similar se resuelven los otros casos de integral impropia.

Caso 2: Si el límite inferior de la integral es infinito, la integral se reescribe como sigue:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{x \to -\infty} \int_x^{b} f(x)dx$$

Geométricamente lo que estamos haciendo es



Caso **2:** Cuando ambos límites de integración son infinitos, debemos separar la integral en la suma de dos integrales impropias, de tal forma que cada una de ellas contenga un solo límite infinito de integración, es decir,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

donde c es cualquier número real.

Una vez hecho esto, se procede a reescribir cada una de las integrales según se mencionó anteriormente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b \to +\infty} \int_{c}^{b} f(x)dx.$$

Observa que en este caso debes utilizar variables diferentes en cada uno de los límites.

Nota: En el caso de la integral con ambos límites de integración infinitos, deben existir ambos límites para que la integral sea convergente. Si al menos uno de ellos es infinito, se concluye que la integral diverge.

Proceso de solución para integrales impropias

Cuando la integral impropia ha sido reescrita, se realiza lo siguiente:

Paso 1. Aplicar las fórmulas y propiedades de la integral para obtener la antiderivada $F(x)$.

Paso 2. Evaluar la antiderivada en el intervalo de integración, utilizando el teorema fundamental del cálculo.

Paso 3. Encontrar el valor del límite al infinito (si existe), lo cual puedes hacer de varias maneras:

a) Analizando el comportamiento gráfico de la función (utiliza un software graficador).

b) Utilizando los teoremas de límite y comportamiento de funciones básicas. Si K es una constante diferente de cero:

$$\frac{k}{\infty}=0; \frac{\infty}{k}=\infty; \frac{k}{0}=\infty; \frac{0}{k}=0.$$

c) Con una tabla de datos: evaluando diferentes valores para la variable que representa el infinito, en cuyo caso seleccionas los valores de x y obtienes los correspondientes valores de y.

x	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000
$f(x)$	#	#	#	#

Recuerda que la conclusión dependerá de los resultados de las evaluaciones.

Conclusión: Si el resultado del límite es un número real, se dice que la integral *converge*; pero si el resultado da infinito, se dice que la integral *diverge*.

Ejemplo 1

Determina si la integral impropia es convergente o divergente:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx.$$

Solución

Primero tenemos que reescribir la integral para quitar el infinito: $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_1^{x} \frac{1}{x^2}\, dx.$

Veremos las tres formas diferentes de resolver la integral impropia:

Paso 1. Aplica las fórmulas y propiedades de la integral para obtener la antiderivada $F(x)$.

Para resolverla subes x^2 y utilizas la fórmula 1 básica del capítulo 1: $F(x) = -\frac{1}{x}$.

Paso 2. Evalúa la antiderivada en el intervalo de integración, para lo cual utiliza el teorema fundamental del cálculo.

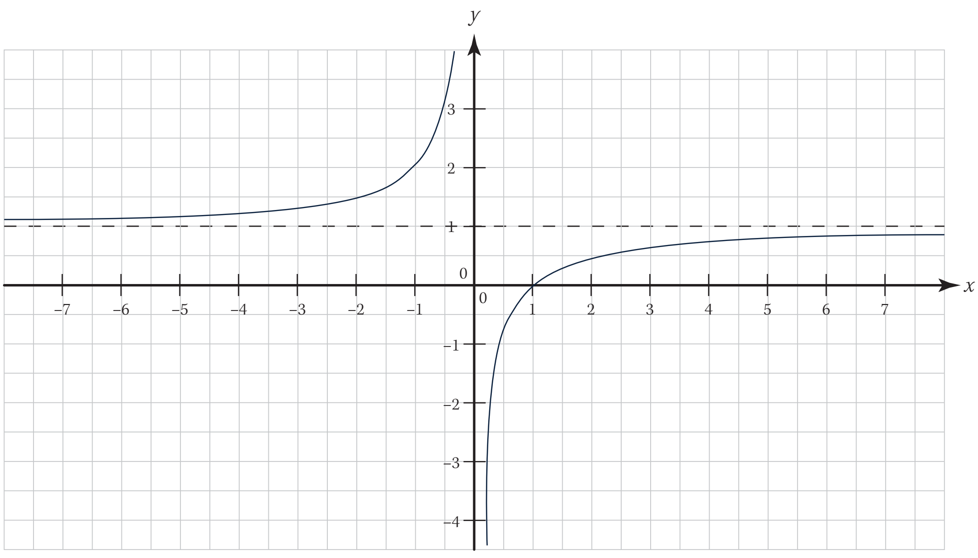
$$F(x) = -\frac{1}{x}\Big|_1^x = -\frac{1}{x} - -\frac{1}{1} = -\frac{1}{x} + 1, \text{ es decir, } F(x) = -\frac{1}{x} + 1.$$

Paso 3. Encuentra el valor del límite cuando x tiende a infinito de $F(x)$, si existe.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} + 1\right).$$

Veremos las tres formas diferentes de resolver el límite y dar el resultado de la integral impropia:

a) **Análisis del comportamiento gráfico de la función $F(x)$.** Utiliza un software graficador y dibuja la gráfica de $F(x)$ y observa hacia dónde tiende la y cuando la x tiende a infinito positivo.



Observa que conforme x crece, la gráfica se acerca cada vez más a la recta $y = 1$, en cuyo caso podemos concluir que el valor del límite es uno. Entonces la integral impropia es convergente a 1.

Conclusión: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge a 1.

b) **Utilización de los teoremas de límite:**

$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}+1\right)=-\frac{1}{+\infty}+1$ y por teorema de límites de Matemáticas 1 sabemos que $\frac{k}{\infty}=0$.

Entonces $\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}+1\right)=0+1=1$, es decir, el valor del límite es uno, y entonces la integral impropia es convergente a 1.

Conclusión: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge a 1.

c) **Con una tabla de datos: debemos tomar diferentes valores para x (números grandes y positivos) y obtener los correspondientes valores de y:**

X	1 000	10 000	100 000	10 000 000
$F() = -\frac{1}{x} + 1$	0.999	0.9999	0.99999	0.999999

Observa que aun para valores muy grandes de x, el valor de $F(x)$ no se pasa de 1, es decir, los valores de $F(x)$ tienden a uno cuando x tiende a infinito positivo. Entonces la integral impropia es convergente a 1.

Conclusión: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge a 1.

Ejemplo 2

Determina si la integral impropia es convergente o divergente:

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx.$$

Solución

Primero tenemos que reescribir la integral para quitar el infinito: $\lim_{x\to+\infty}\int_3^{x} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

Veremos las tres formas diferentes de resolver la integral impropia:

Paso 1. Aplica las fórmulas y propiedades de la integral para obtener la antiderivada $F(x)$.

Para resolverla cambia la raíz a potencia y súbela; luego utiliza la fórmula 1 compuesta del capítulo 1. Entonces nos queda expresada como: $\int (x+1)^{-1/2} dx$. Al integrar obtenemos $F(x) = 2\sqrt{x+1}$.

Paso 2. Evalúa la antiderivada en el intervalo de integración utilizando el teorema fundamental del cálculo:

$$F(x) = 2\sqrt{(x+1)}\ \Big|_3^x = 2\sqrt{(x+1)} - 2\sqrt{(3+1)} = 2\sqrt{(x+1)} - 4, \text{ es decir, } F(x) = 2\sqrt{x+1} - 4.$$

Paso 3. Encuentra el valor del límite cuando x tiende a infinito de $F(x)$, si existe:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(2\sqrt{x+1} - 4\right).$$

Para obtener el valor del límite utilizamos cualquiera de las tres formas que se vieron en el ejemplo anterior (por ejemplo, una tabla de datos):

Con la tabla de datos: debemos tomar diferentes valores para *x* (números grandes y positivos) y obtener los correspondientes valores de *y*

x	1 000	10 000	100 000	1 000 000
$F(x) = 2\sqrt{x+1} - 4$	59.2771	196.0099		

Observa que con dos valores de x ya podemos dar una conclusión pues no existe una tendencia de $F(x)$ a tener cierto valor, es decir, los valores de $F(x)$ se hacen cada vez más grandes cuando x tiende a infinito positivo. Entonces concluimos que la integral impropia es divergente.

Si te queda duda del resultado, puedes hacer más evaluaciones.

Conclusión: $\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$ es divergente.

Aplicaciones de la integral impropia

Una de las aplicaciones más importantes de las integrales impropias se da en el ámbito de la probabilidad y la estadística, particularmente cuando se evalúan las funciones de densidad. El conocimiento de la probabilidad y la estadística permite, sobre todo a los profesionales del área de ciencias sociales, traducir aspectos cualitativos a cuantitativos y con esto hacer generalizaciones de comportamientos de ciertos fenómenos, por ejemplo: el comportamiento de la conducta humana, los indicadores de pobreza, las tasas de crecimiento poblacional, etcétera.

Antes de adentrarnos a los cálculos matemáticos, es importante conocer los conceptos de función densidad, experimento aleatorio, variable aleatoria, variable discreta y variable continua.

Un *experimento aleatorio* es aquel que se realiza al azar, y una *variable aleatoria* es un número asociado al resultado de un experimento aleatorio; por ejemplo, seleccionar a un consumidor de telefonía celular es un experimento aleatorio, mientras que el nivel de satisfacción de los clientes es una variable aleatoria.

Una *variable discreta* es aquella que puede tomar un valor específico, mientras que una *variable continua* es aquella que puede tomar un valor dentro de un intervalo; por ejemplo, la temperatura promedio en un día es una variable discreta, y la temperatura observada en un día es una variable continua, ya que su registro varía a cada momento del día y la única manera de precisarlo es por medio de un intervalo.

Una *función de densidad* de probabilidad para una variable aleatoria continua es una función positiva, cuya área encerrada bajo la curva es igual a 1, o sea, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Existen muchos tipos de función densidad, pero solo se hará énfasis en la *función de densidad uniforme* y en la *función de densidad exponencial*.

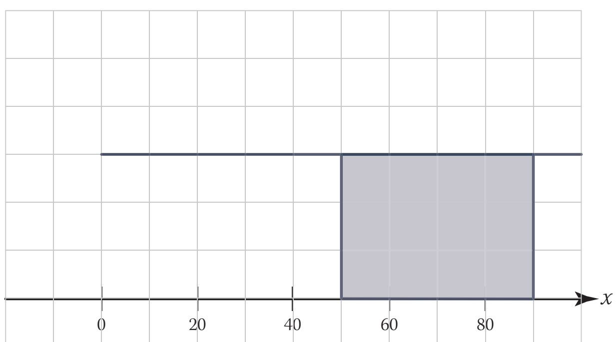
Una *función densidad uniforme* es aquella en la que la variable aleatoria solo puede tomar valores comprendidos entre dos extremos a y b, de manera que todos los intervalos de una misma longitud (dentro de (a, b)) tienen la misma probabilidad. En este caso se define como:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Ejemplo 3

El tiempo de espera máximo para que un cliente sea atendido vía telefónica por un departamento de ventas es de 90 segundos. Si un cliente llamara, ¿cuál sería la probabilidad de que esperara al menos 50 segundos?

Un bosquejo gráfico puede ser el siguiente:



La función densidad queda expresada como:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{90-0} & \text{si } 0\le x\le 90,\\ 0 & \text{en los demás casos,}\end{cases}$$

donde b = 90 (tiempo máximo) y a = 0 (tiempo mínimo).

La probabilidad deseada queda como :

$$P(50\le x\le 90)=\int_{50}^{90}\frac{1}{90}\,dx=\frac{x}{90}\bigg|_{50}^{90}=.444=44.4\%\ \text{de probabilidad.}$$

En otras palabras, la probabilidad de que una persona tenga que esperar al menos 50 segundos para ser atendida es de 44.4%.

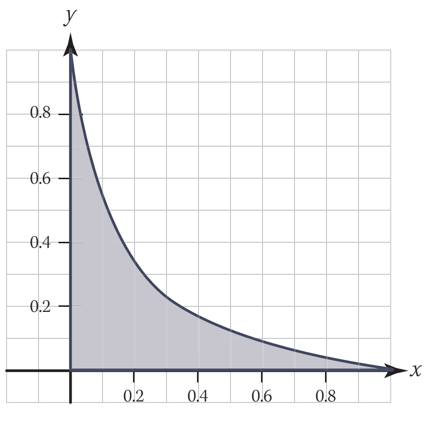
Ejemplo 4

Otra función relacionada con las integrales impropias es la *función exponencial*, la cual tiene una distribución continua y es de gran utilidad para resolver problemas de filas de espera, la vida útil de ciertos productos, llamadas en espera, etcétera.

Su función densidad está dada por $f(x)=\begin{cases}ke^{-kx} & \text{si } x>0,\\ 0 & \text{si } x<0.\end{cases}$

donde $\int_{0}^{\infty} ke^{-kx}\,dx=1.$

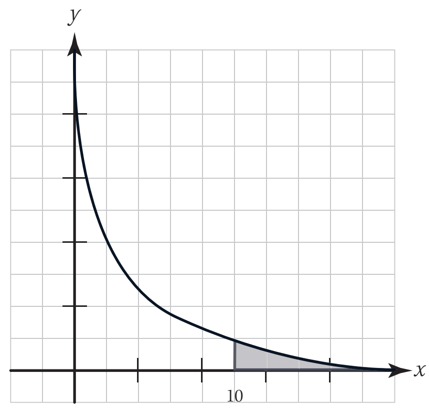
Su forma gráfica es la siguiente:



Por ejemplo, si en un estudio inventarial se determinó que, en promedio, las demandas correspondientes a cierto producto están dadas por $f(x)=\begin{cases}0.20e^{-0.20x} & \text{si } x\ge 0,\\ 0 & \text{si } x<0.\end{cases}$

¿Cuál es la probabilidad de que, en un día determinado, este artículo se demande más de 10 veces?

Para empezar, haremos un bosquejo gráfico que nos permita visualizar el área por calcular:



La integral quedaría expresada como

$$\int_{10}^{\infty} 0.2e^{-0.2t}\,dt = -e^{-0.2t}\Big|_{10}^{\infty} = \left(-\frac{1}{e^{0.2(\infty)}} + \frac{1}{e^{0.2(10)}}\right)$$
$$= (0 + 0.1353) = 13.53\%.$$

13.53 % es la probabilidad de que el producto sea requerido más de 10 veces.

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Resuelve la integral impropia, determina si es convergente o divergente y, en caso de ser convergente, da el valor:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x}\,dx.$$

Paso 1. Redefine la integral para quitar el infinito:

Paso 2. Resuelve la integral con fórmulas:

Paso 3. Utiliza el teorema fundamental para evaluar en el intervalo de integración:

Paso 4. Obtén el valor del límite con cualquiera de las estrategias mencionadas:

¿Qué método vas a utilizar: gráfica, teoremas o tabla de datos?: ______________________.

Conclusión: Convergente (a qué valor) o divergente

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x}\, dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

¡A trabajar!

EJERCICIO 2

Resuelve la integral impropia, determina si es convergente o divergente y, en caso de ser convergente, da el valor:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x+1} dx.$$

Paso 1. Redefine la integral para quitar el infinito:

Paso 2. Resuelve la integral con fórmulas:

Paso 3. Utiliza el teorema fundamental para evaluar en el intervalo de integración:

Paso 4. Obtén el valor del límite con cualquiera de las estrategias mencionadas:

¿Qué método vas a utilizar : gráfica, teoremas o tabla de datos?: ________________________.

Conclusión: Convergente (a qué valor) o divergente:

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x+1}dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

¡A trabajar!

EJERCICIO 3

Resuelve la integral impropia, determina si es convergente o divergente y, en caso de ser convergente, da el valor:

$$\int_{3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(5x-6)^3}}\,dx.$$

Paso 1. Redefine la integral para quitar el infinito:

Paso 2. Resuelve la integral con fórmulas:

Paso 3. Utiliza el teorema fundamental para evaluar en el intervalo de integración:

Paso 4. Obtén el valor del límite con cualquiera de las estrategias mencionadas:

¿Qué método vas a utilizar: gráfica, teoremas o tabla de datos?: ________________________.

Conclusión: Convergente (a qué valor) o divergente

$$\int_{3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(5x-6)^3}}\,dx = \rule{6cm}{0.4pt}.$$

¡A trabajar!

EJERCICIO 4

Resuelve la integral impropia, determina si es convergente o divergente y, en caso de ser convergente, da el valor:

$$\int_{-\infty}^{1} 2^{3x+1}\,dx.$$

Paso 1. Redefine la integral para quitar el infinito:

Paso 2. Resuelve la integral con fórmulas:

Paso 3. Utiliza teorema fundamental para evaluar en el intervalo de integración:

Paso 4. Obtén el valor del límite con cualquiera de las estrategias mencionadas:

¿Qué método vas a utilizar: gráfica, teoremas o tabla de datos?: ____________________

Conclusión: Convergente (a qué valor) o divergente:

$$\int_{-\infty}^{1} 2^{3x+1}\,dx = \rule{6cm}{0.4pt}.$$

¡A trabajar!

EJERCICIO 5

Cierto semáforo permanece en rojo 43 segundos cada vez. Si llegas al semáforo y está en rojo, utiliza una función de densidad uniforme que permita calcular la probabilidad de que el semáforo cambie a verde en menos de 13 segundos y obtén esa probabilidad.

a) Plantea la función densidad:

b) Dibuja la gráfica que te permita visualizar el área por calcular:

c) Plantea la integral que debes resolver para calcular lo que se indica: ____________________.

d) Obtén la probabilidad:

e) Da la interpretación del resultado:

¡A trabajar!

EJERCICIO 6

El tiempo x en minutos que un cliente utiliza para hacer fila en una oficina de gobierno es una variable aleatoria distribuida exponencialmente, cuya función de densidad es:

$$f(x)=\begin{cases} 0.25e^{-.25x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donde x es el número de minutos que un cliente seleccionado al azar debe esperar en la fila. Si en la política de calidad en la atención a la ciudadanía se ha establecido que un ciudadano no debe esperar más de 8 minutos en la fila para ser atendido, ¿cumple la oficina gubernamental la norma establecida?

a) Dibuja la gráfica que te permita visualizar el área por calcular:

b) Plantea la integral que debes resolver para responder la pregunta: ______________________.

c) Obtén la probabilidad:

d) Da la interpretación del resultado:

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.4

Calcula el valor de las siguientes integrales, o sea, di si convergen o divergen. En caso de ser convergente, indica a qué valor convergen:

1. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{8x}{2+x^2}\,dx$

2. $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{2e^x}{e^x+12}\,dx$

4. $\displaystyle\int_{3}^{+\infty} \sqrt{2y-3}\,dy$

5. $\int_{-\infty}^{-2} \frac{4}{\sqrt{7-y}}\,dy$

6. $\int_{-\infty}^{-6} \frac{6}{(x+3)^2}\,dx$

7. $\int_{0.25}^{+\infty} e^{-5x+2}\,dx$

8. $\int_{-\infty}^{-1} 3^{(1-x^2)}x\,dx$

9. $\int_{3}^{+\infty} \frac{\ln^4(x+1)}{x+1}\,dx$

10. $\int_{-\infty}^{-0.5} (14.2)^{x^3}x^2\,dx$

11. $\int_{1}^{+\infty} \frac{x^2-1}{x}\,dx$

12. $\int_{5}^{+\infty} \frac{4}{x^3}\,dx$

13. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{6^{-x}}\,dx$

14. $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2-9}{x+3}\,dx$

15. $\int_{-\infty}^{0} (e^x+x^2)\,dx$

16. $\int_{-\infty}^{0} (2x^5)(x^2+1)\,dx$

17. $\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x(\ln x+1)}\,dx$

18. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-6} \frac{x^3}{x^2-25}\,dx$

19. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} x(2x-1)^{1/4}\,dx$

20. $\displaystyle\int_{10}^{+\infty} \ln(5x)\,dx$

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 2.4

1. Divergente
2. Converge a 1.04
3. Converge a 0.160085
4. Divergente
5. Divergente
6. Converge a 2
7. Converge a 0.4234
8. Converge a -0.4551
9. Divergente
10. Converge a 0.09017
11. Divergente
12. Converge a 0.08
13. Divergente
14. Divergente
15. Divergente
16. Divergente
17. Divergente
18. Divergente
19. Divergente
20. Divergente

2.5 CAMBIO TOTAL Y PROMEDIO

Al inicio de este capítulo se mencionó que la integral definida representa el cambio total acumulado de una cantidad y se explicó cómo obtener su valor mediante sumas de Riemann cuando se tiene la gráfica de la razón de cambio o cuando no se conoce la antiderivada de la razón de cambio. Sin embargo, para cierto tipo de funciones es posible obtener el cambio total mediante el teorema fundamental del cálculo.

Obtención del cambio total mediante la integral definida

Al inicio cabe recordar rápidamente cómo se mide y cuánto cambia una cantidad. Supongamos que hace seis años medías 1.56 m de estatura y que actualmente mides 1.70 m. Para saber cuánto cambió tu estatura, debes restar a la estatura actual la estatura anterior, es decir, 1.70 — 1.56.

En general, siempre que se quiere saber cuánto cambió una cantidad y de un instante a a un instante b se necesita restar el valor final de y menos el valor inicial de y.

La situación anterior es muy sencilla pues conocemos los valores inicial y final de la cantidad que cambia, en este caso la estatura y no requiere las herramientas del cálculo para resolverla; sin embargo, cuando solo se conoce la derivada $f(x)=\dfrac{dF}{dx}$ o razón de cambio de una cantidad F y deseamos saber cuánto cambiará la cantidad F debido a que la variable x cambió desde un valor $x = a$ hasta otro valor $x = b$, entonces requerimos una herramienta que relacione el cálculo diferencial con el cálculo integral. El nombre de dicha herramienta es el teorema fundamental del cálculo (TFC) que aprendiste en la sección anterior, el cual establece que si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y si $F(x)$ es una antiderivada de una función $f(x)$ entonces se cumple que $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Al analizar el resultado de este teorema podemos darnos cuenta de que $F(b)$ corresponde al valor de la antiderivada F en el *instante final* b y que $F(a)$ corresponde al valor de la antiderivada F en el *instante inicial* a. Entonces la diferencia $F(b) - F(a)$ representa el *cambio total* que sufrió la función F en el intervalo $[a, b]$; por ende, este razonamiento nos lleva a concluir que

La integral definida $\int_a^b f(x)dx$ representa el *cambio total* de la función F en el intervalo $[a,b]$.

La conclusión anterior se puede generalizar a todas las razones de cambio tanto en las ciencias sociales y naturales como en la administración, las finanzas, la ingeniería, etc. A continuación se dan algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Si $c(t)$ representa la razón a la que cambia la cantidad de dinero en una inversión donde t se mide en meses, entonces ¿qué representa el resultado de la integral $\int_3^5 c(t)dt$?

Solución

Del enunciado sabemos que la función $c(t)$ indica cómo cambia la cantidad de dinero en la inversión con el tiempo. Así, al integrar esta función se obtiene la antiderivada $C(t)$, que representa la cantidad de dinero en la inversión en cualquier tiempo t; además, sabemos que de acuerdo con el TFC se cumple que $\int_3^5 c(t)\,dt = C(5) - C(3)$. Por ello, podemos asegurar que $c(5)$ representa la cantidad de dinero en la inversión a los cinco meses y $c(3)$ representa la cantidad de dinero en la inversión a los tres meses. Entonces la diferencia $c(5) - c(3)$ representa el cambio total en la cantidad de dinero invertido que se obtiene del tercero al quinto mes, es decir, cuánto aumentó la inversión del tercero al quinto mes.

Ejemplo 2

Si $p(t)$ representa la razón a la que cambia una población de una ciudad a partir de 1990, entonces ¿qué representa $\int_0^{15} p(t)dt$, donde t se mide en años?

Solución

Nuevamente dado que $p(t)$ indica cómo cambia la población a través del tiempo t, al integrarla obtenemos su antiderivada $P(t)$, que representa la cantidad total de personas en la ciudad en cualquier tiempo t. De acuerdo con el TFC, se tiene que $\int_0^{15} p(t)\,dt = P(15) - P(0)$, por lo cual podemos afirmar que $P(15)$ representa la cantidad de personas a los 15 años después de 1990, es decir, 2005($t = 15$) y $P(0)$ la cantidad de personas al inicio, o sea, en 1990($t = 0$). Entonces $P(15) - P(0)$ representa cuánto aumentó la población total de la ciudad entre 1990 y 2005, es decir, durante los siguientes 15 años a partir de 1990.

Ejemplo 3

La razón a la que cambia el valor de reventa de una máquina está dado por $v(t) = -1280e^{0.4t}$ dólares por año. ¿Cuánto se habrá depreciado en total esta máquina durante los primeros cuatro años de vida?

Solución

De acuerdo con el enunciado, la función $P(t)$ informa acerca de la razón a la que cambia el valor de la máquina durante el transcurso del tiempo, es decir, corresponde a la derivada del valor respecto al tiempo dV/dt. Por tanto, al obtener su antiderivada $V(t)$ podremos saber cuál es el valor de dicha máquina en cualquier tiempo; pero como queremos saber cuánto se ha depreciado la máquina desde que se compró hasta el cuarto año, debemos encontrar el cambio total del valor de la máquina en el intervalo [0, 4]. A fin de obtener dicho cambio debemos resolver la integral $\int_0^4 \left(-1280e^{0.4t}\right)dt$. Para hacerlo utilizamos el teorema fundamental del cálculo.

La antiderivada es $V(t) = \frac{-1280}{0.4}e^{0.4t}$; ahora al evaluarla en cada uno de los límites, obtenemos

$$V(4) = -3200e^{0.4(4)} = -3200e^{1.6} = -15849.70$$

$$V(0) = -3200e^{0.4(0)} = -3200e^{0} = -3200$$

Al restar los valores anteriores se obtiene $V(4) - V(0) = -12649.70$.

El signo negativo significa que el valor de la máquina ha disminuido; por tanto, podemos decir que en cuatro años la máquina se depreció en total 12 649.70 dólares.

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Reflexiona y responde a cada una de las situaciones planteadas:

a) Si $f(t)$ representa la razón a la que aumenta el costo de cierto artículo en el año t, ¿qué representa $F(t) = \int f(t)dt$? ________________________________.

b) Si $f(t)$ representa la razón a la que disminuye el valor de un auto en el año t, ¿qué representa $F(t) = \int f(t)dt$? ________________________________.

c) Si $f(t)$ representa la razón a la que aumentan las ventas en una empresa en el tiempo t en meses, ¿qué representa $F(t)$? ________________________________.

Si ponemos límites a la integral, por ejemplo: $\int_0^{12} f(t)dt$, ¿qué obtenemos como resultado: un número o una función? ________________________________.

¿Qué representa (en términos prácticos) el resultado de la integral definida $\int_0^{12} f(t)dt$?

d) Si $C(q)$ representa el costo marginal de producir q artículos, ¿qué representa $\int_{20}^{30} C(q)dq$?

____.

e) Al inicio de cada año, una gasolinera hace un pedido de 100 cajas de aceite para motor. Si la cantidad de cajas de aceite disminuye a razón de $f(t) = 100e^{-0.05t}$ medido en cajas/mes, donde t es el tiempo en meses desde que se recibe el pedido, ¿qué representa $\int_6^{12} 100e^{-0.05t}dt$? ________________________________.

f) Si $P(t) = 6.7(1.045)^t$ representa la razón de cambio de una población a partir de 1980, ¿qué representa $\int_0^5 6.7(1.045)^t dt$? ________________________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 2

La tasa de aumento de empleos (en miles de personas por año) desde 1988 hasta 1995 está dada por la función $e(t)=27t^2-137t+68$, donde t es la cantidad de años a partir de 1988. ¿Cuántas personas fueron empleadas de 1990 a 1995?

Solución

Selecciona la opción que corresponde a la información que da la función $e(t)$:

a) Informa cómo cambia el número de personas empleadas con el tiempo.

b) Informa la cantidad de personas empleadas en cualquier tiempo.

¿Cómo obtendrías el número de personas empleadas en cualquier tiempo t? ______________.

Plantea y resuelve la integral que representa el número total de personas empleadas entre 1990 y 1995.

¡A trabajar!

EJERCICIO 3

Si $c(t)=\sqrt{2t+1}$ representa la razón con la que cambia el costo mensual de la calefacción en una casa, medido en cientos de dólares/mes y t representa los meses desde el 5 de noviembre de 2001, determina el costo total de calefacción de esa casa en el periodo del 5 de diciembre de 2001 al 5 de abril de 2002.

Solución

Selecciona la opción que corresponde a la información que da la función $c(t)$:

a) Da informes acerca del costo de la calefacción de la casa en un mes determinado.

b) Informa qué tan rápido cambia el costo mensual de la calefacción respecto al tiempo.

¿Cómo obtendrías el costo de la calefacción para cualquier tiempo t? __________________.

Plantea y resuelve la integral que representa el costo total de calefacción de esa casa en el periodo del 5 de diciembre de 2001 al 5 de abril de 2002.

¡A trabajar!

EJERCICIO 4

Se inició una campaña para recaudación de fondos; después de t semanas se reciben donativos a razón de $h(t)=2000e^{0.2t}$ dólares por semana. ¿Cuándo se recaudó más dinero: durante la primera semana o en la quinta?

Solución

Describe la información que proporciona la función $h(t)$:

____

____.

¿Qué harías para saber en qué semana (primera o quinta) se recaudó más dinero?

____.

Plantea y resuelve la integral que representa la cantidad de dinero recaudado durante la primera semana:

Plantea y resuelve la integral que representa la cantidad de dinero recaudado durante la quinta semana:

Responde la pregunta planteada:

¿Cuándo se recaudó más dinero: durante la primera semana o en la quinta?

____.

Obtención del valor promedio de una cantidad mediante la integral definida

Al igual que con el cambio total, al iniciar recordaremos el proceso que se sigue para obtener el promedio de un conjunto de datos. Por ejemplo, para obtener el promedio de tus calificaciones del primer parcial, deberás sumar las calificaciones obtenidas en cada materia y dividir la suma entre el número total de calificaciones, es decir,

$$\text{Promedio de calificaciones} = \frac{\sum_{1}^{n} \textit{calificaciones}}{\textit{número}\ \text{total}\ \textit{de calificaciones}}$$

Otro ejemplo se da en la siguiente tabla, en la cual se muestran las temperaturas máximas registradas en Monterrey del 19 al 28 de agosto de 1990.

DÍA	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
TEMPERATURA MÁXIMA °C	38	42	40	40	37	39	40	42	41	40

Para obtener el promedio de temperaturas máximas $\overline{T}$ sumamos todas ellas y la suma la dividimos entre el número total de datos que tenemos, es decir:

$$\overline{T} = \frac{\sum_{1}^{10} temperaturas\ máximas}{10} = \frac{38+42+40+40+37+39+40+42+41+40}{10} = \frac{399}{10} = 39.9.$$

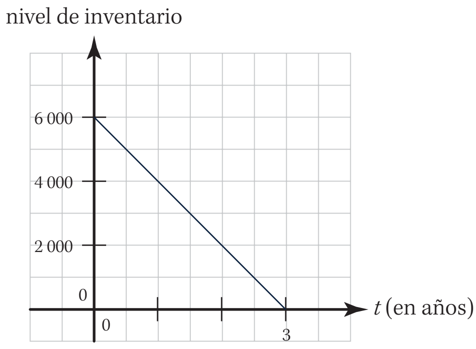
Por tanto, podemos decir que en promedio la temperatura máxima fue de 39.9 °C.

En las dos situaciones anteriores observamos que el tipo de datos que deben sumar es *discreto* y la cantidad de datos es *finita*.

El caso continuo

Cuando el tipo de datos es *continuo* y la cantidad de ellos es *infinita* podemos utilizar la integral definida, porque la definición de integral definida es precisamente eso: una *suma infinita de valores continuos.*

La siguiente gráfica muestra cómo cambia el nivel de inventario de cierto producto a medida que pasa el tiempo, el cual se mide en años.



Para obtener el promedio del nivel de inventario en esos tres años, tendríamos que sumar todas las alturas dentro del intervalo [0, 3] y luego dividir la suma entre el número total de alturas sumadas.

Sin embargo, recuerda que *sumar todas las alturas* dentro del intervalo [0, 3] es equivalente a obtener el *área bajo la gráfica.* En este caso, como la figura es un triángulo, fácilmente podemos calcular que su área es de 9000 unidades y el *número total de alturas* sumadas corresponde a la *longitud del intervalo* [0 , 3], que es 3; por tanto, se tiene:

$$\begin{array}{c}\text{el promedio del nivel}\\ \text{de inventario durante}\\ \text{los tres años}\end{array} = \frac{\textit{área de la región}}{\textit{longitud del intervalo}\,[0,3]} = \frac{9000}{3} = 3000.$$

En consecuencia, podemos decir que el promedio del nivel de inventario en los primeros tres años fue de 3000 unidades por año.

Al utilizar los ejemplos anteriores podemos generalizar estos resultados y obtener la fórmula para encontrar el valor promedio de una función continua $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$.

Construcción

El valor promedio de un conjunto de n números se obtiene al sumar los n números y dividirlos entre n, es decir, $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ para datos discretos.

Ahora supóngase que f es una función continua definida en $[a, b]$. Se divide el intervalo $[a, b]$ en n subdivisiones con la misma longitud $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$. Al considerar los $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ en el primero, segundo,… n-ésimo subintervalos. Entonces podemos decir que el valor promedio de estos números $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$ está dado por $\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}$, la cual representa una aproximación del promedio de todos los valores de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Podremos representar esta expresión si utilizamos sumas de Riemann para que su valor sea más exacto a medida que n crece; entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(b-a)}{(b-a)} \left[\frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n} \right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(b-a)} \left[f(x_1)\frac{(b-a)}{n} + f(x_2)\frac{(b-a)}{n} + \ldots + f(x_n)\frac{(b-a)}{n} \right]$$

$$\frac{1}{(b-a)} \lim_{n\to\infty} \left[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x \right]$$

$$\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,dx$$

El valor promedio de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ está dado por: $\overline{V} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)}$.

También se puede escribir como: $\overline{V} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,dx.$

Ejemplo 4

Una inversión cambia de acuerdo con la función: $S'(t) = 2000e(0.12t)$. ¿Cuál será el saldo promedio en la inversión entre el quinto y décimo año?

Solución

Al integrar dicha función de 5 a 10, obtenemos el saldo total y al dividirla entre el tiempo transcurrido del quinto al décimo años (la diferencia de 10–5), obtenemos el saldo promedio en dicho tiempo, que en símbolos queda expresado como sigue:

$$\overline{S} = \frac{1}{10-5}\int_{5}^{10} 2000\, e^{0.12t}\, dt.$$

Lo único que necesitamos hacer ahora es utilizar el teorema fundamental del cálculo para resolver la integral anterior.

La antiderivada es $\overline{S} = \frac{2000}{5}\left(\frac{1}{0.12}\right)e^{0.12\,t} = \frac{400}{0.12}e^{0.12\,t} = 4993.32$. Ahora, al evaluarla en cada uno de los límites, obtenemos

$$\overline{S}(10) = \frac{400}{0.12}e^{0.12(10)} = \frac{400}{0.12}e^{1.2} = 11067.056409$$

$$\overline{S}(5) = \frac{400}{0.12}e^{0.12(5)} = \frac{400}{0.12}e^{0.6} = 6073.72933$$

Al restar los valores anteriores se obtiene $\overline{S}(10) - \overline{S}(5) = 4993.327$. Así, podemos decir que el *saldo promedio* en la cuenta entre el quinto y décimo años es de 4993.32 pesos por año.

Ejemplo 5

La razón a la que cambia la cantidad de penicilina del cuerpo de un paciente t días después de administrarla está dada por la función $C(t) = 2e^{-0.1t}$ unidades. Determina la cantidad promedio de penicilina que tendrá durante los primeros tres días.

Solución

Al aplicar la fórmula para obtener el valor promedio de una función, se tiene que la integral $\overline{C} = \frac{1}{3-0}\int_{0}^{3} 2e^{-0.1t}\, dt$ representa la cantidad promedio de penicilina en el cuerpo del paciente en los primeros tres días, la cual puede resolverse mediante el teorema fundamental del cálculo.

La antiderivada es $\overline{C} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{-0.1}\right)e^{-0.1\,t} = -\frac{2\,e^{-0.1\,t}}{0.3}$ y al evaluarla en cada uno de los límites se obtiene:

$$\overline{C}(3) = -\frac{2\,e^{-0.1(3)}}{0.3} = -\frac{2\,e^{-0.3}}{0.3} = -4.938788$$

$$\overline{C}(0) = -\frac{2\,e^{-0.1(0)}}{0.3} = -\frac{2\,e^{0}}{0.3} = -6.666666$$

Al restar los valores anteriores se obtiene $\overline{C}(3)-\overline{C}(0)=-4.938788-(-6.666666)$, que es equivalente a $\overline{C}(3)-\overline{C}(0)=-4.938788+6.666666=1.7278=\approx 1.73$.

Por tanto, podemos decir que la cantidad promedio de penicilina que hay en el cuerpo del paciente en los tres primeros días es de alrededor de 1.73 unidades.

Ejemplo 6

Poblaciones de la ballena azul y de la jorobada

Según declaraciones de la Comisión Ballenera Internacional (CBI), en julio de 2012, la población de ballenas está a salvo: la ballena azul crece a razón de 4% anual, mientras que la ballena jorobada a razón de 8%. A pesar de esto y por mayoría, la comunidad científica de dicha comisión decidió revocar la petición de caza por parte de Groelandia, lo cual impedirá la muerte de más de 1300 ballenas.

La tasa de crecimiento de la ballena jorobada está dada aproximadamente por:

$p(t)=2800e^{0.08t}$ a partir de 2012. Si la tendencia continúa, calcula:

a) La población total de ballenas en 2016, si en 2012 hubo 35 000 en el mundo.

Para saber cuál es la población total es necesario encontrar la función que nos proporcione la población total respecto al tiempo, de acuerdo con lo que hemos aprendido al momento. Para obtenerla es necesario integrar:

$$P(t)=2800\int e^{0.08t}\,dt$$
$$P(t)=35\,000e^{0.08t}+C$$
$$35\,000=35\,000e^{0.08t}+C$$
$$\therefore C=0$$
$$P(t)=35\,000e^{0.08t}$$
$$P(4)=35\,000e^{0.32}=48,200 \text{ ballenas}$$

b) El crecimiento de 2012 a 2016 (cambio total):

$$2800\int_0^4 e^{0.08t}\,dt$$
$$35\,000e^{0.08}\Big|_0^4=35\,000\left\{e^{0.08(4)}-e^{0.08(0)}\right\}$$
$$=13200 \text{ ballenas}$$

c) El crecimiento promedio de 2012 a 2016:

$$\frac{1}{4-0}2800\int e^{0.08t}\,dt$$
$$\frac{1}{4}35\,000e^{0.08t}\Big|_0^4$$
$$3300 \text{ ballenas por año en promedio}$$

¡A trabajar!

EJERCICIO 5

Reflexiona y responde lo concerniente a cada una de las situaciones planteadas:

a) Si $C(q)$ representa el costo marginal de producir q artículos, ¿qué representará la siguiente integral $\frac{1}{30-20}\int_{20}^{30} C(q)dq$? ________________.

b) Al inicio de cada año una gasolinera hace un pedido de 100 cajas de aceite para motor. Si la cantidad de cajas de aceite disminuye a razón de $f(t)=100e^{-0.05t}$, medido en cajas/mes, donde t es el tiempo, en meses desde que se recibe el pedido, ¿qué representa la integral $\frac{\int_{6}^{12} 100e^{-0.05t}}{12-6}dt$? ________________.

c) Si $P(t)=6.7(1.045)^t$ representa la razón de cambio de una población a partir de 1980, ¿qué representa la integral $\int_{10}^{15}\frac{6.7(1.045)^t}{15-10}dt$? ________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 6

Si $C(t)=\sqrt{2t+1}$ representa la razón con la que cambia el costo mensual de calefacción en una casa, medido en cientos de dólares/mes, y t representa los meses desde el 5 de noviembre de 2001, determina el costo promedio de calefacción de esa casa en el periodo del 5 de diciembre de 2001 al 5 de abril de 2002.

Solución

Selecciona la opción que contiene la integral que representa el costo promedio de la calefacción en el periodo indicado:

a) $\overline{C}=\frac{1}{2002-2001}\int_{2001}^{2002}\sqrt{2t+1}\,dt$

b) $\overline{C}=\frac{1}{4}\int_{1}^{5}\sqrt{2t+1}\,dt$

c) $\overline{C}=\frac{1}{5}\int_{0}^{5}\sqrt{2t+1}\,dt$

d) $\overline{C}=\frac{1}{2}\int_{1}^{5}\sqrt{2t+1}\,dt$

Resuelve la integral que seleccionaste.

El costo promedio de la calefacción en el periodo indicado es: ________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 7

Los promotores de una feria estiman que t horas después de abrir sus puertas a las 9:00 a.m. los visitantes entrarán a la feria a un ritmo de $N(t) = -4(t+2)^3 + 54(t+2)^2$ personas por hora. ¿Cuánta gente entrará en promedio entre las 10:00 a.m. y el mediodía?

Solución

Plantea la integral que representa la cantidad promedio de personas que entraron a la feria en el horario indicado: ______________________.

Resuelve la integral:

Responde la pregunta planteada: La cantidad promedio de personas que entraron en la feria entre las 10:00 y las 12:00 horas fue de ______________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 8

Se inició una campaña de recaudación de fondos para un asilo de ancianos; después de t semanas los donativos se reciben a razón de $h(t) = 2000e^{0.2t}$ dólares por semana. ¿Cuánto se recaudó en promedio entre la primera semana y la quinta? ____________.

Solución

Plantea la integral que representa la cantidad promedio recaudada en el periodo indicado:

____________.

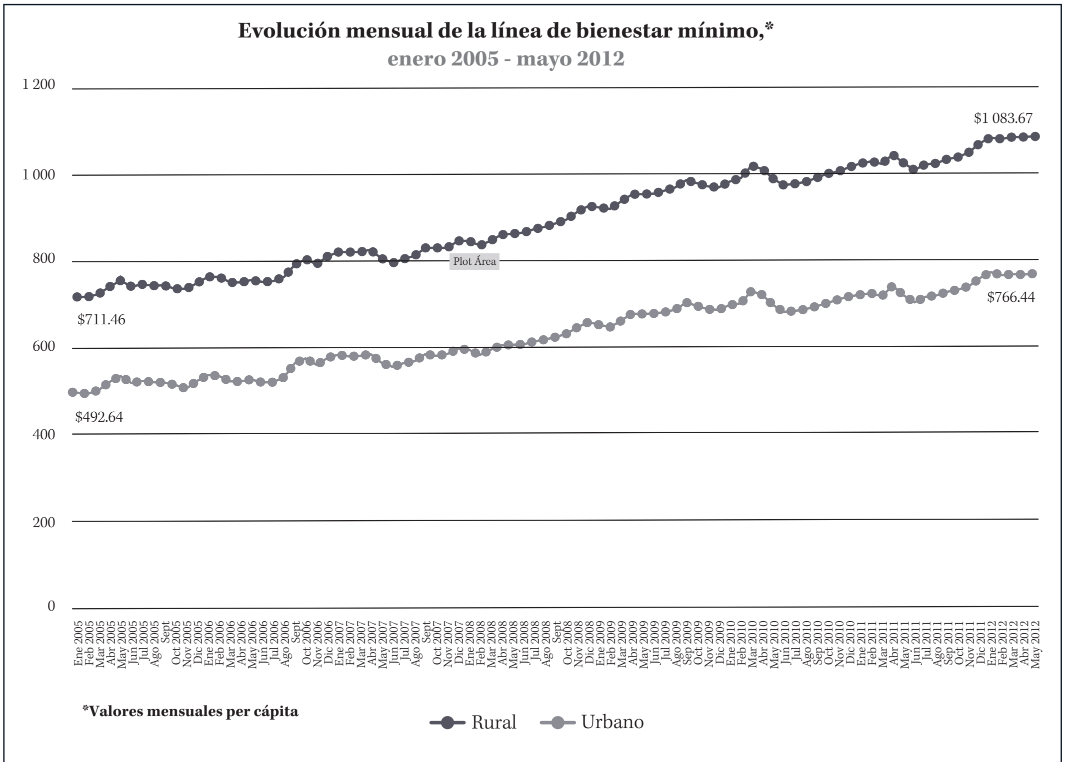
Resuelve la integral:

Responde la pregunta planteada: ¿cuánto se recaudó en promedio entre la primera y la quinta semanas? ______________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 9

La siguiente gráfica muestra la evolución del valor mensual de la canasta alimentaria, llamada también *línea de bienestar mínimo*.



Fuente: http://www.coneval.gob.mx

A partir de enero de 2005, el valor de la canasta alimentaria crece aproximadamente a razón de $C'(t) = 32.69(1.0047)^t$ en el sector urbano, mientras que en el sector rural crece a razón de $C'(t) = 2.44(1.0049)^t$. Con base en esto, calcula el valor de la canasta alimentaria para diciembre de 2013 así como el valor promedio mensual durante 2013 en el sector urbano:

a) A fin de calcular el valor de la canasta alimentaria para diciembre de 2013, ¿qué vas a calcular: el valor total, el cambio total o el cambio promedio?

____.

b) Plantea la integral que te proporcione el valor de la canasta alimentaria para diciembre de 2013:

____.

c*)* ¿Cuál es el valor de la canasta alimentaria para diciembre de 2013?:

____.

d) Para calcular el valor promedio mensual en 2013, ¿qué vas a calcular: el valor total, el cambio total o el cambio promedio?

____.

e) Plantea la integral: ______________________________.

f) ¿Cuál es el valor promedio mensual durante 2013? ______________________________.

g) Si se proyectó que el salario mínimo en 2012 era de $1869.9 al mes, ¿cómo consideras el bienestar mínimo? Explica y argumenta tu respuesta matemáticamente?.

______________________________.

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.5

Resuelve los siguientes problemas:

1. La razón con la que cambian los costos de una empresa (costos marginales) está dado por $C'(q)=0.00025q^2-0.003q+18$, donde q es el número de unidades producidas. ¿Cuánto cambiarán los costos si la producción se incrementa de 200 a 350 unidades.
2. La gerencia de una compañía ha determinado que la función de costos marginales está dada por $C'(x)=\dfrac{100}{\sqrt{x+6}}$ (medido en cientos de pesos/unidad), donde x son las unidades producidas. ¿Cuál será el costo promedio por unidad si la producción aumenta de 500 a 800 unidades?
3. Si las utilidades de una empresa cambian a una razón de $U'(q)=500-30q$ pesos/unidad vendida (utilidad marginal), donde q son las unidades vendidas por mes, ¿cuáles serán las utilidades totales cuando las ventas aumenten de 500 a 1 000 unidades por mes?
4. Si el valor de una maquinaria se deprecia (disminuye) a una razón de $V'(t)=-6.5e^{-0.052t}$ miles de pesos/año, ¿cuál será la depreciación total de la maquinaria (cuánto disminuirá su valor) entre los 2 y 5 años de su compra?
5. Si la demanda de un producto disminuye con una razón de $-\dfrac{15}{p^2}$ miles de unidades/peso que aumenta el precio, ¿cuál será el cambio total de la demanda cuando el precio aumente de $28 a $35?
6. Si la población de una ciudad cambia a una razón de $P'(t)=10+t^{(3/5)}$ miles de habitantes/año y t son los años a partir de 1992, ¿cuánto cambió la población en promedio por año durante el periodo 1994-2000?
7. Si el valor de una inversión crece a una razón de $792.10(1.02)^{4t}$ pesos/año, ¿cuánto aumentará en promedio por año el valor de la inversión del cuarto al séptimo años?
8. Si el valor de un camión de carga se deprecia a una razón de $-15.51(0.96)^t$ miles de pesos/año, ¿cuánto se depreciará en promedio por año durante los primeros cinco años?
9. Una compañía considera un nuevo proceso de fabricación. Se sabe que la razón de ahorros del proceso está dada por $s(t) = 1000\,(t + 2)$, donde t es el número de años que se ha usado el proceso. Encuentra los ahorros totales durante el primer año y en los primeros seis años.
10. En una ciudad del centro del país la función $T(t)=50+14\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi\, t}{12}\right)$ describe una aproximación de la temperatura en grados Fahrenheit t horas después de las 9:00. Halla la temperatura promedio durante un periodo de 12 horas a partir de las 9:00.

11. El volumen de agua de un tanque es de V metros cúbicos cuando la profundidad del agua es de h metros. Si la tasa de variación de V respecto a h es = $(4h^2 + 12h + 9)$, determina el volumen de agua en el tanque cuya profundidad es de 3 m.
12. La razón de infección de una enfermedad (personas por mes) es $i(t)=\dfrac{100\ \ t}{t^2+1}$, donde t es el tiempo en meses desde la aparición de la enfermedad. Encuentra el número total de personas infectadas en los primeros cuatro meses de enfermedad.
13. Al inicio del día la cantidad de moscas que se desarrollan en un basurero cambia a un ritmo de $4 + 5t^{2/3}$ moscas por hora. ¿Cuál será la cantidad total de moscas que hay en 8 horas?
14. Se ha trasplantando un árbol, el cual después de x años crece a un ritmo de $1-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ metros por año. ¿Cuál es la cantidad total que ha crecido el árbol en cuatro años? y ¿en promedio por año?
15. El valor de reventa de cierta maquinaria industrial decrece a un ritmo que cambia con el tiempo. Cuando la maquinaria tiene t años, el ritmo al que cambia su valor es de $-960\ e-^{t/5}$ dólares por año. Encuentra cuánto se depreció el valor de la maquinaria en promedio por año en 10 años.

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 2.5

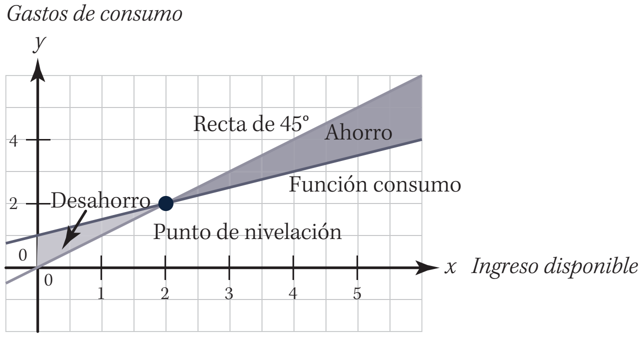
1. \$5482.50
2. \$393.046
3. \$11 500 000
4. Disminuye \$16 271.71
5. Disminuye 108 unidades
6. 12 586 habitantes por año
7. Aumenta \$1227.45 por año
8. \$14 029.54 por año
9. Los ahorros totales durante el primer año ascienden a \$2500 y durante los primeros seis años a 30 000
10. Aproximadamente 59 ºF
11. 117 m^3
12. Aproximadamente 142 personas infectadas
13. 128 moscas.
14. En total 3.2 m: en promedio 0.8 m cada año
15. En promedio, se deprecia por año 415.04 dólares

2.6 ÁREAS BAJO UNA CURVA Y ENTRE DOS CURVAS

El cálculo del área de una región tiene múltiples aplicaciones en la vida diaria; por ejemplo, en economía se utiliza para obtener el excedente (al precio de equilibrio p) del consumidor y del productor, los cuales permiten medir la ganancia por la compra y venta, respectivamente. También se aplica para medir fenómenos microeconómicos y macroeconómicos. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1

La función de consumo muestra la relación que existe entre el nivel de gastos de consumo y el nivel de ingreso disponible; el punto donde ocurre que el consumo es igual al gasto disponible se llama *punto de nivelación*. En cualquier otro punto fuera del de nivelación existe un ahorro (S) o un desahorro ($-S$), lo cual se representa por el área entre las curvas de consumo y la recta de nivelación (que es una recta de 45% que representa los puntos de nivelación entre el consumo y el ingreso disponible, donde el ahorro es igual a cero). En la siguiente gráfica podemos ver representado esto.



El área gris oscuro representa el ahorro, es decir, lo que un hogar no gasta.

El área gris claro representa el desahorro, o sea, lo que se deja de ahorrar.

Conocer el comportamiento del consumo y el ahorro resulta muy importante, ya que es clave para comprender el crecimiento económico de un país.

**Fuente: Principios de macroeconomía*, Michael Parkin.

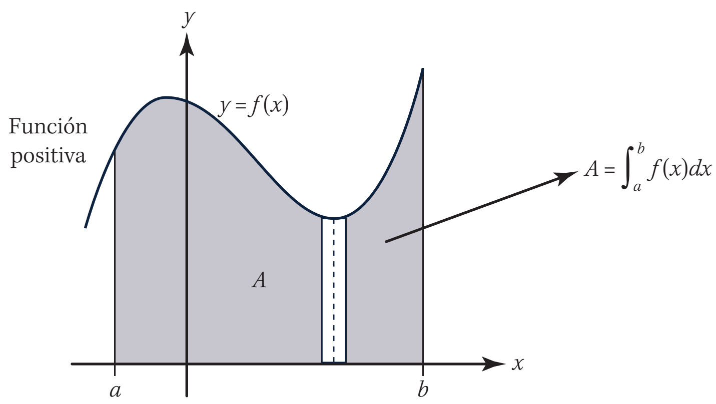
En secciones anteriores se vio no solo que el área de una región se podrá encontrar si se calcula el límite de las sumas de Riemann, sino también que el valor de este límite se conoce con el nombre de *integral definida*; además, si la función es continua y positiva, la integral definida se podrá resolver mediante el teorema fundamental del cálculo.

La integral definida es la respuesta que se encontró en la antigüedad al problema de obtener el área de una región, por lo cual pudiera pensarse que el valor de cualquier integral definida representa siempre un área superficial; sin embargo, esto no necesariamente es cierto para todos los casos.

A continuación explicaremos cómo utilizar la integral definida para obtener el área superficial de una región, según su localización en el plano x-y. Al iniciar recordaremos el caso más sencillo cuando la región se encuentra arriba del eje x.

Área bajo una curva (arriba del eje *x*)

Se desea encontrar el valor del área de la región que aparece en la siguiente figura.



Observa que dicha región está limitada por la curva $y=f(x)$, el eje x y las rectas $x=a$ y $x=b$ y que la función $y=f(x)$ —que corresponde a la orilla superior de la región— es una función continua y *positiva*, o sea, la gráfica de la función se encuentra por arriba del eje x para todo valor de x dentro del intervalo cerrado $[a, b]$. Por ello, tiene sentido hablar del área bajo la curva.

De acuerdo con lo visto en las secciones anteriores, sabemos que en este caso el valor del área de la región está dado por el valor de la integral $\int_a^b f(x)dx$.

Conclusión

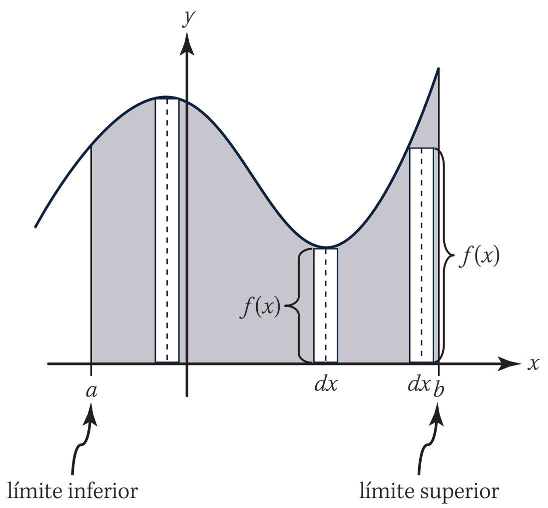
Si $y=f(x)$ es una función *continua* y *positiva* en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el valor del área superficial de la región limitada por la curva $y=f(x)$, el eje x y las rectas $x=a$ y $x=b$ está dado por

$$A=\int_a^b f(x)dx .$$

La siguiente figura puede ayudarnos a visualizar en la región cada uno de los elementos de la integral.

Dibujar por lo menos un rectángulo dentro de la región nos ayuda a plantear la integral, ya que la altura del rectángulo corresponde a la función $f(x)$. Observa la figura y verás que, independientemente de la posición en que se dibuje el rectángulo, la altura de este corresponde siempre a la altura de la función.

La base del rectángulo corresponde al dx, ya que representa una pequeña parte del eje x, el límite inferior de la integral corresponde al valor de x a la izquierda de la región, mientras que el límite superior corresponde al valor de x a la derecha de la región.

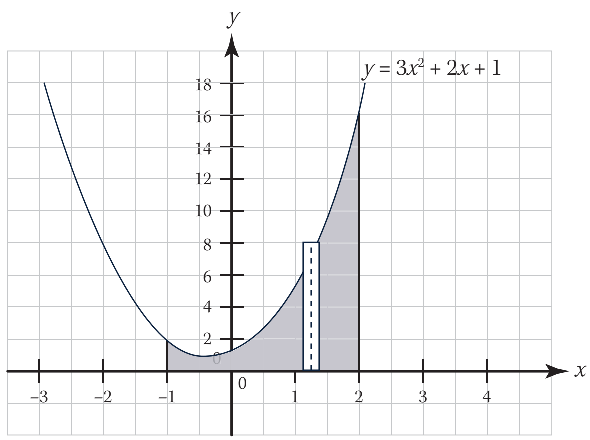


Ejemplo 2

Encuentra el área de la región debajo de la curva $y = 3x^2 + 2x + 1$, arriba del eje x de $x = 1$ a $x = 2$.

Solución

Lo primero que haremos será trazar una gráfica de la región, la cual está delimitada por la función $y = 3x^2 + 2x + 1$, las rectas verticales $x = 1$ a $x = 2$ y el eje x.



Como la región se encuentra arriba del eje x, se utilizará la fórmula $A = \int_a^b f(x)dx$ para determinar el área donde podemos reconocer que los límites de la integral son $a = -1$ y $b = 2$, y la función está dada por $y = f(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

Al reemplazar estos valores en la fórmula obtenemos $A=\int_a^b f(x)dx=\int_{-1}^{2}\left(3x^2+2x+1\right)dx$

Al integrar obtenemos $A=\int_{-1}^{2}\left(3x^2+2x+1\right)dx=\left(x^3+x^2+x\right]_{-1}^{2}$.

Si aplicamos el teorema fundamental del cálculo, tendremos

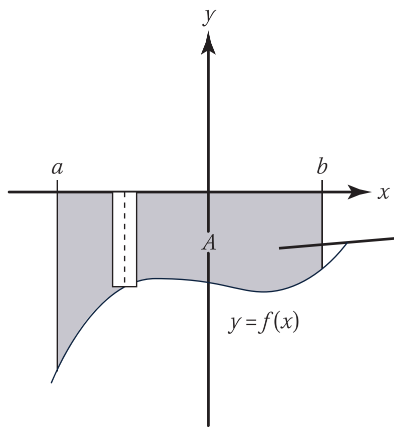
$$A=\left[(2)^3+(2)^2+2\right]-\left[(-1)^3-(-1)^2+(-1)\right]$$

$$A=(14)-(-1)$$

$$A=15\ u^2$$

Cuando la región se encuentra abajo del eje *x*

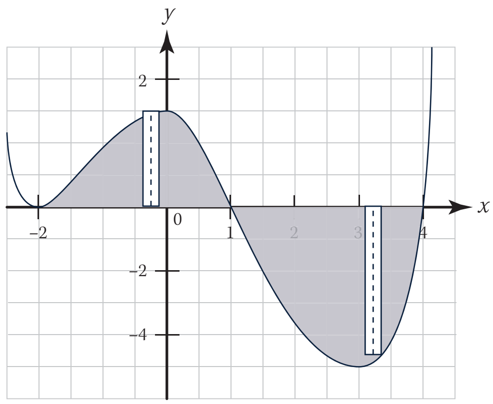
Para calcular el área superficial de una región que se encuentra abajo del eje *x* procedemos de manera similar al caso anterior; sin embargo, ahora el resultado de la integral es negativo debido a que las alturas de la función se encuentran por abajo del eje *x* (observa la figura de abajo). Por tanto, lo único que necesitamos hacer es agregar a la integral definida un signo negativo, pues cuando hablamos de áreas el resultado no puede ser negativo; otra opción sería considerar como resultado el valor absoluto de la integral definida. Recuerda que con el valor absoluto el resultado se vuelve positivo.



$$A=-\int_a^b f(x)dx \quad \text{o bien} \quad A=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

Cuando la región se encuentra distribuida arriba y abajo del eje *x*

Para calcular el área superficial de la región sombreada en la figura que aparece abajo a la izquierda se debe separar en dos partes, ya que en el intervalo [−2, 1] la altura de la función es positiva, por lo que el valor del área superficial en ese intervalo está dado por la integral $\int_{-2}^{1} f(x)dx$, mientras que en el intervalo [1, 4] la altura de la función es negativa, por ello, a la integral que representa el valor del área en este intervalo deberá anteponérsele el signo negativo $-\int_{1}^{4} f(x)dx$ a fin de que dichos valores se agreguen al valor de la región que se encuentra en la parte positiva. En consecuencia, el valor del área de la región sombreada se obtiene mediante la siguiente resta de integrales: $A = \int_{-2}^{1} f(x)dx - \int_{1}^{4} f(x)dx$.



Nota: Observa que si decimos que el valor del área superficial es equivalente al valor de la integral $\int_{-2}^{4} f(x)dx$, *no* sería correcto, pues en este caso a los valores positivos de la función se le restan automáticamente los valores negativos de la función y ese no sería el valor del área que aparece en la figura; ademas como la parte negativa es mayor que la positiva, el resultado daría negativo y, aunque le cambiáramos de signo al resultado, este *no sería* el valor del área sombreada.

Veamos un ejemplo para aclarar el comentario anterior.

Ejemplo 3

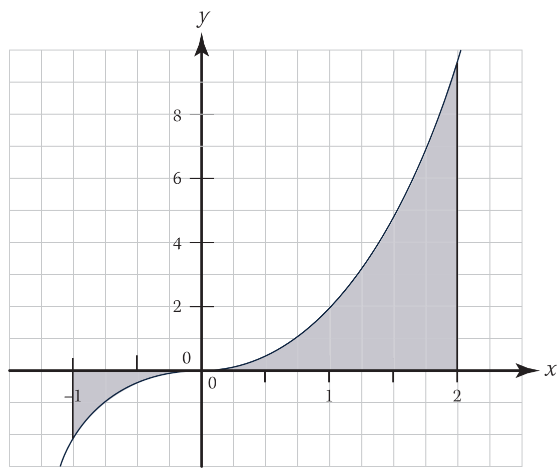
Supongamos que queremos encontrar el área superficial de la región delimitada por la curva $y = x^3$ y el eje x, desde $x = -1$ hasta $x = 2$.

Solución

Primero trazaremos la gráfica de la región para saber la posición en la que se encuentra respecto al eje x.

La figura de la derecha muestra la región; en ella podemos observar que el área se halla distribuida abajo y arriba del eje x, por lo cual debemos dividir la región en dos partes para calcular el área, es decir,

$$A = -\int_{-1}^{0} x^3\,dx + \int_{0}^{2} x^3\,dx.$$



Al resolver cada una de las integrales anteriores se obtiene $A = -\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{0} + \left.\frac{x^4}{4}\right|_{0}^{2}$. Ahora al evaluar en los límites correspondientes y utilizar el TFC, se obtiene:

$A = \left(0 + \frac{(-1)^4}{4}\right) + \left(\frac{2^4}{4} - 0\right)$. Al simplificar nos queda que el área es igual a

$A = \frac{17}{4} = 4.25$ unidades cuadradas.

Por el contrario, si no graficamos y solamente decimos que el área superficial de la región es igual al valor de la integral $\int_{-1}^{2} x^3\, dx$, al resolverla obtenemos el siguiente resultado:

$$\int_{-1}^{2} x^3\, dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{2} = \frac{2^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{15}{4} = 3.75,$$

el cual, a pesar de ser positivo, *no* es el área de la región sombreada, pues la parte negativa se restó a la positiva, en lugar de sumarse.

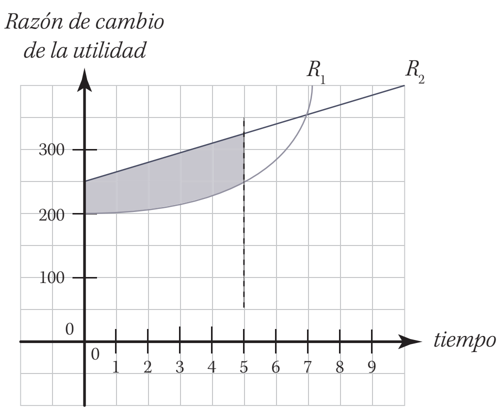
Nota: Para calcular el área superficial de una región es *indispensable graficar* la región *antes de plantear la integral*, a fin de determinar si la posición de la región se encuentra arriba, abajo o arriba y abajo del eje *x*; además, también nos permite visualizar el intervalo de integración.

Área entre curvas

Existen situaciones en las que nos interesa calcular el área de una región encerrada o limitada por dos curvas. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4

Supón que tienes cierta cantidad de dinero para invertir en uno de dos planes de inversión en competencia. El primer plan generará utilidades a un ritmo de $R_1(t) = 192 + 3t^2$ miles de pesos por año, mientras que el segundo lo hará a una razón de $R_2(t) = 255 + 12t$ miles de pesos por año, donde t representa el número de años que han transcurrido desde que se realizó la inversión. ¿Cuánto dinero más habrás ganado al cabo de cinco años si inviertes tu dinero en el segundo plan?



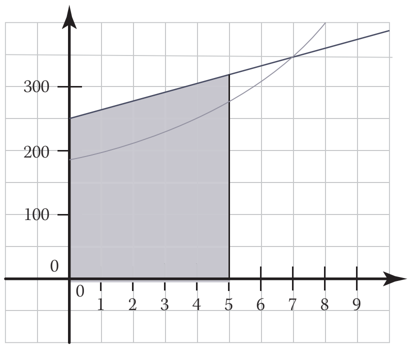
Solución

Primero trazamos la gráfica de cada una de estas funciones para visualizar con mayor facilidad la situación descrita en el enunciado.

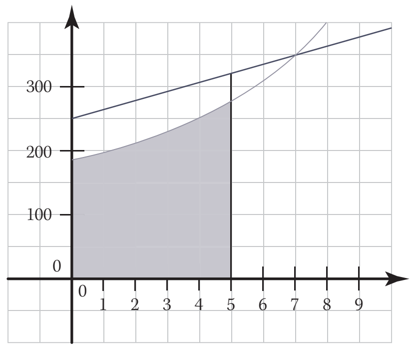
Las dos funciones anteriores se refieren al ritmo o razón a la que se generan utilidades; en consecuencia, el área debajo de la curva R_2 representa la utilidad generada por invertir en el segundo plan y el área debajo de la curva R_1 representa la utilidad generada por invertir en el primer plan.

De acuerdo con la figura anterior, la utilidad generada por invertir en el segundo plan es mayor que la generada por invertir en el primer plan y el área sombreada representa el exceso de utilidad generado por la inversión en el segundo plan. Las siguientes figuras representan lo que haremos geométricamente para obtener el valor del área sombreada.

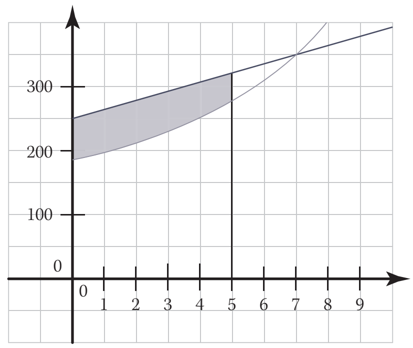
Utilidad generada por invertir en el segundo plan



Utilidad generada por invertir en el primer plan



Exceso de utilidad generado por invertir en el segundo plan



Como el área bajo una curva se puede obtener mediante la integral definida, las áreas de las regiones anteriores quedarían matemáticamente como sigue:

$$\int_0^5 (255+12\,t)\,dt \;-\; \int_0^5 (192+3t^2)\,dt \;=\; \int_0^5 \left[(255+12t)-(\,192+3t^2)\right]dt\,.$$

Al simplificar la integral de la derecha de la igualdad obtenemos: $\int_0^5 \left[\,63+12t-3t^2\right]dt\,.$

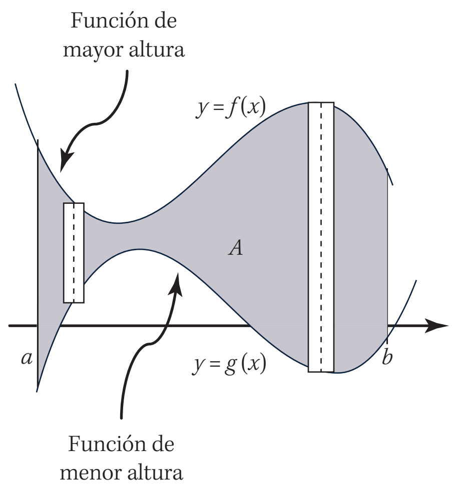
Esta última integral puede resolverse mediante el teorema fundamental del cálculo, cuya antiderivada sería $U(t) = 63t + 6t^2 - t^3$. Al evaluarla en cada uno de los límites se tiene:

$U(5) = 63(5) + 6(5)^2 - 5^3 = 340$ y como $U(0) = 0$; entonces podemos decir que al cabo de cinco años habrás ganado $340 000 más por haber invertido en el segundo plan, en lugar del primero.

Lo que hicimos en el ejemplo anterior se puede generalizar como sigue:

El área limitada por las dos funciones $y_1 = f(x)$ y $y_2 = g(x)$, donde $f(x) > g(x)$, desde un valor $x = a$ hasta un valor $x = b$, está dada por la integral $A = \int_a^b \left[\,f(x) - g(x)\right]dx$.

Esto quiere decir que para encontrar el área encerrada por dos funciones, donde una de ellas tiene mayor altura que la otra dentro de un intervalo $[a, b]$, se puede plantear una integral cuyo integrando sea la resta de la *función de mayor altura* $y_1 = f(x)$ *menos la función de menor altura* $y_2 = g(x)$.



Área encerrada por las funciones f y g desde $x = a$ hasta $x = b$

$$A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

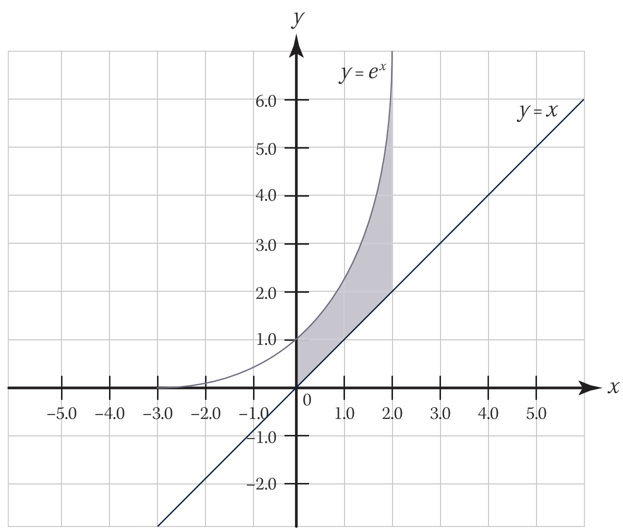
Nota: Observa que al plantear la integral para obtener el área entre dos curvas siempre se resta la función de mayor altura menos la función de menor altura, independientemente de si ambas funciones se encuentran arriba del eje *x*, una arriba y la otra abajo del eje *x* e incluso si las dos se hallaran abajo del eje *x*. No debes aprender de memoria la fórmula para obtener el área entre dos funciones, sino lo importante es saber que la integral por plantear es la resta de las funciones y para visualizarlo debes graficarlas.

Ejemplo 5

Encuentra el área de la región acotada por las graficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = x$ y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.

Solución

Lo primero que vamos a hacer es representar una gráfica de la región, la cual se delimita por las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = x$ y las rectas verticales $x = 0$ a $x = 2$.



Después debemos utilizar la fórmula para determinar el área entre dos curvas:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

De la gráfica podemos concluir que los límites inferior y superior de la integral son $a = 0$ y $b = 2$; observamos también que la *función de mayor altura* es la función exponencial; por tanto, $f(x) = e^x$ y que la *función de menor altura* es la recta, así que $g(x) = x$.

Al reemplazar estos valores en la fórmula obtenemos: $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_0^2 (e^x - x)\, dx.$

Al integrar tenemos $A = \int_0^2 (e^x - x)\, dx = \left(e^x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^2.$

Al aplicar el teorema fundamental del cálculo nos queda:

$$A = \left[e^2 - \frac{1}{2}(2)^2\right] - \left[e^0 - \frac{1}{2}(0)^2\right]$$

$$A = \left[\mathrm{e}^2 - 2\right] - (1)$$

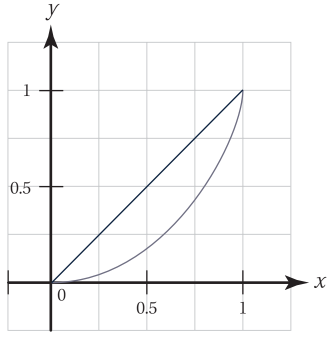
$$A = (e^2 - 3)u^2$$

Aplicación del concepto de área

Ejemplo 6

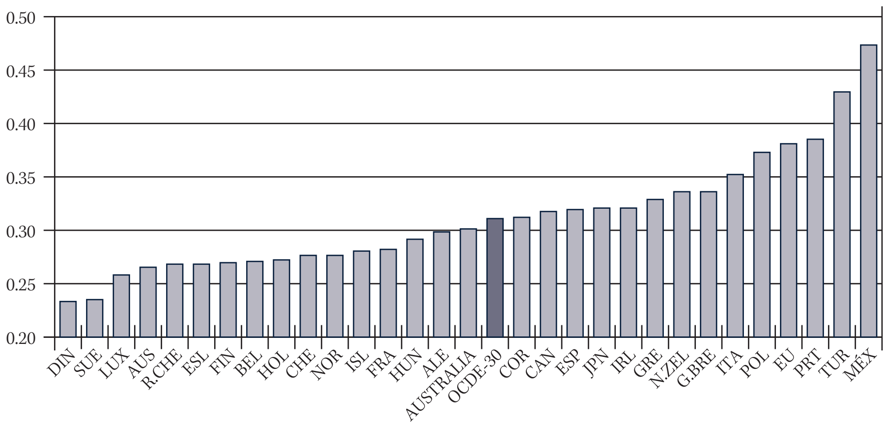
Curva de Lorenz

La curva de Lorenz es un gráfico que muestra la distribución del ingreso, la variable independiente representa el porcentaje de ingreso de la población, mientras que la variable dependiente muestra los ingresos totales. La equidad perfecta de la distribución del ingreso está representada por la línea $y = x$, de tal forma que cuanto más cercana se encuentre la curva de Lorenz a la recta, más uniforme será la distribución del ingreso. A su vez, el área entre las gráficas representa la concentración de la riqueza.



Un indicador muy importante en este tema es el coeficiente de desigualdad o índice Gini, el cual muestra en qué proporción está concentrada la riqueza: cuanto más próximo a 1 sea dicho coeficiente, mayor será la concentración, y cuanto más cercano se halle a 0, más equitativa será la distribución de aquella. El índice Gini se usa para comparar la distribución del ingreso entre los países y para valorar la distribución del ingreso a nivel global; sin duda este indicador se ve afectado por las crisis económicas mundiales. En la gráfica se muestra el índice Gini de los países de la OCDE en el año 2011 y se ve que Dinamarca tiene la desigualdad del ingreso más baja, mientras que México tiene la más alta.

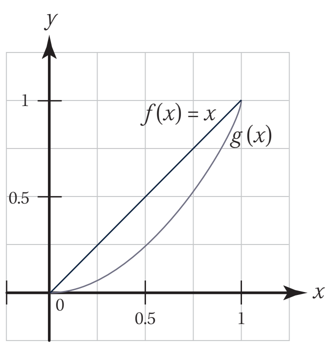
Coeficiente de Gini OCDE-30



Fuente: OCDE, www.ocde.org

Cálculo del índice Gini

El índice Gini se obtiene de dividir el área entre las gráficas $f(x) = x$ y $g(x)$ y el área de la gráfica de equidad, esto es:

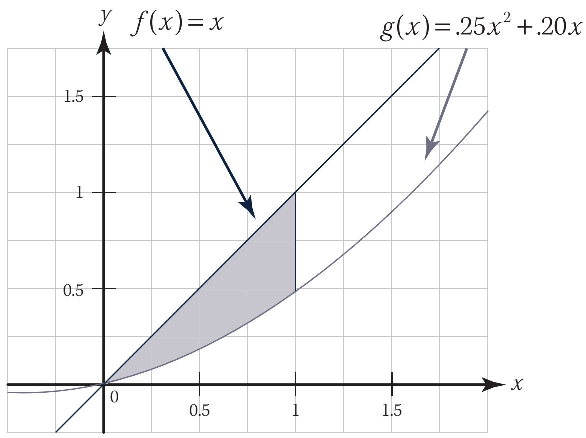


$$Ig = \frac{\int_0^1 [x - g(x)]\,dx}{\int_0^1 x\,dx} = \frac{\int_0^1 [x - g(x)]\,dx}{\frac{1}{2}(1)(1)} = 2\int_0^1 [x - g(x)]\,dx$$

Por ejemplo, si la curva de Lorenz de cierto país está dada por la ecuación $G(x) = .25x^2 + .20x$, el índice de Gini correspondiente será:

$$Ig = 2\int_0^1 \left[x - \left(.25x^2 + .20x\right)\right]dx$$
$$Ig = 2\int_0^1 \left[-.25x^2 + .80x\right]dx$$
$$Ig = 2\left[-0.083x^3 + 0.40x^2\right]_0^1$$
$$Ig = .634$$

Esto significa que dicho país tiene una mala distribución de la riqueza, ya que el resultado se halla más próximo a 1. La representación gráfica es la siguiente:



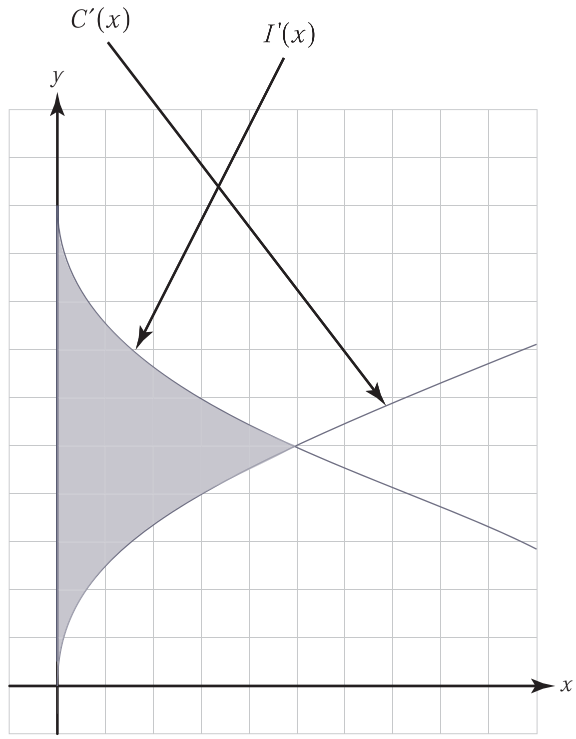
Ejemplo 7

Utilidad máxima

La utilidad se obtiene a partir de restar los costos totales a los ingresos totales; por tanto, si $U(x) = I(x) - C(x)$, entonces $U'(x) = I'(x) - C'(x)$. La utilidad máxima se obtiene cuando la razón de cambio de la utilidad es cero, o sea, cuando $U'(x) = 0$ o cuando $I'(x) = C'(x)$. Por tanto, la utilidad total está dada por:

$$U(x_1) = \int_0^{x_1} U'(x)\,dx = \int_0^{x_1} [I'(x) - C'(x)]\,dx.$$

Observa la representación gráfica:



Si las tasas de ingreso y costo variable de una empresa manufacturera están dadas por $I'(q) = 2q^2 + 92$ y $C'(q) = 16q^2 + 20$ (millones de pesos y miles de productos), determina la cantidad de productos por producir para obtener la utilidad máxima:

a) Primero debemos determinar la cantidad de productos, donde $I'(q) = C'(q)$, es decir, los límites que servirán para evaluar la integral:

$$I'(q) = C'(q)$$

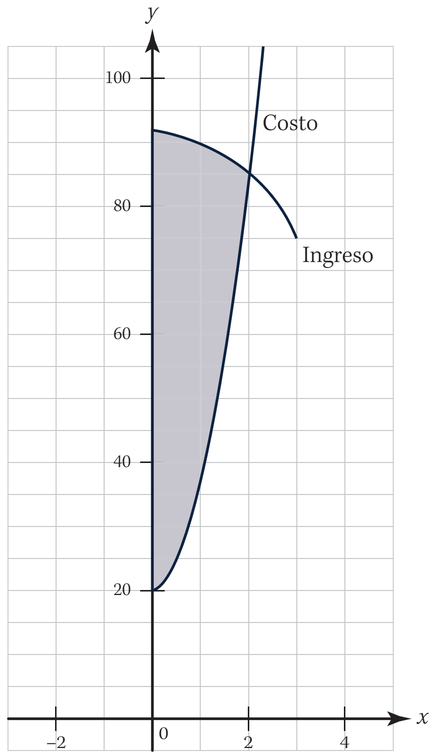
$$-2q^2 + 92 = 16q^2 + 20$$

$$18q^2 = 72$$

$$q^2 = 4$$

$$q = 2$$

Por tanto, la cantidad de productos para obtener la máxima utilidad es de 0 a 2 (miles de productos). Observa la gráfica:



Para obtener la utilidad máxima, debemos plantear la integral y resolverla, lo que justamente está representado por el área sombreada.

La integral queda planteada como

$$\int_0^2 [-2q^2+92-(16q^2+20)]\,dq$$

$$\int_0^2 (-18q^2+72)\,dq$$

Solución

$$-\frac{18q^3}{3}+72q\Big|_0^2$$

Evaluación

$$\left(-\frac{18(2)^3}{3}+72(2)\right)-(0)=96$$

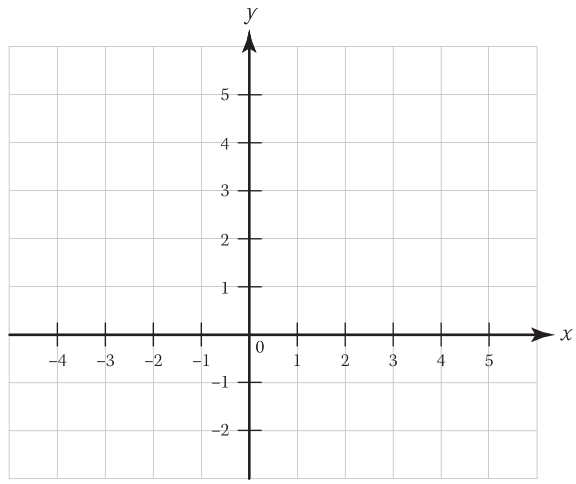
La utilidad máxima acumulada cuando se producen de 0 a 2000 de productos es de 96 millones de pesos sin contar los costos fijos. Si los costos fijos ascienden a 20 millones, la utilidad máxima real acumulada será de $96-20=76$ millones de pesos.

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Auxíliate de una gráfica para determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

El valor de $\int_{-2}^{3} x^3\,dx$ representa un área superficial: V F

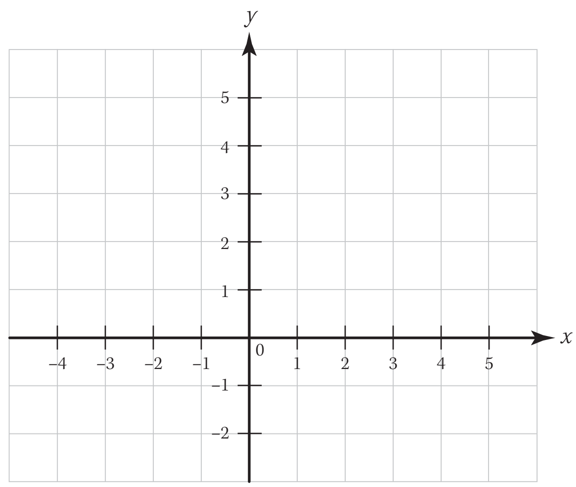


¡A trabajar!

EJERCICIO 2

Auxíliate de una gráfica para determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

El valor de $\int_{3}^{5} (x^2 - 9)\,dx$ representa un área superficial: V F

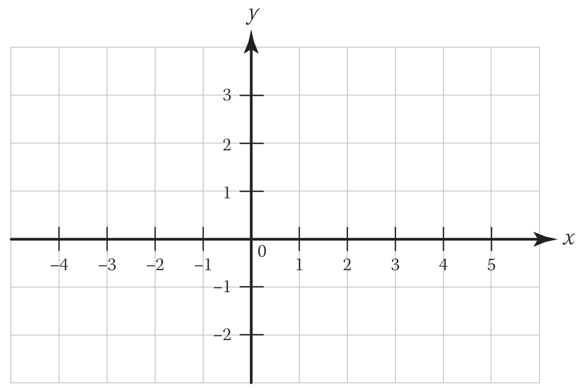


¡A trabajar!

EJERCICIO 3

Plantea la integral definida que representa el área superficial de la región encerrada por la curva $y = x(x - 1)$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

a) Dibuja la gráfica y marca el área:



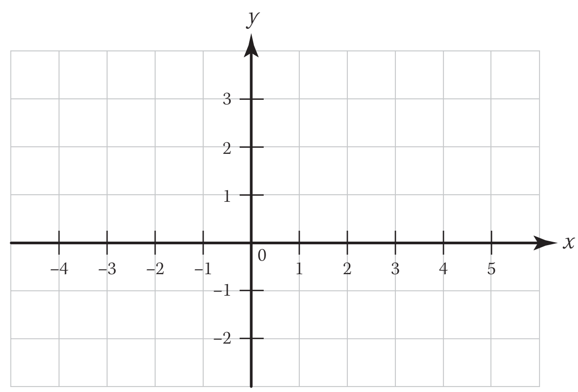
b) Plantea la integral $A =$ ________________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 4

Plantea la integral definida que representa el área superficial de la región encerrada por la curva $y = e^{-x}$, eje y, eje x y $x = -2$.

a) Dibuja la gráfica y marca el área:



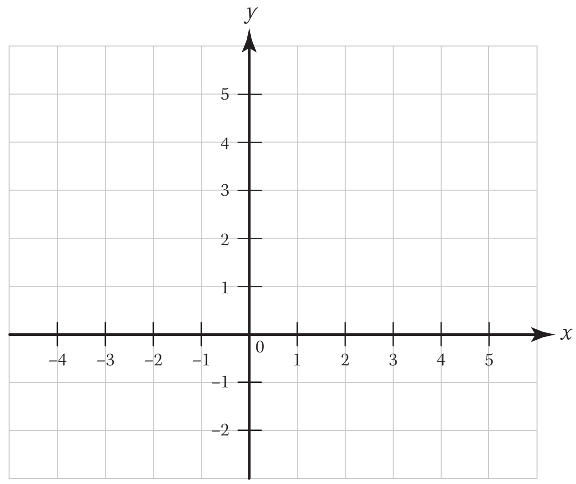
b) Plantea la integral $A =$ ________________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 5

Plantea la integral definida que representa el área superficial de la región encerrada por la curva $y=(x+1)(x)(x-1)$ y el eje x.

a) Dibuja la gráfica y marca el área:



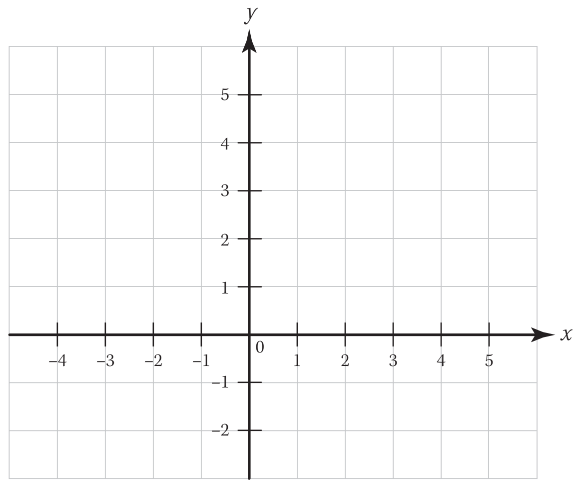
b) Plantea la integral $A=$ __________________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 6

Determina el área superficial de la región limitada por la curva $y=e^x$, el eje x y las rectas $x=1$ y $x=2$.

a) Dibuja la gráfica y marca el área:



b) Plantea la integral $A=$ __________________________.

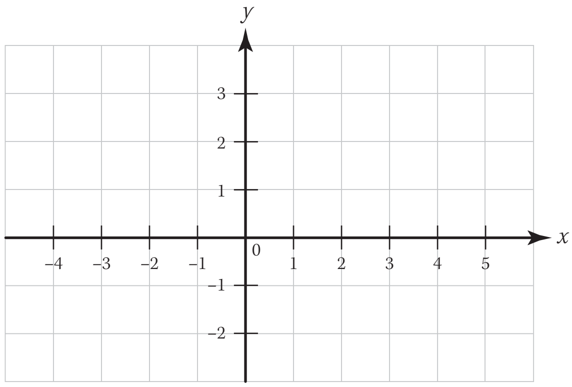
c) Resuelve la integral:

¡A trabajar!

EJERCICIO 7

Determina el valor del área superficial limitada por la curva $y = x^2 - 1$ y el eje x, de $x = -1$ a $x = 2$.

a) Dibuja la gráfica y marca el área:



b) Plantea la integral $A =$ ____________________________.

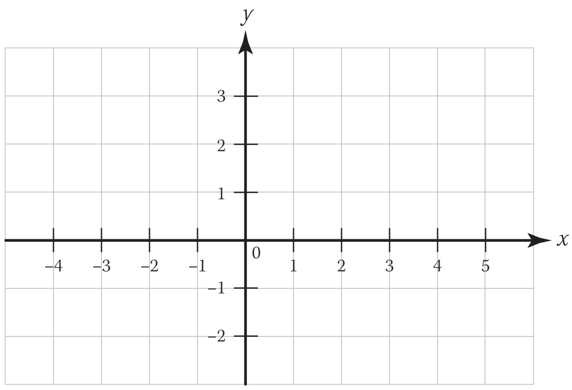
c) Resuelve la integral:

¡A trabajar!

EJERCICIO 8

Determina el valor del área superficial limitada por las curvas $y_1 = \frac{1}{x}$, $y_2 = x^2$ y la recta $x = 2$.

a) Dibuja la gráfica y marca el área:



b) Plantea la integral $A =$ ____________________________.

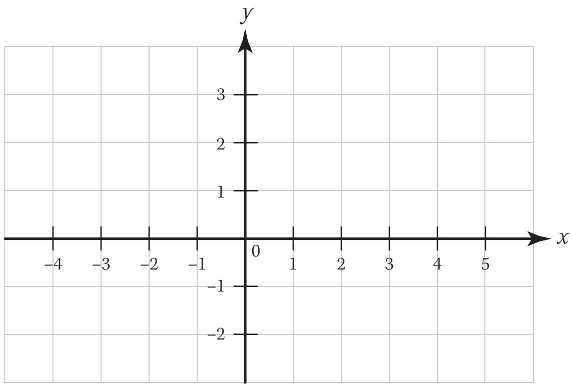
c) Resuelve la integral:

¡A trabajar!

EJERCICIO 9

Determina el valor del área superficial limitada por las curvas $y_1 = \frac{1}{x}$, $y_2 = x^2$ y la recta $x = 2$.

a) Dibuja la gráfica y marca el área:



b) Plantea la integral $A =$ ______________________.

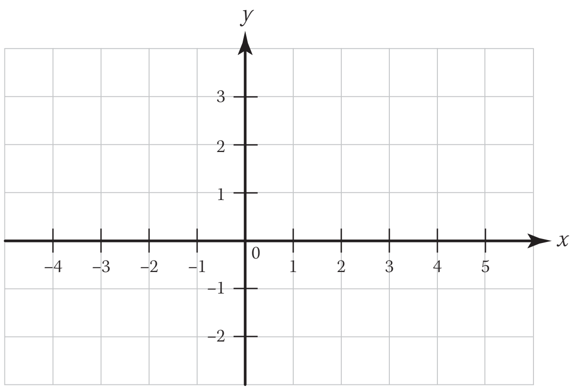
c) Resuelve la integral:

¡A trabajar!

EJERCICIO 10

Determina el valor del área superficial limitada por las curvas $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = 1$ y la recta $x = 1$.

a) Dibuja la gráfica y marca el área:



b) Plantea la integral $A =$ ______________________.

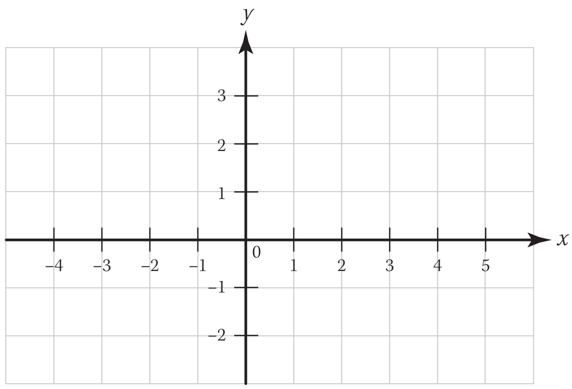
c) Resuelve la integral:

¡A trabajar!

EJERCICIO 11

Determina el valor del área superficial limitada por la curva $y_1 = 4x - x^2 + 8$ y $y_2 = x^2 - 2x$.

a) Dibuja la gráfica y marca el área:



b) Plantea la integral $A =$ __________________________.

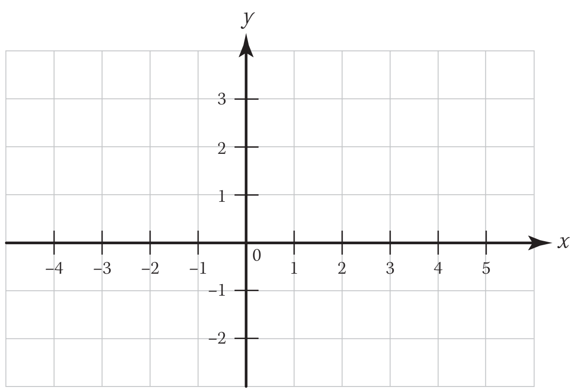
c) Resuelve la integral:

¡A trabajar!

EJERCICIO 12

Las funciones de costos e ingresos para una compañía están dados, respectivamente, por $C = 3q + 5$. $I = 2.5(1.08)^q$, donde q es la cantidad vendida.

a) Dibuja en los mismos ejes la gráfica de las funciones y marca el área que representa ganancia para la compañía:



b) Encuentra los puntos de equilibrio: ____________________.

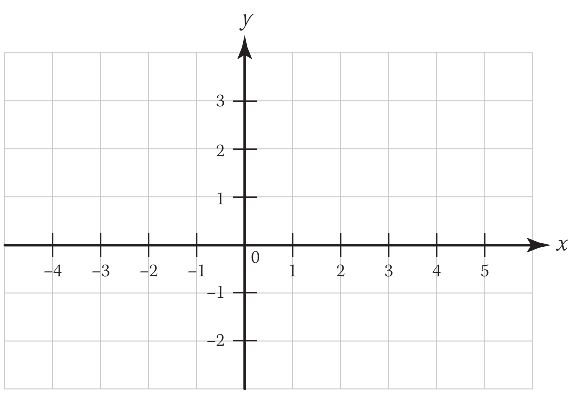
c) Obtén las ganancias totales hasta $q = 100$:

¡A trabajar!

EJERCICIO 13

Cuando cierta máquina industrial tiene x años de uso genera ingresos a razón de $R(x) = 5000 - 20x^2$ dólares por año, pero a su vez genera costos que se acumulan a razón de $C(x) = 2000 + 10x^2$ dólares por año.

a) Dibuja en los mismos ejes la gráfica de las funciones y marca el área que representa ganancia para la compañía y el área que representa pérdida:



b) ¿Por cuántos años es conveniente usar esta máquina?

c) ¿Cuál es el total de ganancias netas generadas por la máquina durante el tiempo encontrado en *b)*?

¡A trabajar!

EJERCICIO 14

Si la función de desigualdad de Francia en 2008 estuvo dada por $g(x) = .11x^2 + .6x$, determina el índice Gini de ese año.

a) ¿Cuál es la función que representa la equidad perfecta de la distribución del ingreso?:

b) Escribe la función que representa la desigualdad de Francia en 2008:

c) ¿Cuáles son los límites que utilizarás? ______________________________.

¿Por qué? ______________________________.

d) Plantea la integral que proporcione el índice Gini de Francia en 2008:

______________________________.

e) Resuelve la integral definida y da una interpretación del resultado obtenido con base en el contexto:

¡A trabajar!

EJERCICIO 15

Las tasas de ingreso y costo respecto al tiempo de una productora de lácteos están dadas por las siguientes funciones: $I'(t) = (1.5)^t$ y $C'(t) = 20(.85)^t$ miles de euros/año. Si los costos fijos anuales ascienden a 3 mil euros, ¿cuál será la máxima utilidad real?

a) ¿Cuál es el tiempo en el que $I'(t) = C'(t)$? y ¿qué se debe hacer para encontrar ese tiempo? Puedes ayudarte con un graficador:

b) ¿Cómo queda planteada la integral? ______________________________.

c) Resuelve la integral definida y responde la pregunta planteada: ¿cuál es la utilidad máxima real?

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 2.6

En los problemas del 1 al 8 dibuja las gráficas de las funciones dadas, identifica la región encerrada por dichas funciones y obtén su área mediante una integral definida:

1. $y=\dfrac{\ln x}{x}$; eje x ; $x=6$

2. $y=(1.2)^x$; eje y ; eje x ; $x=-4$

3. $y=8x-x^2-16$; eje x ; eje y

4. $y=-e^{-3x}$; eje x ; eje y ; $x=1$

5. $y=0.1(x-5)(x+3)(x-2)$; eje x

6. $y=2\ln(0.5x-3)$; eje x ; $x=6$; $x=10$

7. $y=\sqrt[3]{x}$; eje x ; $x=-1$; $x=8$

8. $y=x(x-1)^{2/3}$; eje x ; $x=-2$; $x=2$

En los problemas del 9 al 22, mediante una integral definida encuentra el área encerrada por las siguientes funciones:

9. $y=x^2-1$; $y=-x+1$

10. $y=x^2+4$; $y=-x^2+3$; eje y ; $x=2$

11. $y=x^2+x-2$; $y=x^2$; $x=3$

12. $y=6x-x^2$; $y=5$

13. $y=-x^2+1$; $y=e^{5x}$

14. $y=e^x$; $y=-e^{3x}$; eje y ; $x=-3$

15. $y=x^3$; $3y-8x=8$; $x=-1$

16. $y=x^3-3x^2-13x+15$; $y=5x+15$

17. $y=\dfrac{2(4.1)^{\ln x}}{x}$; $y=x^2$

18. $y=-x+1$; $y=x^3+1$; $y=9$

19. $y=-x^2+4$; $y=2x^2+1$

20. $y=\dfrac{1}{x^2}$; $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; $x=6$

21. $y=x^{1/4}$; $y=x^{1/8}$

22. $y=e^x$; $y=(x-1)^2$; $x=2$

Aplicaciones

23. Las funciones de costos e ingresos para una compañía están dados por $C=65+\dfrac{5}{8}q$ e $I=\dfrac{9}{4}q$, donde q es la cantidad de unidades vendidas y C e I se han medido en cientos de pesos.

a) Dibuja en los mismos ejes las gráficas de las funciones y marca el área que representa ganancia para la compañía.

b) Obtén las ganancias totales hasta $q=85$.

24. Las funciones de costos e ingresos para una compañía están dados por $C=25(4^{q/85})$ e $I=\dfrac{20}{17}q$, donde q se ha medido en toneladas y C e I en miles de pesos:

a) Dibuja en los mismos ejes las gráficas de las funciones y marca el área que representa ganancia para la compañía.

b) Obtén las ganancias totales hasta $q=75$.

25. Las funciones de costos e ingresos para una compañía están dadas por $C=\dfrac{42.49}{3}q+5$ e $I=\dfrac{1}{20}e^{0.5q}$, donde q son las unidades vendidas y C e I están en pesos:

a) Dibuja en los mismos ejes las gráficas de las funciones y marca el área que representa ganancia para la compañía.

b) Obtén las ganancias totales hasta $q=23$.

26. Las funciones de costos e ingresos para una compañía están dadas por $C=8\left(\dfrac{15}{8}\right)^{x/6}$ e $I=\dfrac{1}{50}(750)^{x/6}$, donde q son las unidades vendidas y C e I están en pesos:

a) Dibuja en los mismos ejes las gráficas de las funciones y marca el área que representa ganancia para la compañía.

b) Obtén las ganancias totales hasta $q=15$.

27. Las funciones de oferta y demanda de un producto están dadas por $Q=18\left(\dfrac{5}{3}\right)^{p/2}$ y $Q=\dfrac{120}{p^2}$ respectivamente, donde Q se ha medido en cientos de unidades vendidas y p es el precio en cientos de pesos:

a) ¿Cuál es el precio de equilibrio?, es decir, ¿cuándo la oferta es igual a la demanda?

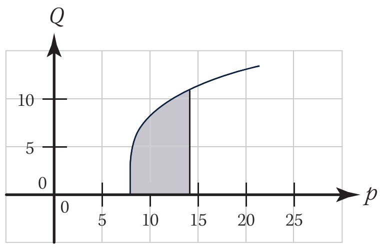
b) Obtén el inventario total (cuando la oferta es mayor que la demanda) hasta que el precio sea de \$300.

28. Un establecimiento de venta de chocolates ha determinado que las funciones de oferta y demanda de un chocolate Amor están dadas por $Q = \frac{40}{7}p$ y $Q = 10\sqrt{30 - 2p}$ respectivamente, donde Q se ha medido en cientos de unidades y p es el precio en pesos:

    a) ¿Cuál es el precio de equilibrio?, es decir, ¿cuándo la oferta es igual a la demanda?

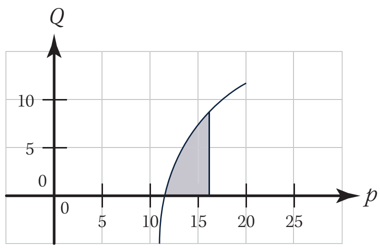
    b) Obtén el inventario total (cuando la oferta es mayor que la demanda) hasta que el precio del chocolate Amor sea de \$12.

29. Un artículo se lanza al mercado con un precio unitario fijo de \$14. Si un productor está dispuesto a pagar dicho artículo a un precio menor, tendrá una ganancia adicional, que se conoce como *excedente del productor* y se representa por el área limitada por la curva de oferta $Q = 7\sqrt[4]{p - 8}$ y la recta $p = 14$.



Calcula el excedente del productor si Q está medido en cientos de unidades.

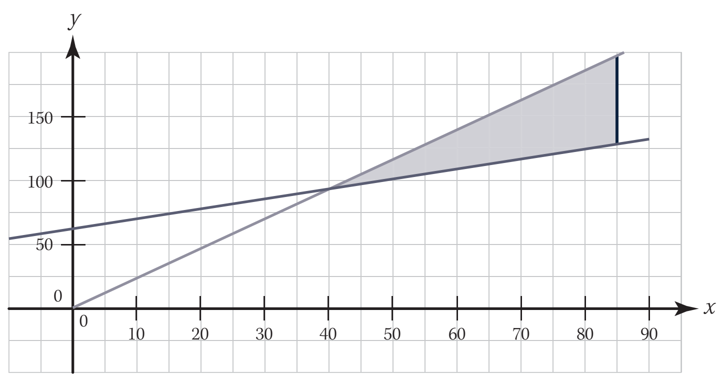
30. El precio unitario fijo en el mercado por tonelada de cemento es de \$1600. Si un productor está dispuesto a ofrecerlo a un precio menor, la ganancia que obtendrá se conoce como *excedente del productor* y se representa mediante el área limitada por la curva de oferta $Q = 5\ln(p - 10)$ y la recta $p = 16$.



Calcula el excedente del productor.

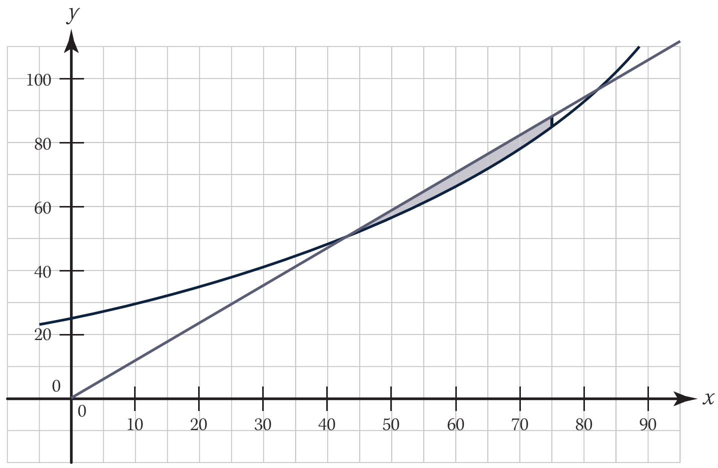
RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 2.6

1. $A = 1.6052$
2. $A = 2.84$
3. $A = 64/3$
4. $A = 0.3167$
5. $A = 14.38333$
6. $A = 2.159$
7. $A = 12.75$
8. $A = 4.701$
9. $A = 4.5$
10. $A = 7.333$
11. $A = 0.5$
12. $A = 1.666$
13. $A = 0.4680$
14. $A = 1.284$
15. $A = 8.25$
16. $A = 249.75$
17. $A = 5.7979$
18. $A = 44$
19. $A = 4$
20. $A = 2.066$
21. $A = 0.0889$
22. $A = 5.722$
23. *a)*



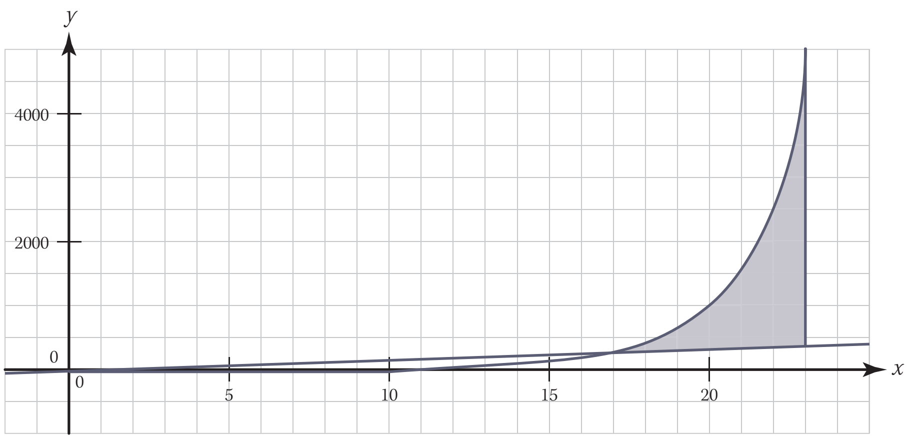
b) Ganancias de $164 531.25

24. *a)*



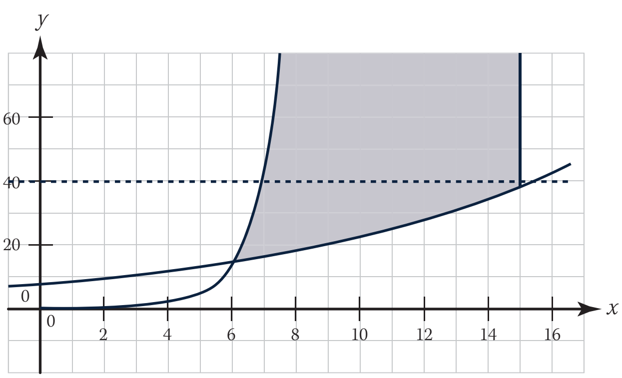
b) Ganancias de $103 308.067

25. *a)*



b) Ganancias de $7650.50

26. *a)*



b) Ganancias de $279 102.85

27. *a)* Mediante el uso de un graficador se obtiene $p = 2$, por lo cual el precio de equilibrio es de $200.

    b) El inventario total es de 1418 unidades cuando el precio es de $200 hasta $300.

28. *a)* El precio de equilibrio es de $7.

    b) El inventario total es de 10 709 unidades cuando el precio es de $7 a $12.

29. El excedente del productor es de 5259 unidades.

30. El excedente del productor es de 2875.27 toneladas.

CAPÍTULO

tres

Funciones de “n” variables

3.1 Funciones de varias variables

3.2 Gráficas de funciones de dos variables

3.3 Derivada de una función de “n” variables

3.4 Derivadas de orden superior

3.5 Interpretación en términos prácticos de la derivada parcial

3.6 Máximos y mínimos para una función de dos variables

3.7 Multiplicadores de Lagrange

3.1 FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

En el curso de Matemáticas I se estudiaron funciones de una sola variable; sin embargo, existen muchas situaciones prácticas en donde una variable puede depender de más variables. Por ejemplo, si una persona piensa ahorrar cierta suma de dinero en el banco, entonces el saldo que vaya a percibir depende de la cantidad de tiempo en que vaya a dejar su dinero y la tasa de interés que le dé el banco.

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Supón que deseas adquirir un préstamo para comprar un auto; la cantidad mensual que estarás pagando ¿de qué depende? Escribe al menos tres aspectos de los que dependa el pago mensual:

1º. ______________________________ .

2º. ______________________________ .

3º. ______________________________ .

¡Reflexiona!

Observa cómo en la situación planteada, la variable pago mensual depende de otras 3 variables; en la vida real es muy común encontrar situaciones como ésta; si la relación entre las variables cumple la condición para ser función se llamará *función de varias variables.* Dichas situaciones las estudiaremos en esta unidad.

Generalización del concepto de *función*

¿Recuerdas cómo representamos una relación funcional entre dos variables? Por ejemplo: *la calificación final de Matemáticas C está en función del alumno.*

¿Cómo representas esa función? ______________________________ .

Representemos ahora la situación planteada en el ejercicio 1; designemos una letra para representar a cada variable:

Pago mensual = *P*

Variables

1º. ______________________________ .

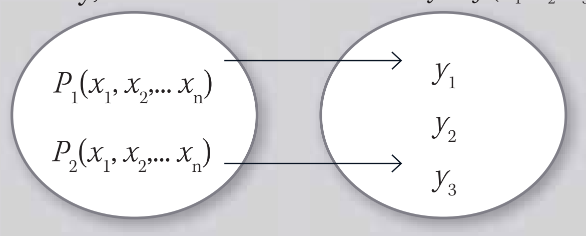
2º. ______________________________ .

3º. ______________________________ .

Con las letras seleccionadas la función queda representada como: ________________ .

Definición

Una función de “*n*” variables es la relación de un punto de la forma $p(x_1, x_2, x_3 ... x_n)$ con un único número real *y*, se denota la función como $y = f(x_1, x_2, x_3 ... x_n)$:



A las variables $x_1, x_2, x_3 ... x_n$ se les llama variables independientes y a la variable *y* se le llama variable dependiente.
Al conjunto de posibles valores de las “*n*” variables $x_1, x_2, x_3 ... x_n$, se le llama dominio de la función.
Al conjunto de correspondientes valores de *y* se le llama rango o imagen de la función.

¡A trabajar!

EJERCICIO 2

El peso *W* de una persona depende de la cantidad de calorías *c* que consume en su alimentación y del tiempo *t* en minutos que se ejercita diariamente.

De acuerdo con el enunciado: ¿Cuáles son el dominio y el rango para esta función?

Solución

La variable dependiente es: ______________________________ .

Las variables independientes son: ______________________________ .

La función se denota como: ______________________________ .

Los valores que pueden tomar las variables son:
Dominio: ______________________ .

Rango: ______________________ .

Evaluación de una función en un punto

Evaluar una función en un punto no es complicado, ya que solamente se sustituyen en la fórmula de la función los valores asignados a cada variable. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1

Considera que una compañía diseña tres tipos de arreglos *X*, *Y* y *Z* para envolver sus regalos y con ello obtiene que su ganancia por estos tres tipos de arreglos, que produce: será de 5, 4 y 3 dólares, respectivamente. Asimismo, sean *x*, *y*, *z* la cantidad de arreglos del tipo *X*, *Y* y *Z* por fabricar, en cuyo caso la ganancia de la compañía estará dada por:

$$G = f(x, y, z) = 5x + 4y + 3z \ .$$

¿De cuánto sería la ganancia en el día en que vendió $x = 4$, $y = 2$ y $z = 3$ arreglos? ____.

Solución

Lo único que se debe hacer es evaluar la función que representa la ganancia G en el punto $(4,\ 2,\ 3)$.

Luego $G = f(4,\ 2,\ 3) = 5(4) + 4(2) + 3(3) = 35$.

Así, $G = f(4,\ 2,\ 3) = \$35$.

Entonces podemos decir que cuando la compañía ha vendido $x = 4$, $y = 2$ y $z = 3$ arreglos, su ganancia ha sido de 35 dólares.

¡A trabajar!

EJERCICIO 3

El IQ (cociente de inteligencia) de una persona cuya edad mental es de x años y su edad cronológica es de y años se define por la función: $I(x, y) = \dfrac{100x}{y}$.

¿Qué debes hacer para determinar el IQ de una persona de 25 años de edad con una edad mental de 30 años?______________________________.

¿Cuál es el valor?______________________________.

¿Qué significa $I(9{,}13.5)$ en el contexto del problema?______________________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 4

La gerencia de una compañía estima que el número de copias de lujo demandadas de x ejemplares por día y el número de copias económicas demandadas de y ejemplares por día están dados por medio de $p(x, y) = -0.005x - 0.001y + 20$.

a) Completa los valores que se asignan en la tabla:

NÚMERO DE COPIAS DE LUJO, x	NÚMERO DE COPIAS ECONÓMICAS, y	PRECIO UNITARIO, p
0	0	
1	2	
10	15	
4000	20 000	

b) ¿Qué significado tiene $p(0,0) = 20$? ________________.

c) ¿Cuál es el valor para $p(4000,\ 20000)$? ________________.

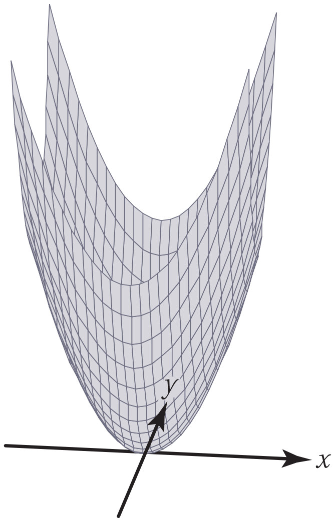
d) ¿Qué significado tiene $p(4000,\ 20000)$? ________________.

e) ¿Cuáles son los valores del dominio? ________________.

f) ¿Cuáles son los valores para el rango o imagen? ________________.

Dominio de una función de varias variables

Hemos visto que evaluar una función en un punto no es tan complicado, ya que solamente se sustituyen los valores asignados a cada variable, pero trazar la gráfica de una función de dos variables en forma completa es muy complicado; sin embargo, existen programas para graficar estas funciones; por ejemplo: la gráfica de $z = x^2 + y^2$.



Existen métodos para graficar las funciones de dos variables, como el de mapas de nivel que se aplica para construir mapas topográficos.

Otra forma que permite conocer cómo se comporta una función consiste en determinar el dominio de una función de dos variables.

Ejemplo 2

Halla el dominio de la función $z = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Solución

Para esta función se tiene la restricción de que un valor dentro de un radical no puede ser negativo, así que $x \geq 0, \ y \geq 0$.

De esta forma, el dominio de dicha función son todos los valores (x, y) tales que $x \geq 0, y \geq 0$, el cual también se puede expresar en notación de conjuntos $\{(x, y) \in \mathrm{R} \,||\, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Ejemplo 3

Hallar el dominio de la función $z = f(x, y) = \dfrac{3xy}{x - y}$.

Solución

Para dicha función se tiene la restricción de que un valor en el denominador no puede ser cero, así que debemos igualar a cero el denominador para saber cuáles valores lo hacen cero: $x - y = 0$ despejando $x = y$.

De esta forma, el dominio de dicha función son todos los valores (x, y) tales que $x \neq y$, el cual también se puede expresar en notación de conjuntos $\{(x, y) \in \mathrm{R} \,||\, x \neq y\}$.

¡A trabajar!

EJERCICIO 5

Encuentra el dominio de la siguiente función $f(x,y)=2x^{1/3}+3y^2$.

¿Qué valores puede tomar la variable x? ______________________.

¿Qué valores puede tomar la variable y? ______________________.

¿Cómo representas el dominio de la función? ______________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 6

Encuentra el dominio de la siguiente función $f(x,y)=\sqrt{x+y}$.

¿Qué valores puede tomar la variable x? ______________________.

¿Qué valores puede tomar la variable y? ______________________.

¿Qué valores puede tomar la función $x+y$ dentro del radical? ______________________.

¿Cómo representas el dominio de la función? ______________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 7

Encuentra el dominio de la siguiente función $f(x,y)=\dfrac{\ln x}{y+1}$.

¿Qué valores puede tomar la variable x? ______________________.

¿Qué valores puede tomar la variable y? ______________________.

¿Cómo representas el dominio de la función? ______________________.

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.1

En los problemas que siguen obtén el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x,y)=x\ln(y^2-x)$

2. $g(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

3. $h(x,y)=\dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

4. $f(x,y,z)=\dfrac{xy-z^2}{1+x^2+y^2+z^2}$

5. $g(x,y,z,w)=\dfrac{x+y+z+w}{x-y}$

6. $f(x,y,z)=\dfrac{xy}{x^2+z^2+1}$

7. $f(x,y)=x^2+y^2+1$

8. $g(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2-y}}$

9. $f(x,y)=\ln(9-x^2-9y^2)$

10. $h(x,y)=e^{(x/y)}$

11. $g(x,y)=\sqrt{xy}$

12. $f(x,y)=\dfrac{1}{x-y}$

13. $f(x,y)=\dfrac{1}{\ln(x^2+y^2)}$

14. $g(x,y)=\sqrt{\ln(x+y)}$

15. $h(x,y)=2^{(\ln)(xy)}$

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 3.1

1. $D=\left\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \middle| y^2-x>0\right\}$

2. $D=\left\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \middle| 9-x^2-y^2\geq 0\right\}$

3. $D=\left\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \middle| x+y+1\geq 0; x\neq 1\right\}$

4. $D=\left\{(x,y,z)\in \mathrm{R}^3\right\}$

5. $D=\left\{(x,y,z,w)\in \mathrm{R}^4 | x\neq y\right\}$

6. $D=\left\{(x,y,z)\in \mathrm{R}^3\right\}$

7. $D=\left\{(x,y)\in \mathrm{R}^2\right\}$

8. $D=\left\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \middle| x^2-y>0\right\}$

9. $D=\left\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \middle| 9-x^2-9y^2>0\right\}$

10. $D=\left\{(x,y,)\in \mathrm{R}^2 y\neq 0\right\}$

11. $D=\left\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \middle| xy \geq 0\right\}$

12. $D=\left\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \middle| x \neq y\right\}$

13. $D=\left\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \neq 1\right\}$

14. $D=\left\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \middle| \ln(x+y) > 0\right\}$

15. $D=\left\{(x,y)\in \mathrm{R}^2 \middle| xy > 0\right\}$

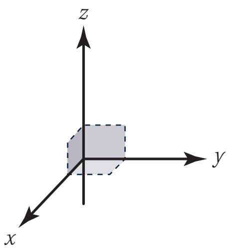
3.2 GRÁFICAS DE FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Algunas de las estrategias que aprendiste en tus cursos previos de cálculo para graficar funciones de una variable pueden generalizarse y usarse para graficar funciones de dos variables. Seguramente recordarás que para construir la gráfica de una función de la forma $y = f(x)$ es necesario contar con un eje para cada variable. En este caso se requieren *dos ejes perpendiculares* para trazar la gráfica de dicha función. Dicho par de ejes coordenados genera un espacio de dos dimensiones que recibe diferentes nombres, como *plano xy, plano cartesiano* o *espacio coordenado bidimensional.*

Con base en lo anterior, resulta lógico pensar que una función de la forma $z = f(x,y)$ requiere *tres ejes mutuamente perpendiculares* para trazar su gráfica. Este trío de ejes coordenados genera un espacio de tres dimensiones que se conoce con el nombre de *espacio xyz, espacio cartesiano, espacio coordenado de tres dimensiones* o simplemente *espacio de tres dimensiones.* Al inicio describiremos este sistema coordenado.

Espacio de tres dimensiones

Los tres ejes mencionados anteriormente deben intersectarse en un punto que recibe el nombre de *origen* y, para cumplir la condición de ser mutuamente perpendiculares, los ángulos entre cada uno de estos ejes deben ser de 90°, como se muestra en la siguiente figura:

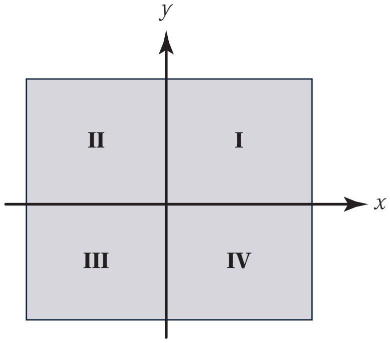


El eje x se considera positivo hacia adelante y negativo hacia atrás.
El eje y se considera positivo hacia la derecha y negativo hacia la izquierda.
El eje z se considera positivo hacia arriba y negativo hacia abajo.

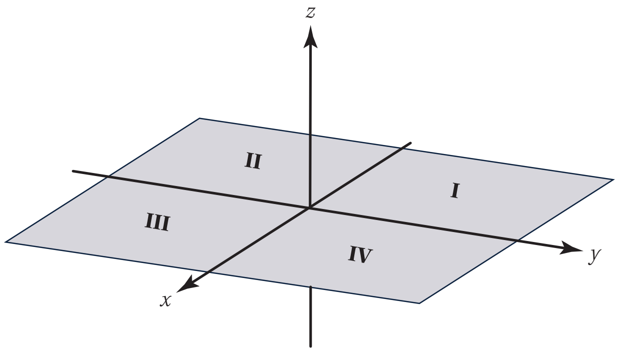
Los puntos en este sistema coordenado se describen mediante tres valores llamados *coordenadas del punto.* A su vez, las coordenadas del origen son (0, 0, 0).

División del espacio tridimensional

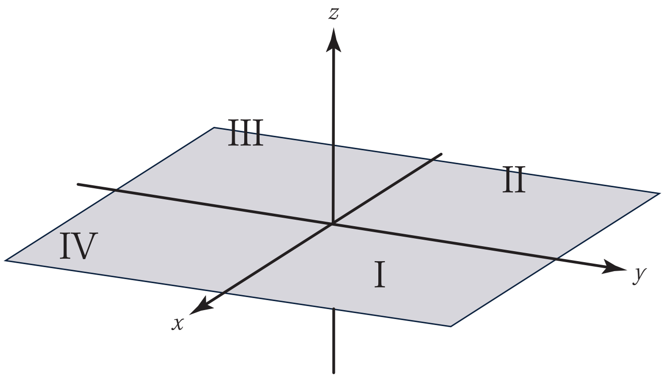
Para comprender mejor la forma como se divide el espacio de tres dimensiones recordaremos el modo de dividir el plano. Cuando se dibujan los ejes coordenados x y y en un plano, este queda dividido en *cuatro* partes, llamadas *cuadrantes.* Dichos cuadrantes se enumeran como se muestra en la siguiente figura.



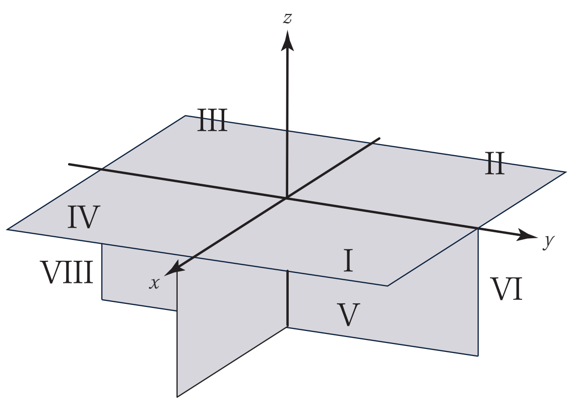
Ahora bien, imagina que colocas en el piso este plano, con el lado positivo del eje x apuntando hacia adelante y el lado positivo del eje y apuntando hacia la derecha. En seguida dibuja el eje z perpendicular al plano xy, que pase por el origen y que el lado positivo del eje z apunte hacia arriba. La siguiente figura muestra cómo se vería el espacio de tres dimensiones.



Observa que el espacio tridimensional se divide en *ocho* partes: cuatro arriba del eje z y cuatro debajo de este. Cada una de esas partes recibe el nombre de *octante* y la parte formada por los lados positivos de los tres ejes coordenados corresponde al *primer octante*. Para enumerar el resto de los octantes existen varias formas de hacerlo; sin embargo, para evitar confusiones, el resto de los octantes superiores los enumeraremos de acuerdo con el número que corresponde al cuadrante sobre el plano xy, como se muestra en la siguiente figura.



Para enumerar los octantes inferiores, tomaremos como base el orden en que se enumeraron los octantes superiores, es decir, el quinto octante está abajo del primer octante; el sexto, abajo del segundo; el séptimo, debajo del tercero, y el octavo octante será el que se halla debajo del cuarto. Observa la siguiente figura.



Localización de puntos en el espacio de tres dimensiones

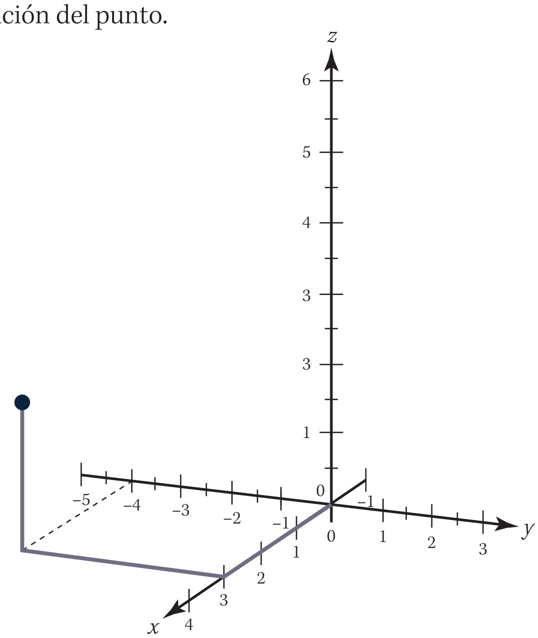
Las coordenadas (x, y, z) de un punto en el espacio tridimensional indican la posición que tiene dicho punto respecto al origen. Por ende, para localizar puntos en este espacio se debe partir siempre del origen y medir primero x unidades en dirección paralela al eje x, después se miden y unidades en dirección paralela al eje y, por último, se miden z unidades en dirección paralela al eje z.

Ejemplo 1

Dibuja en el espacio de tres dimensiones el punto que tiene como coordenadas $(3, -4, 2)$.

Solución

Para determinar la posición en la que se encuentra el punto dado iniciaremos en el origen. Como la coordenada en x es positiva, debemos movernos tres unidades sobre el eje x en dirección positiva, es decir, *hacia delante.* A partir de la posición a la que llegamos, debemos movernos cuatro unidades en forma paralela al eje y pero en dirección negativa, o sea, *hacia la izquierda*, ya que la segunda coordenada es negativa; por último, a partir de esta nueva posición, nos moveremos dos unidades en forma paralela al eje z en dirección positiva, es decir, *hacia arriba*. En la siguiente figura se muestra la posición del punto.



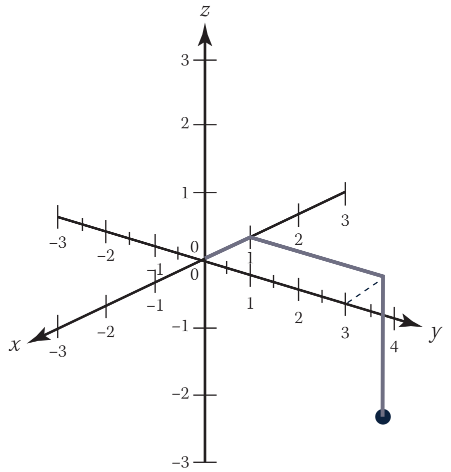
Observa que este punto quedó situado en el *cuarto octante*.

Ejemplo 2

Dibuja en el espacio de tres dimensiones el punto que tiene como coordenadas $(-1, 3, -2)$.

Solución

Nuevamente para localizar la posición del punto dado iniciamos los desplazamientos a partir del origen, para lo cual medimos una unidad sobre el eje x pero en sentido negativo; en seguida, tres unidades positivas en forma paralela al eje y y, por último, dos unidades negativas en forma paralela al eje z. En la siguiente figura puede observarse que el punto quedó localizado en el *sexto octante.*

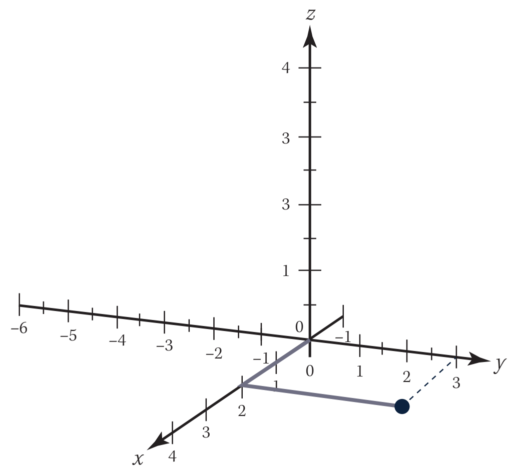


Ejemplo 3

Dibuja en el espacio de tres dimensiones el punto cuyas coordenadas son (2, 3, 0).

Solución

De acuerdo con los ejemplos anteriores iniciamos en el origen midiendo dos unidades positivas sobre el eje x, en seguida, tres unidades positivas en forma paralela al eje y, por último, cero unidades en forma paralela al eje z. Observa que el punto quedó localizado en el *primer octante,* sobre el plano xy.



Tener enumerados los octantes ayuda a visualizar con más facilidad la posición de un punto en el espacio.

Nota: No se requiere graficar el punto para determinar el octante en el que dicho punto se encuentra, sino basta con observar los signos de cada una de las coordenadas del punto.

Por ejemplo, sabemos que el punto (1, 4, −5) se encuentra en el quinto octante, pues en ese octante las coordenadas x y y deben ser positivas, mientras que la coordenada z debe ser negativa.

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Dibuja el punto $P_1 = (-1, 2, 3)$ en el sistema de ejes que aparece a continuación y determina el octante al que pertenece.

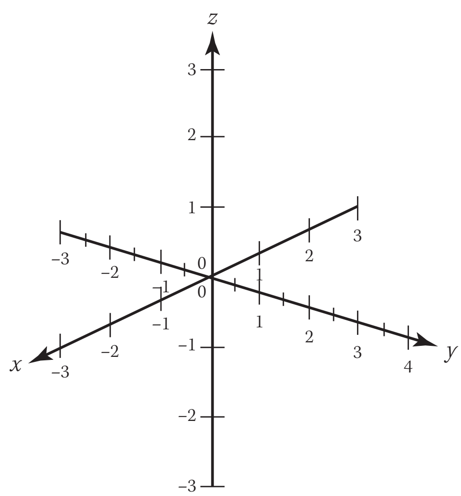
Solución

Para localizar un punto en espacio, ¿dónde debes iniciar la medición? ____________________ .

¿Cuántas unidades debes moverte en dirección al eje x? _______ . ¿En qué sentido? _______ .

¿Cuántas unidades debes moverte en dirección al eje y? _______ . ¿En qué sentido? _______ .

¿Cuántas unidades debes moverte en dirección al eje z? _______ . ¿En qué sentido? _______ .



El punto P_1 se encuentra en el ____________ octante.

¡A trabajar!

EJERCICIO 2

Dibuja el punto $P_2 = (-2, -3, 1)$ en el sistema de ejes que aparece a continuación y determina el octante al cual pertenece.

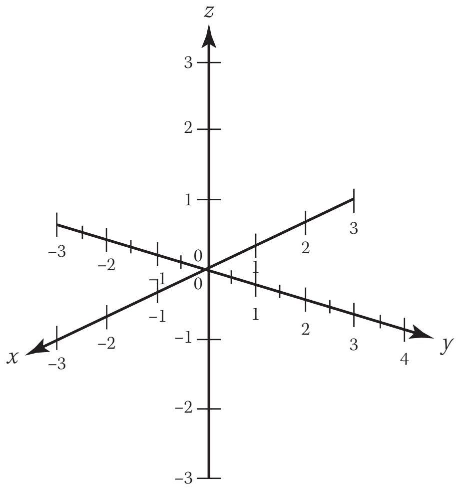
Solución

Para localizar un punto en espacio, ¿dónde debes iniciar la medición? ____________________ .

¿Cuántas unidades debes moverte en dirección al eje x? _______ . ¿En qué sentido? _______ .

¿Cuántas unidades debes moverte en dirección al eje y? _______ . ¿En qué sentido? _______ .

¿Cuántas unidades debes moverte en dirección al eje z? _______ . ¿En qué sentido? _______ .



El punto P_2 se encuentra en el ________ octante.

¡A trabajar!

EJERCICIO 3

Dibuja el punto $P_3 = (2, -3, -2)$ en el sistema de ejes que aparece a continuación y determina el octante al que pertenece.

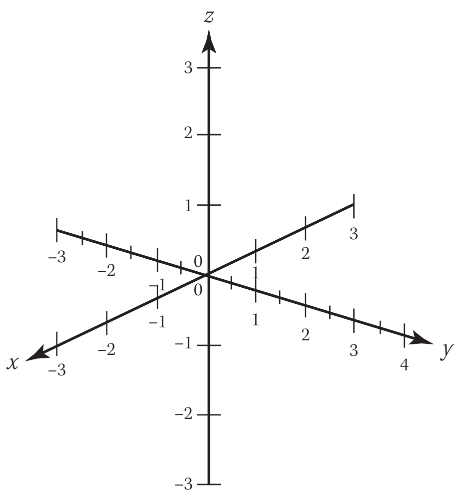
Solución

Para localizar un punto en espacio, ¿dónde debes iniciar la medición? ____________________ .

¿Cuántas unidades debes moverte en dirección al eje x? ________ . ¿En qué sentido? ________ .

¿Cuántas unidades debes moverte en dirección al eje y? ________ . ¿En qué sentido? ________ .

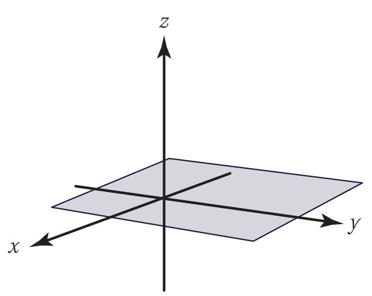
¿Cuántas unidades debes moverte en dirección al eje z? ________ . ¿En qué sentido? ________ .

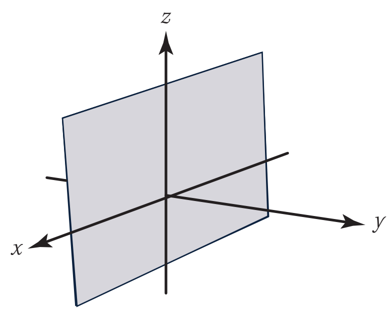


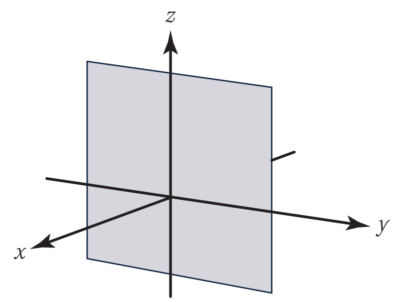
El punto P_3 se encuentra en el ________ octante.

Planos coordenados

Los planos coordenados se forman por todos los puntos del espacio de tres dimensiones en los que una de sus componentes es cero. Por ejemplo, los puntos de la forma $(x, y, 0)$ se localizan sobre el plano *xy*; en consecuencia, *$z = 0$ es la ecuación del plano coordenado xy*, pues la única condición que debe cumplirse para que un punto esté sobre este plano es que la coordenada *z sea cero*. Similarmente, todos los puntos de la forma $(x, 0, z)$ están localizados sobre el plano *xz;* por tanto, $y = 0$ *es la ecuación del plano coordenado xz.* De igual forma, $x = 0$ *es la ecuación del plano coordenado yz,* ya que todos los puntos cuyas coordenadas son $(0, y, z)$ están localizados sobre el plano *yz.* En la siguiente figura se muestra la gráfica de cada uno de los planos coordenados.



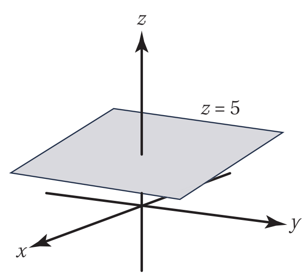
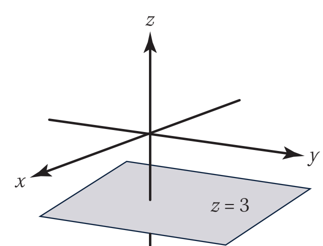


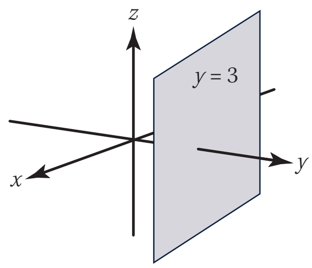
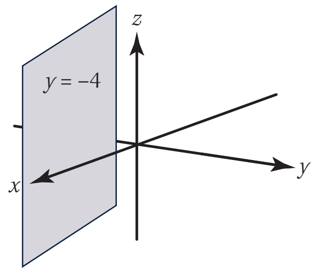
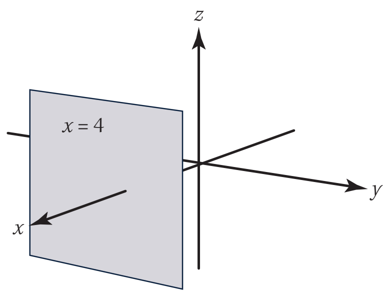
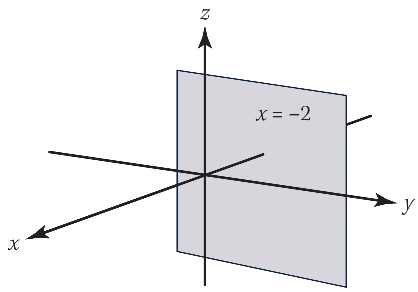


PLANO COORDENADO *xy*	PLANO COORDENADO *xz*	PLANO COORDENADO *yz*
ECUACIÓN: $z = 0$	ECUACIÓN: $y = 0$	ECUACIÓN: $x = 0$

Planos paralelos a los planos coordenados

En el espacio de tres dimensiones, la gráfica de la ecuación $z = k$ corresponde a *un plano que es paralelo al plano coordenado xy,* pues la única restricción que impone la ecuación es que la coordenada z tome el valor de k; así, las coordenadas x y y pueden tomar cualquier valor. Por otro lado, si $k > 0$, el plano se encuentra por arriba del plano *xy,* mientras que si $k < 0$, el plano se halla por abajo del plano *xy*. Siguiendo un razonamiento similar cabe concluir que la gráfica de la ecuación $y = b$ es un *plano paralelo al plano coordenado xz*, y que la gráfica de la ecuación $x = a$ corresponde a un *plano paralelo al plano coordenado yz.* Un resumen de los comentarios anteriores se ilustra en la siguiente tabla.

ECUACIÓN	TIPO DE GRÁFICA	CONSTANTE POSITIVA	CONSTANTE NEGATIVA
$z = k$	Plano paralelo al plano *xy*		

ECUACIÓN	TIPO DE GRÁFICA	CONSTANTE POSITIVA	CONSTANTE NEGATIVA
$y = b$	Plano paralelo al plano xz		
$x = a$	Plano paralelo al plano yz		

Planos en el espacio de tres dimensiones

La ecuación de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$, donde A, B, C y D son constantes y al menos una de las constantes A, B y C es diferente de cero tiene como gráfica un *plano* en el espacio de tres dimensiones.

Nota: Las ecuaciones de los planos se reconocen fácilmente, ya que todas las variables están elevadas a la potencia 1.

Cuando no se cuenta con alguna calculadora o *software* para graficar, se podrá hacer un boceto del plano si se localizan los puntos de intersección de este, con los ejes coordenados. Si esto no es posible, podrán encontrarse las trazas del plano, es decir, las líneas de intersección del plano con los ejes coordenados. Veamos los siguientes casos.

La ecuación del plano tiene todas las constantes A, B, C y D diferentes de cero.

Ejemplo 4

Dibuja la gráfica del plano $6x + 3y + 9z = 18$, en el espacio de tres dimensiones.

Solución

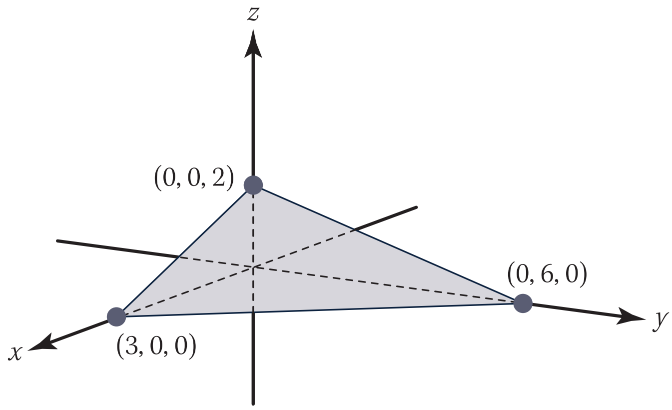
Como puedes darte cuenta, en este caso las constantes $A = 6$, $B = 3$, $C = 9$ y $D = 18$ son diferentes de cero; por tanto, para trazar la gráfica del plano hay que encontrar los puntos donde el plano intersecta a cada uno de los ejes coordenados. Para obtener estos puntos, se sustituyen por cero *dos* de las variables de la ecuación dada y se despeja la variable que no se anuló. Al hacerlo se obtiene lo siguiente:

Si se sustituye en la ecuación $x = 0$ y $y = 0$, se obtiene $9z = 18$; al despejar la variable z queda $z = 2$. Por ende, el *punto de intersección con el eje z* tiene coordenadas (0, 0, 2).

Si se sustituye en la ecuación $x = 0$ y $z = 0$, se obtiene $3y = 18$; al despejar la variable y se obtiene que $y = 6$. Por ende, el *punto de intersección con el eje y* tiene coordenadas (0, 6, 0).

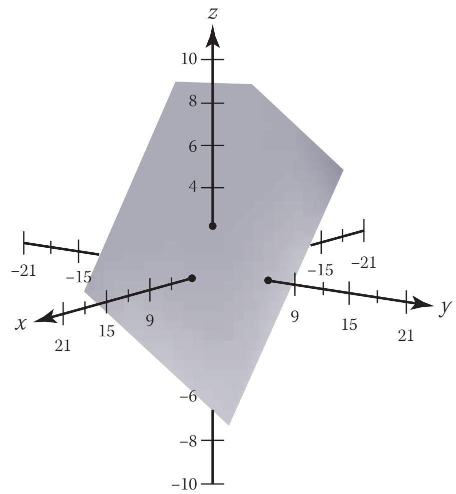
Si se sustituye en la ecuación $y = 0$ y $z = 0$, se obtendrá $6x = 18$; al despejar la variable x queda $x = 3$. Por ello, el *punto de intersección con el eje x* tiene coordenadas (3, 0, 0).

En seguida marca estos puntos en el espacio de tres dimensiones y, por último, únelos con líneas rectas. Cabe aclarar que la gráfica obtenida corresponde a la parte del plano que verías en el primer octante.



Recuerda que el plano es infinito; por tanto, al utilizar algún *software*, la gráfica del plano $6x + 3y + 9z = 18$ se ve como aparece a la derecha. Los puntos que aparecen resaltados corresponden a los puntos donde el plano corta a cada uno de los ejes coordenados.

Al unir dichos puntos, la porción del plano que queda encerrada corresponde a la parte que se ve en el primer octante.



La ecuación del plano tiene una de las constantes A, B o C igual a cero.

Ejemplo 5

Dibuja la gráfica del plano $2y + 6z = 12$ en el espacio de tres dimensiones.

Solución

Si observas la ecuación dada, podrás darte cuenta de que no aparece la variable x, lo cual significa que la constante $A = 0$; en consecuencia, la variable x puede tomar cualquier valor.

Nuevamente, primero determinamos las coordenadas de los puntos donde el plano intersecta a cada uno de los ejes coordenados. Un resumen del proceso aparece en la siguiente tabla:

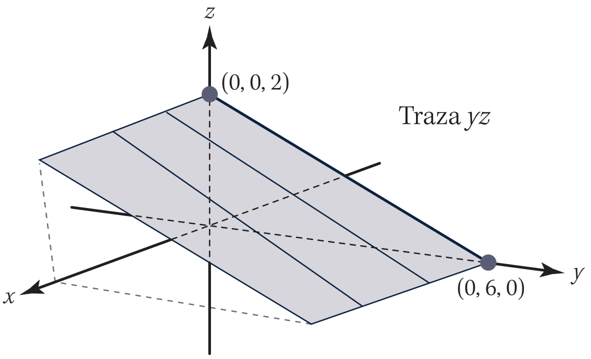
VALORES POR SUSTITUIR EN LA ECUACIÓN	ECUACIÓN RESULTANTE	VALOR DE LA VARIABLE AL DESPEJAR	COORDENADAS DEL PUNTO DE INTERSECCIÓN	EJE CON EL QUE SE INTERSECTA EL PLANO
$x = 0,\ y = 0$	$6z = 12$	$z = 2$	(0, 0, 2)	Intersección con el eje z
$x = 0,\ z = 0$	$2y = 12$	$y = 6$	(0, 6, 0)	Intersección con el eje y
$y = 0,\ z = 0$	No existe	No existe	No existe	No hay intersección con el eje x

En este caso solo se encontraron los puntos donde el plano intersecta a los ejes y y z, debido a que las variables y y z *no* pueden hacerse cero simultáneamente pues se obtiene $0 = 12$, lo cual es imposible. Por tanto, **no** hay intersección con el eje x.

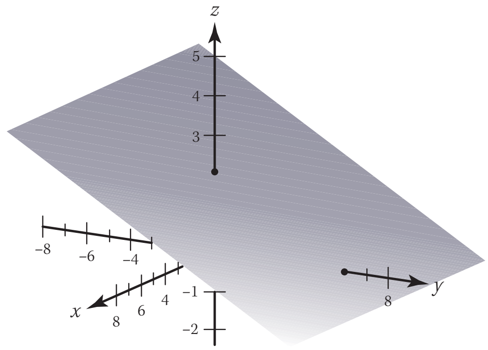
Nota: Cuando en la ecuación de un plano falta una variable, puede asegurarse que el plano no intersecta al eje correspondiente a esa variable.

Una vez obtenidos los puntos de intersección, dibújalos en el espacio de tres dimensiones y únelos con una línea recta. Esta línea recibe el nombre de **traza** *en el plano yz*, por ser la línea de intersección del plano $2y + 6z = 12$ con el plano coordenado yz.

Finalmente, para obtener un esbozo de la gráfica de este plano, imagina que la recta obtenida la desplazas en forma paralela al eje x, pues la ecuación $2y + 6z = 12$ es válida para cualquier valor que tome x. La gráfica de la siguiente figura muestra cómo se ve una parte de este plano en el primer octante.



Nuevamente insistimos en que el plano es infinito, por lo que, al utilizar algún *software*, la gráfica del plano $2y + 6z = 12$ se ve más completa, como aparece en la figura de la derecha. Los puntos que aparecen remarcados tanto en el eje y como en z corresponden a los puntos donde el plano corta al plano coordenado yz.
Al unir dichos puntos, la recta que se dibuja corresponde a la traza en el plano yz. Al desplazar la traza en forma paralela al eje x, se obtiene la parte de la gráfica que se ve en el primer octante.



En la ecuación del plano no aparece la constante D, es decir, $D = 0$.

Ejemplo 6

Dibuja la gráfica del plano $x + 4y - 2z = 0$ en el espacio de tres dimensiones.

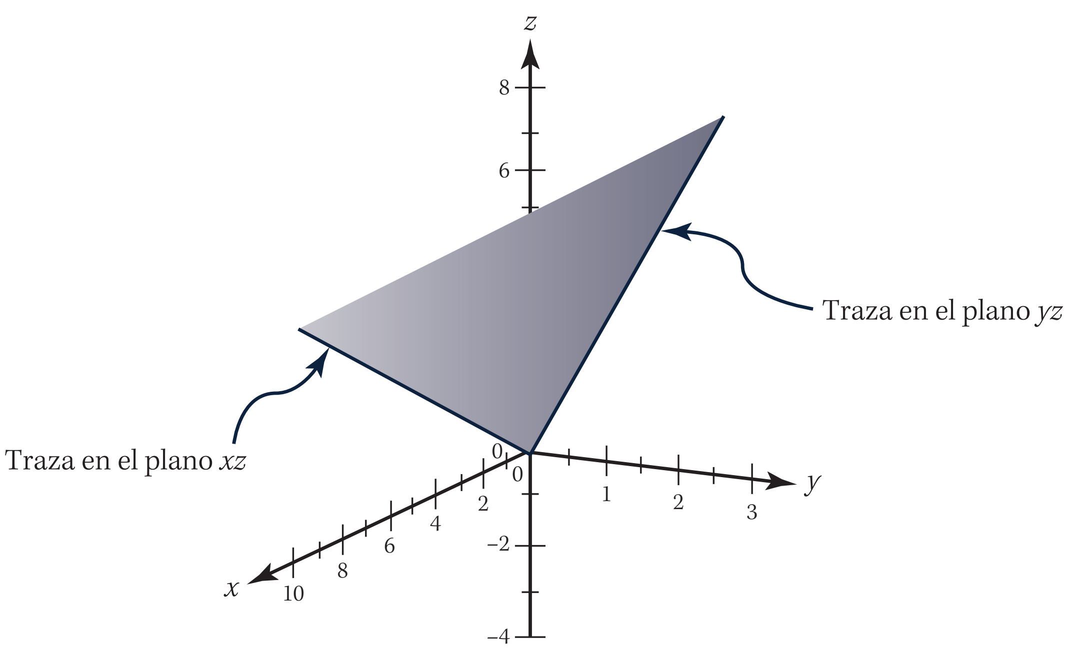
Solución

Cuando en un plano la constante independiente D es cero, significa que la gráfica del plano solo intersecta a los ejes coordenados en el origen; por tanto, para esbozar la gráfica se deben obtener las ecuaciones de las trazas en los planos yz y xz. No se recomienda encontrar la traza con el plano xy.

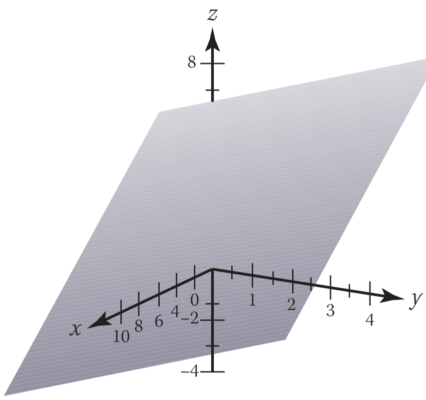
Recuerda que para encontrar la ecuación de la traza con el plano yz se debe sustituir por cero la variable x, y para obtener la traza con el plano xz se sustituye por cero la variable y. En la siguiente tabla aparece el proceso en forma resumida.

VALOR POR SUSTITUIR EN LA ECUACIÓN	ECUACIÓN DE LA TRAZA	PLANO AL QUE PERTENECE LA TRAZA	ECUACIÓN DE LA TRAZA CON UNA VARIABLE DESPEJADA
$x = 0$	$4y - 2z = 0$	yz	$z = 2y$
$y = 0$	$x - 2z = 0$	xz	$z = \frac{1}{2}x$

En el análisis anterior se observa que la traza en el plano yz es una recta que pasa por el origen y tiene pendiente 2; a su vez, la traza en el plano xz es también una recta que pasa por el origen pero tiene pendiente 1/2. Al dibujar cada una de estas trazas en el plano coordenado correspondiente y unir los extremos de dichas trazas, puede verse la parte del plano que se encuentra en el primer octante.



Al utilizar algún *software* para graficar, se obtiene una gráfica más completa del plano. Observa que el origen es el único punto donde el plano intersecta a los ejes coordenados.



¡A trabajar!

EJERCICIO 4

Dibuja la gráfica del plano $z = -5y - 4x + 20$ en el sistema coordenado que se proporciona.

Solución

Al escribir todas las variables en el lado izquierdo de la igualdad, la ecuación queda: ______________

____.

¿Son diferentes de cero las constantes A, B, C y D? ______________________________ .

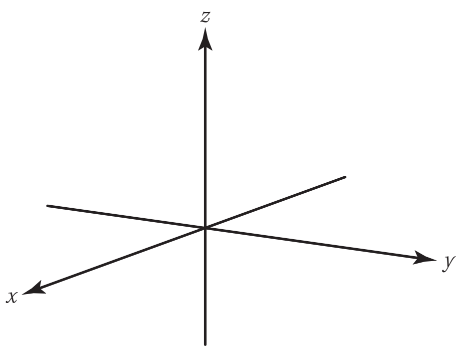
¿Qué debes hacer para obtener los puntos de intersección del plano con los ejes coordenados?

____ .

Completa los datos en la siguiente tabla para obtener dichos puntos.

VALORES POR SUSTITUIR EN LA ECUACIÓN	ECUACIÓN RESULTANTE	VALOR DE LA VARIABLE AL DESPEJAR	COORDENADAS DEL PUNTO DE INTERSECCIÓN	EJE CON EL QUE SE INTERSECTA EL PLANO
$x = 0, \; y = 0$				
$x = 0, \; z = 0$				
$y = 0, \; z = 0$				

Dibuja los puntos de intersección en el sistema coordenado dado a continuación y une los puntos para trazar la gráfica del plano en el primer octante.



¡A trabajar!

EJERCICIO 5

Dibuja la gráfica del plano $3z = 6 - x$ en el sistema coordenado que se proporciona.

Solución

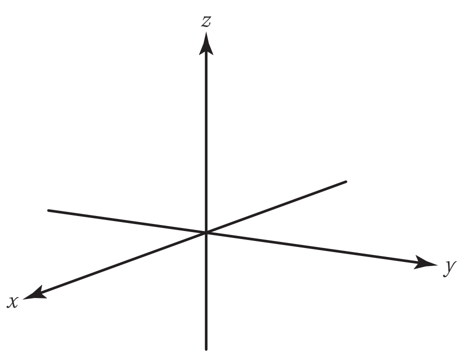
Al escribir todas las variables en el lado izquierdo de la igualdad, la ecuación queda: ________ ____ .

¿Son diferentes de cero las constantes A, B, C y D? ____________________ . ¿Qué variable puede tomar cualquier valor? ____________ . ¿Cuáles son los únicos ejes que intercepta este plano? ____________________ .

Completa los datos en la siguiente tabla para obtener dichos puntos.

VALORES POR SUSTITUIR EN LA ECUACIÓN	ECUACIÓN RESULTANTE	VALOR DE LA VARIABLE AL DESPEJAR	COORDENADAS DEL PUNTO DE INTERSECCIÓN	EJE CON EL QUE SE INTERSECTA EL PLANO
$x = 0, \ y = 0$				
$x = 0, \ z = 0$				
$y = 0, \ z = 0$				

Dibuja los puntos de intersección en el sistema coordenado dado a continuación y une los puntos para trazar el plano.



Gráfica de otras superficies

Una función de dos variables de la forma $z = f(x, y)$ tiene como gráfica una *superficie* en el espacio de tres dimensiones. Obtener la gráfica de este tipo de funciones no es tarea fácil cuando no se cuenta con algún *software* o calculadora para graficar; sin embargo, encontrar las trazas y/o los puntos de intersección de la superficie con los ejes coordenados ayuda a graficar algunas funciones sencillas.

Cilindros rectos

Definición

En una *curva* sobre un plano y una recta que no esté en el mismo plano que la curva, cuando se mueve la recta (llamada *generatriz*) a lo largo de la curva (denominada *directriz*), se genera una superficie que recibe el nombre de *cilindro*.

Los cilindros se pueden clasificar en oblicuos y rectos. Cuando la recta *generatriz es perpendicular* al plano en el que se encuentra la curva, la superficie resultante recibe el nombre de *cilindro recto.* Limitaremos nuestro estudio a este último tipo de cilindros.

También es importante aclarar que la forma del cilindro depende de la curva directriz; por ejemplo, si la directriz es una parábola, obtendremos un cilindro parabólico; pero si la directriz es una elipse, lograremos un cilindro elíptico, y así sucesivamente.

Nota: Las ecuaciones de los cilindros rectos se reconocen fácilmente porque en la ecuación *no* aparecen las tres variables x, y, z, sino solo dos de ellas.

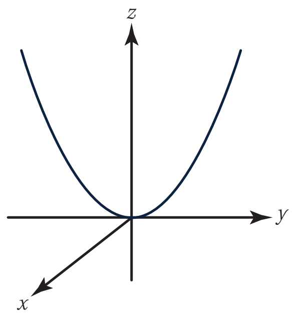
Para obtener la gráfica de este tipo de cilindros, puede utilizarse una estrategia similar a la del ejemplo 5; es decir, basta con graficar la traza sobre el plano correspondiente y moverla en forma paralela al eje de la variable que falta.

Ejemplo 7

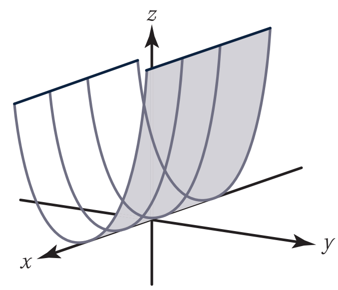
Dibuja en el espacio de tres dimensiones la gráfica de la superficie cuya ecuación está dada por la función $z = y^2$.

Solución

Observamos que en la ecuación $z = y^2$ **no aparece la variable *x***; por tanto, la gráfica seguirá siendo la misma para cualquier valor de x, en particular si $x = 0$. A su vez, la ecuación $z = y^2$ corresponde a la traza en el plano yz, cuya gráfica es la parábola que aparece en la figura de abajo a la izquierda. Al desplazar la gráfica de la parábola en dirección paralela al eje x (es decir, hacia delante y hacia atrás) se obtiene la gráfica de la superficie (figura de abajo a la derecha), que en este caso corresponde a un cilindro parabólico.



Traza en el plano yz



Gráfica del cilindro parabólico $z = y^2$

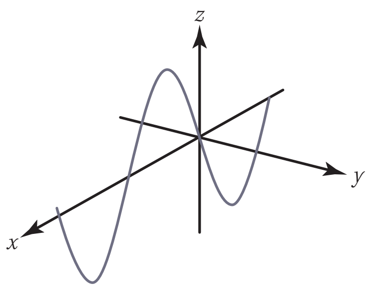
Nota: En este ejemplo la curva directriz es la parábola y la generatriz es una recta paralela al eje *x*, que genera el cilindro al moverla a lo largo de la curva.

Ejemplo 8

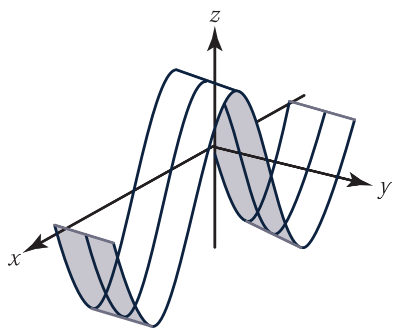
Dibuja en el espacio de tres dimensiones la gráfica de la superficie cuya ecuación está dada por la función $z = \operatorname{sen} x$.

Solución

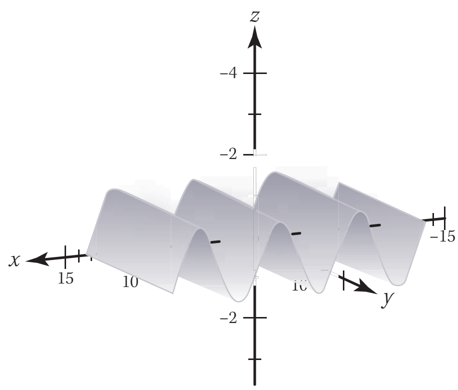
Observa que en la ecuación $z = \operatorname{sen} x$ no aparece la variable *y*; por tanto, la gráfica es un cilindro de forma senoidal. Para obtener la gráfica de la superficie, primero dibujamos la curva $z = \operatorname{sen} x$ en el plano *xz* (como se muestra en la figura de abajo a la izquierda) y en seguida la desplazamos en forma paralela al eje *y* (es decir, de izquierda a derecha), como se muestra en la figura central. Si se utiliza algún *software* para graficar, la gráfica del cilindro queda como aparece en la figura de abajo a la derecha.



Traza en el plano xy



Al desplazar la traza a la derecha



Gráfica de la función

Nota: En este ejemplo la función sen *x* es la curva directriz, mientras que la generatriz es una recta paralela al eje *y*, que al moverla a lo largo de la curva genera el cilindro.

¡A trabajar!

EJERCICIO 6

Dibuja la gráfica de la superficie $z = e^x$ en el sistema coordenado que se proporciona.

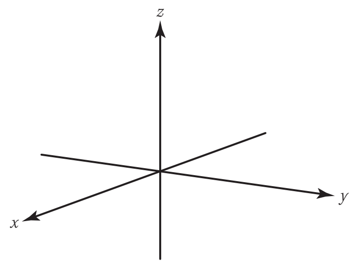
Solución

¿Corresponde la ecuación $z = e^x$ a una recta o a una curva? : ______________________________ .

¿Cuál variable *no* aparece en la ecuación? ______________________ . Por tanto, la gráfica de la superficie es: ____ .

Si se supone que $y = 0$, la gráfica de la ecuación $z = e^x$ corresponde a la traza de la superficie en el plano ____________________ y se debe desplazar en forma paralela al eje ____________ .

Para obtener la gráfica del plano, dibuja la traza en el siguiente sistema coordenado y desplázala en dirección al eje seleccionado.



¡A trabajar!

EJERCICIO 7

Dibuja la gráfica de la superficie $y = \ln x$ en el sistema coordenado que se proporciona.

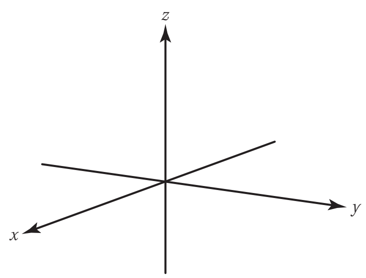
Solución

¿Corresponde a una recta o a una curva la ecuación $y = \ln x$? ______________________________ .

¿Qué variable *no* aparece en la ecuación? ______________________ ; por tanto, la gráfica de la superficie es ____ .

Si se supone que $z = 0$, la gráfica de la ecuación $y = \ln x$ corresponde a la traza de la superficie en el plano __________ y se debe desplazar en forma paralela al eje ____________________ .

Para obtener la gráfica del plano, dibuja la traza en el siguiente sistema coordenado y desplázala en dirección al eje seleccionado.

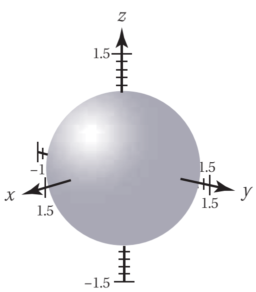


Algunas superficies importantes

En cursos previos de Matemáticas aprendiste a reconocer las ecuaciones y gráficas de algunas curvas especiales, como las que aparecen en la siguiente tabla:

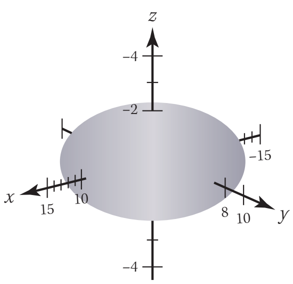
ECUACIÓN DE LA CURVA	NOMBRE DE LA CURVA
$y = x^2$	Parábola vertical con centro en el origen
$x^2 + y^2 = r^2$	Circunferencia con centro en el origen y radio r
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	Elipse con centro en el origen
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	Hipérbola horizontal con centro en el origen

En el espacio de tres dimensiones también existen superficies llamadas cuadráticas, cuyas ecuaciones son muy similares a las de las curvas anteriores. A continuación se muestran las gráficas de algunas de estas superficies, acompañadas de su nombre y su ecuación correspondiente.



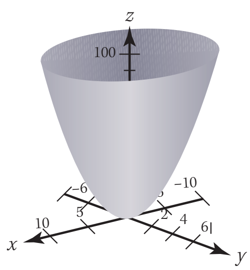
Esfera de radio r

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$



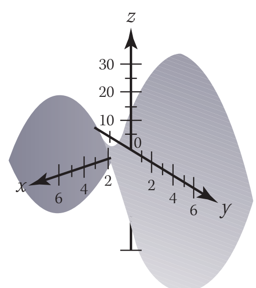
Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



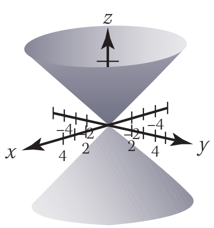
Paraboloide elíptico

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



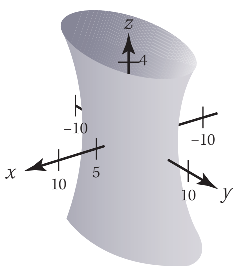
Paraboloide hiperbólico

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$



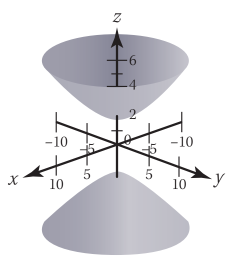
Cono con eje en z

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Hiperboloide de dos hojas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Nota: La forma como están escritas las ecuaciones de cada una de las superficies se conoce con el nombre de *forma reducida*.

Ejemplo 9

Indica el tipo de de superficie cuadrática al que corresponde la ecuación $25x^2 + 4y^2 - 100z = 0$.

Solución

Para decidir el tipo de superficie, primero hay que transformar la ecuación a su forma reducida, la cual se obtiene al dividir entre 100 ambos lados de la ecuación $\frac{25x^2}{100} + \frac{4y^2}{100} - \frac{100z}{100} = 0$. Al simplificar se obtiene $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} - z = 0$. Por último, al despejar *z*, la ecuación queda como sigue: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = z$.

Al comparar esta última ecuación con las ecuaciones de las superficies cuadráticas concluimos que corresponde a un *paraboloide elíptico.*

Ejemplo 10

Indica el tipo de superficie cuadrática al que corresponde la ecuación $4x^2 + 4y^2 = z^2$.

Solución

Para decidir el tipo de superficie, primero hay que transformar la ecuación a su forma reducida, la cual se obtiene al dividir entre 4 ambos lados de la ecuación: $\frac{4x^2}{4} + \frac{4y^2}{4} = \frac{z^2}{4}$. Al simplificar se obtiene $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4}$, la cual a su vez se puede escribir como sigue: $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0$.

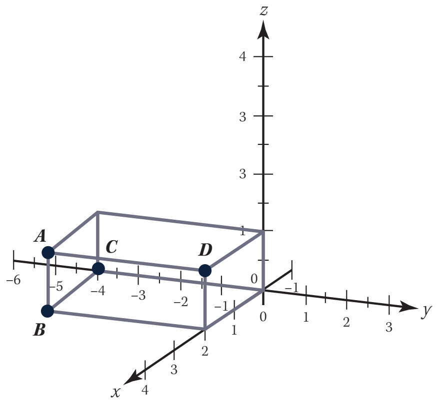
Al comparar esta última ecuación con las ecuaciones de las superficies cuadráticas, concluimos que corresponde a un *cono circular.*

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.2

Traza la gráfica de los siguientes puntos en el espacio coordenado de tres dimensiones e indica el octante en el que se encuentran.

1. (3, −2, 5) ______ .	2. (−7, 1, 2) ______ .
3. (8, −1, −1) ______ .	4. (−4, 0, −2) ______ .
5. (−5, −1,−3) ______ .	6. (4, 3, 1) ______ .

7. Encuentra las coordenadas de los vértices A, B, C y D de la caja rectangular que aparece en la siguiente figura.



Coordenadas de cada uno de los puntos:

A ______________________________ .

B ______________________________ .

C ______________________________ .

D ______________________________ .

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.2

Determina si las siguientes ecuaciones corresponden a un plano o a un cilindro y traza la gráfica de cada una de ellas.

8. $10x+8y-6z=2$

9. $z=x^2$

10. $z=\cos x$

11. $x+3y+3z=9$

12. $z=e^y$

13. $x+5y=10$

Determina a cuál superficie cuadrática corresponde cada una de las siguientes ecuaciones:

14. $x^2+25y^2-z+100=0$

15. $z^2=36-x^2-y^2$

16. $-x^2-y^2-z^2=-25$

17. $4x^2 - 4y^2 - z^2 = 4$

18. $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$

19. $y^2 - x^2 = z$

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 3.2

1. Cuarto octante
2. Segundo octante
3. Octavo octante
4. Sexto octante
5. Séptimo octante
6. Primer octante
7. Coordenadas de A: (2, –4, 1)
   Coordenadas de B: (2, –4, 0)
   Coordenadas de C: (0, –4, 0)
   Coordenadas de D: (2, 0, 1)
8. Plano
9. Cilindro (parabólico)
10. Cilindro (cosenoidal)
11. Plano
12. Cilindro (exponencial)
13. Plano
14. Paraboloide
15. Esfera
16. Esfera
17. Hiperboloide de dos hojas
18. Elipsoide
19. Paraboloide hiperbólico

3.3 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN DE "N" VARIABLES

En el caso de una función $f(x)$ en una sola variable x, no existe ambigüedad al hablar de la razón de cambio de $f(x)$ respecto a x, pues x es la única variable de la función, pero la situación es más complicada al estudiar la razón de cambio de una función con dos o más variables. Lo que se hace en este caso es estudiar la razón de cambio de la función respecto a una de las variables y se consideran las otras variables como si fueran constantes. Dado que solo se deriva una de las variables de la función, este tipo de derivadas se llama *derivada parcial*. Veamos cómo se definen:

Sea $z = f(x,y)$ una función de dos variables x y y; entonces la primera *derivada parcial de f respecto a x* en el punto (x, y) se define como:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \text{ si el límite existe.}$$

Esto se obtiene al derivar la función respecto a x, mientras que la variable y se considera constante.

Existen diversas notaciones para representar a la derivada parcial respecto a x, como:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = z_x .$$

De forma similar al derivar respecto a y:

Sea $z = f(x,y)$ una función de dos variables x y y; entonces la primera *derivada parcial de f respecto a y* en el punto (x,y) se define como:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} \text{ si el límite existe.}$$

Esto se obtiene al derivar la función respecto a la variable y, mientras que la variable x se considera constante.

Existen diversas notaciones para representar a la derivada parcial respecto a y, como:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = z_y .$$

Nota: De forma similar se obtienen derivadas parciales para funciones de más variables.

Por ejemplo, si se tiene una función con tres variables $f(x,y,z)$ y se desea derivar respecto a y, entonces la y se deriva con las fórmulas conocidas y tanto x como z se consideran constantes.

Recordar reglas para derivar constantes

Dado que algunas variables de la función se consideran constantes, es primordial recordar las reglas para derivar constantes que aprendimos en Matemáticas 1, a saber:

> Cuando una variable de la función se toma como *constante* debe seguir las mismas reglas para derivadas constantes:
>
> 1. Si una constante está sumando o restando, al derivarla se hace cero.
> 2. Si una constante está multiplicando o dividiendo, entonces al derivarla se queda igual.

Ejemplo 1

Obtén f_x y f_y para la función $f(x,y)=x^2+y^2$.

Solución

Observa que la función está definida como una suma, por lo cual para obtener su derivada simplemente derivamos cada uno de los términos. Es muy importante que tengas bien presente cuál variable vas a derivar y cuál otra se toma como constante.

Dado que vamos a obtener f_x en este caso: derivamos las *x* y tomamos a las *y* como constantes.

Derivemos término a término con base en lo anterior:

$$f(x,y)=\underbrace{x^2}_{\text{se deriva}}+\underbrace{y^2}_{\substack{\text{constante}\\ \text{sumando}}}$$

Para encontrar f_x observa que el primer término es x^2 y que al derivarlo respecto a *x* su derivada es $2x$. Ahora la variable *y* se toma como constante. De acuerdo con las reglas de constante, como la y^2 está sumando, se hace cero al derivarla y solamente queda la derivada de la primera función x^2 respecto a *x*: $f_x=2x$.

Ahora vamos a obtener f_y; en este caso derivamos las *y*, y las *x* se consideran como constante.

Derivemos término a término con base en lo anterior:

$$f(x,y)=\underbrace{x^2}_{\substack{\text{constante}\\ \text{sumando}}}+\underbrace{y^2}_{\text{se deriva}}$$

Para encontrar f_y, el primer término contiene la variable x^2. De acuerdo con las reglas de constante, como x^2 está sumando, se hace cero al derivarla; después se deriva el segundo término y^2 respecto a *y* su derivada es 2*y*. Entonces se puede decir que $f_y=2y$.

Ejemplo 2

Obtén f_x y f_y para la función $f(x,y)=x^3y^4+5x+3y-9$.

Solución

Observa que la función está definida como sumas y restas, por lo cual para obtener su derivada simplemente derivamos cada uno de los términos. Es primordial que tengas bien presente cuál variable vas a derivar y cuál otra se toma como constante.

Dado que vamos a obtener f_x, en este caso derivamos las x y tomamos a las y como constante.

Derivemos término a término con base en lo anterior:

$$f(x,y)=x^3y^4 \quad + \quad 5x \quad + \quad 3y \quad - \quad 9$$

constante multiplicando

se deriva

constante multiplicando

se deriva

constante sumando

constante restando

Para determinar f_x observa que el primer término es x^3y^4 y que al derivarlo respecto a x su derivada es $3x^2y^4$, pues la variable y es constante y por estar multiplicando se queda igual. Para derivar el segundo término $5x$, su derivada es 5 y finalmente al derivar los últimos dos términos, como ninguno contiene la variable x y están sumando y restando, se vuelven cero.

Luego $f_x = 3x^2y^4 + 5$.

Ahora vamos a obtener f_y ; en este caso derivamos las y y tomamos a las x como constante.

Derivemos término a término, con base en lo anterior:

$$f(x,y)=x^3y^4 \quad + \quad 5x \quad + \quad 3y \quad - \quad 9$$

constante que multiplica

se deriva

constante que suma

constante que multiplica

se deriva

constante que resta

Para determinar f_y , el primer término x^3y^4 contiene la variable y. Entonces al derivar respecto a y su derivada es $4x^3y^3$, observa que la variable x^3 no se elimina, porque es una constante que multiplica. Al derivar el segundo término y el cuarto que no contienen la variable y, estos se hacen cero pues representan constantes que suman y/o restan. Por último, al derivar el tercer término $3y$ respecto a y su derivada es 3, se puede decir que $f_y = 4x^3y^3 + 3$.

Ejemplo 3

Obtén f_x para la función $f(x,y) = 4x^{1/2}y^2 + 2x^3 - \ln y$.

Solución

Observa que la función está definida como sumas y restas, por lo cual para obtener su derivada simplemente derivamos cada uno de los términos. Es muy importante que tengas bien presente cuál variable vas a derivar y cuál otra se toma como constante.

En este caso: **derivamos las *x* y tomamos las y como constante.**

Derivemos término a término con base en lo anterior:

$$f(x,y)=\underbrace{4}_{\text{constante multiplicando}}\ \underbrace{x^{1/2}}_{\text{se deriva}}\ \underbrace{y^2}_{\text{constante multiplicando}} \quad + \quad \underbrace{2}_{\text{constante multiplicando}}\ \underbrace{x^3}_{\text{se deriva}} \quad - \quad \underbrace{\ln y}_{\text{constante que resta}}$$

La derivada parcial queda expresada como:

$$f_x=4\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right)y^2 \ + \ 2\left(3x^2\right) \ - \ 0\cdot$$

Al simplificar queda $f_x=\dfrac{2y^2}{x^{1/2}}+6x^2$.

Ejemplo 4

Obtén f_y para la función $f(x,y)=\left(y^2\cdot e^{2x}\right)^4$.

Solución

Para derivar esta función utilizamos la fórmula de $\left(f(x)\right)^n$ que aprendimos en Matemáticas 1, la cual indica que la derivada es $n\cdot\left(f(x)\right)^{n-1}\cdot f'(x)$.

Al derivar la función que se encuentra dentro del paréntesis debemos tener en cuenta que la variable por derivar es *y*. Entonces la *x* se toma como constante, es decir,

$$\underbrace{y^2}_{\text{se deriva}} \ \cdot \ \underbrace{e^{2x}}_{\text{constante multiplicando}}$$

La derivada queda expresada como: $f_y=4\left(y^2\cdot e^{2x}\right)^3\cdot 2y\cdot e^{2x}$.

Al simplificar tenemos $f_y=8ye^{2x}\left(y^2\cdot e^{2x}\right)^3$.

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Obtén f_x para la función $f(x,y)=3x^2y^3+6x^4-8y^2$.

¿Qué variable vas a derivar? ____________________ . ¿Qué variable se toma como constante?

____________ .

Derivemos cada término, ¡sin olvidar las reglas para constantes!:

f_x = ____ .

¡A trabajar!

EJERCICIO 2

Obtén f_y para la función $f(x,y)=3x^2y^3+6x^4-8y^2$

¿Qué variable vas a derivar? ________________ . ¿Qué variable se toma como constante?

________________ .

Derivemos cada término, ¡sin olvidar las reglas para constantes!:

$f_y =$ ____ .

¡A trabajar!

EJERCICIO 3

Obtén $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ para la función $f(s,t)=t^3e^{3s^2t^4}$.

¿Qué variable vas a derivar? ________________ . ¿Qué variable se toma como constante?

________________ .

Observa que la función está definida como el producto de t^3 con $e^{3s^2t^4}$.

Aquí debemos revisar cuál tipo de multiplicación es: (constante)(función) o (función)(función) y así aplicar la propiedad adecuada.

¿Qué tipo de multiplicación es? ________________________________ .

¿Por qué? ____ .

Ahora sí, resuélvelo:

$\dfrac{\partial f}{\partial s}=$ ____ .

Al simplificar, $\dfrac{\partial f}{\partial s}=$ ____ .

¡A trabajar!

EJERCICIO 4

Obtén $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ para la función $f(s,t)=t^3e^{3s^2t^4}$.

¿Qué variable vas a derivar? ________________________ . ¿Qué variable se toma como constante? ____ .

Observa que la función está definida como el producto de t^3 con $e^{3s^2t^4}$.

Aquí debemos revisar cuál tipo de multiplicación es: (constante)(función) o (función)(función) y así aplicar la propiedad adecuada.

¿Qué tipo de multiplicación es? ________________________________ .

¿Por qué? ____ .

¿Recuerdas la regla para derivar el producto $f \cdot g$? Escríbela ________________ .

Al aplicar la fórmula anterior, la derivada queda como:

$\frac{\partial f}{\partial t} =$ ____ .

Al simplificar:

$\frac{\partial f}{\partial t} =$ ____ .

¡A trabajar!

EJERCICIO 5

Obtén f_z para la función $f(x,y,z)=\ln^3(xyz^2)$.

Recuerda que la función que se pide derivar es equivalente a escribirla como $f(x,y,z)=\left(\ln\left(xyz^2\right)\right)^3$.

Es necesario escribirla así para derivarla correctamente.

¿Qué variable vas a derivar? ____________ . ¿Qué variable se toma como constante? ________________ .

Deriva sin olvidar las reglas para constantes:

$f_z =$ ____ .

Al simplificar:

$f_z =$ ____ .

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.3

En los problemas del 1 al 30 se da una función de dos o más variables. Encuentra la derivada parcial de la función respecto a cada una de las variables:

1. $f(x,y)=5x^2-y^3+xy$
2. $f(x,y)=\sqrt{x}+\ln(5x+y)$
3. $f(x,y)=\sqrt{x^2y+y^3}$
4. $f(x,y)=\dfrac{e^x+x^2y^4}{xy}$
5. $f(x,y)=(2x-y)(x^2-5)$
6. $f(x,y)=\dfrac{2^x-x^3}{y^4}$
7. $f(x,y)=\left(e^{3xy}+y\right)\ln x$
8. $f(x,y)=\sqrt[3]{7x^2y+3y^2x}$
9. $f(x,y)=\left(e^{x^2+y^3}\right)^{2/3}$
10. $f(x,y)=5\sqrt{x}\ln\left(x^3y^4\right)+8y$

11. $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x}}{2-y}$

12. $f(x,y)=\dfrac{6^x-e^{2y}}{x^2-y^2}$

13. $f(r,t)=\dfrac{r^4t-t^5}{\ln(r^3-5)}$

14. $f(\omega,\theta)=3^{\omega^2+\theta}\ln(2\omega-4\theta)$

15. $f(x,y)=(e^{2x}+7y)\left(x^{3/5}y^{1/5}\right)$

16. $f(x,y)=\ln\left(5^{x^2y}\right)-4x^5y^3+17$

17. $f(w,t)=\ln(3w-t)$

18. $f(r,t)=e^{-t}(r^2-5)$

19. $f(p,t)=p^{2/3}\sqrt{t^5+8p}$

20. $f(s,t)=e^{st^2}+\sqrt{s^3t}+\pi$

21. $f(r,t)=e^{-12rt^3}\left(\dfrac{6}{rt}\right)$

22. $f(x,y)=15x^7y^6\ln\sqrt{x}$

23. $f(t,q)=\pi^{q^{1/5}}+t^{2\pi}$

24. $f(r,t)=r^{4/3}(t^4-r^t)^2$

25. $f(x,y,z)=7x^2y+5xz-9y^4z$

26. $f(r,s,t)=e^{r+2t}\left(s^4-12t^{1/5}\right)$

27. $f(x,y,z)=\left[\ln\left(x^4y^2z^3\right)\right]\left[7y^3z^5-4x^3y+2z\right]$

28. $f(x,y,z)=2^{x^2-y^5}\left(y^z-x^y\right)$

29. $f(x,y,z,w)=(xy^2-z^3w)\ln(3yz-x^2)+8w^4y$

30. $f(r,s,t,w)=e^{-2r}\left(2^{-r}+s^4-\left(\dfrac{t+w}{r}\right)^2\right)$

En los problemas del 31 al 40 evalúa las derivadas parciales dadas:

31. $f(x,y)=(e^x-2y^{-3})^{2/5}$; $f_x(0,2)$

32. $f(x,y)=\ln(5xy^2)+e^{-x^2+y}$; $f_y(2,-1)$

33. $f(r,t)=\dfrac{5^{r^3-t^4}}{e^{2r}}$; $f_r(0,1)$

34. $f(x,y)=xe^{5x-2y^3}-y^4e^{y-x}\ \ ; f_x(-1,1)\ \ ; f_y(-1,1)$

35. $f(x,y,z)=2^{x^2+y}\sqrt{z^5+3yx}\ \ ; f_x(1,3,1)$

36. $f(r,s,t)=e^{-r^2}\left(\dfrac{s-t}{r}\right)\ \ ; f_r(1,0,-1)$

37. $f(x,y,z)=20y^3z^2+\ln\left(6x^2z+e^{xy}\right)\ \ ; f_z(1,3,-2)$

38. $f(x,y,z)=\dfrac{4x^5-\ln y+z^4}{y^{2/3}}\ \ ; f_y(0,8,4)$

39. $f(r,s,t,w)=\dfrac{e^{rw^3}-\sqrt{s^4w^5}}{r^3s^4}\ \ ; f_w(3,1,4,2)$

40. $f(x,y,z,t)=\ln\left(x^2y-zt^2\right)+e^{-t^2}+2^{x^2+z}+y^5z$

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 3.3

1. $f_x=10x+y$
   $f_y=-3y^2+x$

2. $f_x(x,y)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{5}{5x+y}$
   $f_y(x,y)=\dfrac{1}{5x+y}$

3. $f_x(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2y+y^3}}$
   $f_y(x,y)=\dfrac{x^2+3y^2}{2\sqrt{x^2y+y^3}}$

4. $f_x(x,y)=\dfrac{\left(e^x+2xy^4\right)xy-\left(e^x+x^2y^4\right)y}{x^2y^2}$
   $f_y(x,y)=\dfrac{4x^2y^3(xy)-\left(e^x+x^2y^4\right)x}{x^2y^2}$

5. $f_x(x,y)=6x^2-2xy-10$
   $f_y(x,y)=-x^2+5$

6. $f_x(x,y)=\dfrac{2^x\ln 2-3x^2}{y^4}$

$f_y(x,y)=\dfrac{-4(2^x-x^3)}{y^5}$

7. $f_x(x,y)=3ye^{3xy}\ln x+\left(e^{3xy}+y\right)\left(\dfrac{1}{x}\right)$

$f_y(x,y)=\left(e^{3xy}+1\right)\ln x$

8. $f_x(x,y)=\dfrac{14xy+3y^2}{3\left(7x^2y+3y^2x\right)^{2/3}}$

$f_y(x,y)=\dfrac{7x^2+6yx}{3\left(7x^2y+3y^2x\right)^{2/3}}$

9. $f_x(x,y)=\dfrac{4xe^{x^2+y^3}}{3\left(e^{x^2+y^3}\right)^{1/3}}$

$f_y(x,y)=\dfrac{2y^2e^{x^2+y^3}}{\left(e^{x^2+y^3}\right)^{1/3}}$

10. $f_x(x,y)=\dfrac{5\ln\left(x^3y^4\right)}{2\sqrt{x}}+\dfrac{15\sqrt{x}}{x}$

$f_y(x,y)=\dfrac{20\sqrt{x}}{y}+8$

11. $f_x(x,y)=\dfrac{1}{(4-2y)\sqrt{x}}$

$f_y(x,y)=\dfrac{\sqrt{x}}{(2-y)^2}$

12. $f_x(x,y)=\dfrac{\left(6^x\ln 6\right)\left(x^2-y^2\right)-\left(6^x-e^{2y}\right)(2x)}{\left(x^2-y^2\right)^2}$

$f_y(x,y)=\dfrac{-2e^{2y}\left(x^2-y^2\right)-\left(6^x-e^{2y}\right)(-2y)}{\left(x^2-y^2\right)^2}$

13. $f_r(r,t)=\dfrac{\left(4r^3t\right)\ln\left(r^3-5\right)-\left(r^4t-t^5\right)\left(\dfrac{3r^2}{r^3-5}\right)}{\left[\ln\left(r^3-5\right)\right]^2}$

$f_t(r,t)=\dfrac{\left(r^4-5t^4\right)}{\ln\left(r^3-5\right)}$

14. $f_w(w,\theta)=3^{w^2+\theta}(2w\ln 3)[\ln(2w-4\theta)]+3^{w^2+\theta}\left(\dfrac{2}{2w-4\theta}\right)$

$f_\theta(w,\theta)=3^{w^2+\theta}(\ln 3)[\ln(2w-4\theta)]+3^{w^2+\theta}\left(\dfrac{-4}{2w-4\theta}\right)$

15. $f_x(x,y)=2e^{2x}\left(x^{3/5}y^{1/5}\right)+\left(e^{2x}+7y\right)\left(\dfrac{3}{5}x^{-2/5}y^{1/5}\right)$

$f_y(x,y)=7x^{3/5}y^{1/5}+\left(e^{2x}+7y\right)\left(\dfrac{3}{5}x^{3/5}y^{-4/5}\right)$

16. $f_x(x,y)=2xy\ln 5-20x^4y^3$

$f_y(x,y)=x^2\ln 5-12x^5y^2$

17. $f_w(w,t)=\dfrac{3}{3w-t}$

$f_t(w,t)=\dfrac{-1}{3w-t}$

18. $f_r(r,t)=2re^{-t}$

$f_t(r,t)=-e^{-t}\left(r^2-5\right)$

19. $f_p(p,t)=\dfrac{2\sqrt{t^5+8p}}{3p^{1/3}}+\dfrac{4p^{2/3}}{\sqrt{t^5+8p}}$

$f_t(p,t)=\dfrac{5p^{2/3}t^4}{2\sqrt{t^5+8p}}$

20. $f_s(s,t)=t^2e^{st^2}+\dfrac{3s^2}{2\sqrt{s^3t}}$

$f_t(s,t)=2ste^{st^2}+\dfrac{s^2}{2\sqrt{s^3t}}$

21. $f_r(r,t)=\left(\dfrac{-72t^2}{r}\right)e^{-12rt^3}-\left(\dfrac{6}{r^2t}\right)e^{-12rt^3}$

$f_t(r,t)=(-216t)e^{-12rt^3}-\left(\dfrac{6}{rt^2}\right)e^{-12rt^3}$

22. $f_x(x,y)=105x^6y^6\ln\sqrt{x}+\dfrac{15x^6y^6}{2}$

$f_y(x,y)=90x^7y^5\ln\sqrt{x}$

23. $f_t(t,q)=2\pi t^{2\pi-1}$

$f_q(t,q)=\dfrac{\pi^{q^{1/5}}\ln\pi}{5q^{4/5}}$

24. $f_r(r,t)=\dfrac{4}{3}r^{1/3}\left(t^4-r^{t^2}\right)+r^{4/3}\left(-t^2r^{t^2-1}\right)$

$f_t(r,t)=r^{4/3}\left(4t^3-r^{t^2}\ln r(2t)\right)$

25. $f_x(x,y,z)=14xy+5z$

$f_y(x,y,z)=7x^2-36y^3z$

$f_z(x,y,z)=5x-9y^4$

26. $f_r(r,s,t)=e^{r+2t}\left(s^4-12t^{1/5}\right)$

$f_s(r,s,t)=e^{r+2t}\left(4s^3\right)$

$f_t(r,s,t)=2e^{r+2t}\left(s^4-12t^{1/5}\right)-e^{r+2t}\left(\dfrac{12}{5t^{4/5}}\right)$

27. $f_x(x,y,z)=\dfrac{28y^3z^5}{x}-16x^2y+\dfrac{8z}{x}-12x^2y\ln\left(x^4y^2z^3\right)$

$f_y(x,y,z)=14y^2z^5-8x^3+\dfrac{4z}{y}+\left(21y^2z^5-4x^3\right)\ln\left(x^4y^2z^3\right)$

$f_z(x,y,z)=\left(21y^3z^4-\dfrac{12x^3y}{z}+6\right)+\left(35y^3z^4+2\right)\ln\left(x^4y^2z^3\right)$

28. $f_x(x,y,z)=\left[2^{x^2-y^5}2x\ln 2\right]\left(y^z-x^y\right)-\left(yx^{y-1}\right)2^{x^2-y^5}$

$f_y(x,y,z)=\left[2^{x^2-y^5}\left(-5y^4\ln 2\right)\right]\left(y^z-x^y\right)+\left(zy^{z-1}\right)2^{x^2-y^5}+8z^3y$

$f_z(x,y,z)=\left(y^z\ln y\right)2^{x^2-y^5}+12z^2y^2$

29. $f_x(x,y,z,w)=y^2\ln\left(3yz-x^2\right)-\left(\dfrac{2x^2y^2-2z^3xw}{3yz-x^2}\right)$

$f_y(x,y,z,w)=2xy\ln\left(3yz-x^2\right)+\left(\dfrac{3xy^2z-3z^4w}{3yz-x^2}\right)+8w^4$

$f_z(x,y,z,w)=-3z^2w\ln\left(3yz-x^2\right)+\left(\dfrac{3xy^3-3yz^3w}{3yz-x^2}\right)$

$f_w(x,y,z,w)=-z^3\ln\left(3yz-x^2\right)+32w^3y$

30. $f_r(r,s,t,w) = -2e^{-2r}\left(2^{-r} + s^4 - \left(\dfrac{t+w}{r}\right)^2\right) + e^{-2r}\left(-2^{-r}\ln 2 + \dfrac{2(t+w)^2}{r^3}\right)$

$f_s(r,s,t,w) = e^{-2r}\left(4s^3\right)$

$f_t(r,s,t,w) = e^{-2r}\left(\dfrac{-2t-2w}{r^2}\right)$

$f_w(r,s,t,w) = e^{-2r}\left(\dfrac{-2t-2w}{r^2}\right)$

31. 0.47536

32. 146.41131

33. $-\dfrac{2}{5}$

34. $f_x = 7.3854$
$f_y = -36.9398$

35. 92.91

36. −1.1036

37. −2159.258

38. – 5.32126

39. 35 318 829 510

40. 7.59436

3.4 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Las primeras derivadas parciales f_x y f_y de una función $f(x, y)$ son funciones de x y y, por lo tanto, es posible nuevamente derivar estas derivadas; a la derivada de la derivada se le llama *segunda derivada parcial* o *derivada de segundo orden*, como las segundas derivadas también representan una función de x y y, entonces, es posible volver a derivar estas segundas derivadas parciales; a la derivada de la segunda derivada se le llama *tercera derivada parcial* o *derivada de tercer orden*, y así sucesivamente. A todas estas derivadas se les llama *derivadas de orden superior*.

¿Cómo obtenemos una derivada de orden superior?

La segunda derivada parcial con respecto a x, denotada como f_{xx} o $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, se obtiene al derivar la primera derivada f_x con respecto a x.

La segunda derivada parcial con respecto a y, denotada como f_{yy} o $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, se obtiene al derivar la primera derivada f_y con respecto a y.

La segunda derivada parcial mixta f_{xy} o $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ se obtiene al derivar la primer derivada f_x con respecto a y.

Nota: Observa que en la notación de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ las variables en el denominador aparecen en orden inverso con respecto a la notación de subíndices; cuando se usa esta notación, el orden en que se debe derivar se lee de derecha a izquierda.

Tercera derivada

Se denota con tres subíndices y se obtiene derivando la segunda derivada.

Por ejemplo: f_{xyy} o $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x}$.

¡Reflexiona!

a) En esta tercera derivada parcial f_{xyy} o $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x}$,

¿la primera derivada es con respecto a qué variable? ________________ .

¿la segunda derivada es con respecto a qué variable? ________________ .

¿la tercera derivada es con respecto a qué variable? ________________ .

¿indican lo mismo estas dos diferentes notaciones de derivada parcial $f_{yyx} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x}$?

____ .

Nota: En forma similar se obtienen derivadas de orden mayor (cuarta, quinta, etc...)

Ejemplo 1

Encuentra las cuatro derivadas parciales de segundo orden de

$$f(x,y)=\ln(x^2y^3)+x^4y^5-6.$$

Solución

Antes de derivar puedes aplicar las propiedades de logaritmos en el primer término, así la función es más sencilla de derivar y de simplificar; este paso es opcional, al hacerlo la función quedará representada como

$$f(x,y)=2\ln x+3\ln y+x^4y^5-6.$$

Segunda derivada parcial f_{xx}

Ahora, si obtenemos la primera derivada con respecto a x

$$f_x(x,y)=2\left(\frac{1}{x}\right)+4x^3y^5=2x^{-1}+4x^3y^5.$$

Luego, para obtener la segunda derivada derivamos la primera f_x nuevamente con respecto a x, entonces

$f_{xx}(x,y)=-2x^{-2}+12x^2y^5$ simplificando obtenemos $f_{xx}(x,y)=\dfrac{-2}{x^2}+12x^2y^5$.

Segunda derivada parcial f_{xy}

Para obtener f_{xy}, se deriva f_x con respecto a y, entonces si derivamos

$f_x(x,y)=2x^{-1}+4x^3y^5$, obtenemos $f_{xy}(x,y)=20x^3y^4$.

Segunda derivada parcial f_{yy}

Para obtener f_y derivamos la función original $f(x,y)=2\ln x+3\ln y+x^4y^5-6$ con respecto a y, entonces

$$f_y(x,y)=3\left(\frac{1}{y}\right)+5x^4y^4=3y^{-1}+5x^4y^4.$$

Luego, para obtener f_{yy} se debe volver a derivar la primer derivada f_y con respecto a y

$f_{yy}(x,y)=-3y^{-2}+20x^4y^3$ y simplificando obtenemos $f_{yy}(x,y)=\dfrac{-3}{y^2}+20x^4y^3$.

Segunda derivada parcial f_{yx}

Por último, para obtener f_{yx}, se debe derivar f_y con respecto a x, entonces si derivamos $f_y(x,y)=3y^{-1}+5x^4y^4$, obtenemos $f_{yx}(x,y)=20x^3y^4$.

Nota: Observa que $f_{xy}(x,y)=20x^3y^4=f_{yx}$, esto solo sucede en funciones continuas (funciones sin huecos o asíntotas).

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Obtén f_{xy} para la función $f(x,y)=\sqrt{y}e^{\sqrt{\frac{x}{y}}}$.

Solución

¿Qué derivada nos piden obtener? ____________________.

Al expresar la función con exponentes tenemos que: $f(x,y)=$ ____________________.

Primera derivada

¿Con respecto a qué variable tenemos que derivar primero? ____________________.

Entonces tomaremos como constante a ____________________.

Nota: Observa que la función está definida como un producto. De estos dos factores, ¿qué tipo de multiplicación es? ____________________.

Después de la reflexión, resuelve:

$f_x=$ ____________________.

Simplificando, tenemos que: $f_x=$ ____________________.

Segunda derivada: f_{xy}

La primera derivada la volvemos a derivar para obtener la segunda derivada.

¿Con respecto a qué variable vamos a derivar? ____________________.

Entonces tomaremos como constante a ____________________.

Nota: Observa que la función está definida como un producto. De estos dos factores, ¿qué tipo de multiplicación es? ____________________.

Después de la reflexión, resuelve:

$f_{xy}=$ ____________________.

Simplificando, tenemos que: $f_{xy}=$ ____________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 2

Obtenga f_{xx} para la función $f(x,y)=\sqrt{y}e^{\sqrt{\frac{x}{y}}}$.

Solución

Al expresar la función con exponentes tenemos que: $f(x,y)=$ ____________________.

Primera derivada

¿Con respecto a qué variable tenemos que derivar primero? ____________________.

Entonces tomaremos como constante a ____________________.

Nota: Observa que la función está definida como un producto. De estos dos factores, ¿qué tipo de multiplicación es? ____________________.

Después de la reflexión, resuelve:

$f_x =$ ____________________.

Simplificando, tenemos que: $f_x =$ ____________________.

Segunda derivada: f_{xx}

La primera derivada la volvemos a derivar para obtener la segunda derivada.

¿Con respecto a qué variable vamos a derivar? ____________________.

Entonces tomaremos como constante a ____________________.

Nota: Observa que la función está definida como un producto. De estos dos factores, ¿qué tipo de multiplicación es? ____________________.

Después de la reflexión, resuelve:

$f_{xx} =$ ____________________.

Simplificando, tenemos que: $f_{xx} =$ ____________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 3

Obtenga f_{yy} para la función $f(x,y)=\ln(2x^2y+e^x)$.

Solución

¿Qué derivada nos piden obtener? ____________________.

Primera derivada

¿Con respecto a qué variable tenemos que derivar primero? ____________________.

Entonces tomaremos como constante a ____ .

Nota: Observa que la función es compuesta. ¿Cómo se derivan las funciones compuestas? ______________

____ .

Después de la reflexión, resuelve:

$f_y =$ ____ .

Simplificando, tenemos que: $f_y =$ ____ .

Segunda derivada: f_{yy}

La primera derivada la volvemos a derivar para obtener la segunda derivada.

¿Con respecto a qué variable vamos a derivar? __________________________________ .

Entonces tomaremos como constante a ____ .

Nota: Observa que la función está definida como una división: numerador y denominador ¿son funciones?

____ .

Después de la reflexión, resuelve:

$f_{yy} =$ ____ .

Simplificando, tenemos que: $f_{yy} =$ ____ .

¡A trabajar!

EJERCICIO 4

Obtenga f_{yx} para la función $f(x,y)=\ln(2x^2y+e^x)$.

Solución

¿Qué derivada nos piden obtener? ____ .

Primera derivada

¿Con respecto a qué variable tenemos que derivar primero? _____________________ .

Entonces tomaremos como constante a ____ .

Nota: Observa que la función es compuesta. ¿Cómo se derivan las funciones compuestas? ______________

____ .

Después de la reflexión, resuelve:

$f_y =$ ____ .

Simplificando, tenemos que: $f_y =$ ________________________________ .

Segunda derivada: f_{yx}

La primera derivada la volvemos a derivar para obtener la segunda derivada.

¿Con respecto a qué variable vamos a derivar? ________________________ .

Entonces tomaremos como constante a ____________________________ .

Nota: Observa que la función está definida como una división, analiza el numerador y el denominador ¿hay alguno que represente una constante o los dos son funciones? ____________________ .

Después de la reflexión, resuelve:

$f_{yx} =$ ____ .

Simplificando, tenemos que: $f_{yx} =$ _______________________________ .

¡A trabajar!

EJERCICIO 5

Obtenga f_{qpr} para la función $f(p,q,r)=\dfrac{(\ln q)e^r}{\sqrt{p}}$.

Solución

¿Qué derivada nos piden obtener? _______________________________ .

Al expresar la función con exponentes tenemos que: $f(p,q,r)=$ ____________ .

Primera derivada

¿Con respecto a qué variable tenemos que derivar primero? _______________ .

Entonces tomaremos como constante a ____________________________ .

Nota: Observa que la función está definida como producto, de estos tres factores ¿hay alguno que represente una constante o todos son funciones? ______________________________ .

Después de la reflexión, resuelve:

$f_q =$ ____ .

Segunda derivada: f_{qp}

La primera derivada la volvemos a derivar para obtener la segunda derivada.

¿Con respecto a qué variable vamos a derivar? ________________________ .

Entonces tomaremos como constante a ____________________________ .

Nota: Observa que la función está definida como producto, de estos tres factores ¿hay alguno que represente una constante o todos son funciones? ________________________________.

Después de la reflexión, resuelve:

f_{qp} = ____.

Tercera derivada: f_{qpr}

¿Cómo se obtiene la tercera derivada? ________________________________.

¿Con respecto a qué variable vamos a derivar? ____________________________.

Entonces tomaremos como constante a ________________________________.

Nota: Observa que la función está definida como producto, de estos tres factores ¿hay alguno que represente una constante o todos son funciones? ________________________________.

Después de la reflexión, resuelve:

f_{qpr} = ____.

Simplificando, tenemos que: f_{qpr} = ________________________________.

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.4

En los problemas del 1 al 14, encuentra las derivadas parciales que se indican.

1. $f(x,y)=8x^3+6y^2-x^2y^4$; f_x , f_{xx}

2. $f(x,y)=5x^3e^y+y^2\ln x$; f_y , f_{yx}

3. $f(x,y)=3x^2y+5y^3x+e^{x^2}$; f_x , f_{xy}

4. $f(x,y)=(5x^2y+y^3)(xy^4+6y^2x)$; f_y , f_{yx}

5. $f(x,y)=(2x^5y^2+4xy^3)(e^{xy}+3y)$; f_x , f_{xy} , f_{xx}

6. $f(s,t)=\ln(s^2+t^3)+\sqrt{s}t-7t^3s$; f_s , f_{st} , f_{ss}

7. $f(r,\theta)=\dfrac{e^{-r+\theta^2}}{\ln(\theta-r)}$; f_r , $f_{r\theta}$, f_{rr}

8. $f(t,w)=\ln\left(w^{1/5}+t^w\right)$; f_t , f_{tw} , f_{tt}

9. $f(\omega,\theta)=\sqrt[3]{\omega^2+5\theta}+e^{\omega^3+2\theta}$; f_ω , $f_{\omega\theta}$, $f_{\omega\theta\omega}$

10. $f(x,y)=7x^6y^2+\ln(6x^2y^5)$; f_y , f_{yy} , f_{yyx}

11. $f(x,y,z)=\dfrac{x^{1/2}-5x^4y^5}{z}$; f_z , f_{zx} , f_{zy}

12. $f(r,s,t)=3^{t^2+5}+\ln(t^2-r^2)+t^r r^s$; f_r , f_{rt} , f_{rtr} , f_{rts}

13. $f(x,y,z)=3x^7y^2z+x^3z-5y^2x^3$; f_x , f_{xy} , f_{xyz} , f_{xyy}

14. $f(x,y,z)=x^2z^4+2y^3z+8x^4z^2$; f_z , f_{zx} , f_{zxz} , f_{zxx}

En los problemas del 15 al 20, evalúa las derivadas parciales indicadas.

15. $f(x,y)=\ln(x^2y-y)+7xy^3$; $f_{yxy}(1,2)$

16. $f(x,y)=(3x+y^3)^{1/3}$; $f_{yxx}(3,1)$

17. $f(r,t)=\pi^t\ln(r^3-t^4)+t^r$; $f_{trr}(1,2)$

18. $f(x,y)=x^5e^{y^3}-\sqrt{y^3}\ln(x^2-y^5)+8x^3y$; $f_{yxx}(-1,1)$

19. $f(x,y,z)=5x^3y\ln(7x^2y^2z^3)$; $f_{zyx}(1,-2,5)$

20. $f(r,s,t)=s^3t^2r+7r^2ts-e^{rt^2s^3}$; $f_{trs}(1,2,3)$

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 3.4

1. $f_x(x,y)=24x^2-2xy^4$, $f_{xx}(x,y)=48-2y^4$

2. $f_y(x,y)=5x^3\ e^y+2y\ \ln x$, $f_{yx}(x,y)=15x^2\ e^y+\dfrac{2y}{x}$

3. $f_x(x,y)=6xy+5y^3+2xe^{x^2}$, $f_{xy}(x,y)=6x+15y^2$

4. $f_y(x,y)=25x^3y^4+90x^3y^2+7xy^6+30y^4x$, $f_{yx}(x,y)=75x^2y^4+270x^2y^2+7y^6+30y^4$

5. $f_x(x,y)=(2x^5y^3+4xy^4)\,e^{xy}+(e^{xy}+3y)(10x^4y^2+4y^3)$

$f_{xy}(x,y)=(2x^5y^3+4xy^4)(e^{xy})x+e^{xy}(6x^5y^2+16xy^3)+(e^{xy}+3y)(20x^4y+12y^2)+(10x^4y^2+4y^3)(xe^{xy}+3)$

$f_{xx}(x,y)=(2x^5y^3+4xy^4)(ye^{xy})+e^{xy}(10x^4y^3+4xy^4)+(e^{xy}+3y)(40x^3y^2)+(10x^4y^2+4y^3)(ye^{xy})$

6. $f_s(s,t)=\dfrac{2s}{(s^2+t^3)}+\dfrac{t}{2\sqrt{s}}-7t^3$, $f_{st}(s,t)=\dfrac{-6st^2}{(s^2+t^3)^2}+\dfrac{1}{2\sqrt{s}}-21t^2$;

$f_{ss}(s,t)=\dfrac{2t^3\text{-}2s^2}{(s^2+t^3)^2}-\dfrac{t}{4s^{3/2}}$

7. $f_r(r,\theta)=\dfrac{-e^{\left(-r+\theta^2\right)}}{\ln(\theta-4)}$

$f_{rr}(r,\theta)=\dfrac{\mathrm{e}^{\left(-r+\theta^2\right)}}{\ln(\theta-4)}$,$f_{r\theta}(r,\theta)=\dfrac{e^{\left(-r+\theta^2\right)}\left(-2\theta\ln(\theta-4)+\dfrac{1}{\theta-4}\right)}{(\ln(\theta\text{-}4))^2}$

8. $f_t(t,w)=\dfrac{wt^{w-1}}{w^{1/5}+t^w}$,

$f_{tw}(t,w)=\dfrac{t^{w-1}\left[\left(w^{1/5}+t^w\right)(w\ln t+1)-\dfrac{1}{5}w^{1/5}+t\ln t\right]}{\left(\ln(\theta-4)\right)^2}$

$f_{tt}(t,w)=\dfrac{wt^{w-2}\left[\left(w^{1/5}+t^w\right)(w-1)-wt^w\right]}{\left(w^{1/5}+t^w\right)^2}$

9. $f_w(w,\theta)=\dfrac{2}{3}w(w^2+5\theta)^{-(2/3)}+3w^2\ e^{w^3+2\theta}$,

$f_{w\theta}(w,\theta)=-\dfrac{20}{9}w(w^2+5\theta)^{-(5/3)}+6w^2\ e^{w^3+2\theta}$,

$f_{w\theta\theta}(w,\theta)=\dfrac{500}{27}w(w^2+5\theta)^{-(8/3)}+12w^2\ w^{e^3+2\theta}$

10. $f_y(x,y)=14x^6y+\dfrac{5}{y}$, $f_{yy}(x,y)=14x^6-\dfrac{5}{y^2}$, $f_{yyx}(x,y)=84x^5$

11. $f_z(x,y,z)=\dfrac{5x^4y^5-x^{1/2}}{z^2}$, $f_{zx}(x,y,z)=\dfrac{-20x^3y^5-\dfrac{1}{2}x^{-1/2}}{z^2}$, $f_{zy}(x,y,z)=\dfrac{-25x^4y^4}{z^2}$

12. $f_r(r,s,t)=\dfrac{-2r}{t^2-r^2}+2t^4r$, $f_{rt}(r,s,t)=\dfrac{4rt}{\left(t^2-r^2\right)^2}+8t^3r$,

$f_{rtr}(r,s,t)=\dfrac{4t\left(t^2+3r^2\right)}{\left(t^2-r^2\right)^3}+8t^3$, $f_{rtt}(r,s,t)=\dfrac{4r\left(-3t^2-r^2\right)}{\left(t^2-r^2\right)^3}+24t^2r$

13. $f_x(x,y,z)=21x^6y^2z+3x^2z-15y^2x^2$, $f_{xy}(x,y,z)=42x^6yz-30yx^2$

$f_{xyz}(x,y,z)=42x^6y$, $f_{xyy}(x,y,z)=42x^6z-30x^2$

14. $f_z(x,y,z)=4x^2z^3+2y^3+16x^4z$, $f_{zx}(x,y,z)=8x^3+64x^3z$,

$f_{zxz}(x,y,z)=24xz^2+64x^3$, $f_{zxx}(x,y,z)=8z^3+192x^2z$

15. $f_y(x,y)=\dfrac{1}{y}+21xy^2,\ f_{yx}(x,y)=21y^2,\ f_{yxy}(x,y)=42y,\ f_{yxy}(1,2)=84$

16. $f_y(x,y)=y^2\left(3x+y^3\right)^{-2/3},\ f_{yx}(x,y)=-2y^2\left(3x+y^3\right)^{-5/3}\ ,f_{yxx}(x,y)=10y^2\left(3x+y^3\right)^{-8/3}$

$f_{yxx}(3,1)=10(10)^{-8/3}=0.02154$

17. $f_t(r,t)=\pi^{\mathrm{t}}\ln\pi\ \ln(r^3-t^4)+\pi^t\left(\dfrac{-4t^3}{r^3-4t^4}\right)+\pi t^{\pi-1},\quad f_{tr}(r,t)=3r^2\pi^t\left(\dfrac{\ln\pi}{r^3-4t^4}+\dfrac{4t^3}{\left(r^3-4t^4\right)^2}\right)$

$f_{trr}(r,t)=3r^2\pi^t\left(\dfrac{-3r^2\ln\pi}{\left(r^3-4t^4\right)^2}-\dfrac{12r^2t^3}{\left(r^3-4t^4\right)^3}\right)+\left(\dfrac{\ln\pi}{r^3-4t^4}+\dfrac{4\mathrm{t}^3}{\left(r^3-4t^4\right)^2}\right)(6r\pi t),\ \ f_{trr}(1,2)=\ 4.2931$

18. $f_y(x,y)=3x^5y^2e^{y^3}-\dfrac{3}{2}y^{1/2}\ln\left(x^2-y^5\right)+\dfrac{5y^{11/2}}{x^2-y^5}+8x^3,$

$f_{yx}(x,y)=15x^4y^2e^{y^3}-\dfrac{3y^{1/2}x}{x^2-\mathrm{y}^5}+\dfrac{10xy^{11/2}}{\left(x^2-y^5\right)^2}+24x^2,$

$f_{yxx}(x,y)=60x^3y^2e^{y^3}+y^{1/2}\left(\dfrac{3y^5+3x^2+10x^2y^5-10y^{10}}{\left(x^2-y^5\right)^2}-\dfrac{40x^2y^5}{\left(x^2-y^5\right)^3}\right)+48x,$

$f_{yxx}(2,1)=1\,407.237$

19. $f_z(x,y,z)=\dfrac{15x^3y}{z},f_{zy}(x,y,z)=\dfrac{15x^3}{z},f_{zyx}(x,y,z)=\dfrac{45x^2}{z},f_{zyx}(1,\text{-}2,5)=9$

20. $f_t(r,s,t)=2s^3tr+7r^2s-2trs^3e^{rt^2s^3},$

$f_{tr}(r,s,t)=2s^3t+14rs-2t^3rs^6e^{rt^2s^3}-2ts^3e^{rt^2s^3},$

$f_{trs}(r,s,t)=6s^2t+14r-6t^5r^2s^8e^{rt^2s^3}-18t^3rs^5e^{rt^2s^3}-6ts^2e^{rt^2s^3},$

$f_{trs}(1,1,1)=-61.55$

3.5 INTERPRETACIÓN EN TÉRMINOS PRÁCTICOS DE LA DERIVADA PARCIAL

Interpretar el resultado de una derivada parcial es muy similar a como lo hacíamos en Matemáticas I para funciones de una variable, solo que ahora hay que tomar en cuenta que la función depende de varias variables y que algunas de ellas se toman como constantes.

Si $z = f(x, y)$ es una función de dos variables, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ pueden interpretarse geométricamente como las pendientes de las líneas tangentes a la superficie $z = f(x, y)$ en las direcciones x y y, respectivamente. Existen otras interpretaciones, como:

$f_x(a,b) = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)}$ proporciona información acerca de la *razón de cambio (aumento o disminución)* que ocurre en los valores de la función f cuando los valores de x cambian de $x = a$ a $x = a + 1$ y el valor de *y se mantiene constante* en b unidades.

De modo similar:

$f_y(a,b) = \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)}$ proporciona información acerca de la *razón de cambio (aumento o disminución)* que ocurre en los valores de la función f cuando los valores de y cambian de $y = b$ a $y = b + 1$ y el valor de *x se mantiene constante* en a unidades.

Nota: Recuerda que cuando se da una interpretación en términos prácticos, esta se debe escribir en términos de lo que las variables y la función representan.

Para dar la interpretación práctica de una derivada parcial, hay que identificar la variable dependiente y la variable independiente que cambia, y también el que todas las demás variables independientes permanecerán sin cambio.

El siguiente formato te puede ayudar a construir la redacción inicial del significado práctico de la derivada parcial con respecto a x.

$$f_x(a\,,b) = c$$

Variable independiente que cambia

Variable dependiente

Cuando (*variable independiente que cambia)* se incrementa de (a) a ($a + 1$) (*unidades de la variable independiente*), la (*variable dependiente*) se (incrementa o disminuye) en (c) (*unidades de la variable dependiente*); siempre y cuando las demás variables independientes no cambien.

Recuerda: Si el signo de la derivada parcial es positivo significa que los valores de la función *aumentan*, si es negativo significa que los valores de la función *disminuyen*.

Ejemplo 1

Una compañía de autos ha estimado que $N = f(p, t)$ representa el número de autos vendidos (en miles) cuando el precio por auto es de p cientos de dólares y los anuncios por televisión duran t segundos. Da la interpretación práctica de las siguientes cantidades.

a) $f_p = (100, 15) = -0.003$

Solución

Lo primero que debemos hacer es identificar qué representan las variables independientes y dependientes, y en qué unidades se miden. En este caso son:

p = precio (medido en cientos de dólares)

t = tiempo (medido en segundos).

La variable dependiente es N = cantidad de autos vendidos (medida en miles de dólares).

Después de identificar las variables y sus unidades interpretemos la información que nos da el resultado de la derivada de acuerdo con el contexto.

Observa que $f_p(100, 15) = \left.\dfrac{\partial N}{\partial p}\right|_{(100,\,15)} = -0.003$.

Interpretación

Cuando la variable precio se incrementa de 10 000 a 10 100 unidades, el número de autos vendidos N disminuye en 3 unidades siempre que el tiempo en los anuncios por televisión permanezca constante en 15 segundos.

Ejemplo 2

Supongamos que una pequeña fábrica produce chocolate amargo y semiamargo. El costo de producir un kilo del chocolate amargo es de €6 y €5 para el semiamargo. Los costos fijos semanales ascienden a los €1200. Los precios de venta por cada kilo de chocolate amargo y semi-amargo son de €10 y €8, respectivamente.

Para plantear la función de costo debe recordarse que el costo total es igual a los costos fijos más los costos variables. Ahora bien, consideremos q_1 al kilo de chocolate amargo y q_2 al kilo de chocolate semiamargo, entonces la ecuación del costo total queda de la siguiente manera:

$$C\left(q_{1,}q_2\right) = 6q_1 + 5q_2 + 1200\,.$$

La función del Ingreso queda como: $I\left(q_{1,}q_2\right) = 10q_1 + 8q_2$; recordemos que el ingreso se obtiene multiplicando el precio por la cantidad.

Y es la función de utilidad, ingreso menos el costo, queda planteada como:

$$U\left(q_1, q_2\right) = \left(10q_1 + 8q_2\right) - \left(6q_1 + 5q_2 + 1200\right) \text{ simplificando,}$$

$$U\left(q_1, q_2\right) = 4q_1 + 3q_2 - 1200\,.$$

Una vez planteadas cada una de las funciones se pueden obtener los ingresos, costos y utilidades totales y marginales, incluso, obtener máximos y mínimos, pero esto se verá más adelante.

Por ejemplo, ¿cuál es la utilidad cuando se venden 500 kilos de chocolate amargo y 800 kilos de chocolate semiamargo?

$$U(500\,800) = 4(500) + 3(800) - 1200 = 3200$$

La utilidad es de €3200.

Ahora bien, ¿cuál es la utilidad marginal cuando se venden de 500 a 501 kilos de chocolate amargo y el chocolate semiamargo mantiene una venta constante de 800 kilos?

$$Uq_1 = 3$$

Es decir, si la venta del chocolate amargo aumenta de 500 a 501 kilos y la venta del chocolate semiamargo se mantiene constante, las utilidades aumentarán €4.

Ahora bien, ¿cuál es la utilidad marginal si las ventas del chocolate semiamargo aumentan de 800 a 801 mientas que las del chocolate amargo se mantienen constantes en 500 kg?

$$Uq_2 = 3$$

lo que significa que si la venta de chocolate semiamargo aumenta de 800 a 801 y las ventas del chocolate amargo permanecen estables en 500 kg, la utilidad aumentará €3.

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Los habitantes de una cierta comunidad pueden escoger, para ir a la ciudad, viajar en autobús o en tren. El número de personas que viajan por uno u otro medio depende del precio de cada uno. Sea $f(p_1, p_2)$ el número de personas que viajan en autobús cuando p_1 es el precio del viaje en autobús y p_2 es el precio del viaje en tren.

¿Qué variable independiente cambia? ____________________. ¿En qué unidades se mide? ____________________.

¿Cuál es la variable dependiente? ____________________. ¿En qué unidades se mide? ____________________.

¿Cuál es el signo de $\dfrac{\partial f}{\partial p_1}$? ____________________.

¿Cuál es el signo de $\dfrac{\partial f}{\partial p_2}$? ____________________.

¿Qué puede decir acerca de los signos de $\dfrac{\partial f}{\partial p_1}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial p_2}$?

Justifica: ____.

¡A trabajar!

EJERCICIO 2

Supongamos que se pidieron prestados $\$A$ a una tasa de interés de r % mensual para pagarlo en t meses, haciendo pagos mensuales de P pesos. Es decir, $P = f(A, r, t)$.

Explica en términos financieros lo que significan los siguientes resultados:

a) $f(8000, 1, 24) = 376.59$

____

____

b) $\dfrac{\partial f}{\partial A}(8000, 1, 24) = 0.047$

____

____

c) $\dfrac{\partial f}{\partial r}(8000, 1, 24) = 44.83$

____

____

d) ¿Qué signo tiene $\dfrac{\partial g}{\partial t}(8000, 1, 24)$, positivo o negativo? Justifica.

____

____

¡A trabajar!

EJERCICIO 3

El peso $W = f(c, t)$ de una persona en kg (medido cada mes) depende de la cantidad de calorías c (en miles) que consume en su alimentación y del tiempo t (en horas) de ejercicio que realiza diariamente. Obtén la interpretación de las derivadas parciales en los valores indicados.

a) $W_c = (2, 1) = 3$

Solución

¿Qué variable es la que aumenta una unidad? ______________________.

El aumento es de ____________________ a ____________________.

¿Qué variable permanece constante? ______________________.

Escribe la interpretación:

b) $W_t(2,1) = -2.5$

Solución

¿Qué variable es la que aumenta una unidad? ______________________.

El aumento es de ______________________ a ______________________.

¿Qué variable permanece constante? ______________________.

Escribe la interpretación:

¡A trabajar!

EJERCICIO 4

Una empresa fabrica dos tipos de lámparas: los modelos A y B. Supón que la función de ingresos al vender x unidades del modelo A y y unidades del modelo B por mes está dado por: $I(x, y) = .06x^2 + 8x + 15y + 1000$, donde I está en cientos de pesos.

a) Determina el ingreso obtenido al vender 100 lámparas del modelo A y 50 del modelo B.

Solución

¿Qué debes hacer para obtener lo que se pide? ______________________.

Calcula la respuesta en pesos (no cientos de pesos).

b) Obtén I_x para $x = 100$ y $y = 50$ e interpreta el resultado; *en economía a esta derivada parcial se le llama ingreso marginal*.

Solución

Obtén la derivada parcial ______________________.

Evalúala con los valores indicados de x y y.

¿Qué variable es la que aumenta una unidad? ______________________.

El aumento es de ______________________ a ______________________.

¿Qué variable permanece constante? ______________________.

Escribe la interpretación:

¿Cuál es el ingreso total obtenido al vender 101 lámparas del modelo A y 50 del modelo B?

____.

¿Cómo lo obtuviste? ______________________________________.

Obtén I_y cuando $x = 100$ y $y = 50$ e interpreta el resultado.

Solución

Obtén la derivada parcial ______________________________________.

Evalúala con los valores indicados de x y y.

¿Qué variable es la que aumenta una unidad? ____________________.

El aumento es de ____________________ a ____________________.

¿Qué variable permanece constante? ____________________.

Escribe la interpretación:

¿Cuál es el ingreso total obtenido al vender 100 lámparas del modelo A y 51 del modelo B? ______________________________________.

¿Cómo lo obtuviste? ______________________________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 5

La demanda D de botes de café , en cientos de unidades, depende del precio del café c y del precio del té t, ambos en dólares; es decir, $D = f(c, t)$. Obtén la interpretación de las derivadas parciales indicadas.

a) $D_c(c, t) = -2$

¿Qué variable es la que aumenta una unidad? ______________, y ¿cuál permanece constante? ______________.

Escribe la interpretación:

b) $D_t(c, t) = 1$

¿Qué variable es la que aumenta una unidad? ______________________, y¿cuál permanece constante? ________________________.

Escribe la interpretación:

La función de producción de Cobb-Douglas

Este modelo fue propuesto por Knut Wicksell (1851-1926) e investigado con respecto a la estadística concreta por Charles Cobb y Paul Douglas en 1928. El modelo establece una relación de productividad con respecto al capital invertido (K) y la fuerza laboral (L). El modelo está definido como: $Q(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$ donde A, α y β son constantes positivas y $\alpha + \beta = 1$.

La derivada parcial $Q_k(K, L)$ representa la productividad marginal cuando hay un cambio en el capital y la fuerza laboral se mantiene constante; de la misma forma, la derivada parcial $Q_k(K, L)$ representa la productividad marginal cuando hay un cambio en la fuerza laboral y el capital se mantiene constante.

Por ejemplo, en una fábrica se estima que la productividad anual está dada por $Q(k, L) = 30K^{0.3}L^{0.7}$ donde el capital está expresado en miles de pesos y la fuerza laboral, en horas. Determina la productividad marginal de capital y la productividad marginal de la fuerza laboral cuando el capital es de 650 por unidad y el nivel de productividad es de 850 horas-trabajador.

a) Productividad marginal de capital

Para obtener la productividad marginal de capital debemos calcular la derivada parcial con respecto a K, entonces:

$\frac{\partial Q}{\partial K} = Q_K(K, L) = 9K^{-0.7}L^{0.7}$ sustituyendo 650 y 850 en K y L, respectivamente, tenemos:

$\frac{\partial Q}{\partial K} = Q_K(650, 850) = 9(650)^{-0.7}(850)^{0.7} \approx 10.859$ lo cual significa que cuando se aumenta el capital de 650 a 651 por unidad y el nivel de productividad se mantiene constante en 850, entonces las unidades producidas aumentan casi en 11.

b) Productividad marginal de fuerza laboral

Ahora bien, para obtener le productividad marginal de fuerza laboral calcularemos la derivada parcial con respecto a L:

$\frac{\partial Q}{\partial L} = Q_L(K, L) = 21K^{0.3}L^{-0.3}$, sustituyendo 650 y 850 en K y L, respectivamente:

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = Q_L(650, 850) = 21(650)^{0.3}(850)^{-0.3} \approx 19.376 .$$

En este caso, si la fuerza laboral aumenta de 850 a 851 trabajador-hora, entonces las unidades producidas aumentan en 19.

Esto permite decidir en qué es conveniente invertir, si al capital o a la fuerza laboral, en este caso, aumentar la fuerza laborar es más conveniente ya que se tiene una aumento mayor en las unidades producidas.

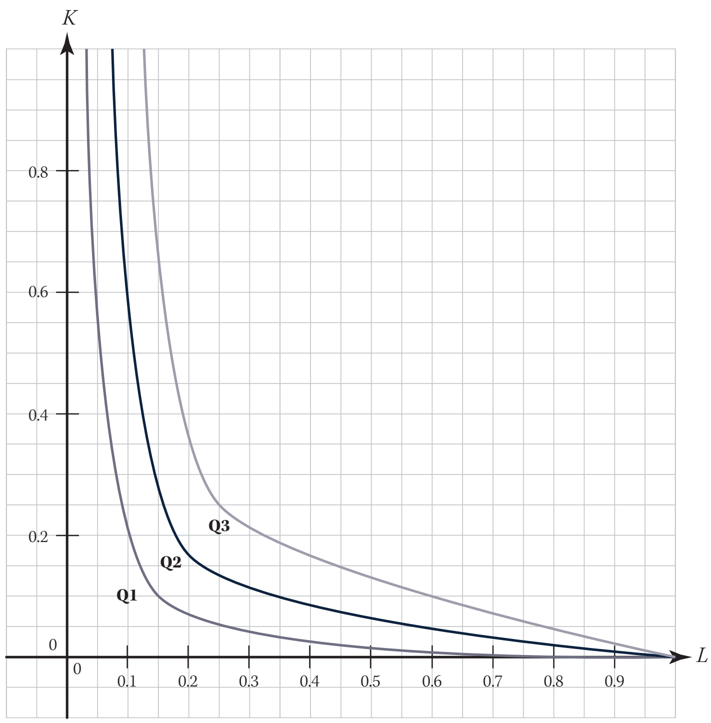
c) Isocuantas

Una isocuanta de producción se define como una curva en un espacio de insumos, que muestra todas las combinaciones de capital y trabajo que son físicamente capaces de generar un nivel determinado de producción.

Si de la función original $Q(K,L)=30K^{0.3}L^{0.7}$ despejamos a K con respecto a L y Q tendríamos la siguiente función $K^{0.3}=\dfrac{Q}{30L^{0.7}}$, $K=\dfrac{Q^3}{\left(30L^{0.7}\right)^3}$ A las gráficas de estas funciones se les llama isocuantas, por ejemplo, las isocuantas cuando se producen 3, 5, 7 están dadas por las funciones:

$$K=\frac{27}{\left(30L^{0.7}\right)^3}\,,\;\; K=\frac{125}{\left(30L^{0.7}\right)^3}\;\text{ y }\; K=\frac{343}{\left(30L^{0.7}\right)^3}$$

las cuales se muestran en la siguiente gráfica.



Gráfica 1. Isocuantas

Las isocuantas también brindan importante información a la empresa para el análisis de toma de decisiones ya que conocer a estas curvas puede ayudar a seleccionar entre varias alternativas de producción para elegir la combinación que mejor se adecua en un momento dado para obtener los mejores rendimientos, elevando así, la eficiencia de la empresa.

Ejemplo 1

La producción de México se describe mediante la función $f(x,y)=40x^{3/4}y^{1/4}$ unidades, al utilizar x unidades de mano de obra y y unidades de capital.

a) ¿Cuál es la productividad marginal de mano de obra y la productividad marginal del capital cuando las cantidades gastadas en mano de obra y capital son 256 y 64 unidades, respectivamente.

b) ¿El gobierno debería alentar a la inversión en capital, en vez de incrementar el gasto de mano de obra para incrementar la productividad del país?

Solución

Primero se obtienen las derivadas parciales

$$f_x(x,y)=40\left(\frac{3}{4}\right)x^{-1/4}y^{1/4}=30x^{-1/4}y^{1/4},$$

$$f_y(x,y)=40\left(\frac{1}{4}\right)x^{3/4}y^{-3/4}=10x^{3/4}y^{-3/4},$$

Ahora se evalúan en el punto (256,64)

$$f_x(x,y)=30\frac{(64)^{1/4}}{(256)^{1/4}}=30\left(\frac{64}{256}\right)^{1/4}\approx 21.21.$$

La producción marginal de la mano de obra, *se interpreta como que se tienen 21 unidades por incremento unitario en gasto de mano de obra, mientras el capital se mantiene constante en 64 unidades.*

$$f_y(x,y)=10\frac{(64)^{3/4}}{(256)^{3/4}}=10\left(\frac{256}{64}\right)^{3/4}\approx 2.82.$$

La productividad marginal del capital *se interpreta como que se tienen 2.82 unidades por incremento unitario en el gasto de capital, mientras que la cantidad de mano de obra se mantiene constante en 256 unidades.*

b) En este caso el gobierno no debe alentar la inversión en capital, ya que al aumentar el gasto de mano de obra, se tiene un mayor incremento en la productividad.

¡A trabajar!

EJERCICIO 6

La función de producción de una empresa está dada por $f(K,L)=100K^{0.75}L^{0.25}$, en donde K es la cantidad de unidades de capital invertido y L es la cantidad de unidades de mano de obra utilizada.

a) Determina la productividad marginal del trabajo cuando $K = 1000$ y $L = 500$.

b) Determina la productividad marginal del capital cuando $K = 1000$ y $L = 500$.

c) Explica en términos prácticos lo que representan estos dos resultados.

____

____.

¡A trabajar!

EJERCICIO 7

La producción de cierta empresa, después de la depresión norteamericana, se describe mediante la función $Q(x, y) = 25x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$, donde x representa las unidades de mano de obra y y representa las unidades de capital. ¿Cuál es la productividad marginal cuando se invierten 100 unidades de mano de obra y 20 unidades de capital?

Solución

a) ¿Cuáles son las derivadas parciales de Q_x y Q_y?

$Q_x =$ ____.

$Q_y =$ ____.

b) ¿Cuál es la productividad marginal de mano de obra? _________________________

c) ¿Cuál es la productividad marginal de capital? ______________________________.

d) ¿En qué le conviene invertir: en mano de obra o capital? __________________________.

¿Por qué? ____.

Artículos sustitutos y complementarios

Elasticidades cruzadas

Para comprender la relación entre la oferta y la demanda, en cursos iniciales de Economía se parte del hecho que la demanda depende solamente del precio por unidad de un artículo en particular; sin embargo, en la práctica no siempre ocurre así. Por ejemplo, el precio del kilo de jamón de pierna de cerdo en el supermercado no solo depende del precio por kilo del mismo, sino también del precio por kilo de jamón de pavo, es decir, cualquier cambio en el precio del kilo de jamón de pavo afectará el precio del kilo de jamón de cerdo, y viceversa, ya que algunos consumidores no les importaría cambiar de producto.

Para este caso tendremos dos o más funciones, donde la demanda de un producto en particular dependerá del precio de ese producto y del precio del producto sustituto, es decir: $Q_A = f(p_A, p_B)$ y $Q_B = f(p_A, p_B)$ por lo que al obtener las derivadas parciales de cada función tendríamos

$$\frac{\partial Q_A}{\partial p_A}, \frac{\partial Q_A}{\partial p_B}, \frac{\partial Q_B}{\partial p_A}, \frac{\partial Q_B}{\partial p_B}.$$

Es decir, la demanda marginal del producto A con respecto a su precio, la demanda marginal del producto A con respecto al precio del producto B, la demanda marginal del producto B con respecto al precio del producto A y la demanda marginal del producto B con respecto a su precio, respectivamente.

Evidentemente, si el precio del producto B se mantiene constante y el precio del producto A aumentara habría una disminución de la demanda del producto A, es decir: $\frac{\partial Q_A}{\partial p_A} < 0$.

Lo mismo sucede con la demanda del producto B, $\frac{\partial Q_B}{\partial p_B} < 0$.

$\frac{\partial Q_A}{\partial p_B}$ y $\frac{\partial Q_B}{\partial p_A}$ pueden ser positivas o negativas, esto depende de la interacción entre ambos productos.

Por ejemplo, si A representa el jamón de cerdo y B el jamón de pavo, un aumento en el precio del jamón de cerdo puede provocar un incremento en la demanda del jamón de pavo si su precio se mantiene constante, y viceversa, por lo que podemos decir que:

Dos artículos A y B son artículos sustitutos o competitivos si $\frac{\partial Q_A}{\partial p_B} > 0$ *y* $\frac{\partial Q_B}{\partial p_A} > 0$.

Dos artículos A y B son artículos complementarios si $\frac{\partial Q_A}{\partial p_B} < 0$ *y* $\frac{\partial Q_B}{\partial p_A} < 0$.

¡A trabajar!

EJERCICIO 8

Da la interpretación en términos prácticos de las derivadas parciales que se indican.

Si la demanda de cierta marca de queso manchego *light* está dada por $Q(a) = -5a^2 + 7b - 200$ y la demanda de cierta marca de queso panela está dada por $Q(b) = 3a - 2b + 50$, donde a y b representan el precio de cada producto, respectivamente, determina las cuatro funciones marginales y luego demuestra matemáticamente si los productos son competitivos o complementarios entre sí.

¿Cuál es la función marginal de cada una? Da su interpretación.

$\frac{\partial Q_a}{\partial p_a} =$ ______________________________.

$\frac{\partial Q_b}{\partial p_b} =$ ______________________________.

$\frac{\partial Q_a}{\partial p_b} =$ ______________________________.

$\frac{\partial Q_b}{\partial p_a} =$ ______________________________.

¿Cómo son los signos de $\frac{\partial Q_a}{\partial p_b}$ y de $\frac{\partial Q_b}{\partial p_a}$? ______________________.

Por lo tanto, ¿los productos son competitivos, complementarios? ________________.

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.5

Resuelve los siguientes ejercicios.

1. El valor de un automóvil $V = f(t,k)$, medido en miles de pesos, está en función de los años (t) transcurridos desde su compra y los miles de kilómetros (k) recorridos. Dar la interpretación práctica de:

   a) $f_t(4,36) = -2.3$

   b) $f_k(4,36) = -0.5$

2. Los ingresos mensuales $I = f(c,o)$, en cientos de pesos, de un centro de copiado están en función del número de miles de copias tamaño carta (c) y el número en miles de copias tamaño oficio (o). Dar la interpretación práctica de:

   a) $f_c(80,35) = 5$

   b) $f_o(80,35) = 7.5$

3. Las utilidades mensuales $U = f(g,b)$, medidas en miles de pesos, de una embotelladora de agua purificada, están en función del número (en cientos) de garrafones vendidos (g) y el número de botellas vendidas de 1 litro (b) (en miles). Dar la interpretación práctica de:

   a) $f_g(135,50) = 0.8$

   b) $f_b(135,50) = 2.5$

4 Los costos mensuales $C = f(r,t)$, medidos en miles de pesos, de una fábrica de reproductores de CD, están en función de la cantidad (r) en miles de aparatos fabricados y el número (t) de trabajadores. Dar la interpretación práctica de:

   a) $f_r(35,20) = 50$

   b) $f_t(35,20) = 4.8$

5. Los ingresos semanales $I = f(p,m)$ de una gasolinera en miles de pesos están en función de los miles de litros vendidos de gasolina Premium (p) y los miles de litros vendidos de gasolina magna (m). Dar la interpretación práctica de:

   a) $f_p(10,14) = 7.2$

   b) $f_m(10,14) = 6.5$

6. Las utilidades $U = f(a,t)$, en miles de pesos, de una empresa acerera están en función de las toneladas de acero (a) que vende y el número de trabajadores (t) contratados, medidos en cientos. Dar la interpretación práctica de:

   a) $f_a(20,2) = 6$

   b) $f_t(20,2) = -10$

7. La producción de trigo, en cientos de toneladas, de un agricultor, $P = f(s,h)$, está en función de los cientos de kilogramos de semilla (s) utilizados y las hectáreas sembradas (h). Dar la interpretación práctica de:

   a) $f_s(1,5) = -0.2$

   b) $f_h(1,5) = 0.3$

8. La mensualidad que se paga por la compra de un terreno $M = f(e,p)$ está en función del enganche (e) en miles de pesos y del plazo (p) en años. Dar la interpretación práctica de:

   a) $f_e(20,5) = -200$

   b) $f_p(20,5) = -500$

9. Los costos semanales $C = f(m,t,h)$, en miles de pesos, de un fabricante de ropa están en función de los cientos de metros (m) de tela utilizada, el número (t) de trabajadores y las horas (h) trabajadas diariamente. Dar la interpretación práctica de:

   a) $f_m(15,10,8) = 3$

   b) $f_t(15,10,8) = 0.75$

   c) $f_h(15,10,8) = 0.156$

10. La masa en gramos de una sustancia radiactiva está dada por la siguiente función $Q(b,t) = b(0.88)^{t/2}$ donde t es el tiempo en meses y b es la cantidad inicial de sustancia en gramos. Obtén $Q_t(420,6)$ e interpreta el resultado.

11. Los ingresos mensuales, en cientos de pesos, de una fábrica de escritorios están dados por la función $f(x,y) = 480x + x^2 + xy + 350y$, donde x es el número de escritorios de madera y y es el número de escritorios metálicos, medidas en cientos de unidades. Obtén $f_x(20,35)$ e interpreta el resultado.

12. El saldo en una cuenta bancaria de miles de pesos está dado por la función $S(b,t) = be^{0.05t}$, donde t son los años que dura la inversión y b es la cantidad invertida en miles de pesos.

    a) Obtén $S(10,3)$ e interpreta el resultado.

    b) Obtén $S_b(10,3)$ e interpreta el resultado.

    c) Obtén $S_t(10,3)$ e interpreta el resultado.

13. En cierta fábrica, la producción diaria, en cientos de unidades, está dada por la siguiente función $P(k,t) = 6k^{1/2}t^{1/2}$, donde k representa la inversión de capital medido en miles de pesos y t es el número de trabajadores medido en cientos.

    a) Obtén $P(400,10)$ e interpreta el resultado.

    b) Obtén $P_k(400,10)$ e interpreta el resultado.

    c) Obtén $P_t(400,10)$ e interpreta el resultado.

14. Los ingresos anuales de una fábrica medidos en miles de pesos están dados por $I(p,q) = pq$, donde p es el precio unitario en cientos de pesos y q son las miles de unidades vendidas.

    a) Obtén $I(17,2)$ e interpreta el resultado.

    b) Obtén $I_p(17,2)$ e interpreta el resultado.

    c) Obtén $I_q(17,2)$ e interpreta el resultado.

15. Las ventas mensuales, en cientos de unidades) de cierto artículo están dadas por $V(r,t)=15r+0.18rt^2+32t$, donde r es la cantidad de anuncios diarios por radio y t es la cantidad de anuncios diarios por televisión.

    a) Obtén $V(3,5)$ e interpreta el resultado.

    b) Obtén $V_r(3,5)$ e interpreta el resultado.

    c) Obtén $V_t(3,5)$ e interpreta el resultado.

16. Las utilidades mensuales, en cientos de pesos, de una tienda de artículos deportivos están dadas por $U(x,y)=2.5x^2+xy+8y^2-52$, donde x es el número de pelotas y y es el número de cuerdas para ejercicio aeróbico medidas en cientos de unidades.

    a) Obtén $U(16,8)$ e interpreta el resultado.

    b) Obtén $U_x(16,8)$ e interpreta el resultado.

    c) Obtén $U_y(16,8)$ e interpreta el resultado.

17. La producción mensual de una fábrica medida en miles de unidades está dada por $P(t,h)=7.2t^{2/3}h^{1/3}$, donde t es el número de trabajadores y h son las horas de trabajo diarias.

    a) Obtén $P(50,8)$ e interpreta el resultado.

    b) Obtén $P_t(50,8)$ e interpreta el resultado.

    c) Obtén $P_h(50,8)$ e interpreta el resultado.

18. Los ingresos de una línea aérea, en millones de pesos, están dados por $I(p,t)=5p^{2/3}t^{1/3}$, donde p es el precio unitario del boleto de primera clase y t es el precio unitario del boleto de clase turista, ambos medidos en miles de pesos.

    a) Obtén $I(3,1.9)$ e interpreta el resultado.

    b) Obtén $I_p(3,1.9)$ e interpreta el resultado.

    c) Obtén $I_t(3,1.9)$ e interpreta el resultado.

19. El índice de masa corporal de una persona está dado por $IMC(p,h)=\dfrac{p}{h^2}$, donde p es el peso en kilogramos y h es la estatura en metros.

    a) Obtén $IMC(97.9,1.8)$ e interpreta el resultado.

    b) Obtén $IMC_p(97.9,1.8)$ e interpreta el resultado.

20. Una fábrica que produce un tipo de mochilas en tres tamaños tiene costos totales mensuales dados por $C(x,y,z)=5000+54x+80y+115z$ donde x, y, z son las cantidades de mochilas chica, mediana y grande, respectivamente.

    a) Obtén $C(100,70,80)$ e interpreta el resultado.

    b) Obtén $C_x(100,70,80)$ e interpreta el resultado.

    c) Obtén $C_y(100,70,80)$ e interpreta el resultado.

    d) Obtén $C_z(100,70,80)$ e interpreta el resultado.

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 3.5

1. *a)* Cuando el tiempo transcurrido desde su compra se incrementa de 4 a 5 años, y el recorrido del kilometraje es de 36 000, el valor del automóvil disminuye $2300.

   b) Cuando el kilometraje recorrido se incrementa de 36 000 a 37 000 km y el tiempo transcurrido desde su compra es de 4 años, el valor del automóvil disminuye $500.

2. *a)* Cuando el número de copias tamaño carta se incrementa de 80 000 a 81 000, y el número de copias tamaño oficio es de 35 000, el ingreso mensual aumenta en $500.

   b) Cuando el número de copias tamaño oficio se incrementa de 35 000 a 36 000, y el número de copias tamaño carta es de 80 000, el ingreso mensual aumenta $750.

3. *a)* Cuando el número de garrafones vendidos se incrementa de 13 500 a 13 600, y el número de botellas vendidas de un litro es de 50 000, la utilidad mensual aumenta $800.

   b) Cuando el número de botellas vendidas de un litro se incrementa de 50 000 a 51000, y el número de garrafones vendidos es de 13 500, la utilidad mensual aumenta $2500.

4. *a)* Cuando la cantidad de aparatos reproductores de CD fabricados se incrementa de 35 000 a 36 000 y el número de trabajadores es de 20, el costo mensual aumenta $50 000.

   b) Cuando el número de trabajadores se incrementa de 20 a 21 y la cantidad fabricada de reproductores de CD es de 35 000, el costo mensual aumenta $4800.

5. *a)* Cuando los litros vendidos de gasolina Premium se incrementan de 10 000 a 11 000 y los litros vendidos de gasolina Magna son de 14 000, el ingreso semanal aumenta $7200.

   b) Cuando los litros vendidos de gasolina Magna se incrementan de 14 000 a 15 000 y los litros vendidos de gasolina Premium son 10 000, el ingreso semanal aumenta $6500.

6. *a)* Cuando las toneladas de acero que vende una empresa se incrementan de 20 a 21 toneladas y el número de trabajadores es de 200, la utilidad aumenta $6000.

   b) Cuando el número de trabajadores se incrementa de 200 a 300 y se venden 20 toneladas de acero, la utilidad disminuye $10 000.

7. *a)* Cuando los kilogramos de semilla utilizada en la siembra se incrementan de 100 a 200 kg y se tienen 5 hectáreas sembradas, la producción disminuye 20 toneladas de trigo.

   b) Cuando las hectáreas sembradas se incrementan de 5 a 6 y se utilizan 100 kg de semilla, la producción de trigo aumenta 30 toneladas.

8. *a)* Cuando el enganche se incrementa de $20 000 a $21 000 y el plazo es de 5 años, la mensualidad que se paga por la compra de un terreno disminuye $200.

   b) Cuando el plazo se incrementa de 5 a 6 años y el enganche es de $20 000, la mensualidad que se paga por la compra de un terreno disminuye $500.

9. *a)* Cuando los metros de tela utilizados se incrementan de 1500 a 1600, con 10 trabajadores y 8 horas trabajadas diariamente, el costo semanal aumenta $3000.

b) Cuando el número de trabajadores se incrementa de 10 a 11, con 1500 metros de tela utilizada y 8 horas de trabajo diario, los costos semanales aumentan \$750.

c) Cuando las horas de trabajo diario se incrementan de 8 a 9, con 1500 metros de tela utilizados y 10 trabajadores, los costos semanales aumentan \$156.

10. $Q_t(420,6)=-18.29$

Cuando el tiempo se incrementa de 6 a 7 meses y se tienen 420 gramos de sustancia radiactiva inicialmente, la masa de esta sustancia radiactiva disminuye 18.29 gramos.

11. $f_x(20,35)=555$

Cuando el número de escritorios de madera que se fabrican se incrementa de 2000 a 2100 y los escritorios metálicos fabricados son 3500, los ingresos aumentan \$55 500.

12. *a)* $S(10,3)=11.61834$

Cuando se invierten \$10 000 en una cuenta bancaria a 3 años el saldo es \$11 618.34

b) $S_b(10,3)=1.161834$

Cuando la cantidad invertida se incrementa de \$10 000 a \$11 000 con 3 años de inversión, el saldo aumenta \$1161.834.

c) $S_t(10,3)=0.580917$

Cuando el tiempo que dura la inversión se incrementa de 3 a 4 años y se invierten \$10 000 inicialmente, el saldo aumenta \$580.92.

13. *a)* $P(400,10)=379.47$

Cuando se tiene una inversión de capital de \$400 000 y 100 trabajadores en una fábrica, la producción diaria es de 37 947 unidades.

b) $P_k(400,10)=0.47$

Cuando la inversión de capital se incrementa de \$400 000 a \$401 000, teniendo 1000 trabajadores contratados, la producción aumenta 47 unidades.

c) $P_t(400,10)=18.97$

Cuando la cantidad de trabajadores se incrementa de 1000 a 1100, teniendo \$400 000 como inversión de capital, la producción aumenta 1897 unidades.

14. *a)* $I(17,2)=34$

Cuando el precio unitario de un artículo es \$1700 y se venden 2000 unidades, el ingreso es de \$34 000.

b) $I_p(17,2)=2$

Cuando el precio unitario de un artículo se incrementa de \$1700 a \$1800 y se venden 2000 unidades, el ingreso aumenta \$2000.

c) $I_q(17,2)=17$

Cuando las unidades vendidas se incrementan de 2000 a 3000, a un precio unitario de \$1700, el ingreso aumenta \$17 000.

15. *a)* $V(3,5)=218.5$

Cuando se anuncia cierto artículo 3 veces al día por radio y 5 veces por televisión, las ventas mensuales son de 21 850 unidades.

b) $V_r(3,5)=19.5$

Cuando la cantidad de anuncios diarios por radio se incrementan de 3 a 4 y se anuncia diariamente 5 veces por televisión, las ventas mensuales aumentan 1950 unidades.

c) $V_t(3,5)=37.4$

Cuando la cantidad de anuncios diarios por televisión se incrementan de 5 a 6 y se anuncia diariamente 3 veces por radio, las ventas mensuales aumentan 3740 unidades.

16. $U(x,y)=2.5x^2+xy+8y^2-52$

a) $U(16,8)=2.5(16)^2+(16)(8)+8(8)^2-52=1228$

Cuando se venden 1600 pelotas y 800 cuerdas de ejercicio aeróbico, las utilidades son de \$122 800.

b) $U_x(16,8)=88$

Cuando la cantidad vendida de pelotas aumenta de 1600 a 1700 y se venden 800 cuerdas de ejercicio aeróbico, las utilidades aumentan \$8800.

c) $U_y(16,8)=144$

Cuando la cantidad vendida de cuerdas de ejercicio aeróbico aumenta de 800 a 900 y se venden 1600 pelotas, las utilidades aumentan \$14 400.

17. *a)* $P(50,8)=195.438$

Cuando el número de trabajadores es de 50 y las jornadas de trabajo son de 8 hrs. diarias, la producción es de 195 438 unidades.

b) $P_t(50,8)=2.606$

Cuando el número de trabajadores aumenta de 50 a 51 y las jornadas de trabajo son de 8 hrs. diarias, la producción aumenta 2606 unidades.

c) $P_h(50,8)=8.14325$

Cuando las jornadas de trabajo se incrementan de 8 a 9 hrs.diarias y se tienen 50 trabajadores, la producción aumenta 8144 unidades.

18. *a)* $I(3,1.9)=12.88156733$

Cuando el precio del boleto de primera clase es de \$3000 y el precio del boleto de clase turista es de \$1900, el ingreso de la línea aérea es de \$12 881 567.33

b) $I_p(3,1.9)=2.86257052$

Cuando el precio del boleto de primera clase aumenta de \$3000 a \$4000 y el precio del boleto de clase turista es de \$1900, los ingresos de la línea aérea aumentan \$2 862 570.52

c) $I_t(3,1.9)=2.25992409$

Cuando el precio del boleto de clase turista aumenta de \$1900 a \$2900 y el precio del boleto de primera clase es de \$3000, los ingresos de la línea aérea aumentan \$2 259 924.09.

19. *a)* $IMC(97.9, 1.8) = 30.21$

    Si el peso de una persona es de 97.9 kg y tiene una estatura de 1.8 metros, el índice de masa corporal es de 30.21.

    b) $IMC_p(97.9, 1.8) = 0.3086$

    Cuando el peso aumenta de 97.9 a 98.9 kg y tiene una estatura de 1.8 metros, el índice de masa corporal aumenta 0.3086.

20. *a)* $C(100, 70, 80) = 25,200$

    Cuando se producen 100 mochilas chicas, 70 mochilas medianas y 80 mochilas grandes, los costos son de $25 200.

    b) $C_x(100, 70, 80) = 54$

    Cuando la producción de mochilas chicas aumenta de 100 a 101, y se producen 70 mochilas medianas y 80 mochilas grandes, los costos aumentan $54.

    c) $C_y(100, 70, 80) = 80$

    Cuando la producción de mochilas medianas aumenta de 70 a 71, y se producen 100 mochilas chicas y 80 mochilas grandes, los costos aumentan $80.

    d) $C_z(100, 70, 80) = 115$

    Cuando la producción de mochilas grandes aumenta de 80 a 81, y se producen 100 mochilas chicas y 70 mochilas medianas, los costos aumentan $115.

3.6 MÁXIMOS Y MÍNIMOS PARA UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Extremos locales

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables definida sobre una región que contiene al punto (a, b).

El número $f(a, b)$ es un **máximo local** de la función f si existe una región circular R con centro en (a, b) tal que todo punto (x, y) dentro de la región R cumple con la relación $f(x, y) \leq f(a, b)$.

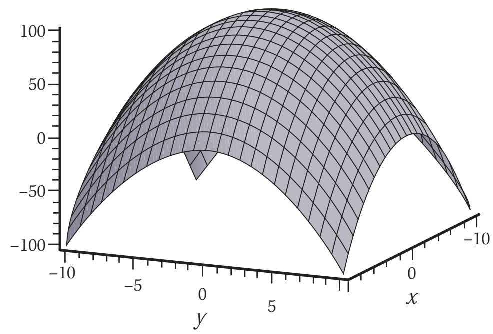


Figura 1. Máximo local

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables definida sobre una región que contiene al punto (a, b). El número $f(a, b)$ es un **mínimo local** de la función f si existe una región circular R con centro en (a, b) tal que todo punto (x, y) dentro de la región R cumple con la relación $f(x, y) \geq f(a, b)$.

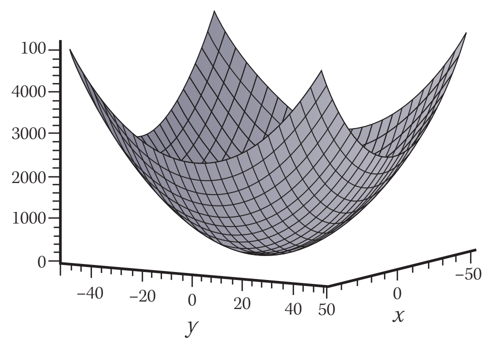


Figura 2. Mínimo local

Las funciones en general pueden tener a la vez máximos y mínimos locales.

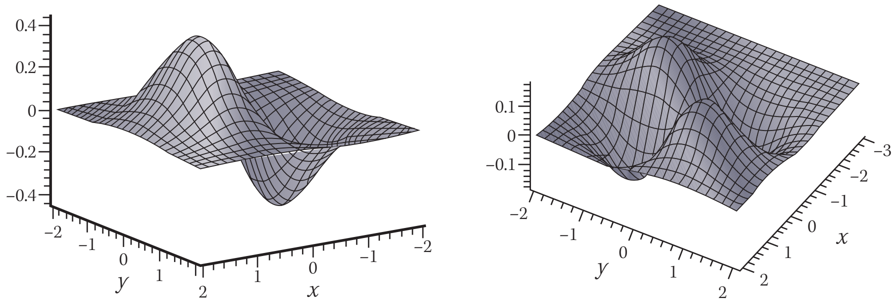


Figura 3. Máximos y mínimos locales en una función

Nota: A los valores máximo y mínimo locales también se les conocen con el nombre de *máximo relativo* y *mínimo relativo* respectivamente.

Recuerda que una función de una variable solo podía tomar valores máximos o mínimos locales en los puntos críticos; lo mismo ocurre con las funciones de dos variables, por lo que se da a continuación la siguiente definición.

Se dice que el punto (a, b) es un **punto crítico** de una función f de dos variables, si cumple las siguientes condiciones:

1. el punto (a, b) está en el dominio de la función f;
2. en el punto (a, b), las primeras derivadas parciales de la función valen cero $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, o bien, no existen.

Si una función de dos variables toma valores máximos y/o mínimos locales, estos siempre ocurren en los puntos críticos; sin embargo, esta implicación no es válida a la inversa, es decir, en un punto crítico *no siempre* ocurre un máximo o mínimo local.

Por ejemplo: observa la siguiente figura. En el punto $(0, 0)$ las dos derivadas parciales valen cero, lo que significa que $(0, 0)$ es un punto crítico; sin embargo, en el punto $(0, 0)$ la función no toma un valor máximo ni mínimo.

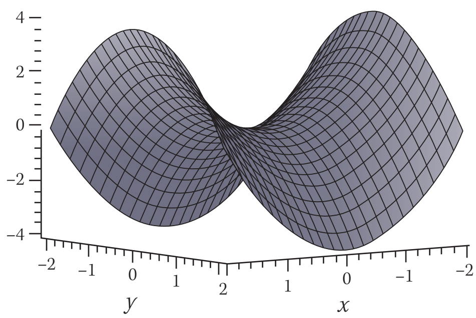


Figura 4. Punto crítico

Para encontrar los valores máximos o mínimos locales, se encuentran primero los puntos críticos de la función, donde las primeras derivadas parciales valen cero; luego para determinar si en ellos ocurre un valor máximo o mínimo, se aplica el siguiente criterio:

Criterio de segunda derivada

Este criterio nos habla de una función D (determinante) que se obtiene de una matriz llamada *Hessiana* formada por todas las posibles segundas derivadas parciales para la función de des variables $f(x, y)$.

Es decir, la matriz Hessiana está formada así: $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$. Si calculamos el determinante de esta matriz, obtenemos: $D = f_{xx} \bullet f_{yy} - f_{xy} \bullet f_{yx}$, dado que en funciones continuas $f_{xy} = f_{yx}$, entonces podemos escribir la función determinante como: $D = f_{xx} \bullet f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2$. A esta función se le llama más comúnmente *función discriminante*, al sustituir el punto crítico en esta función D obtenemos como resultado un número; dependiendo del resultado obtenido damos la conclusión con respecto al punto crítico. Veamos lo que indica el *Criterio de Segunda Derivada*.

Criterio de Segunda Derivada para determinar los puntos en donde ocurren los valores máximos y mínimos locales de una función de dos variables.

Sea la función determinante D definida como: $D = f_{xx} \bullet f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2$ y sea (a, b) un punto crítico de la función $f(x, y)$, en donde las primeras derivadas parciales valen cero, entonces:

1. Si $D(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0 \Rightarrow$ en el punto (a, b) la función tiene un valor *mínimo*.
2. Si $D(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0 \Rightarrow$ en el punto (a, b) la función tiene un valor *máximo*.
3. Si $D(a, b) < 0 \Rightarrow$ en el punto (a, b) la función NO tiene ni *máximo* ni *mínimo*; a este se le llama *punto silla*. (Se le llama así pues alrededor del punto crítico la gráfica tiene forma de silla de montar.) Observa la siguiente ilustración.
4. Si $D(a, b) = 0 \Rightarrow$ no podemos tener ninguna conclusión con respecto al punto (a, b).

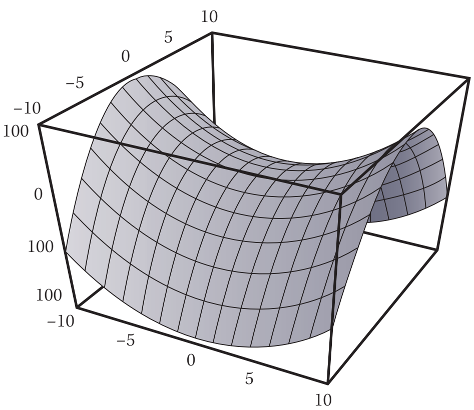


Figura 5. Paraboloide hiperbólico o “silla de montar”

Nota: Observa que el criterio anterior no analiza los puntos críticos en donde las primeras derivadas parciales no existen; para estos puntos se hace otro tipo de análisis, el cual no está contemplado en nuestro curso.

Ejemplo 1

Calcula los puntos críticos de la siguiente función y utiliza el criterio de segunda derivada para clasificarlos como máximo, mínimo o punto silla.

$$f(x,y)=x^2+3xy-\frac{3}{2}y^2-x-2y$$

Solución

Paso 1. Obtener los puntos críticos, derivando parcialmente la función con respecto a cada una de las variables, igualando a cero dichas derivadas parciales y resolviendo el sistema de ecuaciones que queda planteado:

$$\begin{cases} f_x: 2x+3y-1=0 \\ f_y: 3x-3y-2=0 \end{cases}$$

Seleccionamos alguno de los métodos que aprendimos en nuestros cursos de álgebra: suma o resta, sustitución e igualación para resolver el sistema obtenido.

Veamos **suma o resta**, este método se utiliza si observamos que al sumar o restar las dos ecuaciones, es posible cancelar alguna de las variables. Observa que al sumar las dos ecuaciones directamente se cancela la variable y, obten como resultado de la suma una ecuación con una sola incógnita (en este caso x) que ya es fácil de resolver. Al sumar las ecuaciones obtenemos:

$$\begin{array}{r} 2x+\cancel{3y}=1 \\ 3x-\cancel{3y}=2 \\ \hline \end{array}$$

$5x + 0 = 3$ es decir, nos queda la ecuación $5x = 3$; despejando obtenemos que $x=\frac{3}{5}$.

Para obtener el valor de y tenemos que sustituir el valor de x en cualquiera de las 2 ecuaciones del sistema y despejar. Si lo sustituimos en la primera ecuación tenemos que:

$2\left(\frac{3}{5}\right)+3y=1$ despejando y, tenemos que $3y=1-\frac{6}{5}$, entonces $y=\frac{-\frac{1}{5}}{3}=-\frac{1}{15}$.

Finalmente, la solución del sistema es $x=\frac{3}{5}$ y $y=\frac{-1}{15}$; este es el punto crítico y representa el posible valor máximo o mínimo de la función.

Paso 2. Utilizamos el criterio de la segunda derivada para clasificar al punto crítico como máximo, mínimo o punto silla.

a) Plantemos la función Discriminante $D=f_{xx}\bullet f_{yy}-\left(f_{xy}\right)^2$.

Obtenemos $D = 2\,(-3) - (3)^2$ simplificamos y tenemos que $D = -6 - 9 = -15$.

b) Sustituimos el punto crítico en la función Discriminante para ver el resultado y de acuerdo con el criterio de la segunda derivada indicar qué es el punto crítico.

Evaluamos $D\left(\frac{3}{5},\frac{-1}{15}\right)=-15$ observa que el valor de "D" no cambia porque no tiene x ni y para sustituir el punto crítico.

c) Llegamos a una conclusión.

Como $D<0$, concluimos de acuerdo con la regla 3 del criterio de la segunda derivada, el punto crítico es un punto silla de la función, es decir, la gráfica de la función alrededor de ese punto toma la forma de silla de montar.

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Obtén los puntos críticos de la función y, aplicando el criterio de segunda derivada, clasifícalos como máximo, mínimo o punto silla.

$$f(x,y)=2xy-x^2+6y-10x-2y^2$$

Solución

Paso 1. Obtener los puntos críticos.

$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$$

Punto(s) crítico(s) ______________________________.

Paso 2. Plantear la función discriminante.

$$D=f_{xx}\,f_{yy}-\left[f_{xy}\right]^2$$

$D=$ ______________________________.

Paso 3. Clasificar los puntos críticos de acuerdo con el criterio de la segunda derivada y dar la conclusión (es máximo, mínimo o punto silla).

PUNTO CRÍTICO	EVALUAR EL DISCRIMINANTE EN EL PUNTO CRÍTICO	SIGNO DEL DISCRIMINANTE	EVALUAR f_{xx} EN EL PUNTO CRÍTICO	SIGNO DE f_{xx}	CONCLUSIÓN

¡A trabajar!

EJERCICIO 2

Obtén los puntos críticos de la función y, aplicando el criterio de segunda derivada, clasifícalos como máximo, mínimo o punto silla.

$$f(x,y)=xy-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$$

Solución

Paso 1. Obtener los puntos críticos

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

Punto(s) crítico(s) ______________________________.

Paso 2. Plantear la función discriminante.

$$D = f_{xx}\, f_{yy} - \left[f_{xy}\right]^2$$

$D =$ ______________________________.

Paso 3. Clasificar los puntos críticos de acuerdo con el criterio de la segunda derivada y dar la conclusión (es máximo, mínimo o punto silla).

PUNTO CRÍTICO	EVALUAR EL DISCRIMINANTE EN EL PUNTO CRÍTICO	SIGNO DEL DISCRIMINANTE	EVALUAR f_{xx} EN EL PUNTO CRÍTICO	SIGNO DE f_{xx}	CONCLUSIÓN

¡A trabajar!

EJERCICIO 3

Obtén los puntos críticos de la función y, aplicando el criterio de segunda derivada, clasifícalos como máximo, mínimo o punto silla.

$$f(x,y)=x^3+y^2-2xy+7x-8y+20$$

Solución

Paso 1. Obtener los puntos críticos.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

Punto(s) crítico(s) ________________________________.

Paso 2. Plantear la función discriminante.

$$D = f_{xx}\, f_{yy} - \left[f_{xy}\right]^2$$

$D =$ ________________________________.

Paso 3. Clasificar los puntos críticos de acuerdo con el criterio de la segunda derivada y dar la conclusión (es máximo, mínimo o punto silla).

PUNTO CRÍTICO	EVALUAR EL DISCRIMINANTE EN EL PUNTO CRÍTICO	SIGNO DEL DISCRIMINANTE	EVALUAR f_{xx} EN EL PUNTO CRÍTICO	SIGNO DE f_{xx}	CONCLUSIÓN

¡A trabajar!

EJERCICIO 4

Obtén los puntos críticos de la función y, aplicando el criterio de segunda derivada, clasifícalos como máximo, mínimo o punto silla.

$$f(x,y)=x^3+y^3-3xy+1$$

Solución

Paso 1. Obtener los puntos críticos.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

Punto(s) crítico(s) ______________________________.

Paso 2. Plantear la función discriminante.

$$D = f_{xx}\,f_{yy} - \left[f_{xy}\right]^2$$

$D =$ ______________________________.

Paso 3. Clasificar los puntos críticos de acuerdo con el criterio de la segunda derivada y dar la conclusión (es máximo, mínimo o punto silla).

PUNTO CRÍTICO	EVALUAR EL DISCRIMINANTE EN EL PUNTO CRÍTICO	SIGNO DEL DISCRIMINANTE	EVALUAR f_{xx} EN EL PUNTO CRÍTICO	SIGNO DE f_{xx}	CONCLUSIÓN

Aplicaciones de máximos y mínimos

Nota: En los problemas de aplicación de máximos y mínimos la diferencia es que no se da la función: debemos de plantearla, una vez hecho esto el proceso para obtener el máximo o el mínimo es el mismo que en los ejercicios anteriores.

El tipo de funciones que utilizaremos son, entre otras, las que aprendimos en el primer curso de Cálculo: Función Costo Total, Función Ingreso y Función Utilidad, en donde buscaremos los niveles de producción que maximizan los ingresos o las ganancias, así como niveles de producción que minimizan los costos totales.

¡A trabajar!

EJERCICIO 5

Una empresa puede vender sus productos tanto en Chile como en Argentina, y el precio de venta de cada producto está dado por: en Chile $P_{Ch} = 100 - 2Q_{Ch}$ y en, Argentina, por $P_A = 100 - Q_A$. El costo total de producción está dado por $C(Q_{Ch}, Q_A) = 50(Q_{Ch} + Q_A) + \frac{1}{2}(Q_{Ch} + Q_A)^2$, donde Q_{Ch} es la cantidad vendida en Chile y Q_A es la cantidad vendida en Argentina.

¿Cuántos productos deben venderse en cada país para que permitan maximizar la utilidad?

Solución

a) ¿Cómo se obtiene la función de ingreso? ____________________

b) ¿Cómo se obtiene la función de utilidad? ____________________

c) ¿Cuál es la derivada parcial de U_{Ch}? ____________________

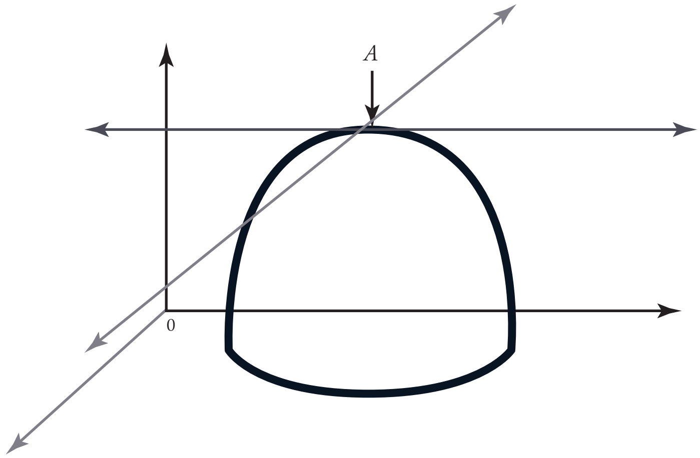
d) ¿Cuál es la derivada parcial de U_A? ____________________

e) ¿Cómo se obtiene el punto crítico? ____________________

Obtén los puntos críticos.

f) ¿Cómo puedes saber si es un máximo?

g) Ubica las variables en los ejes así como los resultados que obtuviste.



h) Escribe tus resultados en términos del contexto.

____

____

____.

¡A trabajar!

EJERCICIO 6

El ingreso total mensual de una empresa que vende y produce cámaras digitales está dado por la función $I(c,n) = -0.005c^2 - 0.003n^2 - 0.002cn + 2c + 15n$, medido en cientos de pesos, donde c representa la cantidad de cámaras digitales en colores vivos y n representa la cantidad de cámaras de color neutral.

El costo mensual está dado por $C(c,n) = 6c + 3n + 200$, también medido en cientos de pesos. Determina cuántas cámaras de colores vivos y cuántas de color neutral deben venderse para maximizar la utilidad.

Solución

a) ¿Qué función vas a optimizar? ______________ ¿La tienes? __________.

b) ¿Cómo se obtiene la función utilidad? ______________________.

Plantea la función:

i Obtén las derivadas parciales de U_c y U_n.

____

____

____

d) ¿Cómo se obtiene el punto crítico? _______________________________________.

Obtén los puntos críticos.

e) ¿Cómo puedes saber si es un máximo? _______________________________________.

Compruébalo.

f) Escribe tus resultados en términos del contexto:

____

____

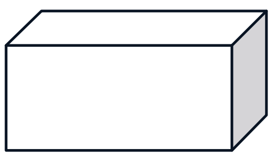
____.

¡A trabajar!

EJERCICIO 7

Se desea construir una caja rectangular sin tapa que contenga un volumen de 24 m^2; el costo por m^2 de material es de \$4.00 para el fondo, \$3.00 para el frente y para la parte de atrás y \$2.00 para los otros dos lados. Encuentra las dimensiones de la caja para que el costo de los materiales sea mínimo.

Solución



¿Para que función te piden obtener el mínimo? _______________________________________.

¿Cómo debes plantear esa función? ____

Plantéala.

Nota: Observa que la función Costos tiene tres variables y el criterio de segunda derivada es solamente para funciones de dos variables, así que lo primero que debes hacer es que la función Costos esté expresada con dos variables. ¿Cómo podemos hacerlo? ____

Simplifica la función y efectúa los pasos necesarios para obtener el mínimo.

Describe los pasos que vas a llevar a cabo para obtener el punto mínimo:

1. ____
____.
2. ____
____.
3. ____
____.

Después de la reflexión, en el espacio de abajo efectúa los pasos para obtener el punto mínimo.

Nota: En esta situación la caja debe encerrar un volumen de 6 m^2, NO puede ser cualquier volumen; en estos casos se dice que *la función tiene una restricción* en sus variables. Para resolver este tipo de situaciones existe un método especial llamado *multiplicadores de Lagrange*, el cual lo veremos en la siguiente sección.

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.6

Instrucciones: En los problemas 1-20 obtén los puntos críticos y utiliza el criterio de la segunda derivada para clasificarlos.

1. $f(x,y)=x^2+3y^2-6x+9y-27$
2. $f(x,y)=4x^2-y^2+2x+5y+7$
3. $f(x,y)=5x^3+3y^3-4y-60x^2-1/2$
4. $f(x,y)=x^3-y^3-x^2+12y$
5. $f(x,y)=2xy+5x^2+3y^2-12x-3y-4$
6. $f(x,y)=33y-8y^2+24x-12x^2+20xy-1$
7. $f(x,y)=x^2+8xy+y^2-5y$
8. $f(x,y)=3x^2+y^2-4xy+8x-4y+32$
9. $f(x,y)=5x^3+15xy-y^2-20y-10x$
10. $f(x,y)=y^3+xy+5x^2-8x-4y$
11. $f(x,y)=-2xy+3y^3-x^2+5y+11x$
12. $f(x,y)=2x^2-y^2+\frac{1}{3}x^3-8y+2-2xy$
13. $f(x,y)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x+\frac{1}{3}y^3-y+6$
14. $f(x,y)=2x^3-6x^2+2y^3-3y^2-12y$
15. $f(x,y)=x^3+y^3-6xy-8$
16. $f(x,y)=2x^3+\frac{1}{3}y^3+x^2-2y-\frac{1}{2}y^2-8x-1$
17. $f(x,y)=5xy-\frac{3}{x}+\frac{1}{y}$
18. $f(x,y)=\frac{4}{x^2}-\frac{12}{y^3}+xy$
19. $f(x,y)=e^y x^2-9e^y-x^2+9$
20. $f(x,y)=\frac{6}{x^3}-\frac{1}{y}+3xy$

Resuelve los siguientes problemas de aplicación de máximos y mínimos

21. Una compañía opera 2 plantas que producen el mismo artículo y cuyas funciones de costo total son $C_1 = 120 + 0.35x^2$, $C_2 = 100 + 0.48y^2$, donde x y y son las cantidades producidas por cada planta, respectivamente. La cantidad total demandada es $x + y$ al precio de $300 - 0.25x - 0.25y$ pesos.

    a) ¿Cuánto debe producir cada planta para lograr que sea máxima la utilidad de la compañía?

    b) ¿Cuál es esa utilidad máxima?

    c) ¿A qué precio se vendería para esa utilidad máxima?

22. Una compañía tiene 2 tipos de máquinas (A y B) para producir un cierto artículo; el costo de producir en la máquina A es $C_A = 120 + \frac{1}{6}x^2 - 90x$ y el costo de producir en la máquina B es $C_B = 80 + \frac{1}{8}y^2 - 80y$, donde x y y son las unidades producidas en las máquinas A y B, respectivamente. Si el precio de venta del artículo es \$20.00:

    a) ¿Cuántas unidades se deben producir en cada máquina para obtener una utilidad máxima?

    b) ¿Cuál es esta utilidad máxima?

23. La producción de una maquiladora está dada por $p = -1.5x^2 - 6y^2 + 45x + 144y + 1801.5$ donde x y y son las horas diarias que operan las máquinas A y B, respectivamente.

    a) ¿Cuántas horas debe operar cada máquina para que la maquiladora tenga la máxima producción?

    b) ¿Cuál es la máxima producción?

24. Una compañía que tiene una planta en Monterrey y otra en Guadalajara tiene una producción total dada por $P = -x^2 - 12y^2 + 3x + 1.5y + 6xy + 30$ donde x y y son las miles de unidades producidas en Monterrey y Guadalajara, respectivamente.

    a) ¿Cuántas unidades debe producir en cada planta para que la compañía obtenga la producción máxima?

    b) ¿Cuál es esa producción máxima?

25. Una tienda de artículos computacionales vende dos tipos de tarjetas de red inalámbricas A y B, cuyos precios están dados por $P_A = \left(-\frac{x^2}{3} - \frac{5}{2}x + 6\right)120$ y $P_B = (-y + 8)120$, donde x y y son los cientos de unidades vendidas de las tarjetas A y B respectivamente.

    a) Obtener el número de tarjetas de cada tipo que debe vender para lograr un ingreso máximo.

    b) ¿Cuál es ese máximo ingreso?

    c) ¿Cuál es el precio al que se debe vender cada tipo de tarjeta para que el ingreso sea máximo?

26. Una tienda departamental vende abanicos de techo (x) y aparatos de aire acondicionado (y)

en $P_1 = 5y - 4x - 320$ y $P_2 = 1576 - 8y + 3x$, respectivamente.

a) ¿Cuántas unidades de cada producto se deben vender para obtener un ingreso máximo?

b) ¿Cuál es el ingreso máximo?

27. Los costos de producción de un artículo de plata en dos fábricas están dados por $C=\frac{5}{2}x^2-xy-650x+3y^2-1320y+500{,}000$ donde, x y y son las unidades producidas por cada fábrica.

a) ¿Cuántas unidades se deben producir en cada fábrica para obtener un costo mínimo?

b) ¿Cuál es el costo mínimo?

28. La ecuación de contaminación del ambiente está dada por $C=\frac{1}{2}x^2+18x+\frac{2}{3}y^3-1186y-2xy$, donde x y y son las cantidades en miligramos de dos sustancias tóxicas en el ambiente. Obtén la cantidad de cada sustancia tóxica que debe haber en el ambiente para tener una contaminación mínima.

29. Se desea construir una bodega que tenga una capacidad de 5000 m^2, el costo de las paredes es de \$800 por m^2, el del piso es de \$1200 por m^2 y del techo \$2500 por m^2. Encuentra las dimensiones de la bodega para que el costo de los materiales sea mínimo.

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 1.1

1. $\left(3,\frac{-3}{2}\right)$ es un mínimo.
2. $\left(-\frac{1}{4},\frac{5}{2}\right)$ es un punto silla.
3. $\left(0,\frac{2}{3}\right)$ es un punto silla, $\left(0,-\frac{2}{3}\right)$ es un máximo, $\left(8,\frac{2}{3}\right)$ es un mínimo, $\left(8,-\frac{2}{3}\right)$ es un punto silla.
4. $(0, 2)$ es un máximo, $(0, -2)$ es un punto silla, $\left(\frac{2}{3},2\right)$ es un punto silla, $\left(\frac{2}{3},-2\right)$ es un mínimo.
5. $\left(\frac{33}{28},\frac{3}{28}\right)$ es un mínimo.
6. $(-65.25, -79.5)$ es punto silla.
7. $\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{6}\right)$ es punto silla.
8. $(0, 2)$ es punto silla.

9. $(-8.7228, -75.4213)$ es un máximo, $(1.2228, -0.8287)$ es punto silla.
10. $(0.9016, -1.0163)$ es punto silla, $(0.695, 1.0496)$ es un mínimo.
11. $(6.4351, -0.9351)$ es un máximo, $(4.7871, 0.7129)$ es un punto silla.
12. $(-4, 0)$ es un máximo, $(-2, -2)$ es un punto silla.
13. (2,-1) es un máximo, $(2, 1)$ es un punto silla, $(3, -1)$ es un punto silla, $(3, 1)$ es un mínimo.
14. (0. -1) es un máximo, $(0, 2)$ es un punto silla, $(2, -1)$ es un punto silla, $(2, 2)$ es un mínimo.
15. $(0, 0)$ es punto silla, $(2, 2)$ es un mínimo.
16. $\left(-\frac{4}{3},-1\right)$ es un máximo, $\left(-\frac{4}{3},2\right)$ es un punto silla, $(1, -1)$ es punto silla $(1, 2)$ es un mínimo.
17. $(1.2164, -0.4055)$ es un máximo.
18. $(-1.5379, -2.1996)$ es un mínimo.
19. $(-3, 0)$ es un punto silla, $(3, 0)$ es un punto silla.
20. $(-1.952, 0.4132)$ es un máximo.
21. *a)* $x = 192, y = 140$;

    b) \$93,750;

    c) \$217.
22. *a)* $x = 330, y = 400$;

    b) \$37950.
23. *a)* $x = 15, y = 12$;

    b) 3003 unidades.
24. *a)* $x = 2250, y = 1250$;

    b) 18,188 unidades.
25. *a)* $x = 100, y = 400$;

    b) \$230,000;

    c) $p_A = \$380$, $p_B = \$480$.
26. *a)* $x = 511, y = 157$;

    b) \$104,996.
27. *a)* $x = 180, y = 250$;

    b) \$276,500.
28. $x = 32$ mg, $y = 25$ mg
29. base de 12.93 por 12.93 m. Altura de 28.90 m.

3.7 MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Muchos problemas de optimización, quizá la mayoría, están restringidos por circunstancias externas. Por ejemplo, la producción de una firma está restringida por su presupuesto; una ciudad que desea construir un nuevo parque de diversiones tiene una cantidad limitada del dinero de los impuestos para gastar en el proyecto; en una universidad, para impartir un curso de cálculo, este debe cumplir con una cierta cantidad de estudiantes inscritos, etcétera.

En casos como los anteriores, cuando se desea optimizar una función que está restringida a cumplir con ciertas condiciones, es de esperarse que los valores máximos o mínimos condicionados no coincidan, necesariamente, con los valores máximos o mínimos de la función. Utilizaremos un argumento geométrico para explicar lo anterior.

Interpretación geométrica

Para interpretar geométricamente el proceso de optimización de una función de dos variables, sujeta a una restricción, piensa en la función a optimizar y en la función de restricción como dos superficies en el espacio de tres dimensiones; entonces, para hallar el máximo o mínimo de la función que cumpla con la restricción dada, es necesario restringir la atención a la porción de la superficie que se intersecta con la función de restricción. El punto más alto de esta porción de la superficie será el máximo condicionado, y el punto más bajo será el mínimo condicionado.

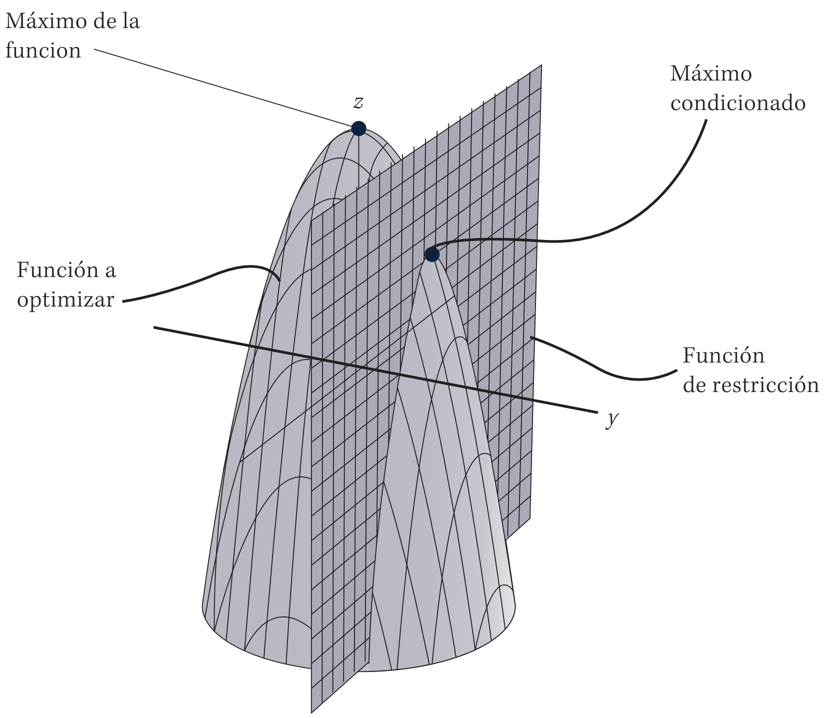
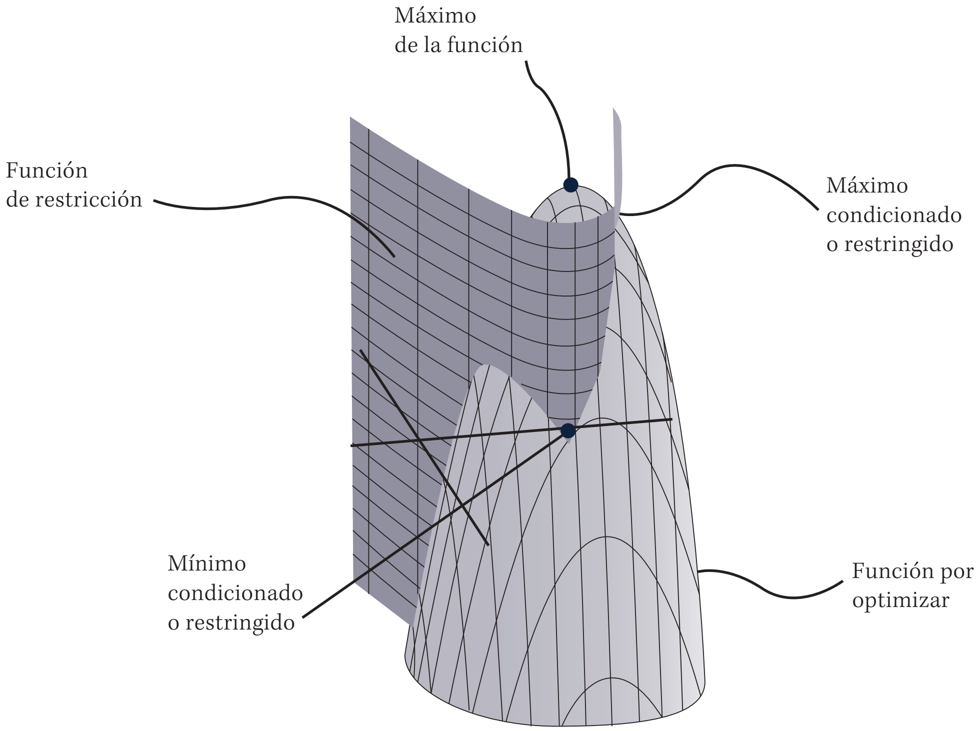
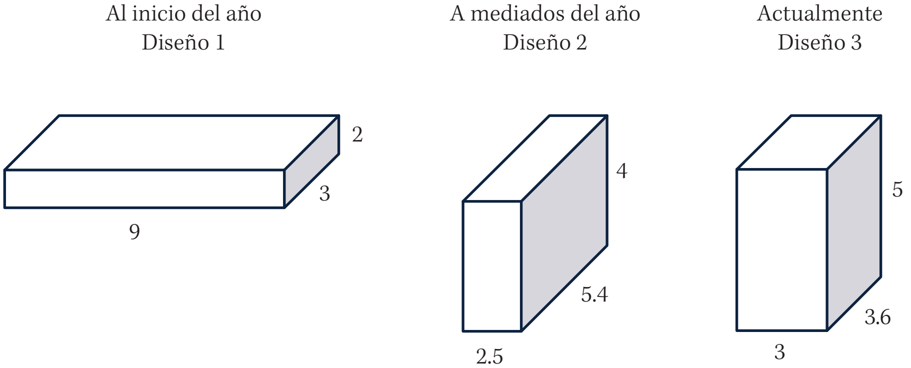


Figura 1. Interpretación geométrica de una función de dos variables



¡Reflexiona!

Una compañía fabrica cajas de todo tipo y te ha solicitado ayuda para minimizar los costos de fabricación de una caja rectangular con tapa que tiene un volumen de 54 cm^3. La especificación del volumen no puede ser cambiada ya que es un requerimiento de uno de los clientes más importantes de la compañía. El material para el fondo y la tapa de dicha caja es más resistente que el de los lados, por lo que el costo para el fondo y la tapa es de \$2.00 por cm^2, mientras que el de los lados cuesta \$1.00 por cm^2. Durante este año, ellos han cambiado las dimensiones de la caja, con el propósito de minimizar los costos; en la siguiente figura aparecen las dimensiones (en centímetros) de las cajas que han fabricado.



¿Todas las cajas cumplen el volumen de 54 cm^3, requeridos por el cliente de Sukaja? ____________

¿Cuál es el costo de fabricar la caja 1? ____________________

¿Cuál es el costo de fabricar la caja 2? ____________________

¿Cuál es el costo de fabricar la caja 3? ____________________

Los costos de fabricación ¿han ido aumentando o disminuyendo? ____________________

¿Puedes asegurar que el costo actual de fabricación es el mínimo? ____________________

¿Por qué? ____________________.

En la situación anterior la caja debe contener un volumen de 54 cm^3, *no* puede ser cualquier volumen; sin embargo, se quiere que el costo de fabricación sea mínimo; en casos como este, se dice que *la función a optimizar tiene una restricción*.

Para resolver este tipo de problemas, a veces se puede despejar de la ecuación de restricción una de las variables, la cual se sustituye en la función que se desea optimizar y se utiliza el criterio de la segunda derivada, visto en la sección anterior; sin embargo, hay muchas situaciones en las que despejar una variable se vuelve complicado, por lo que existe un método llamado *multiplicadores de Lagrange*, que a continuación describiremos.

La descripción de dicho método se hará para una función de dos variables sujeta a una restricción; sin embargo, este método es generalizable para funciones con cualquier número de variables sujetas a una o más restricciones.

Multiplicadores de Lagrange

Suponga que se desea optimizar la función $f(x, y)$ sujeta a la restricción $g(x, y) = 0$.

La función $f(x, y)$ recibe el nombre de *función objetivo*.

Paso 1. Se construye una función auxiliar “F” (llamada *lagrangeana* o *función de Lagrange*) formada por la diferencia entre la función objetivo y L veces la restricción, es decir:

$$F(x,y,L)=\underbrace{f(x,y)}_{\substack{\text{función}\\ \text{objetivo}}} - \underset{\substack{\uparrow\\ \text{multiplicador}\\ \text{de Lagrange}}}{L}\;\overbrace{g(x,y)}^{\text{restricción}}$$

Observa que el multiplicador de Lagrange es una variable adicional de la función auxiliar F.

Paso 2. Encontrar las primeras derivadas parciales de la función lagrangeana, es decir:

$$F_x(x,y,L), \qquad F_y(x,y,L) \qquad y \qquad F_L(x,y,L)$$

Paso 3. Igualar a cero cada una de las derivadas parciales obtenidas en el punto anterior y resolver el sistema de ecuaciones que resulte, es decir, encontrar los valores de las incógnitas x, y y L que satisfacen el siguiente sistema:

$$F_x(x,y,L)=0$$
$$F_y(x,y,L)=0$$
$$F_L(x,y,L)=0$$

Para resolver el sistema resultante, se pueden utilizar cualquiera de los métodos algebraicos conocidos (suma y resta, igualación o sustitución); el método que se utilice dependerá del sistema que se obtenga. Independientemente del método de solución que se utilice, se sugiere que en primer lugar se elimine el multiplicador con el propósito de simplificar el sistema.

Es importante aclarar que el método de los multiplicadores de Lagrange únicamente nos permite *encontrar los puntos críticos* de una función que está sujeta a una o más restricciones; *no* podemos determinar si son máximos, mínimos o puntos silla; sin embargo, el siguiente razonamiento es válido: Si la función objetivo $f(x,y)$ tiene un máximo o un mínimo global restringido, entonces este debe ocurrir en una de las soluciones del sistema anterior.

Este razonamiento nos permitirá, en algunos casos, poder determinar si los puntos críticos pueden ser máximos o mínimos restringidos.

Ejemplo 1

Encontrar los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y)=x^2y$, sujeta a la restricción $x+y=3$.

Solución

Paso 1. Construir la función lagrangeana.

Para construir la función lagrangeana se deben identificar la función objetivo (es decir, la función que se desea optimizar) y la ecuación de la restricción (que debe estar igualada a cero).

En este ejemplo es claro que la función objetivo es $f(x,y)=x^2y$ y la restricción es $x+y-3=0$; por lo que la función lagrangeana será: $F(x,y,L)=x^2y-L(x+y-3)$.

Paso 2. Obtener las primeras derivadas parciales de la función lagrangeana.

$F_x=2xy-L \qquad F_y=x^2-L \qquad F_L=-(x+y-3)$

Paso 3. Se igualan a cero cada una de las derivadas parciales obtenidas y se resuelve el sistema:

$2xy-L=0$ ec. (1)

$x^2-L=0$ ec. (2)

$x+y-3=0$ ec. (3)

Para resolver este sistema, utilizaremos el método de igualación para eliminar el multiplicador L y de esta forma obtener un sistema más sencillo.

De las ecuaciones (1) y (2) se despeja L, se igualan los resultados y se obtiene la ecuación $2xy=x^2$ que es equivalente a $2xy-x^2=0$. Si sacamos a x como factor común la ecuación anterior, queda $x(2y-x)=0$, de donde se puede concluir que $x=0$ o bien $x=2y$.

Ahora hay que analizar por separado cada una de los valores de x obtenidos.

Sustituyendo $x = 0$ en la ecuación (3) se obtiene que $0 + y - 3 = 0$; al despejar la variable y nos queda que $y = 3$, de donde concluimos que si $x = 0$, entonces $y = 3$. Por tanto, podemos decir que (0,3) es un punto crítico.

Luego, sustituyendo $x = 2y$ en la ecuación (3) se obtiene que $2y + y - 3 = 0$; al simplificar la ecuación y despejar la variable y nos queda que $y = 1$.

Por último, se sustituye $y = 1$ en $x = 2y$ y se obtiene que $x = 2$. Por tanto, el punto (2,1) es otro punto crítico.

Nota: Cuando se aplica el método de multiplicadores de Lagrange, si al resolver el sistema se obtienen varios puntos críticos, entonces se evalúa la *función objetivo* en cada uno de los puntos críticos; y se concluirá que en el punto crítico en donde la función objetivo tome el valor más alto será el valor máximo condicionado y en donde tome el valor más bajo será el valor mínimo condicionado.

En este ejemplo, la función objetivo es $f(x, y) = x^2y$; al evaluarla en los puntos críticos se obtiene $f(0, 3) = 0$ y $f(2, 1) = 4$, por lo que se concluye que el valor mínimo condicionado es 0 y que este ocurre en (0,3). De igual forma el valor máximo condicionado es 4 y ocurre en el punto (2,1).

Ejemplo 2

Encuentra los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y,z)=2x+y+4z$, sujeta a la restricción $x^2+y+z^2=16$.

Solución

Paso 1. Construir la función lagrangeana.

Identificamos primero la función objetivo y la ecuación de restricción; recuerda que esta última debe estar igualada a cero.

Función objetivo: $f(x,y,z)=2x+y+4z$ restricción: $x^2+y+z^2-16=0$

Función lagrangeana: $F(x,y,z,L)=2x+y+4z-L(x^2+y+z^2-16)$

Paso 2. Obtener las primeras derivadas parciales de la función lagrangeana.

$$F_x=2-2xL \qquad F_y=1-L \qquad F_z=4-2zL \qquad F_L=x^2+y+z^2-16$$

Paso 3. Se igualan a cero cada una de las derivadas parciales obtenidas y se resuelve el sistema.

$$2-2xL=0 \qquad \text{ec (1)}$$
$$1-L=0 \qquad \text{ec (2)}$$
$$4-2zL=0 \qquad \text{ec (3)}$$
$$x^2+y+z^2-16=0 \qquad \text{ec (4)}$$

Para resolver este sistema utilizaremos el método de sustitución.

De la ecuación (2) se obtiene que $L = 1$; este valor se sustituye en la ecuación (1) y se obtiene $2-2x=0$; al despejar la variable x nos queda que $x = 1$.

Al sustituir $L = 1$ en la ecuación (3) se obtiene $4-2z=0$ y al despejar la variable z nos queda que $z = 2$.

Ahora, al sustituir los valores $x = 1$ y $z = 2$ en la ecuación (4) nos queda $1+y+4-16=0$; al despejar la variable y se obtiene que $y = 11$. Por tanto, el punto (1, 11, 2) es un punto crítico.

En este caso, aunque evaluemos la función objetivo, no podemos saber si es máximo o mínimo, porque no tenemos otro valor para comparar, lo único que podemos asegurar es que el óptimo ocurre en el punto (1, 11, 2).

Nota: cuando se aplica el método de multiplicadores de Lagrange, si al resolver el sistema se obtiene un único punto crítico, *no* se puede asegurar que corresponda a un máximo o mínimo condicionado, a menos que se aplique un criterio en donde se analice el determinante hessiano restringido, que es un criterio parecido al criterio de la segunda derivada que vimos anteriormente; sin embargo, en este texto *no* se profundizará en ese nuevo criterio.

Por tanto, cuando se obtenga un único punto crítico, solo se podrá asegurar que en ese punto ocurre el óptimo.

Ejemplo 3

Encontrar el punto crítico de la función $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, sujeta a las restricciones $2x+y+z=1$ y $-x+2y-3z=4$.

Solución

Paso 1. Construir la función lagrangeana.

En este ejemplo tenemos que la función objetivo es $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ pero hay dos restricciones, que al igualarlas a cero nos queda:

restricción 1: $2x+y+z-1=0$ y restricción 2: $-x+2y-3z-4=0$.

Cuando se tiene más de una restricción, la función lagrangeana se construye restando a la función objetivo cada una de las restricciones, multiplicada por un valor L_i; en este caso quedaría como sigue:

$$F(x,y,z,L_1,L_2)=x^2+y^2+z^2-L_1(2x+y+z-1)-L_2(-x+2y-3z-4).$$

Paso 6. Obtener las primeras derivadas parciales de la función lagrangeana.

$$F_x = 2x-2L_1+L_2 \qquad F_y = 2y-L_1-2L_2 \qquad F_z = 2z-L_1+3L_2$$

$$F_{L_1} = 2x+y+\mathrm{z}-1 \qquad F_{L_2} = -x+2y-3z-4$$

Paso 7. Se igualan a cero cada una de las derivadas parciales obtenidas y se resuelve el sistema

$$\begin{aligned}
&2x-2L_1+L_2=0 && \mathrm{ec}(1)\\
&2y-L_1-2L_2=0 && \mathrm{ec}(2)\\
&2z-L_1+3L_2=0 && \mathrm{ec}(3)\\
&2x+y+z=1 && \mathrm{ec}(4)\\
&-x+2y-3z=4 && \mathrm{ec}(5)
\end{aligned}$$

Para resolver este sistema utilizaremos el método de suma y resta:

a) La ecuación (2) la multiplicaremos por –2 y la sumaremos con la ecuación (1) para eliminar el multiplicador L_1.

$-2\left(2y-L_1-2L_2=0\right)$ se obtiene $-4y+2L_1+4L_2=0$, que al sumarla con la ecuación (1) se tiene:

$$\begin{array}{r} -4y+2\cancel{L_1}+4L_2=0 \\ 2x-2\cancel{L_1}+L_2=0 \\ \hline 2x-4y \quad + \quad 5L_2=0 \end{array}$$

b) La ecuación (3) la multiplicaremos por –1 y la sumaremos con la ecuación (2) para eliminar nuevamente L_1.

$-1\left(2z-L_1+3L_2=0\right)$ se obtiene $-2z+L_1-3L_2=0$, que al sumarla con la ecuación (2) se tiene:

$$\begin{array}{r} 2y-\cancel{L_1}-2L_2=0 \\ -2z+\cancel{L_1}-3L_2=0 \\ \hline 2y-2z\ -5L_2=0 \end{array}$$

c) Al sumar las ecuaciones obtenidas en los incisos *a)* y *b)* se elimina L_2

$$\begin{array}{r} 2x-4y \quad + \quad \cancel{5L_2}=0 \\ 2y-2z-\cancel{5L_2}=0 \\ \hline 2x-2y-2z \qquad =0 \end{array}$$

y habremos obtenido una ecuación que contiene únicamente las variables *x*, *y* y *z*.

d) La ecuación (4) la multiplicaremos por 2 y la sumaremos con la ecuación obtenida en el inciso *c)*

$2\left(2x+y+z=1\right)$ que se convierte en $4x+2y+2z=2$, que al sumarla con la ecuación obtenida en el inciso *c)* nos queda:

$$\begin{array}{r} 4x+\cancel{2y}+\cancel{2z}=2 \\ 2x-\cancel{2y}-\cancel{2z}=0 \\ \hline 6x \qquad\quad = 2 \end{array}$$

de donde al despejar *x* obtenemos que *x* = 1/3.

e) Al sustituir el valor *x* = 1/3 en la ecuación $2x-2y-2z=0$ y en la ecuación (5) $-x+2y-3z=4$ y sumar las ecuaciones resultantes se obtiene:

$$\begin{array}{r} \frac{2}{3}-\cancel{2y}-2z=0 \\ -\frac{1}{3}+\cancel{2y}-3z=4 \\ \hline \frac{1}{3} \quad -5z=4 \end{array}$$

de donde al despejar *z* podemos concluir que *z* = – 11/15.

f) Por último, al sustituir los valores $x = 1/3$ y $z = -11/15$ en cualquiera de las ecuaciones, por ejemplo, en la ecuación (4) $2x+y+z=1$, obtenemos $\frac{2}{3}+y-\frac{11}{15}=1$, de donde al despejar la variable y nos queda que $y = 16/15$. Por tanto el punto crítico es $\left(\frac{1}{3},\frac{16}{15},\frac{-11}{15}\right)$.

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Obtén los puntos críticos de la función $f(x,y)=4x^2+2y^2+5$ sujeta a la restricción $g(x,y)=x^2+y^2-2y$.

Solución

Paso 1. Construye la función de Lagrange ______________________________

Paso 2. Obtén las primeras derivadas parciales de la función lagrangeana.

Paso 3. Obtén los puntos críticos:

Puntos críticos ______________________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 2

Obtén los puntos críticos de la función $f(x,y,z)=xyz$ sujeta a la restricción $x+2y+3z=18$.

Solución

Paso 1. Construye la función de Lagrange ______________________________.

Paso 2. Obtén las primeras derivadas parciales de la función lagrangeana.

Paso 3. Obtén los puntos críticos:

Puntos críticos ____.

¡A trabajar!

EJERCICIO 3

Obtén los puntos críticos de la función $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ sujeta a la restricción $3x-2y+z-4=0$.

Solución

Paso 1. Construye la función de Lagrange ______________________________.

Paso 2. Obtén las primeras derivadas parciales de la función lagrangeana.

Paso 3. Obtén los puntos críticos:

Puntos críticos ____.

Problemas de aplicación

Hasta el momento, en todos los ejemplos y ejercicios que se han proporcionado la función objetivo y la(s) ecuación(es) de restricción han sido fácilmente identificables; sin embargo, en situaciones reales debemos no solo de identificar, sino a menudo debemos construir la función objetivo o la ecuación de restricción o ambas.

Ejemplo 4

Cuando se utilizan x unidades de trabajo y y unidades de capital, la producción P de un fabricante está dada por la función de **Cobb-Douglas** de producción $P(x,y)=5x^{1/5}y^{4/5}$. Cada unidad de trabajo cuesta \$11 y cada unidad de capital \$22. Si se tienen exactamente \$11 000 para gastar en trabajo y capital, determina la cantidad de unidades de trabajo y capital que deben utilizarse para maximizar la producción. (Supón que el máximo se encuentra en el punto crítico obtenido.)

Solución

Paso 1. Construye la función lagrangeana.

Recuerda que para construir la función auxiliar de Lagrange es necesario identificar primero la función objetivo y la ecuación de restricción.

En este caso, la función objetivo es la función de producción $P(x,y)=5x^{1/5}y^{4/5}$ ya que es la que se desea maximizar.

La ecuación de restricción no la tenemos; hay que construirla con los datos que nos dan.

Sabemos que la cantidad que tenemos para gastar en trabajo y capital está restringida a \$11 000, por lo que esta cantidad debemos distribuirla entre esas dos variables. Cada unidad de trabajo cuesta \$11, así que el costo de x unidades de trabajo será de $11x$, de manera similar, el costo para y unidades de capital será de $22y$. De esta forma la ecuación de restricción es: $11x + 22y = 11000$.

Así que la función de Lagrange es:

$$F(x,y,L)=5x^{1/5}y^{4/5}-L(11x+22y-11000).$$

Paso 2. Obtén las primeras derivadas parciales de la función lagrangeana.

$$F_x=x^{-4/5}y^{4/5}-11L \qquad F_y=4x^{1/5}y^{-1/5}-22L \qquad F_L=-(11x+22y-11000).$$

Paso 3. Iguala a cero cada una de las derivadas parciales obtenidas y resolver el sistema para obtener los puntos críticos.

Observa que al igualar la tercera ecuación a cero se pueden multiplicar ambos lados de la ecuación por -1, de esta forma el signo negativo cambia a positivo, quedando el sistema como sigue:

$$\begin{aligned} x^{-4/5}y^{4/5}-11L &= 0 \\ 4x^{1/5}y^{-1/5}-22L &= 0 \\ 11x+22y-11000 &= 0 \end{aligned} \quad \text{o bien} \quad \begin{aligned} x^{-4/5}y^{4/5} &= 11L && ec.1 \\ 4x^{1/5}y^{-1/5} &= 22L && ec.2 \\ 11x+22y &= 11000 && ec.3 \end{aligned}$$

Para resolver este sistema, utilizaremos el método de *igualación*, pero primero despejaremos el multiplicador L de las ecuaciones (1) y (2).

Al despejar el multiplicador L de la ecuación (1) se obtiene: $\dfrac{x^{-4/5}y^{4/5}}{11}=L.$

Al despejar el multiplicador L de la ecuación (2) se obtiene: $\dfrac{4x^{1/5}y^{-1/5}}{22}=L.$

Y al igualar estas últimas dos ecuaciones se obtiene: $\dfrac{x^{-4/5}y^{4/5}}{11}=\dfrac{4x^{1/5}y^{-1/5}}{22}.$

Ahora las variables con potencias negativas se escriben en el denominador con potencia positiva quedando como sigue: $\frac{y^{4/5}}{11\,x^{4/5}} = \frac{4x^{1/5}}{22\,y^{1/5}}$. Como las variables x y y representan unidades de trabajo y capital invertido, *no* pueden ser cero, por tanto, la ecuación anterior es equivalente a: $22\,y^{1/5}y^{4/5} = 4x^{1/5}\,11\,x^{4/5}$ al simplificar esta última ecuación se tiene: $22\,y = 44x$; al despejar la variable y, se obtiene que: $y = 2x$; sustituyendo esta expresión en la ecuación (3), se tiene:

$$11x+22(2x)=11000$$
$$55x=11000$$
$$x=200$$

Al sustituir $x = 200$ en la ecuación $y = 2x$ se obtiene que $y = 400$. Por tanto, el punto crítico es de (200, 400).

Interpretación

En términos prácticos, el resultado anterior significa que deben utilizarse 200 unidades de trabajo y 400 unidades de capital para que la producción sea máxima.

¡A trabajar!

EJERCICIO 4

Cuando se invierten x unidades en trabajo y y unidades en capital, la producción total Q de un fabricante esta dada por la función de Cobb-Douglas de producción $Q=5x^{0.2}y^{0.8}$. Cada unidad de trabajo cuesta \$10 y cada unidad de capital \$30. Determina las unidades de trabajo y capital que deben invertirse para maximizar la producción si se tiene la cantidad de \$15 000 para trabajo y capital.

¿Cuál es la producción máxima? (Supón que el máximo se encuentra en el punto crítico obtenido.)

Solución

Recuerda que primero debes identificar y/o construir la función objetivo y la ecuación de restricción.

Función objetivo ______________________________. Ecuación de restricción ________________________.

Construye la función de Lagrange ____________________________________.

Encuentra las primeras derivadas parciales de la función lagrangeana.

Plantea el sistema de ecuaciones para obtener los puntos críticos y resuélvelo.

$$\begin{cases} F_x \\ F_y \\ F_L \end{cases}$$

Contesta a las preguntas planteadas:

¿Cuánto se debe invertir en trabajo y capital para que la producción sea máxima?

Trabajo = ____________. Capital = ____________ .

¿Cuál es la producción máxima? ______________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 5

Supón que una empresa ha recibido un pedido por 500 unidades de su producto y desea distribuir su producción entre dos de sus plantas, planta A y planta B. El costo total de producción esta dado por la función $C = 2x^2 + xy + y^2 + 800$ en donde x y y representan las producciones de las plantas A y B, respectivamente. ¿Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos?

¿Cuál es el costo mínimo? (Supón que el mínimo se encuentra en el punto crítico obtenido.)

Solución

Recuerda que primero debes identificar y/o construir la función objetivo y la ecuación de restricción.

Función objetivo ______________________.

Ecuación de restricción ______________________.

Construye la función de Lagrange ______________________.

Encuentra las primeras derivadas parciales de la función lagrangeana.

Plantea el sistema de ecuaciones para obtener los puntos críticos y resuélvelo.

$$\begin{cases} F_x \\ F_y \\ F_L \\ \end{cases}$$

Contesta a las preguntas planteadas:

¿Cómo debe distribuirse la producción para minimizar los costos?

Producción de la planta A = ______________________________.

Producción de la planta B = ______________________________.

¿Cuál es el costo mínimo? ______________________________.

Si en lugar de pedir 500 unidades se pidieran 600, ¿cuánto aumentaría el costo? ____________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 6

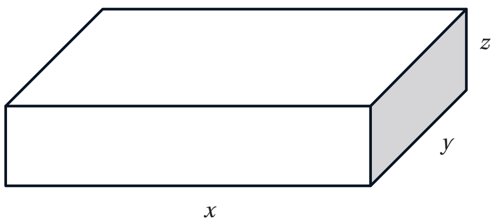
Una compañía desea construir una caja rectangular con tapa que contenga un volumen de 54 cm^3.

El costo del material para el fondo y la tapa es de $2 por cm^2, mientras que el de los lados es de $1 por cm^2. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para que el costo del material sea mínimo? ¿Cuál es el costo mínimo?

Solución

En este problema no nos dan ninguna función, por lo que debemos construir tanto la función objetivo como la ecuación de restricción.

Queremos minimizar el costo *C*, por tanto, la función objetivo es el costo y la restricción es que el volumen de la caja sea de 54 cm^3. Vamos a ayudarnos de un dibujo de una caja con dimensiones variables para plantear la función de costo y la ecuación para el volumen.



De acuerdo con las dimensiones de la caja, completa los espacios en blanco:

La *cantidad de material* que se requiere para la tapa y el fondo es: ____________________.

La expresión que representa el costo del material para la tapa y el fondo es:

____.

La *cantidad de material* que se requiere para los lados es:

____.

La expresión que representa el costo del material para los lados es:

____.

La función de costo total del material es: $C(x, y, z) =$ ________________.

¿Cuál es la fórmula para obtener el volumen de una caja rectangular? $V =$ ________________.

Si el volumen no debe exceder de 54 cm^3, escribe la ecuación de restricción:

____.

La función lagrangeana es:

____.

Ahora, obtén las primeras derivadas parciales de la función lagrangeana y los puntos críticos.

Sugerencia: Despeja el multiplicador L y utiliza el método de igualación.

$$\begin{cases} F_x \\ F_y \\ F_z \\ F_L \end{cases}$$

Respuesta: ¿Qué dimensiones debe tener la caja para que el costo del material sea mínimo? ¿Cuál es el costo mínimo?

$x=$ ____________ $y=$ ____________ $z=$ ____________.

Interpretación del multiplicador *L*

En todos los ejemplos que hemos presentado hasta el momento, no hemos encontrado el valor del multiplicador, de hecho es lo primero que hemos eliminado para resolver los sistemas de ecuaciones; sin embargo, eso no significa que el multiplicador no sea importante; es más: tiene una interpretación práctica que a continuación presentamos.

En el ejemplo anterior obtuviste que $F_x = 4y + 2z - Lyz$; al igualarla a cero y despejar L te quedó que $L = \dfrac{4y+2z}{yz}$. Si sustituimos los valores que obtuviste para las variables y y z, encontramos que el valor del multiplicador es $L = 4/3 = 1.3333$.

Supongamos que el cliente de la compañía Sukaja le pide ahora que la caja rectangular con tapa tenga un volumen 64 cm^3. Al resolver nuevamente el problema de minimizar el costo, con este cambio en la restricción, obtenemos que las dimensiones de la caja ahora serán $x = 3.1748$, $y = 3.1748$, $z = 6.3496$ y el costo de la caja con estas nuevas dimensiones será de $120.95. Al comparar este costo con el obtenido anteriormente observamos que el costo aumentó en $12.95; esto significa que los 10 cm^3 adicionales en el volumen aumentaron el costo mínimo en $12.95.

Si calculamos el cambio en el costo mínimo por unidad de cambio en el volumen, obtenemos que $\dfrac{\Delta C}{\Delta V} = \dfrac{120.95-108}{64-54} = \dfrac{12.95}{10} = 1.295 \approx 1.3$, es decir, este resultado es aproximadamente igual al valor del multiplicador.

Del análisis anterior podemos concluir que:

El multiplicador L representa *el cambio aproximado* en el valor de la función objetivo f por cada cambio unitario en el valor de la ecuación de restricción g, que podemos denotar como sigue $\dfrac{\Delta f}{\Delta g} \approx L$.

¡A trabajar!

EJERCICIO 7

Consideremos la función Cobb-Douglas, que vimos en la sección 3.5, $Q(k,L)=30K^{0.3}L^{0.7}$, vamos a agregar una restricción: supón que el costo de capital por unidad es de \$10 y el costo laboral es de \$8 por unidad y el costo de capital y de trabajo está limitado a \$10 000, ¿cuántas unidades de capital y de trabajo deben invertirse para optimizar la productividad?

Solución

a) ¿Cuál es la función que representa la restricción en este problema?

____.

b) ¿Cuál es la función que se optimizará? (Función objetivo)

____.

c) Construye la función de Lagrange (utiliza el símbolo λ para representar a la variable de Lagrange).

____.

d) ¿Cómo se obtienen los puntos críticos?

____.

Plantea el sistema de ecuaciones para obtener los puntos críticos y resuélvelo.

$$\begin{cases} F_k \\ F_L \\ F_\lambda \end{cases}$$

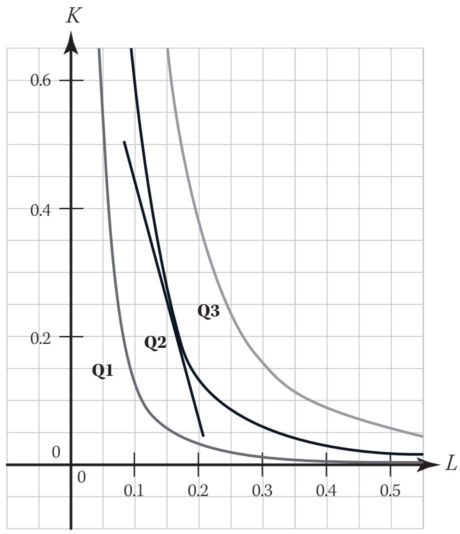
e) Contesta a la pregunta planteada: ¿cuántas unidades de capital y de trabajo deben invertirse para optimizar la productividad? Escribe tu respuesta en términos del contexto.

____

____

____.

f) Escribe los resultados encontrados en la siguiente gráfica; la isocuanta intersectada con la línea representa el punto óptimo, la línea es la restricción.



¡A trabajar!

EJERCICIO 8

Una empresa tiene la función de producción Cobb-Douglas $f(K,L)=400K^{0.4}L^{0.6}$ donde K representa las unidades de capital y L las unidades de fuerza laboral. Si el costo de capital tiene un valor de \$100 por unidad y el costo de mano de obra \$150 por unidad, y solo se cuenta con \$100 000 para cubrirlos, determina la cantidad de unidades de capital y las unidades de fuerza laboral para optimizar la producción.

Solución

a) ¿Cuál es la función que representa la restricción en este problema? ____________________.

b) ¿Cuál es la función que se optimizará? (Función objetivo) ____________________.

c) Construye la función de Lagrange (utiliza el símbolo λ para representar a la variable de Lagrange) ____.

d) ¿Cómo se obtienen los puntos críticos? ______________________________.

Plantea el sistema de ecuaciones para obtener los puntos críticos y resuélvelo.

$$\begin{cases} F_k \\ \\ F_L \\ \\ F_\lambda \\ \\ \end{cases}$$

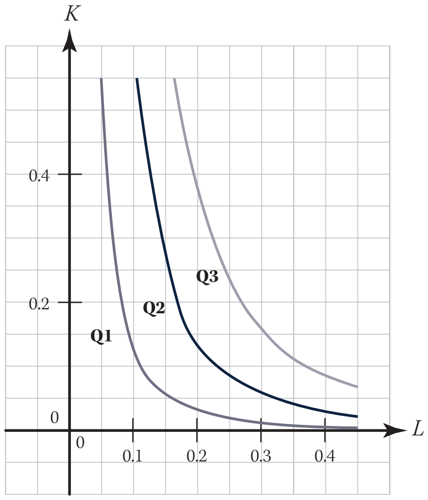
e) Contesta a la situación planteada: determina la cantidad de unidades de capital y las unidades de fuerza laboral para optimizar la producción. Escribe tu respuesta en términos del contexto.

____

____

____.

f) Escribe los resultados encontrados en la gráfica y bosqueja la traza de restricciones.



CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 3.7

Obtén los puntos críticos de las siguientes funciones sujetas a la restricción que se da.

1. $f(x,y)=5x^2+6y^2-8 \;;\; 6x-2y=5$

2. $f(x,y)=x^2-7y^2+1 \;;\; y-2x=4$

3. $f(x,y)=3x^2-5y+6x \;;\; x+y=7$

4. $f(x,y)=\dfrac{2}{3}y^2+4x-10y \;;\; 5x+2y-3=0$

5. $f(x,y)=x^2+6y^2-xy \;;\; -y+x=2$

6. $f(x,y)=8x^2-3y^2-3xy \;;\; 2x+y=6$

7. $f(x,y,z)=2x-y+4z \;;\; x^2+y^2+z^2=10$

8. $f(x,y,z)=48x+30y-z \;;\; 2x^2-5y^2+z^2=3$

9. $f(x,y,z)=xy+z^2$; $5x-3y+z=2$

10. $f(x,y,z)=8yz+4x^2$; $3x+2y-5z=1$

11. $f(x,y,z)=2xyz$; $5x-y+z=10$

12. $f(x,y,z)=5xy^2z$; $8x+2y-z=3$

13. $f(x,y,z)=6x^2yz$; $x+y+4z=12$

14. $f(x,y,z)=\frac{1}{2}xyz^2$; $-2x+3y-z=5$

15. $f(x,y,z)=20x+z-3y$; $2xyz=1$

16. $f(x,y,z)=33y-15x+18z$; $3xyz=4$

17. $f(x,y)=6x^{1/3}y^{2/3}$; $x^2+y^2=16$

18. $f(x,y)=25x^{2/3}y^{3/5}$; $6x^2+3y=8$

19. $f(x,y)=8x^{3/4}y^{1/4}$; $8x-4y=12$

20. $f(x,y)=x^{4/7}y^{3/7}$; $x+y=1$

Resuelve los siguientes problemas de optimización con restricción.

21. Una fábrica desea surtir un pedido de 1500 unidades de su producto, la cual puede asignar entre sus dos plantas, una ubicada en Monterrey y la otra, en Chihuahua. Si la función de costos total está dada por $C=x^2+y^2-30x-15y+500$ donde x y y son los cientos de unidades producidas en las ciudades de Monterrey y Chihuahua, respectivamente, ¿cómo se debe distribuir la producción para minimizar los costos?

22. Una embotelladora de refrescos produce dos presentaciones de su producto: de 500 ml y de 2 l. La función de costo total por semana está dada por $C=x^2+y^2-140x-80y+7000$ donde x y y son las miles de unidades producidas de refrescos de 500 ml y 2 l, respectivamente. ¿Cuántas unidades de cada tipo deben producirse para que los costos sean mínimos si la empresa decide producir un total de 110 unidades?

23. La función de producción de una empresa está dada por $C=\frac{x^2}{2}-115x+\frac{y^2}{2}-190y+30{,}000$ y los costos unitarios de mano de obra (x) y de capital (y) son 30 y 70 pesos, respectivamente. Encuentra las cantidades de mano de obra y capital que maximicen la producción si se tiene un presupuesto de \$10 950.

24. La función de producción de una empresa está dada por $P=450x^{1/3}y^{2/3}$ en donde los costos de mano de obra (x) y capital (y) son 45 y 75, respectivamente. Encuentra las cantidades de mano de obra y capital que maximicen la producción si se tiene un presupuesto de \$9470.

25. La función de utilidad de una compañía es $U=35x-10x^2+45y-5y^2$ donde x y y son los miles de unidades de dos de los productos que vende dicha compañía y los precios unitarios

de venta son de 50 y 25, respectivamente. Si la compañía quiere asegurar un ingreso de la cantidad de \$106 250, ¿cuántas unidades deberán vender de cada producto para lograr una utilidad máxima?

26. La función de utilidad de una empresa es $U=\frac{3}{2}x^2+12xy+4y^2$ donde x y y son las unidades de los productos vendidos. Los precios unitarios de venta son 1 y 5 pesos, respectivamente. ¿Cuántas unidades debe vender de cada producto para que la empresa tenga una máxima utilidad si quiere tener un ingreso de \$2100 para gastar?

27. Una persona desea construir una alberca rectangular que tenga volumen de 150 m^3 y una profundidad de 3 metros. Los costos de las paredes son de \$1200 por m^2 y el costo del piso es de \$2300 por m^2. ¿Qué dimensiones tendrá la alberca para minimizar los costos de construcción? ¿Cuál es el costo mínimo?

28. Se desea construir un juguetero de forma cilíndrica que tenga un volumen de $2m^3$. Si el costo de la parte cilíndrica es de \$20, el de la base \$50 y el de la tapa \$25. ¿Cuáles son las dimensiones del juguetero para que el costo sea mínimo? ¿Cuál es el costo mínimo?

29. Una compañía tiene un presupuesto mensual para la publicidad de su producto de \$20 000. Se sabe que si gasta r miles de pesos cada mes en la publicidad en radio y t miles de pesos en la publicidad por televisión, la función de ventas mensuales está dada por $Q=65r^{1/4}t^{3/4}$. Si la utilidad (en miles de pesos) es el 13% de las ventas menos los costos de publicidad, encuentra cuánto se debe gastar en la publicidad en radio y televisión para maximizar la utilidad. ¿Cuál es la utilidad?

30. La función de producción de una empresa está dada por $P=4200x^{3/5}y^{2/5}$. El costo para la empresa es de \$50 y \$70 por unidad de x y y, respectivamente. Si la empresa decide que los costos totales de los insumos sean de \$5250, calcula la máxima producción posible sujeta a la restricción presupuestaria. ¿Cuál es esa producción?

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 3.7

1. $(0.763, 0.212)$

2. $\left(-56/27, -4/27\right)$

3. $\left(-11/6, 53/6\right)$

4. $(-2.88, 8.7)$

5. $\left(11/6, -1/6\right)$

6. $\left(9/2, -3\right)$

7. $(-1.38, 0.69, -2.76)$

8. $(-1.333, 0.333, 0.055)$

9. $\left(\frac{12}{59}, -\frac{20}{59}, -\frac{2}{59}\right)$

10. $\left(-\frac{3}{11}, \frac{5}{11}, -\frac{2}{11}\right)$

11. $\left(\frac{2}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right)$

12. $\left(\frac{3}{32}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$

13. $\left(6, 3, \tfrac{3}{4}\right)$

14. $\left(-\frac{5}{8}, \frac{5}{12}, -\frac{5}{2}\right)$

15. $(-0.155, 1.036, -3.107)$

16. $(1.521, -0.691, -1.268)$

17. $(2.31, 3.27)$ $(2.31, -3.27)$
$(-2.31, 3.27)$ $(-2.31, -3.27)$

18. $\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}, 2\right)$
$\left(-\sqrt{\tfrac{1}{3}}, 2\right)$

19. $\left(\frac{9}{8}, \frac{3}{4}\right)$

20. $\left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$

21. Planta de Monterrey: 1125 unidades, Planta de Chihuahua: 375 unidades

22. 70 000 refrescos de 500 ml, 40 000 refrescos de 2 l

23. Cantidad de mano de obra 85, Cantidad de capital 120

24. Cantidad de mano de obra 70, Cantidad de capital 90

25. Se deben vender $x = 500$ unidades, $y = 3250$ unidades

26. Se deben vender $x = 1200$ unidades, $y = 180$ unidades

27. Las dimensiones son $x = 7.07$ m, $y = 7.07$ m y el costo mínimo de construcción es de $216 773.27.

28. Las dimensiones del juguete son $r = 0.554$ m y $h = 2.076$ m y el costo mínimo de construcción es: $216.84.

29. Se debe gastar $5000 en publicidad en radio y $15 000 en publicidad en televisión para obtener una utilidad máxima de $76 309.17

30. Se deben producir:

    $x = 63$ unidades

    $y = 30$ unidades

    Producción máxima: 196 654 unidades

CAPÍTULO

cuatro

Sucesiones y series

4.1 Conceptos de sucesión y de serie

4.2 Series aritméticas

4.3 Series geométricas

4.1 CONCEPTOS DE SUCESIÓN Y DE SERIE

Reflexiona acerca de las siguientes situaciones y responde a lo que se te pide.

1. A fin de solventar los gastos para tu graduación, decides empezar a ahorrar una parte de lo que tus padres te dan para tus gastos personales. Inicias ahorrando \$200 y cada mes ahorras \$10 más que el mes anterior, es decir, el segundo mes ahorras \$210, el tercer mes \$220, y así sucesivamente. Si tus hábitos de ahorro no cambian, los montos ahorrados **cada mes** durante el primer año serán:

   200, 210, 220, 230, ______, ______, ______, ______, ______, ______, ______, 310.

2. En 1990 la demanda mundial de gas natural era de 72 137 miles de millones de pies cúbicos y crecía a una razón de 4% al año.

   a) Plantea una fórmula que represente la demanda mundial de gas natural, suponiendo que la razón a la que se consume dicho recurso no cambia. ________________

   b) Utiliza la fórmula anterior para obtener la demanda mundial de gas natural después de:

   i) Un año ________________

   ii) Dos años ________________

   iii) Tres años ________________

   iv) Cuatro años ________________

   v) Cinco años ________________

Los conjuntos de valores obtenidos en las dos situaciones anteriores son ejemplos de sucesiones.

Sucesiones

Se llama *sucesión* (secuencia, o progresión) a un conjunto de números reales que están ordenados de acuerdo a una regla dada.

¡Reflexiona!

Dado el conjunto 2, 4, 6, ____, ¿cuál de las siguientes opciones crees que sea el número que le sigue?

a) 8 *b)* 12 *c)* 10

Cabe aclarar que, dado un número finito de elementos de una sucesión, a menudo es difícil predecir el número que le sigue, ya que existe una gran cantidad de sucesiones cuyos primeros términos coinciden. Sin embargo, siempre es posible encontrar *por lo menos* una regla cuyos primeros términos correspondan al conjunto dado.

Ejemplo 1

Encuentra una regla de construcción para la sucesión 200, 210, 220, 230, …

Solución

Para descubrir una regla observamos si la sucesión de números es creciente o decreciente; también observa si todos sus términos tienen el mismo signo o si el signo se alterna y el responder a la pregunta *¿cómo están cambiando los valores*?, ayuda a establecer la regla.

En este caso, vemos que la sucesión de números es creciente, todos sus términos son positivos y el valor de cada término aumenta de 10 en 10; por tanto, la regla es: Cada término posterior al primero se obtiene sumando 10 unidades al término anterior.

Cada número en el conjunto recibe el nombre de *término* de la sucesión. El primer término se denota por a_1; el segundo, por a_2; el tercero, por a_3, y así sucesivamente; se utiliza a_n para denotar al *término general* o *n-ésimo término* de la sucesión. El n-ésimo término es importante porque está expresado como una fórmula, la cual se utiliza para obtener cualquier término de la sucesión. A continuación se explica cómo encontrar el término general de la sucesión del ejemplo anterior.

$a_1 = 200$

$a_2 = 210$, que también puede escribirse como $200 + 10$

$a_3 = 220$, que también puede escribirse como $200 + 20 = 200 + 2(10)$

$a_4 = 230$, que a su vez puede escribirse como $200 + 30 = 200 + 3(10)$

Observa que el número de veces que se suma 10 en cada término es una unidad menor que el valor del subíndice, es decir:

$$a_1 = 200 + 0(10),\quad a_2 = 200 + 1(10),\quad a_3 = 200 + 2(10),\quad a_4 = 200 + 3(10)$$

por lo que podemos concluir que el valor de a_n es: $a_n = 200 + (n - 1)(10)$.

Utilizaremos la fórmula anterior para verificar que la cantidad ahorrada en el doceavo mes es 310. El doceavo mes corresponde al término a_{12}; por tanto, al aplicar la fórmula se tiene que $a_{12} = 200 + 11(10) = 310$. Si deseas saber cuánto deberás ahorrar dentro de año y medio, basta con obtener el término 18 de la sucesión: $a_{18} = 200 + 17(10) = 370$.

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Encuentra una regla de construcción para la sucesión 2, 6, 18, 54, …

Solución

Los términos de la sucesión ¿crecen, decrecen o se alternan en signo? ______________. ¿Cómo está cambiando el valor de cada término con respecto al anterior? ______________.

Regla: ______________________________.

De acuerdo con la regla que estableciste, ¿qué número seguiría al 54? ______________.

Encuentra el término general para esta sucesión a_n = ______________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 2

Encuentra una regla de construcción para la sucesión 0.5, −0.25, 0.125, −0.625, …

Solución

Los términos de la sucesión ¿crecen, decrecen o se alternan en signo? ______________.

¿Cómo está cambiando el valor de cada término con respecto al anterior? ______________.

Regla: ______________.

De acuerdo con la regla que estableciste, ¿qué número seguiría al −0.625? ______________.

Encuentra el término general para esta sucesión a_n = ______________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 3

Encuentra una regla de construcción para la sucesión 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49.

Los términos de la sucesión ¿crecen, decrecen o se alternan en signo? ______________.

¿Cómo está cambiando el valor de cada término con respecto al anterior? ______________.

Regla: ______________.

De acuerdo con la regla que estableciste, ¿qué número seguiría al 49? ______________.

Regla: ______________.

Encuentra el término general para esta sucesión a_n = ______________.

Se dice que las sucesiones son *finitas* cuando tienen un número finito de términos; por ejemplo, la sucesión del ejercicio 3 anterior es un ejemplo de sucesión finita, por lo que después del 49 ya no puede haber más términos.

De manera similar, se dice que las sucesiones son *infinitas* cuando el número de términos es infinito; como no hay un último término, se utilizan tres puntos sucesivos para indicar que la sucesión continúa indefinidamente.

Las sucesiones de los ejercicios 1 y 2 anteriores son ejemplos de sucesiones infinitas.

Series

Retomando el ejemplo inicial de las cantidades ahorradas cada mes para tus gastos de graduación, durante un año tus ahorros fueron 200, 210, 220, 230, … , 310. ¿Qué harías para saber la cantidad total ahorrada durante el primer año? Ciertamente sumarías dichas cantidades: 200 + 210 + 220 + 230 + … + 310; esta suma es un ejemplo de una serie.

Se llama **serie** a la suma indicada de los elementos de una sucesión.

Por ejemplo:

1. Para la sucesión 2, 4, 6, 8, 10, … la serie sería 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + …
2. Para la sucesión 0.5, –0.25, 0.125, –0.625, … la serie sería: ______________________.
3. Para la sucesión 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, … la serie sería: __________________________.

A menudo las series se presentan como una suma de términos sin que se haya dado la sucesión de la que provienen; en ese caso lo que se hace es simplemente verificar que los términos de la serie se generan de acuerdo con una regla.

Por ejemplo: la suma $30 + 10 + \frac{10}{3} + \frac{10}{9} + \ldots$ es una serie, ya que los términos se pueden generar de acuerdo con la regla "Cada término después del primero se obtiene multiplicando el término anterior por 1/3".

Otro ejemplo, la suma 24 + 18 + 12 + 6 + … es una serie, ya que los términos se pueden generar de acuerdo con la regla "Cada término después del primero se obtiene restando 6 unidades al término anterior".

Las series, al igual que las sucesiones, pueden ser ***finitas*** o ***infinitas*** dependiendo del número de términos que se suman.

Una serie de la forma $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ se dice que es finita cuando se suman un número específico de términos, y se dice que es infinita cuando el número de términos que se suman no tiene fin, por ejemplo la serie $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$. es infinita.

Los subíndices indican la posición que ocupa el término dentro de la serie**,** por lo que a_1 representa al primer término de la serie; a_2, al segundo término, y así sucesivamente. En general a_n denota al término de la serie que está en la posición n, de ahí que recibe el nombre de "enésimo término" o "término general" de la serie.

Notación sigma

Una forma distinta para representar a una serie es mediante la notación sigma, que consiste en utilizar *el símbolo* Σ *(que corresponde a la letra S mayúscula del alfabeto griego)* para indicar una suma de términos y deberá ir acompañado de la forma general del n-ésimo término de la serie.

La notación sigma Σ se utiliza para describir en forma abreviada una serie.

CUANDO LA SERIE ES *FINITA*	CUANDO LA SERIE ES *INFINITA*
$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$	$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Último término de la serie, si es finita

Término general (o n-ésimo término) de la serie

$$\sum_{n=1}^{k} a_n$$

Primer término de la serie

Nota: Para escribir una serie en notación sigma hay que encontrar una fórmula para el término general de la serie; dicha fórmula debe estar en función de la variable n, es decir, el valor de cada elemento de la serie, debe depender de la posición que él tenga.

En los siguientes ejemplos se muestra una estrategia para escribir en notación sigma algunas series.

Ejemplo 2

En la serie 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + … se cumple que $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, etc., pero observamos que todos los términos tienen como factor al número 2 y el otro factor es igual al subíndice, es decir:

$$a_1 = 2 = 2(1) \quad \text{iguales}$$
$$a_2 = 4 = 2(2) \quad \text{iguales}$$
$$a_3 = 6 = 2(3) \quad \text{iguales}$$

Por tanto, la forma general del enésimo término es $a_n = 2n$ y la serie en notación sigma queda como sigue: $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} 2n$.

Ejemplo 3

En la serie 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + … se cumple que $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$, $a_4 = 16$, etc., de donde podemos observar que el valor de cada elemento se obtiene elevando al cuadrado el subíndice, es decir:

$$a_1 = 1 = 1^2$$
$$a_2 = 4 = 2^2$$
$$a_3 = 9 = 3^2$$

Por tanto, la forma general del enésimo término es $a_n = n^2$ y la serie en notación sigma queda como sigue: $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} n^2$.

¡A trabajar!

EJERCICIO 4

Escribe la serie $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{400}$ utilizando la notación sigma.

Solución

$a_1 =$ ________ $a_2 =$ ________ $a_3 =$ ________ $a_4 =$ ________ $a_5 =$ ________

Para cada elemento ¿qué relación tiene el denominador con el valor del subíndice?

____

____.

Por tanto, la forma general del enésimo término es $a_n =$ ______________. Observa que esta serie es *finita*, ¿qué subíndice le corresponde al último término $\frac{1}{400}$? $n =$ __________. En conclusión, la serie en notación sigma queda como:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{400}=\sum_{n=}.$$

¡A trabajar!

EJERCICIO 5

Escribe la serie 24 + 30 + 36 + 42 + … utilizando la notación sigma.

Solución

En este caso la regla de construcción de la serie es muy sencilla: sumar 6 al término anterior; recuerda que la fórmula para el término general debe estar en función de *n*, es decir, debemos reescribir cada término de la serie de tal forma que el subíndice correspondiente aparezca en la expresión. Observa el ejemplo resuelto y utilízalo como guía para transformar los demás términos.

$a_1 = 24 = 6(4) = 6\,(1 + 3)$ $\qquad$ $a_2 = 30 =$ ________ = ____________

$a_3 =$ ________ = ________ = ____________ $\qquad$ $a_4 =$ ________ = ________ = ____________.

De acuerdo con los resultados anteriores, ¿cómo sería a_{20}? $a_{20} =$ __________________________.

Por tanto, la forma general del enésimo término es $a_n =$ __________________________

y la serie en notación sigma queda como $24 + 30 + 36 + 42 + \ldots = \sum_{n=}$.

¡A trabajar!

EJERCICIO 6

Escribe la serie $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\ldots+\frac{111}{112}$ utilizando la notación sigma.

Solución

En este caso observa que el numerador de cada término coincide con el valor del subíndice del término correspondiente. ¿Qué relación hay entre el numerador y el denominador? ___________

____.

Utiliza esta relación que acabas de descubrir y el ejemplo resuelto para transformar cada uno de los términos que se piden.

$a_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ $\qquad$ $a_2 =$ ________ = ________ $\qquad$ $a_3 =$ ________ = ________

$a_4 =$ ________ = ________ $\qquad$ $a_5 =$ ________ = ________.

De acuerdo con lo anterior, ¿cómo quedaría a_{50}? $a_{50} =$ ____________.

Por tanto, la forma general del enésimo término es: $a_n =$ ________________

y la serie en notación sigma queda como $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\ldots+\frac{111}{112} = \sum_{n=}$.

¡A trabajar!

EJERCICIO 7

Escribe la serie 0.6 + 0.06 + 0.006 + 0.0006 + … utilizando la notación sigma.

Solución

Recuerda que debes transformar cada término de tal forma que en la expresión aparezca el subíndice correspondiente al término. Observa el ejemplo resuelto y utilízalo para transformar los demás términos.

$a_1 = 0.6 = \frac{6}{10^1}$ $\qquad$ $a_2 =$ ________ = ________

$a_3 =$ ________ = ________ $\qquad$ $a_4 =$ ________ = ________

De acuerdo con lo anterior, ¿cómo quedaría a_{80}? $a_{80} =$ ________.

Por tanto, la forma general del enésimo término es: $a_n =$ ________________

y la serie en notación sigma queda como 0.6 + 0.06 + 0.006 + 0.0006 + … = $\sum_{n=}$.

4.2 SERIES ARITMÉTICAS

Considera el plan de ahorro para tu graduación, empiezas ahorrando \$200 y cada mes ahorras \$10 más que el mes anterior. Las cantidades ahorradas cada mes 200, 210, 220, 230… son ejemplo de una *sucesión* o *progresión aritmética* y la suma indicada de dichas cantidades:

200 + 210 + 220 + 230 + … + 310 recibe el nombre de *serie aritmética*.

Definición

Una sucesión recibe el nombre de *sucesión aritmética* si la *diferencia* entre términos consecutivos es siempre la misma.

Se llama *serie aritmética* a la suma indicada de los elementos de una sucesión aritmética.

Tanto en la sucesión como en la serie aritmética cada elemento después del primero se obtiene sumando una cantidad fija d llamada diferencia común.

Para determinar si una serie dada es aritmética, basta con verificar que se cumpla la definición, es decir, se restan los términos consecutivos: si la respuesta es siempre la misma, se concluye que la serie dada es aritmética. Se procede de igual forma si se tratara de una sucesión aritmética.

En el ejemplo del plan de ahorro, la diferencia entre los términos consecutivos es 10, por tanto, eso confirma que la progresión es aritmética y, por ende, la serie también lo es.

Ejemplo 1

Determina si la serie 7 + 15 + 23 + 31 + 39 es aritmética.

Solución

Restamos los términos consecutivos:

15 – 7 = ________ 23 – 15 = ________ 31 – 23 = ________ 39 – 31 = ________.

Conclusión: ¿es aritmética la serie? ______________.

Ejemplo 2

Determina si la sucesión 8, 24, 72, 216, 648, … es aritmética.

Solución

Restamos los términos consecutivos:

24 – 8 = ______ 72 – 24 = ______ ¿Hay necesidad de seguir restando los demás? ______.

Conclusión: ¿es aritmética la sucesión? ______________.

Ejemplo 3

Determina si los cinco primeros términos de la serie 2, –3, –8, –13, –20, … corresponden a una serie aritmética.

Solución

Restamos los términos consecutivos: –3 – 2 = __________; –8 – (–3) = __________. ¿Hay necesidad de seguir restando los demás? ________ Si tu respuesta es sí, ¡hazlo!

Conclusión: ¿es aritmética la serie? __________________________.

Forma general del enésimo término de una serie aritmética

Si llamamos a_1 al primer término de la serie y llamamos d a la diferencia que hay entre cada término, obtenemos que el segundo término a_2 se obtiene sumando al término anterior la diferencia d, es decir, $a_2 = a_1 + d$.

El tercer término a_3 se obtiene sumando al segundo término la diferencia d, es decir, $a_3 = (a_1 + d) + d$, de donde podemos concluir que $a_3 = a_1 + 2d$.

Similarmente el cuarto término a_4 lo obtenemos sumando al tercer término la diferencia d, es decir, $a_4 = (a_1 + 2d) + d$, de donde podemos concluir que $a_4 = a_1 + 3d$.

Al observar la forma de los términos a_2, a_3, a_4 podemos percatarnos de que el coeficiente que acompaña a la diferencia d, es una unidad menor que el valor del subíndice que acompaña al término que se está calculando;

$$a_2 = a_1 + d \qquad a_3 = a_1 + 2d \qquad a_4 = a_1 + 3d$$

de donde podemos concluir la siguiente fórmula general.

> La fórmula general del enésimo término a_n de la serie aritmética es $a_n = a_1 + (n - 1)d$.

La fórmula anterior nos ayuda a encontrar el valor de cualquier término de la serie (o de la progresión) aritmética, sin necesidad de tener que conocer el valor del término anterior, basta con conocer el valor del primer elemento y la diferencia que debe de existir entre sus términos.

Ejemplo 4

Supón que pediste prestados $5400 a un interés de 1.5% mensual. Estuviste de acuerdo en pagar $300 al capital cada mes más el interés del balance no pagado. Esto significa que al final del primer mes vas a pagar $300 más el interés de $5400 al 1.5%, es decir, tu pago será de 300 + 5400(.015) = $381 y tu deuda se habrá reducido a $5100. Al final del segundo mes deberás pagar $300 más el interés de $5100 al 1.5%, esto es, 300 + 5100(.015) = $376.50 y ahora tu deuda es de $4800. Continuando con este plan, tus pagos para el tercero y cuarto meses serán, respectivamente, $372 y $367.5; al analizar la sucesión de pagos (381, 376.5, 372, 367.5, …) podrás darte cuenta de que al restar términos consecutivos hay una diferencia constante de −4.5; por tanto, los pagos corresponden a una sucesión aritmética. Si quisieras saber el monto de tu undécimo pago, es decir, el término a_{11} de la sucesión, basta con sustituir en la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)d$ los datos correspondientes; al hacerlo se obtiene:

$$a_{11} = 381 + (11-1)(-4.5) = 336.$$

Si cada mes pagas \$300 al capital, ¿cuántos pagos tendrás que hacer para saldar tu deuda?

__________ ¿Qué hiciste para obtener este valor? ______________________________.

¿Cuánto será el monto de tu último pago? ______________________________.

Depreciación

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Supongamos que el precio de un activo es de \$12 500 y se deprecia mensualmente \$250. También se sabe que el valor de desecho es de \$300. ¿Cuál es el tiempo de vida útil de la máquina?

Solución

a) Determina el precio del activo para los primeros cuatro meses:

__________, __________, __________, __________

b) Los precios del activo ¿corresponden a una sucesión aritmética? __________. Justifica tu respuesta: ______________________________.

c) El valor del primer término es: $a_1 =$ __________.

d) El valor de la diferencia $d =$ __________.

e) $a_n = a_1 + (n-1)d$ para obtener la expresión que rige a esta sucesión aritmética. $a_n =$ __________.

f) La sucesión es finita o infinita __________.

g) ¿Qué representa el valor de desecho? Es decir, a qué término de la sucesión corresponde?

______________________________.

h) ¿Cómo obtenemos el tiempo de su vida útil? ¡A calcularlo!

Interés simple

Cuando se invierte una cierta cantidad de dinero P a una tasa de interés anual de R%, la cantidad o monto de intereses ganados I se obtiene multiplicando la cantidad invertida P por $R/100$, es decir $I = P\left(\frac{R}{100}\right)$.

Si el dinero se invierte a *interés simple*, los intereses se pagan tomando en cuenta solamente el capital invertido P, de tal forma que al final de cada periodo, por lo general cada año, se agrega a la inversión una cantidad constante I. Lo anterior significa que el monto total al final de un año es $P + I$, al final de dos años es $P + 2I$, al final de tres años es $P + 3I$, y así sucesivamente; al final de t años será $P + tI$.

La sucesión de montos anuales de la inversión $P, P + I, P + 2I, P + 3I, \ldots$ ¿es una sucesión aritmética?.____________ ¿Por qué?.______________________________ ¿Cuál es la diferencia común? ________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 2

Interés simple

Una persona invierte $3000 en una cuenta a interés simple que paga el 8% anual; ¿cuánto tendrá después de 5 años?

Solución

a) ¿Cuál es el interés simple que le van a pagar? ____________.

b) Expresa el saldo después de t años: ________________.

c) ¿Cuál es el saldo después de 5 años? ________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 3

UDIS

Supongamos que el aumento promedio en la cotización de la UDI en el mes de octubre de 2012 fue de $0.000750 pesos por día. ¿En qué día el valor de la UDI será aproximadamente de $4.813045 si el primero de octubre se cotizó en $4.806219?

Solución

De acuerdo con el enunciado, el valor de la UDI aumenta la misma cantidad cada día, por lo tanto, concluimos que la sucesión de valores de la UDI es una progresión aritmética.

a) Relaciona la información dada en el enunciado, con los elementos de la fórmula $a_n = a_1 + (n - 1)d$

________________, ________________, ________________.

b) ¡Sustituye y despeja!

c) ¿En qué fecha la cotización de la UDI será aproximadamente $4.813045?

________________________.

Suma de una serie aritmética

Considerando nuevamente el ejemplo de tus planes de ahorro para tu graduación, las cantidades ahorradas cada mes eran 200, 210, 220, 230, … ; sin embargo, supongamos que deseas saber el monto total ahorrado el primer año, para lo cual requieres realizar la siguiente suma:

$$200 + 210 + 220 + 230 + 240 + 250 + 260 + 270 + 280 + 290 + 300 + 310.$$

¿Qué harías para obtener la suma anterior? Tomas tu calculadora y listo; sin embargo, te proponemos el siguiente proceso:

Suma el primer valor y el último, es decir, 200 + 310 = 510; ahora suma el segundo con el penúltimo 210 + 300: el resultado es el mismo. Si continúas sumando el tercero con el antepenúltimo y así sucesivamente, obtendrás seis respuestas iguales a 510. Si multiplicas 6 por 510, obtienes el mismo resultado que arrojó tu calculadora.

El proceso anterior se le ocurrió al ilustre matemático Karl Frederick Gauss cuando tenía aproximadamente 8 años de edad; por alguna razón su profesor pidió a los alumnos sumar los números naturales del 1 al 100, pensando en que dicha actividad tendría ocupados a los niños por un buen rato; sin embargo, para su sorpresa, el niño Gauss terminó mucho antes de lo esperado y al cuestionarlo acerca del proceso seguido, la explicación que dio fue justo la que se menciona en el párrafo anterior.

Una forma alterna de realizar este proceso es suponer que el valor de la suma es S, es decir,

$$S = 200 + 210 + 220 + 230 + 240 + 250 + 260 + 270 + 280 + 290 + 300 + 310.$$

Si esta suma la escribimos a la inversa, el resultado será el mismo, es decir:

$$S = 310 + 300 + 290 + 280 + 270 + 260 + 250 + 240 + 230 + 220 + 210 + 200.$$

Al sumar término a término las expresiones anteriores se obtiene:

$$\begin{array}{rcl} S & = & 200 + 210 + 220 + 230 + 240 + 250 + 260 + 270 + 280 + 290 + 300 + 310 \\ +\ \underline{S} & = & \underline{310 + 300 + 290 + 280 + 270 + 260 + 250 + 240 + 230 + 220 + 210 + 200} \\ 2S & = & 510 + 510 + 510 + 510 + 510 + 510 + 510 + 510 + 510 + 510 + 510 + 510 \end{array}$$

Observa que del lado derecho de la última iguaaldad está sumado 12 veces el número 510, de donde se obtiene la siguiente ecuación: $2S = 12(510)$, y al despejar S se tiene el valor de la suma buscada $S = \dfrac{12\,(510)}{2}$.

Observa que el 12 que está de factor corresponde al número total de términos que se están sumando y que el 510, aunque se puede descomponer de diferentes formas, lo descomponemos como 200 + 310, que corresponde a la suma del primero y del último monto ahorrado.

número de términos que se están sumando *primer monto ahorrado* *último monto ahorrado*

$$S = \frac{12\,(200 + 310)}{2}$$

Al aplicar el proceso utilizado por Gauss para obtener la suma de una serie aritmética general, se obtiene la siguiente fórmula:

La **suma de los primeros *n*-términos** de **una serie aritmética** se obtiene por medio de la fórmula:

número de términos que se están sumando primer término de la serie último término de la serie

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Ejemplo 5

Una comercializadora tuvo utilidades por \$100 000 en su primer mes de operación. Las utilidades aumentaron \$5000 en los subsecuentes meses. ¿Cuál es el monto de sus utilidades al cabo de los dos primeros años de operación?

Solución

Dado que las utilidades aumentaron la misma cantidad cada mes, significa que los valores corresponden a una sucesión aritmética. Sin embargo, para obtener el *monto total de utilidades* al cabo de los dos primeros años de operación, debemos **sumar** las utilidades obtenidas durante ese periodo, por lo que utilizaremos la fórmula $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ para obtener la suma de la serie aritmética. Los datos que nos dan en el enunciado son el valor del primer término $a_1 = 100\,000$, la diferencia constante $d = 5000$ y el número de términos por sumar $n = 24$, lo debemos trabajar en meses debido a que sus utilidades aumentan cada mes. De acuerdo con la fórmula nos falta el monto de las utilidades en el mes 24, es decir, nos falta a_{24}; para obtenerlo utilizamos la fórmula del n-ésimo término $a_n = a_1 + (n - 1)d$. Al sustituir los datos se obtiene:

$$a_{24} = 100\,000 + (24 - 1)5000 = 215\,000.$$

Al sustituir los datos en la fórmula de la suma nos queda:

$$S_{24} = \frac{24(100\,000 + 215\,000)}{2} = 3\,780\,000.$$

Al cabo de dos años el monto total de sus utilidades fue de \$ 3 780 000.

¡A trabajar!

EJERCICIO 4

Encuentra la suma de los primeros 20 términos de la serie 13 + 20 + 27 + ...

Solución

La diferencia que hay entre los términos es constante? ________ $d =$ ________.

¿La serie corresponde a una serie aritmética?. ________ ¿Qué fórmula utilizarías para encontrar la suma? ________.

El número de términos que se deben sumar es $n =$ ________.

El primer término de la serie es $a_1 =$ ________.

¿Qué término falta encontrar para poder calcular la suma que nos piden? ________.

¿Qué fórmula utilizarías para encontrarlo? ________.

¡Encuéntralo!. ________.

Encuentra la suma que se pide.

¡A trabajar!

EJERCICIO 5

Determina si la serie $\sum_{n=1}^{120} 4n-1$ es aritmética; si lo es, encuentra su suma.

Solución

Cuando la serie está dada por medio de la notación sigma, la expresión que se encuentra al lado derecho del símbolo de suma, Σ, que es este caso es $4n - 1$, representa al enésimo término de la serie, es decir, $a_n = 4n - 1$.

Escribe los primeros cinco términos de la serie: ____________________.

La diferencia que hay entre los términos ¿es constante? ________ .E ntonces $d =$ __________.

¿La serie corresponde a una serie aritmética? ________ .

Encuentra el valor de la suma de la serie.

¡A trabajar!

EJERCICIO 6

Hay 48 términos en una serie aritmética y su suma es 4560. Si el primer término es 1, ¿cuál es el valor del último término?

¡A trabajar!

EJERCICIO 7

Un estante con pastas de dientes se encuentra arreglado de tal forma que tiene apiladas 12 filas, cada una contiene 2 cajas menos que la fila de abajo. La fila de abajo contiene 30 cajas; ¿cuántas cajas existen en el estante?

¿Puedes modelar el problema por medio de una serie aritmética? ________

Justifica tu respuesta: ____________________.

Determina el número de cajas que contiene la fila superior: ____________________.

Calcula cuántas cajas hay en total.

¡A trabajar!

EJERCICIO 7

Un pequeño negocio obtuvo ventas por $100 000 dólares al vender sus productos durante el primer año de operación. El propietario del negocio se ha puesto como meta incrementar sus ventas anuales en $25 000 dólares cada año, durante nueve años. Suponiendo que logra su objetivo:

a) Por cuánto fueron sus ventas el sexto año de operación?

b) ¿Cuántas fueron las ventas totales durante los primeros 10 años de operación de este negocio?

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 4.2

Para las series dadas en los problemas 1-4, encuentra el término que se pide.

1. $5 + 9 + 13 + \cdots$; 14° término
2. $-8 - 2 + 4 + 10 + \cdots$; 23° término
3. $-100 - 112 - 124 - 136 - \cdots$; 60° término
4. $20 + 18.5 + 17 + 15.5 + \cdots$; 18° término
5. Calcula la suma de los primeros 30 términos de la serie $6 + 11 + 16 + 21 + \cdots$
6. Encuentra la suma de los primeros 25 términos de la serie $12 + 5 - 2 - 9 - \cdots$
7. Calcula la suma de los primeros 40 términos de la serie $124 + 120.2 + 116.4 + 112.6 + \cdots$
8. Determina la suma de los primeros 55 términos de la serie $-40 - 34.9 - 29.8 - 24.7 - \cdots$
9. Determina el término 32 de la serie $(x - y) + (3x) + (5x + y) + (7x + 2y) + \cdots$
10. Encuentra la suma de los primeros 50 términos de la serie $(5a + 2b) + (4a + 3b) + (3a + 4b) + (2a + 5b) + \cdots$
11. Para dar una conferencia se va a ocupar un espacio libre donde se puedan acomodar 520 sillas, si las sillas del frente son 28 y cada fila siguiente se agrega una silla más de cada lado con respecto a la anterior, ¿cuántas filas tienen que acomodar?
12. Una tienda piensa exhibir un producto en una exposición: la altura disponible es para 14 filas y la base, para 35 unidades del producto. Se acomodarán de manera que en cada fila se quitará una unidad de cada lado con respecto a la fila de abajo. ¿Cuántas unidades deberá transportar para llenar todo el espacio?
13. El valor de un automóvil disminuye cada año 9% de su valor original. Si se compró en \$125 000 en el año 2001, ¿cuál será su valor en 2010?

14. El valor de una acción de un club deportivo aumenta cada año 6.5% de su valor original. Si la acción se compró en $17 000 en el año 2000, ¿cuál será su valor dentro de 14 años?

15. Una compañía de electricidad tuvo ventas por $305 620 en su primer año de operación. Si las ventas aumentaran $23 500 cada año con respecto al año anterior, determina las ventas en el séptimo año y las ventas totales de la compañía durante los primeros 7 años de operación.

16. Una tienda departamental tuvo un ingreso de $325 680 en el mes de enero y tiene como objetivo incrementar los ingresos en $28 000 cada mes. Suponiendo que se logró el objetivo, ¿cuáles fueron sus ingresos totales durante el primer año?

17. Se tiene una deuda de $220 000; si se dio una primera mensualidad de $10 000 y los pagos de las mensualidades posteriores se incrementan 20% del primer pago, ¿cuántos pagos se tienen que hacer para liquidar la deuda?

18. Supón que ahorras en una alcancía $100 y planeas por quincena ahorrar $20 más que la quincena anterior. ¿Cuánto habrás ahorrado en 1 año?

19. En una biblioteca de una universidad se cobra multa a partir del vencimiento del préstamo de un libro: $3 por el primer día y los días subsecuentes la multa diaria se incrementa 50 centavos con respecto al día anterior.

    a) ¿Cuál será la multa que paga por el día 21?

    b) ¿Cuánto pagará en total por los 21 días?

20. El precio del litro de gasolina es de $6.50. Si diariamente está aumentando 2 centavos el litro, ¿cuál será el precio por litro a los 2 meses y medio? (Supón meses de 30 días.)

21. En cada cumpleaños de Yazmín a partir del primer año, su tía abuela le deposita cada año 500 veces su edad en una cuenta bancaria para sus estudios universitarios.

    a) ¿Cuánto le depositó en su cumpleaños 18?

    b) ¿Cuánto le depositó en total hasta su cumpleaños 18?

22. Un paquete vacacional para 4 personas que cuesta $15 000 se va a pagar en 6 meses. El plan de pago se hará de tal forma que cada quincena disminuya $200 con respecto a la quincena anterior. ¿De cuánto será el primer pago?

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 4.1

1. $a_{14} = 57$
2. $a_{23} = 124$
3. $a_{60} = -808$
4. $a_{18} = -5.5$
5. $S_{30} = 2355$
6. $S_{25} = -1800$
7. $S_{40} = 1996$

8. $S_{55} = 5373.5$
9. $a_{32} = 63x + 30y$
10. $S_{50} = -975a + 1325b$
11. 13 filas
12. 308 unidades
13. \$35 000
14. \$31 365
15. En el 7.° año las ventas fueron de \$446 620 y las ventas totales en los 7 años fueron \$2 632 840
16. \$1 918 720
17. 11 pagos
18. \$7920
19. *a)* multa del día 21 es \$13, y el total del pago después de 21 días es \$168.00
20. \$7.98
21. *a)* cumpleaños 18 le depositan \$9000
    b) total en la cuenta \$85 500
22. El primer pago es de \$2350

4.3 SERIES GEOMÉTRICAS

La sucesión cuyos primeros cinco términos son: 2, 4, 8, 16, 32, … ¿es aritmética? ___________.

Justifica tu respuesta: ____.

Vamos a encontrar una regla de construcción para esta sucesión. Todos los términos de la sucesión ¿qué signo tienen? ___________. Los valores de los términos ¿crecen o decrecen? ______________________.

¿Cómo cambian los valores de los términos? ______________________________________; por tanto, la regla de construcción podría ser: cada término después del primero se obtiene: ____.

Este es un ejemplo de sucesión geométrica y la suma 2 + 4 + 6 + 8 + … es un ejemplo de serie geométrica.

Una sucesión recibe el nombre de *sucesión geométrica* si cada término posterior al primero es un múltiplo constante del inmediato anterior.

Una *serie geométrica* se define como la suma indicada de los términos de una sucesión geométrica. Es decir, tanto en la sucesión como en la serie geométrica se cumple que cada término después del primero se obtiene multiplicando el término anterior por un número r, llamado *razón común*.

Las siguientes series son ejemplos de series geométricas; ¿podrías encontrar la razón de la serie en cada caso? Recuerda: debes encontrar un número que al multiplicarlo por un término te dé el siguiente. ¡Inténtalo!

$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots$ $\qquad r =$ ___________

$30 + 10 + \frac{10}{3} + \frac{10}{9} + \ldots$ $\qquad r =$ ___________

¿Qué hacer cuando no es fácil visualizar la razón común?

Para saber si una serie dada es geométrica, se debe determinar si existe un múltiplo constante entre los elementos de la serie, es decir, hay que encontrar la razón de la serie. Para hacerlo basta dividir cada término entre su inmediato anterior; si el resultado de esta división **siempre** es el mismo, esa es la razón de la serie y, por tanto, la serie será geométrica. Este proceso también es válido para determinar si una sucesión es geométrica.

Ejemplo 1

Determina si la serie 0.5 – 0.25 + 0.125 – 0.625 + … es geométrica.

Solución

Para saber si la serie es geométrica, dividimos el segundo término entre el primero, el tercer término entre el segundo, y así sucesivamente.

$$\frac{-0.25}{0.5} = \qquad \frac{0.125}{-0.25} = \qquad \frac{-0.625}{0.125} =$$

Conclusión: ____.

Ejemplo 2

Determina si la sucesión $640, -160, 40, -10, \frac{5}{2}, -\frac{5}{8} + \ldots$ es geométrica.

Solución

Utiliza la estrategia del ejercicio anterior para decidir.

Serie geométrica finita

Si a es el primer término de una serie geométrica y su razón es r, aplicamos la definición para obtener la forma general de los primeros n términos de la serie.

$a_1 = a$

$a_2 = ar$

$a_3 = ar^2$

$a_4 = ar^3$

Observa que en cualquiera de los términos la potencia de r es una unidad más pequeña que el subíndice del término. De acuerdo con lo anterior, la forma general para el término a_n es:

$$a_n = ar^{n-1}.$$

Si sumamos los términos anteriores, obtenemos:

La forma general de una serie geométrica finita es $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$ y en notación sigma sería $\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$.

Cuando se invierte una cantidad P de dinero a *interés compuesto*, el interés generado I en un primer periodo se suma al capital para el segundo periodo, de tal forma que el capital para el segundo periodo es $P + I$; el interés para el segundo periodo se calcula tomando en cuenta el capital original P más el interés I del primer periodo; de esta forma el interés gana interés. El siguiente ejemplo servirá para aclarar este comentario.

Imaginemos que invertimos \$5000 y el banco paga una tasa del 12% anual; al cabo de un año se tendría:

$$5000 + 12\%(5000) = 5000(1 + 0.12) = 5000(1.12) = 5600,$$

y al cabo de 2 años:

$$5600 + 12\%(5600) = 5600(1 + 0.12) = 5600(1.12) = 5000(1.12)^2 = 6272.$$

Al final de tres años se tendría:

$$6272 + 12\%(6272) = 6272(1 + 0.12) = 6272(1.12) = 5000(1.12)^3 = 7024.64.$$

La sucesión de valores de la inversión será: 5000, 5000(1.12), $5000(1.12)^2$, $5000(1.12)^3$, …

¿Cuánto habría para el quinto año? __________________________.

¿Cuánto habría para el n-ésimo año? __________________________.

Por tanto, podemos decir que en general el interés compuesto capitalizable anualmente se calcula como $a_n = (1 + i)^n$.

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Precio futuro

¿Cuál será el precio de una cámara digital dentro de 3 años si está valorada en \$1200 dólares estadounidenses y cuyo valor aumenta 1% cada mes? Consideremos que la moneda se devalúa un 0.3% cada mes y el tipo de cambio actual es de \$12.8188 por dólar.

Solución

a) ¿Cuál es el valor del dólar al cabo de 3 años?

b) ¿Cuál es el valor de la cámara digital al cabo de 3 años?

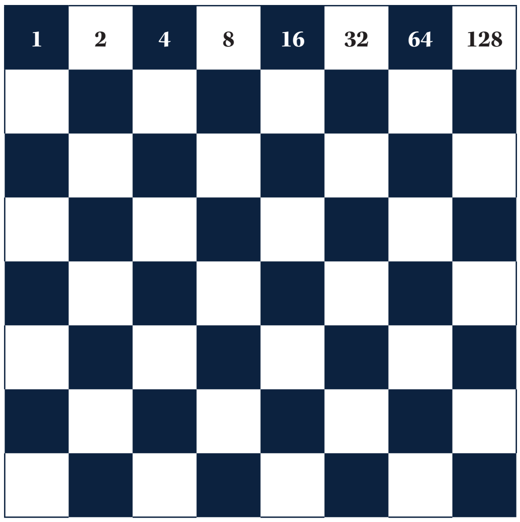
c) ¿Cuál es el valor futuro en pesos de la cámara digital?

Suma de una serie geométrica finita

¿Has escuchado o leído acerca de la leyenda del ajedrez?. Si no la conoces, puedes buscarla en algún sitio confiable de internet.

En forma muy resumida cuenta la leyenda que el rey Sheram, quien reinaba en un tiempo en parte de la India, recibió como regalo un tablero de ajedrez de parte de uno de sus súbditos llamado Sissa. Una vez que Sissa explicó al rey Sheram cómo se jugaba, el rey quedó tan maravillado que quiso recompensar a Sissa por tan formidable invento; el rey ofreció darle a Sissa lo que deseara; inicialmente Sisa declinó el ofrecimiento, pero ante la insistencia del rey, decidió pedir como recompensa que se le diera un grano de trigo por la primera casilla, dos granos por la segunda, cuatro por la tercera, por la cuarta casilla el doble de granos de trigo de la tercera, y así sucesivamente: por cada casilla el doble de la anterior. Al escuchar el rey lo que Sissa pedía de recompensa se indignó muchísimo pues consideró que la cantidad solicitada de trigo era insignificante comparada con las riquezas que él le ofreció a Sissa. Veamos si el rey tenía o no razón.

La siguiente figura muestra la cantidad de granos de trigo que pidió por cada una de las casillas de la primera fila del tablero de ajedrez.



¿Qué es necesario hacer para calcular la cantidad de trigo que pidió su inventor? Habrá que sumar $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + \ldots + ?$ ¿Sabes cuál es el último término de esta serie? ________. A continuación se proporciona una guía para que lo obtengas.

El tablero de ajedrez tiene __________ casillas. Cada uno de los elementos de la serie anterior se puede escribir como sigue: $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \ldots +$ ________; para encontrar el último término observa que en la primera casilla el número 2 está elevado a la potencia cero; en la segunda casilla, el número 2 está elevado a la potencia 1; en la tercera casilla está elevado a la potencia 2; en la cuarta casilla está elevado a la potencia 3, y así sucesivamente, así que en la casilla 64 el número 2 deberá estar elevado a la potencia ________, quedando la serie como sigue:

$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots +$ _______________.

La serie resultante ¿es finita?. _______________ ¿Es geométrica? _______________.

Para encontrar la suma de la serie anterior, utiliza la fórmula que se proporciona en el siguiente recuadro.

La **suma** de una *serie geométrica finita* está dada por la fórmula $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$,
en donde ***a*** es el primer término de la serie, ***r*** es la razón de la serie y ***n*** es el número de términos que se están sumando.

Continuando con el ejemplo del tablero de ajedrez: el primer término de la serie es: $a =$ ____________.

La razón de la serie es: $r =$ ____________.

El número de términos que se están sumando es: $n =$ ____________.

¿Cuál es el total de granos de trigo que se pidió como recompensa? ______________________.

Un ejemplo claro de una suma geométrica es cuando queremos conocer el monto total de las aportaciones para el retiro. Si un trabajador gana $250 000 anuales, la aportación anual que hace a su afore es de 6.5% del sueldo y crece a razón del 3.5% por año. ¿Qué cantidad habrá acumulado en su fondo para el retiro al cabo de 15 años, sin contar comisiones?

Solución

a) ¿Cuánto es la aportación del primer año?

b) ¿Cuánto es la aportación en el segundo y tercer años?

c) ¿El fenómeno constituye una serie geométrica con base en los incisos *a)* y *b)*?

d) Considera $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$.

¿Cuál es el valor de a? ______________________.

¿Cuál es el valor de r? ______________________.

¿Cuál es el valor de n? ______________________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 2

Determina si la serie $\sum_{n=1}^{50} \dfrac{3}{5^{n-1}}$ es geométrica; si lo es, encuentra su suma.

Solución

Escribe los primeros cinco términos de la serie: ______________________________________.

La razón de la serie ¿es constante? ________. Entonces $r =$ ________________.

La serie ¿tiene suma? ________________. Encuentra la suma.

¡A trabajar!

EJERCICIO 3

Encuentra los primeros cuatro términos de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{4^n}$; determina si es geométrica, si lo es, encuentra la suma de los primeros 20 términos.

¡A trabajar!

EJERCICIO 4

¿Aceptarías este trabajo?

Suponiendo que empiezas a trabajar en una compañía que paga \$0.01 el primer día, \$0.02 el segundo día, \$0.04 el tercer día, y así sucesivamente. Si el salario diario se sigue duplicando,

a) ¿Cuál sería tu salario el 15°. día de trabajo? ¡Cuidado!, razona qué es lo que se pide, a_{15} o S_{15}.

b) ¿Cuánto habrás ganado en total por 30 días de trabajo?

¡A trabajar!

EJERCICIO 5

Los padres de un niño de 9 años han acordado depositar \$10 en la cuenta de banco de su hijo en su décimo aniversario y duplicar la cantidad del depósito cada año posterior, hasta llegar a su cumpleaños número 18.

a) ¿Cuánto dinero depositarán en su cumpleaños número 18? ¡Cuidado! Razona qué es lo que se pide: a_{18} o a_9 o S_{18} o S_9.

b) ¿Cuánto dinero habrán depositado hasta su cumpleaños número 18?

Depósitos regulares en una cuenta de ahorros

¡A trabajar!

EJERCICIO 6

Se depositan $1000 cada año en una cuenta de ahorros que produce 5% al año, compuesto anualmente. ¿Cuál es el saldo B en la cuenta de ahorros justo después del décimo depósito?

Dosis repetida de medicamento

¡A trabajar!

EJERCICIO 7

A un paciente que sufre de una infección se le recetan pastillas de ampicilina tomada en dosis de 250 mg cuatro veces al día. Se sabe que al término de las seis horas alrededor del 4% del medicamento está todavía en el cuerpo.

a) ¿Qué cantidad está en el cuerpo al tomar la quinta pastilla?

b) ¿Y la cuadragésima pastilla?

Serie geometría infinita

La forma general de una serie geométrica infinita es $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$, y en notación sigma sería $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$.

Como podrás observar, las series infinitas no tienen un último término, lo que significa que la suma de términos continúa por siempre, por lo que con toda seguridad te estás planteando la siguiente pregunta:

Las series geométricas infinitas ¿tendrán suma? Sí No ¿Qué opinas?

____

Veamos si cambias de opinión.

Ejemplo 3

La serie $\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\cdots$ es una serie geométrica infinita; veamos si tiene suma.

Escribe cada término en notación decimal; la serie queda como: ____________________.

Al sumar los términos, ¿qué decimal obtienes? ______________. Escribe ahora ese decimal como una fracción ____________________.

Conclusión: la suma de la serie $\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\cdots$ es igual a: __________.

La razón de esta serie es $r =$ ________________.

Ejemplo 4

Recuerda el análisis hecho en el ejemplo del ajedrez con la serie $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots$

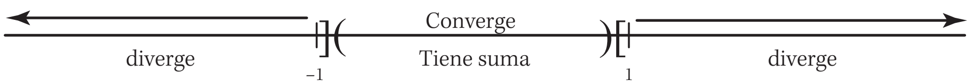
¿Tendrá suma? __________. La razón de esta serie es $r =$ __________.

De los ejemplos anteriores, vemos que la serie geométrica infinita del ejemplo 1 sí tiene suma y que su razón es menor que 1; mientras que la serie geométrica infinita del ejemplo 2 no tiene suma y que su razón es mayor que 1; esto significa que una serie geométrica infinita a veces tiene suma y a veces no: eso depende del valor de la razón de la serie. Basándonos en la fórmula de la suma de una serie geométrica, si el valor de r está entre -1 y 1, el valor para r^n se va a hacer muy pequeño, casi cero, por eso su suma se acerca a $a/(1-r)$. Y si el valor de r es mayor que uno, el valor para r^n se hará muy grande y no tendremos una suma. En el siguiente recuadro se muestran las condiciones generales que debe cumplir una serie geométrica infinita, para tener suma.

Si $-1 < r < 1$, la **suma** de la *serie geométrica infinita* está dada por la fórmula $S = \dfrac{a}{1-r}$.
Si $|r| \geq 1$, la serie geométrica infinita **no tiene suma**.

Nota: Cuando una serie infinita **tiene suma** se dice que es **convergente** y que converge a su suma. Cuando una serie infinita **no tiene suma** se dice que es **divergente**.

En particular, la serie geométrica es convergente si la razón de la serie es un número que se encuentra en el intervalo de $(-1, 1)$, y es divergente para cualquier otro valor de la razón. Observa el siguiente diagrama de convergencia para la serie geométrica.



¡A trabajar!

EJERCICIO 8

Determina si la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ tiene suma; si la tiene, encuéntrala.

Encuentra los primeros tres o cuatro términos de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Determina la razón de la serie $r =$ __________; la serie dada ¿tiene suma?. __________

Su suma es $S =$ __________

¡A trabajar!

EJERCICIO 9

Determina si la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{4^{-n}}$ tiene suma; si la tiene, encuéntrala.

Encuentra los primeros tres o cuatro términos de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{4^{-n}} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

Determina la razón de la serie $r =$ ____________: la serie dada ¿tiene suma? ____________.

Su suma es $S =$ __________.

¡A trabajar!

EJERCICIO 10

Dosis repetida de medicamento

A un paciente se le recetan inyecciones de 10 unidades de un medicamento cada 12 horas. Si el 80% del medicamento se elimina cada 12 horas,

a) ¿Qué cantidad del fármaco habrá en el cuerpo del paciente después de tres días?

b) Y, ¿si el tratamiento se continúa indefinidamente?

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 4.3

I. De las siguientes series, encuentra el término que se pide.

1. $1200 + 900 + 675 + \ldots$; 15.° término
2. $758 - 909.6 + 1091.52 - \ldots$; 23.° término
3. $-575\,000 + 115\,000 - 23\,000 + \ldots$; 12.° término
4. $2.5 + 7.75 + 24.025 + \ldots$; 20.° término

II. De las siguientes series geométricas, encuentra la suma de los primeros:

5. 30 términos de: $18 + 16.2 + 14.58 + \ldots$

6. 27 términos de: $2 + 0.8 + 0.32 + \ldots$

7. 21 términos de: $125 - 218.75 + 382.8125 - \ldots$

8. 15 términos de: $573 - 1337 + 3119.66 - \ldots$

III. Determina, de las siguientes series infinitas, si son convergentes o divergentes; si convergen encuentra su suma.

9. $6.3 - 9.45 + 14.175 - \ldots$

10. $-700 + 560 - 448 + \ldots$

11. $300 + 200 + 133.33 + \ldots$

12. $-120 - 540 - 2430 - \ldots$

13. Una persona ahorra $2500 en enero y de ahí en adelante solo ha podido ahorrar las ¾ partes de lo que ahorró el mes anterior, ¿cuánto ahorró en el mes de agosto? y ¿cuál es su ahorro total hasta ese mes?

14. Un trabajador tiene un fondo de jubilación que recibirá durante 10 años. En el primer mes la pensión será de $3000 y cada uno de los pagos posteriores incrementará en un 1%. *a)* ¿Cuánto dinero recibirá en su último pago? *b)* ¿Cuál es la cantidad total que se pagó por la jubilación?

15. El valor de un terreno aumenta cada año un 8% de su valor. Si el precio de compra fue de $320 000 en 1990, ¿cuál es el valor del terreno en 2006?

16. El valor de una maquinaría se deprecia un 3% de su valor cada año. Si el valor de compra fue de $518 000, ¿cuál será el valor de la maquinaria después de 7 años de uso?

17. Suponga que alguien le ofrece un trabajo por el cual le van a pagar $20.00 el primer día, el segundo día, $24; el tercer día, $28.8. ¿Cuánto ganará en 30 días en ese trabajo?

18. Un niño de 3 años de edad recibe una herencia de $3 000 000 por parte de sus abuelos, los cuales determinaron que se le depositará anualmente en una cuenta bancaria: el primer deposito fue de $5000 y cada año el deposito se incrementa un 18% con respecto al año anterior hasta cumplir 18 años. Si al cumplir 19 años recibe el resto de su herencia, ¿qué cantidad recibirá?

19. Las ventas de una empresa durante su primer año fueron de $348 000; el propietario tiene como objetivo incrementar las ventas anuales un 9% con respecto al año anterior; suponiendo que logra su objetivo, ¿cuántos años tienen que transcurrir para que las ventas totales sean de $3 201 751.27?

20. Una compañía genera una utilidad de \$25 000 en su primer mes. Suponga que su utilidad aumenta un 4% cada mes durante año y medio. ¿Cuántos meses deben transcurrir para que la utilidad de ese mes sea de \$37 006.11?

21. Los directivos de un equipo de futbol firmarán un contrato de \$4 800 000 por 4 años. El día de la firma se hará un primer pago de \$960 000 y 4 pagos más de \$960 000 por año.

    a) ¿Cuánto deben depositar los directivos en una cuenta bancaria, el día de la firma, para cubrir todos los pagos suponiendo que la cuenta genera intereses del 7.5 % compuesto trimestralmente durante todo el tiempo del contrato? (A esta cantidad se le llama valor presente.)

    b) ¿Cuál es el valor presente del contrato? (Esta cantidad representa lo que en realidad le costó a los directivos la contratación del jugador.)

22. Una persona ganó un premio con valor de \$5 000 000 y va a recibir \$625 000 en este momento y 7 pagos iguales a esta cantidad cada año durante 7 años. ¿Cuál es el valor presente del premio si gana intereses del 13% compuesto anualmente?

23. Obtén el valor presente de un contrato en el que se pagará \$35 000 el día de la firma y \$35 000 cada año indefinidamente; supón que el banco paga intereses del 9% anual compuesto semestralmente.

24. Obtén el valor presente de un contrato en el que se pagará \$42 000 el día de la firma y \$42 000 cada año indefinidamente; supón que el banco paga un 6% compuesto continuamente.

25. Los papás de un alumno foráneo desean rentar un departamento para su hijo, durante un año; la renta mensual es de \$3500, pero los papás desean depositar en una cuenta bancaria para asegurar el pago mensual durante ese periodo. Si el interés que paga el banco es del 15% compuesto bimestralmente, ¿cuánto tienen que depositar?

26. El departamento de Matemáticas desea rentar una fotocopiadora por un periodo de 1 año; la renta mensual es de \$3000, pero el director del departamento tiene la opción de invertir el dinero en una cuenta bancaria que paga un interés del 12% compuesto continuamente y así asegurar los pagos mensuales durante ese periodo. ¿Cuánto tiene que invertir?

27. Un estudiante recién egresado recibe dos ofertas de trabajo. La compañía A le ofrece un salario inicial de \$30 800 (anuales) con aumentos anuales garantizados de \$1250 por año durante los primeros 5 años. La compaña B le ofrece un salario inicial de \$32 000 (anuales) con aumentos anuales garantizados de 2.4% por año durante los primeros 5 años.

    a) ¿Qué compañía le ofrece el mejor salario para el cuarto año?

    b) ¿Qué compañía le ofrece más dinero durante los primeros 5 años de trabajo?

28. Un empleado va a recibir su jubilación, en la cual le dan 2 opciones, la primera es de un pago único de 1 000 000 y la segunda opción es en pagos mensuales por 5 años, en la que el primer pago será de \$4000 y los siguientes aumentarán un 5% con respecto al pago del mes anterior. ¿Cuál de las 2 opciones le da más dinero?

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 4.3

1. $a = 1200$, $r = ¾$, $a_{15} = 21.38153$
2. $a_{23} = 41\ 846.2571$
3. $a_{12} = 0.011776$
4. $a_{20} = 541\ 766\ 555$
5. $S_{30} = 172.37$
6. $S_{27} = 3.33$
7. $S_{21} = 5\ 772\ 710.274$
8. $S_{15} = 56\ 875\ 989.9355$
9. Divergente
10. Convergente a 388.888
11. Convergente a 900
12. Divergente
13. El ahorro en el mes de agosto fue de $333.70 y el ahorro total fue de $8998.87
14. *a)* 9803.12,
    b) 990 116.06
15. $1 015 094.12
16. $418 535.11
17. $23 637.63
18. $2 635 304.93
19. 7 años
20. Deben transcurrir 11 meses
21. *a)* $3 446 854.85,
    b) $4 406 854.85
22. S_8 = $3 389 131.52
23. $415 331.43

24. \$721 209.99

25. \$39 279.62

26. \$43 093.80

27. *a)* La compañía A

    b) La compañía B

28. La segunda opción

CAPÍTULO

cinco

Álgebra de matrices

5.1 Definiciones y conceptos básicos

5.2 Operaciones con matrices

5.3 Determinantes

5.4 Matriz inversa

5.5 Sistemas de ecuaciones lineales

5.6 Método de la matriz inversa

5.7 Regla de Cramer

5.8 Método de eliminación de Gauss

5.9 Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales

5.1 DEFINICIONES Y CONCEPTOS BÁSICOS

Es seguro que en muchas ocasiones has tenido la oportunidad de trabajar con matrices, quizá sin estar consciente de ello, ya que cada vez que se consulta alguna tabla, sea para saber precios de artículos, crecimiento poblacional, éxitos musicales, posición del equipo al que se apoya, calificaciones obtenidas en un curso, etc., se está utilizando una matriz.

Cuando se requiere manejar muchos datos, por naturaleza el hombre tiende a organizarlos en tablas, de tal forma que tengan significado y puedan identificarse fácilmente para realizar operaciones entre ellos. La siguiente situación ayudará a clarificar este comentario.

Construcción

Durante un fin de semana se registró la asistencia a cuatro diferentes centros de cultura de la ciudad, en los cuales se obtuvieron los siguientes datos:

Al Centro Cultural Alfa asistieron 70 adultos, 180 niños y 90 estudiantes; al Museo de Monterrey asistieron 125 adultos, 10 niños y 75 estudiantes; al Teatro de la Ciudad la asistencia fue de 250 adultos, 138 estudiantes y 30 niños más que el número de adultos; por último, en el Museo Marco se contaron 60 niños, 95 adultos y una cantidad de estudiantes igual al número de niños que asistieron al Centro Cultural Alfa. Se quiere saber:

¿Cuántos niños asistieron en total a los 4 centros de cultura?

¿Cuál de las salas de cultura tuvo mayor asistencia?

Del total de estudiantes que asistieron a los centros de cultura ese fin de semana ¿qué porcentaje asistió al Teatro de la Ciudad?

Resulta complicado querer responder a preguntas como las anteriores, debido a que los datos no están organizados adecuadamente, por lo que surge la necesidad de acomodar los datos de tal forma que se puedan manejar con mayor facilidad; por ejemplo, podemos construir una tabla como la siguiente para acomodar los datos proporcionados acerca de la asistencia a los cuatro centros de cultura durante un fin de semana. Completa la tabla.

Tabla 1. Datos de asistencia

TIPO DE PERSONA / CENTROS DE CULTURA	ADULTOS	NIÑOS	ESTUDIANTES
Centro cultural Alfa			
Museo de Monterrey			
Teatro de la Ciudad			
Museo Marco			

Observa que al tener los datos organizados es muy fácil responder a las preguntas que se plantearon inicialmente. Respóndelas:

¿Cuántos niños asistieron en total a los 4 centros de cultura? ______________ .

¿Cuál de las salas de cultura tuvo mayor asistencia? ______________ .

Del total de estudiantes que asistieron a los centros de cultura ese fin de semana ¿qué porcentaje asistió al Teatro de la Ciudad? ______________ .

Los datos en la tabla anterior quedaron organizados de tal forma que si se quitan las líneas de división, se conserva la posición relativa de cada dato y se agrupan únicamente los datos numéricos se obtendrá un arreglo rectangular de números como sigue:

$$\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \mathrm{N} & \mathrm{E} \end{array} \\
\begin{array}{r} C.C.Alfa \\ M\ Mty. \\ T.Ciudad \\ M.Marco \end{array} & \begin{bmatrix} 70 & 180 & 90 \\ 125 & 10 & 75 \\ 250 & 280 & 138 \\ 95 & 60 & 180 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Un arreglo de números como este, recibe el nombre de *matriz*.

Si se piensa en las boletas de calificaciones, la tabla de posiciones de los equipos del Torneo Mexicano de Futbol Soccer Profesional, en la tabla de los éxitos musicales de la semana, etc., en cualquiera de los casos, los datos se pueden representar por medio de una matriz; a continuación se establece la siguiente definición general.

Una *matriz* es un arreglo rectangular de números reales. Los números dentro del arreglo se llaman *elementos* de la matriz.

Nota: En este material se utilizarán únicamente números reales como elementos de una matriz; sin embargo, en general, los elementos pueden ser también números complejos, funciones, otras matrices, etcétera.

Se utilizarán los símbolos $\begin{bmatrix} & & \end{bmatrix}$ para delimitar el arreglo matricial; letras mayúsculas para nombrar a las matrices y letras minúsculas para nombrar a sus elementos.

Ejemplo 1

Los siguientes arreglos son ejemplos de matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 6 \\ 4 & 8 & 3 & -9 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & -1 \\ -1 & \mathrm{i} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -5 & 4 & 2 \\ 10 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -14 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Al conjunto de los elementos que aparecen en forma horizontal se le conoce con el nombre de *filas* o *renglones* de la matriz y se enumeran de arriba hacia abajo; a los elementos que aparecen en forma vertical se les llama *columnas* de la matriz y se enumeran de izquierda a derecha. A continuación se ejemplifica el comentario anterior.

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \textit{Columna } 1 & \textit{Columna } 2 & \textit{Columna } 3 \end{array} \\ \begin{array}{r} \textit{Renglón 1} \\ \textit{Renglón 2} \\ \textit{Renglón 3} \\ \textit{Renglón 4} \end{array} & \begin{bmatrix} 70 & 180 & 90 \\ 125 & 10 & 75 \\ 250 & 280 & 138 \\ 95 & 60 & 180 \end{bmatrix} \end{array}$$

El agrupar los elementos de una matriz en renglones o columnas tiene la ventaja de proporcionar más información que un solo elemento aislado.

Ejemplo 2

Sea $$\mathbf{D}= \begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} A & N & E \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 70 & 180 & 90 \\ 125 & 10 & 75 \\ 250 & 280 & 138 \\ 95 & 60 & 180 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{C. Alfa} \\ \text{M. Mty} \\ \text{T. Ciudad} \\ \text{Marco} \end{array} \end{array}$$

la matriz obtenida de la tabla 1.

a) ¿Qué representan los elementos del primer renglón de la matriz **D**?
b) ¿Cuál es el significado práctico de la segunda columna de **D**?

Solución

a) Los elementos del primer renglón $\begin{bmatrix} 70 & 180 & 90 \end{bmatrix}$ de la matriz **D** representa respectivamente, la cantidad de adultos, niños y estudiantes que asistieron al Centro Cultural Alfa en un fin de semana determinado.

b) La segunda columna $\begin{bmatrix} 180 \\ 10 \\ 280 \\ 60 \end{bmatrix}$ de la matriz **D** proporciona información acerca de la cantidad de niños que asistieron a cada uno de los centros de cultura.

Una de las principales ventajas de las matrices es que la posición de sus elementos queda determinada de manera única por el renglón y la columna a la que pertenecen; así, por ejemplo, si se observa la matriz anterior, puede verse que esta tiene dos elementos cuyo valor es 180; sin embargo, se deben considerar como dos datos distintos ya que su posición en la matriz, tanto el renglón como la columna son diferentes. En términos prácticos, el 180, cuya posición es renglón 1 columna 2, corresponde al número de niños que asistieron al Centro Cultural Alfa, mientras que el 180, que está en el renglón 4 columna 3, es la cantidad de estudiantes que asistieron al Museo Marco.

Nota: Siempre hay que recordar que los elementos de una matriz con posiciones diferentes proporcionan información diferente.

La posición de cada elemento de una matriz queda determinada por el renglón y la columna a la que pertenece. Para describir la posición de cada elemento a de una matriz, se utilizan dos subíndices: el primero indica siempre el renglón al que pertenece el elemento, y el segundo subíndice indica la columna. Por ejemplo, a_{12} describe al elemento que se encuentra en el renglón 1 columna 2 de una matriz **A**. De igual forma b_{35} indica que este elemento se encuentra en el renglón 3 columna 5 de una matriz **B**.

En general, la expresión a_{ij} indica que este elemento se encuentra en el renglón i columna j de una matriz.

De acuerdo con lo anterior, la forma general de una matriz **A** con m renglones y n columnas está dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Una notación alternativa para la matriz anterior es escribir entre paréntesis el elemento a_{ij} y en seguida especificar los valores que toma cada uno de los subíndices, es decir:

$\mathbf{A} = (a_{ij})$, en donde $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

El tamaño, orden o dimensión de una matriz queda determinado por el número de renglones y columnas que esta tenga.

El *orden o dimensión* de una matriz A se obtiene mencionando primero el número de renglones y después el número de columnas que contiene la matriz, como sigue:
***orden* de A = número de renglones de A × número de columnas de A**

Es decir:
Si A es una matriz que tiene *m* renglones y *n* columnas, entonces
***orden* de A = *m* × *n*.**

(La expresión *m* × *n* se lee "*m* por *n*", no se efectúa el producto).

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Determina el orden de las siguientes matrices, recuerda que primero debes mencionar el número de renglones y después el número de columnas; toma como base el ejemplo resuelto

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 6 \\ 4 & 8 & 3 & -9 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{bmatrix}$$

Número de renglones de **A** = 2
Número de columnas de **A** = 4
orden de **A** = 2 × 4

orden de **B** = ____________

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -5 & 4 & 2 \\ 10 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

orden de **C** = ____________ orden de **D** = ____________

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -14 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

orden de **E** = ____________ orden de **F** = ____________

¡A trabajar!

EJERCICIO 2

Las calificaciones de José, Lucía, Alma y Carlos en los tres exámenes de Matemáticas que han presentado son:

José obtuvo 8.75 en el primer examen, 10 en el segundo y 7.5 en el tercero; Lucía obtuvo 10 en el primero y en el tercero, pero en el segundo, 9.2; Alma reprobó el segundo examen con 6.25, pero en el primero obtuvo 7.5 y en el tercero, 8.75; Carlos obtuvo 8.75 en los primeros dos exámenes y la misma calificación que Lucía en el tercero.

Realiza lo que se pide en cada uno de los siguientes incisos:

a) Representa los datos anteriores por medio de una tabla.
b) Construye la matriz **C** de calificaciones.
c) ¿Cuál es el orden de la matriz **C**?
d) ¿Cuál es el valor del elemento c_{32} y cuál es su significado práctico?
e) ¿Cuál es el significado práctico del segundo renglón de **C**?
f) ¿Cuál es el significado práctico de la tercera columna de **C**?

Solución

a) Organiza, en la siguiente tabla, las calificaciones obtenidas por José, Lucía, Alma y Carlos en los tres exámenes que han presentado.

EXÁMENES / NOMBRES	PRIMERO	SEGUNDO	TERCERO
José			
Lucía			
Alma			
Carlos			

b) Para construir la matriz **C** de calificaciones, se omiten los encabezados y se respeta la posición de los datos:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

c) El orden de **C** se obtiene de acuerdo con el número de renglones y columnas.

Orden de **C** = ____________ .

d) El elemento $c_{32} =$ ____________ y representa ____________________

____ .

e) El segundo renglón de **C** representa ____________________

____ .

f) La tercera columna de **C** representa ____________________

____ .

Igualdad de matrices

Para que dos matrices sean iguales es necesario que sean del mismo orden y que los elementos correspondientes sean iguales, es decir, los elementos que están en la misma posición en cada matriz deben ser iguales. Por ejemplo $a_{11} = b_{11}$; $a_{21} = b_{21}$ y así sucesivamente.

Si al menos un par de elementos correspondientes es diferente, automáticamente las matrices **no** son iguales o bien si son de diferente orden, tampoco son iguales.

Sean A=(a_{ij}) y B=(b_{ij}) dos matrices del mismo orden $m \times n$; se dice que A y B son *iguales*, y se denota por A = B si y solo si se cumple que $a_{ij} = b_{ij}$ para toda $i = 1,..,m$ y para toda $j = 1,..,n$.

Ejemplo 3

Dadas las matrices **A**, **B**, **C** y **D**, decide si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

a) **A** = **B**
b) **A** = **C**
c) **C** = **D**

Solución

a) Falso. Al comparar los elementos de las matrices **A** y **B** que pertenecen a las mismas posiciones se observa que todos son diferentes.
b) Verdadero. Al comparar los elementos correspondientes de las matrices **A** y **C** se observa que todos son iguales.

c) Falso. Las matrices **C** y **D** son de orden diferente, por tanto, no son iguales

Ejemplo 4

Encuentra los valores de las variables x, y, z y w, para que se cumpla la siguiente igualdad de matrices.

$$\begin{bmatrix} z & x-3 & 0 \\ 2y+3 & 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 & w^3-1 \\ y+5 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

Las matrices dadas son del mismo orden, por tanto, para que sean iguales debe cumplirse que sus elementos correspondientes sean iguales. Lo anterior conduce a las siguientes ecuaciones:

$$z=2 \qquad x-3=9 \qquad 0=w^3-1 \qquad 2y+3 = y+5$$

Al resolver cada una de las ecuaciones anteriores se obtienen los valores buscados.

$$z=2 \qquad x=12 \qquad w=1 \qquad y=2\cdot$$

Tipos especiales de matrices

Existen matrices que poseen alguna característica que las hace distinguirse de las demás, motivo por el cual reciben nombres especiales.

En esta sección se presentarán algunas de estas matrices.

Una matriz de orden $m \times n$, se llama *matriz nula*, si todos los elementos de la matriz son ceros.

Ejemplo 5

Las siguientes matrices son ejemplos de matrices nulas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si $u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & . & . & . & u_n \end{bmatrix}$ es una matriz con un renglón y n columnas (orden $1 \times n$), entonces recibe el nombre de *matriz renglón* o *vector renglón*.

Si $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ **es una matriz con m renglones y una columna (orden $m \times 1$).**

entonces recibe el nombre de *matriz columna* o *vector columna*.

Una *M matriz cuadrada* es una matriz que tiene el mismo número de renglones que de columnas, es decir es una matriz de orden $n \times n$.

Ejemplo 6

Las matrices siguientes son ejemplos de matrices cuadradas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Nota: Es muy frecuente que cuando se habla del orden de una matriz cuadrada (n x n) se diga simplemente "*matriz cuadrada de orden n*"; por ejemplo, si **A** es una matriz 3 x 3, se puede decir simplemente que **A** es una matriz cuadrada de orden 3.

La *diagonal principal* de una matriz cuadrada A está formada por los elementos a_{ij} que cumplen la condición *i=j*; es decir, la forman los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn} y se denota por: Diag (A) = { a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn} }

Nota: Si la matriz no es cuadrada, la diagonal principal **no** existe.

Sea **A** una matriz cuadrada de orden *n*, los elementos encerrados en el recuadro forman la diagonal principal.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Diagonal principal

¡A trabajar!

EJERCICIO 3

Determina la diagonal principal de las siguientes matrices:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\\ 3 & 2 & 8\end{bmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}5 & 3 & 0 & 1\\ -1 & 3 & 4 & 2\\ 10 & 0 & 0 & 1\\ -2 & 7 & 4 & -1\end{bmatrix}\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 4 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Solución

a) Para determinar la diagonal principal, primero hay que ver que la matriz sea cuadrada. El orden de la matriz **A** es 3×3, por tanto, es cuadrada y su diagonal principal es: diag (**A**) = { 1, -1, 8 }.

b) El orden de la matriz **B** es: ____________ , entonces la matriz **B** ¿es cuadrada? ____________ .

Si tu respuesta es afirmativa, determina la diagonal principal: diag (**B**) = ______________

__________________________ .

c) El orden de la matriz **C** es: ____________ , por tanto, ¿tiene diagonal principal? __________

¿Por qué? ____ .

La *matriz identidad* es una matriz cuadrada de orden *n*, que se denota por $\mathbf{I}_n$ y que cumple con las siguientes condiciones: Todos los elementos que pertenecen a la diagonal principal deben ser 1 y todos los elementos fuera de la diagonal principal deben ser 0.

En símbolos:
Los elementos $a_{ij}=1$ para toda $i=j$, y los elementos $a_{ij}=0$ para toda $i \neq j$.

Nota: Las matrices identidad se reconocen fácilmente ya que los elementos que pertenecen a la diagonal principal siempre son unos y todos los demás elementos deben ser ceros.

Ejemplo 7

Las siguientes matrices son ejemplos de matrices identidad:

$$\mathbf{I}_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{I}_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{I}_4=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

¡A trabajar!

EJERCICIO 4

Determina si las siguientes matrices son o no matrices identidad. Justifica tu respuesta.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

si

no

Justificación

____

____

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

si

no

Justificación

___

___

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

si

no

Justificación

___

___

Una matriz A de orden $m \times n$ se dice que es una *matriz escalonada* si cumple las siguientes dos condiciones:

1. **Si hay renglones nulos, es decir, que constan exclusivamente de ceros, estos deben estar en la parte inferior de la matriz.**
2. **El primer elemento diferente de cero de un renglón (observando el renglón de izquierda a derecha) debe estar en cualquier columna a la derecha del primer elemento diferente de cero del renglón anterior, para cualquier par de renglones consecutivos.**

Y se llama *matriz escalonada reducida* si además de ser escalonada cumple las siguientes condiciones:

3. **En los renglones no nulos, el primer elemento diferente de cero (observando el renglón de izquierda a derecha) debe ser 1. Llamaremos a este elemento *pivote*.**
4. **Todos los elementos arriba y abajo del pivote deben ser cero.**

A primera vista la definición anterior parece complicada, por lo que a continuación se da una explicación más amplia de ella y se proporcionan algunos ejemplos.

Cabe aclarar que cuando una matriz no tiene renglones nulos, la condición 1 no se utiliza, por tanto, en estos casos, la matriz puede ser escalonada siempre y cuando cumpla con la otra condición.

Para explicar la condición 2, supongamos que estamos analizando los primeros dos renglones de una matriz, entonces el primer elemento diferente de cero en el renglón 2 debe estar en cualquier columna a la derecha del primer elemento diferente de cero en el renglón 1. Esto implica que los renglones 1 y 2 podrían verse, por ejemplo como sigue:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ & & & & \end{bmatrix},$$

sin embargo, el primer elemento diferente de cero en el renglón 2 puede estar en cualquier columna a la derecha de la columna en la que se encuentra el primer elemento diferente de cero del reglón 1, es decir, también sería válido que estos renglones estuvieran, por ejemplo, como sigue:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ & & & & \end{bmatrix} \text{ o bien } \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ & & & & \end{bmatrix} \text{ incluso así } \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & \end{bmatrix}$$

La expresión *"para cualquier par de renglones consecutivos"* significa que el comportamiento anterior no solo se debe de cumplir para los renglones 1 y 2, sino también para cualquier otro par de renglones, es decir, debemos verificar que este comportamiento lo cumplan los renglones 2 y 3 de la matriz, los renglones 3 y 4, y así sucesivamente, dependiendo de la cantidad de renglones que esta tenga.

Observa la siguiente matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 9 & -2 \end{bmatrix}$, los renglones 1 y 2 sí cumplen la condición 2 de la definición; sin embargo, al comparar los renglones 2 y 3, el primer elemento diferente de cero en el renglón 3 *no* se encuentra en una columna a la derecha del primer elemento diferente de cero del renglón 2: se encuentra en la misma columna, esto implica que la condición 2 falla, por tanto, concluimos que esta matriz no es escalonada.

Si en la matriz anterior el primer elemento diferente de cero en el renglón 3 se encontrara en la columna 3, 4 o 5, la matriz se vería como sigue:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & -2 \end{bmatrix} \text{ o bien } \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ o } \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

En cualquiera de los casos anteriores la condición 2 de la definición sí se cumple. Una forma visual de determinar si la condición 2 se cumple es observar que los primeros elementos diferentes de cero en cada renglón estén colocados de tal forma que vayan describiendo escalones cuya altura disminuye en un renglón al movernos de izquierda a derecha.

Las siguiente matrices son ejemplos de matrices escalonadas reducidas, ya que además de ser escalonadas cumplen las dos condiciones adicionales:

3. El pivote (primer elemento diferente de cero en cada renglón no nulo) en todos los casos es un uno.
4. Todos los elementos arriba y abajo del pivote son cero.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Una forma visual para determinar si una matriz escalonada es reducida se identifican los pivotes de la matriz y después se observa que el resto de los elementos de la columna del pivote sean cero.

Ejemplo 8

Determina si las siguientes matrices son escalonadas, escalonadas reducidas o ninguna de ellas.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución

Para clasificar las matrices como escalonadas, escalonadas reducidas, hay que verificar si cumple con las condiciones de la definición.

Matriz **A**

1. No tiene renglones nulos, por tanto, la primera condición no se aplica.
2. Al observar los renglones 1 y 2 y los renglones 2 y 3, puede comprobarse que la segunda condición también se cumple.

Hasta aquí puede asegurarse que **A** es escalonada.

3. El primer elemento diferente de cero en cada renglón es un uno, por tanto la tercera condición se cumple.
4. En las columnas 2 y 3 los elementos arriba y debajo de los pivotes no son todos cero, por tanto, la condición 4 no se cumple.

Conclusión: la matriz **A** es *escalonada*, pero no es reducida.

Matriz **B**

1. No tiene renglones nulos, por tanto, la primera condición no se aplica.
2. Al observar los renglones 1 y 2 la segunda condición es válida, pero al observar los renglones 2 y 3 se tiene que el primer elemento diferente de cero en el renglón 3 está en la misma columna que el primer elemento diferente de cero en el renglón 2, por tanto, esta condición no se cumple.

Conclusión: la matriz **B** *no es escalonada.*

Matriz **C**

1. Tiene un renglón nulo y este no aparece en la parte inferior de la matriz.

Al fallar una de las condiciones no hay necesidad de comprobar las que siguen.

Conclusión: la matriz **C** *no es escalonada.*

Matriz **D**

1. No tiene renglones nulos, por tanto, la primera condición no se aplica.

Para comprobar si se cumplen las demás condiciones podemos utilizar la forma visual, es decir, observar que los pivotes en cada renglón son unos y que estén colocados de tal forma que vayan describiendo escalones cuya altura disminuye en un renglón; además el resto de los elementos en la columna del pivote no son todos cero.

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Conclusión: la matriz **D** *es escalonada*, pero no es reducida.

Matriz **E**

1. Tiene un renglón nulo que está en la parte inferior de la matriz, por tanto, la primera condición se cumple.
2. Se observa que los renglones 1 y 2 forman un escalón.
3. Los pivotes son unos.
4. El resto de los elementos en la columna del pivote son todos cero.

Conclusión: la matriz **E**, es *escalonada reducida*.

Matriz **F**

No es escalonada, falla la condición 2.

¡A trabajar!

EJERCICIO 5

Determina si las siguientes matrices son escalonadas, escalonada reducida o ninguna de ellas. Justifica tu respuesta.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ______________________

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ ______________________

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$ ______________________

La transpuesta de una matriz

En un examen se incluyeron tres reactivos de opción múltiple. Para evaluar qué tan efectivos pudieron ser los distractores usados se determinó el número de alumnos que habían escogido cada una de las opciones. Los resultados se dan a continuación:

En el reactivo 1, 8 alumnos seleccionaron la opción A, 15 la opción B, 7 la opción C y 10 la opción E; la opción D no fue seleccionada.

En el reactivo 2 solo un alumno seleccionó la opción A, 9 alumnos la opción B, 3 la opción C, 16 la opción D y 11 la opción E.

En el reactivo 3, 12 alumnos seleccionaron la opción A, 7 alumnos la opción B, 13 la opción D y 8 la opción E; la opción C no fue seleccionada.

Esta información se puede ordenar en forma matricial como sigue:

Número de alumnos que contestaron las opciones

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 15 & 7 & 0 & 10 \\ 1 & 9 & 3 & 16 & 11 \\ 12 & 7 & 0 & 13 & 8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Reactivo 1} \\ \text{Reactivo 2} \\ \text{Reactivo 3} \end{array}$$

Sin embargo, también puede organizarse de la siguiente forma:

$$\mathbf{Q} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Reac 1} & \text{Reac 2} & \text{Reac 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 1 & 12 \\ 15 & 9 & 7 \\ 7 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & 13 \\ 10 & 11 & 8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}$$

Seguramente estarás de acuerdo en que las dos matrices proporcionan la misma información; sin embargo, no se puede decir que son iguales, ya que **no** son del mismo orden y sus elementos correspondientes **no** son iguales.

Si se observan detenidamente las dos matrices, es sencillo comprobar que los renglones de la matriz **Q** corresponden a las columnas de la matriz **P**. Similarmente, los renglones de **P** corresponden a las columnas de **Q**. Siempre que esto ocurre se dice que la matriz **Q** es la transpuesta de la matriz **P**, y viceversa.

A partir de una matriz **A** se puede definir una nueva matriz llamada transpuesta de **A**, la cual, como se verá más adelante, tiene propiedades similares a las de la matriz original.

Si $\mathbf{A} = (a_{ij})$ es una matriz de orden $n \times m$, entonces la *transpuesta* de A, denotada por $\mathbf{A}^t = (a_{ji})$ es una matriz de orden $m \times n$ cuyos renglones son las columnas de A.

Para obtener la transpuesta de una matriz **A**, los elementos de la primera columna de **A** se escriben como primer renglón de $\mathbf{A}^t$, los de la segunda columna de **A**, se escriben como segundo renglón de $\mathbf{A}^t$ y así sucesivamente hasta terminar con todas las columnas de **A**.

Ejemplo 9

Dada la matriz **A**, encuentra su transpuesta.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 10 & 7 \end{bmatrix}$$

Solución

Para encontrar la transpuesta de **A**, la primera columna de **A** se escribe como primer renglón de $\mathbf{A}^t$ la segunda columna de **A** como el segundo renglón de $\mathbf{A}^t$ y así sucesivamente hasta terminar con todas las columnas de **A**.

Lo anterior es equivalente a escribir el primer renglón de **A** como primera columna de $\mathbf{A}^t$ y el segundo renglón de **A** como la segunda columna de $\mathbf{A}^t$. En cualquiera de los dos casos se obtiene:

$$\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -1 & 10 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

¡A trabajar!

EJERCICIO 6

Encuentra la transpuesta de las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 3 & 8 & -4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & -14 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}^t =$ $\qquad$ $\mathbf{B}^t =$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -5 & 4 & 2 \\ 10 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{C}^t =$ $\qquad$ $\mathbf{D}^t =$

Propiedades de la transpuesta

Suponer que las matrices A y B son de orden tal que las operaciones pueden efectuarse.

1. $(\mathbf{A}^t)^t = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$
3. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$

Se concluirá esta sección dando las siguientes definiciones.

Se dice que una matriz cuadrada $\mathbf{A}=(a_{ij})$ es *simétrica* si y solo si $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$

Si al obtener la transpuesta de una matriz, queda igual que la matriz original, entonces se dice que es una *matriz simétrica*.

Ejemplo 10

Determina si las matrices dadas son simétricas.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & -3 \\ -7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución

Para decidir si la matriz **A** es simétrica, hay que obtener su transpuesta.

$$\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Al comparar las matrices **A** y $\mathbf{A}^t$ podrás darte cuenta de que son iguales, en conclusión, la matriz **A** es simétrica.

A continuación se presenta una forma rápida para decidir si una matriz es simétrica.

Observa los elementos que se encuentran a ambos lados de la diagonal principal de la matriz **A**, ¡son iguales!, a esto se debe que, al obtener la transpuesta, la matriz quede igual. Pues bien, siempre que esto ocurra puedes asegurar que la matriz es simétrica.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & -3 \\ -7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Si se utiliza la estrategia anterior, se puede comprobar que la matiz **A** es simétrica y rápidamente se llega a la conclusión de que las matrices **B** y **C** no son simétricas.

Se dice que una matriz cuadrada $\mathbf{A}=(a_{ij})$ es *antisimétrica* si y solo si $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^t$

De acuerdo con la definición anterior, para determinar si una matriz **A** es antisimétrica hay que encontrar su transpuesta, luego cambiar los signos de los elementos de la transpuesta y si al hacer esto queda igual que la matriz **A**, entonces se dirá que es antisimétrica.

Ejemplo 11

Determina si las matrices dadas son *antisimétricas*.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & -3 \\ -7 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Solución

Para determinar si **B** es antisimétrica, hay que encontrar $\mathbf{B}^t$ y luego cambiarle el signo a sus elementos

$$\mathbf{B}^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -7 \\ -1 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad -\mathbf{B}^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & -3 \\ -7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Al comparar los elementos de **B** con los de $-\mathbf{B}^t$, podrás darte cuenta de que son iguales, en conclusión la matriz **B** es antisimétrica.

Sin embargo, una forma rápida de verificar que esta definición se cumpla es:

1. Observa si todos los elementos de la diagonal principal de la matriz son cero y
2. Si los elementos a los lados de la diagonal principal son iguales (en valor absoluto) pero de signo contrario.

Si las características anteriores se cumplen, puedes concluir que la matriz es antisimétrica.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cancel{0} & -1 & 7 \\ 1 & \cancel{0} & -3 \\ -7 & 3 & \cancel{0} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cancel{4} & -5 \\ 2 & \cancel{8} \end{bmatrix}$$

Es fácil comprobar que la matriz **B** cumple con las condiciones anteriores y que la matriz **C** no las cumple, por tanto, la matriz **C** no es *antisimétrica*.

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.1

Para resolver los ejercicios del 1 al 6 toma como referencia las matrices siguientes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 6 \\ 4 & 8 & 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

1. Dar el orden (dimensión) de las matrices **A**, **B**, **C**, **D** y **E**.
2. Encontrar los elementos a_{23}, a_{14} de la matriz **A**.
3. Encontrar los elementos d_{12} , d_{21} de la matriz **D**.
4. Identificar a las matrices renglón.
5. Identificar a las matrices columna.
6. Identificar a las matrices cuadradas y obtener su diagonal principal.

En los ejercicios 7 y 8 encontrar los valores de x, y, z, w, k para que las matrices sean iguales.

7. $$\begin{bmatrix} x/2 & 3 & -1 \\ 4 & y^{1/2} & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x-1 & z+2 & -1 \\ 4-w & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

8. $$\begin{bmatrix} 2k & 3k & 7k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 21 & 49 \end{bmatrix}$$

Utiliza la siguiente definición para determinar cuáles de las matrices dadas en los ejercicios 9 a 12 son matrices triangulares superiores.

Una matriz A se dice que es *triangular superior* si cumple con las siguientes dos condiciones:
a) **A es cuadrada.**
b) **Todos los elementos abajo de la diagonal principal de A son cero.**

9. $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

10. $$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$

11. $$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

12. $$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota: Si en una matriz cuadrada se cumple que los elementos que se encuentran arriba de la diagonal principal todos son cero, se dice que la matriz es *triangular inferior*.

En los ejercicios 13 a 17 determina si las afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica la respuesta cuando sea correcta y da la respuesta correcta cuando sea falsa.

13. La matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ es una matriz identidad de orden 2. ____________________

14. La matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz escalonada. ____________________

15. La matriz nula tiene que ser una matriz cuadrada. ______________________

16. La matriz $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ no es escalonada. ______________________

17. La matriz triangular superior es escalonada. ______________________

18. Un pequeño club deportivo desea conocer la distribución de sus miembros de acuerdo con sus edades y en relación con el sexo. Se obtuvieron los siguientes datos:

    25 hombres y 17 mujeres mayores de 60 años; 40 hombres y 35 mujeres con edad entre 40 y 59 años; 183 hombres y 215 mujeres con edad entre 20 y 39 años; 320 hombres y 312 mujeres con edad entre 0 y 19 años.

    a) Construye una matriz **D** de distribución de miembros del club y da su orden.
    b) Determina los elementos d_{12}, d_{31}, d_{43} y da su interpretación práctica.
    c) Da la interpretación práctica de la segunda columna de la matriz **D**.
    d) ¿Cuántos miembros hay en total, con edad entre 20 y 39 años?
    e) Del total de miembros del club, ¿qué porcentaje son hombres?

19. La siguiente tabla muestra la cantidad de estudiantes que viajaron en el Expreso Tec, en la ruta Anáhuac durante las mañanas del lunes 6, miércoles 8 y viernes 10 de noviembre de 1995 [1].

	HORARIO	LUNES 6 DE NOV.	MIÉRCOLES 8 DE NOV.	VIERNES 10 DE NOV.
LLEGADAS	8:30	19	18	20
	9:30	8	9	12
	11:05	5	7	6
	12:05	9	14	11

    a) Construye una matriz **A** de los estudiantes que viajaron en la ruta Anáhuac, los días mencionados.
    b) ¿Cuál es el orden de la matriz **A**?
    c) ¿Cuál es el significado práctico del elemento a_{13}?
    d) ¿Cuál es el significado práctico de la tercera columna?

20. Una compañía tiene las ventas mensuales de sus productos expresados como matrices cuyos renglones representan el número de modelos: regular (R), de lujo (L) y superlujo (S) que se vendieron, y cuyas columnas indican el número de unidades rojas (r), blancas (b), azules (a) y moradas (m) que se vendieron. Las matrices para los meses de enero (E) y febrero (F) son:

$$E = \begin{array}{c} \begin{matrix} r & b & a & m \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 6 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ R \\ L \\ S \end{matrix} \qquad F = \begin{array}{c} \begin{matrix} r & b & a & m \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \\ R \\ L \\ S \end{matrix}$$

[1] Datos proporcionados por el Dr. Eusebio Olivo Suárez.

a) ¿Cuántos modelos blancos de superlujo se vendieron en enero?
b) ¿Cuántos modelos azules de lujo se vendieron en febrero?
c) ¿En qué mes se vendieron más modelos regulares morados?
d) ¿De cuál modelo y color se vendió el mismo número de unidades en ambos meses?

Encuentra la transpuesta de las matrices dadas en los ejercicios 21 a 24.

21. $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -8 \end{bmatrix}$

22. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

23. $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

24. $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 5.1

1. Orden de **A**: 2×4
   Orden de **B**: 2×2
   Orden de **C**: 1×1
   Orden de **D**: 1×3
   Orden de **E**: 3×1

2. $a_{23}=3,\ a_{14}=6$

3. $d_{12} = 0,\ d_{21}=$no hay

4. Las matrices **C** y **D**
5. Las matrices **C** y **E**
6. La matriz **B**; **diag** (**B**) = {1,0}
   La matriz **C**; **diag** (**C**) = {2}

7. $x=\dfrac{2}{9},\ y=16,\ z=1,\ w=0$

8. $k = 7$
9. Si es triangular superior
10. No es triangular superior, ya que no es cuadrada.
11. Sí es triangular superior
12. Sí es triangular superior
13. Falso
14. Verdadero
15. Falso
16. Verdadero
17. Falso

18. *a)* Primero se puede construir la tabla para organizar los datos:

EDADES \ SEXO	HOMBRES	MUJERES
0-19	320	312
20-39	183	215
40-59	40	35
60- +	25	17

La matriz **D** puede quedar como sigue:

$$\begin{array}{c} \\ \\ \mathbf{D} = \end{array} \begin{array}{c} \text{Sexo} \\ \begin{array}{cc} \text{H} & \text{M} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 320 & 312 \\ 183 & 215 \\ 40 & 35 \\ 25 & 17 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{Edades} \\ 0-19 \\ 20-39 \\ 40-59 \\ 60 \rightarrow \end{array}$$

b) d_{12} = 312 es el número de mujeres con edad entre 0 y 19 años.
d_{31} = 40 es el número de hombres con edad entre 40 y 59 años.
d_{43} = no existe, ya que la matriz **D** solo tiene dos columnas.

c) La segunda columna de la matriz **D** representa la distribución de mujeres (que son miembros del club), de acuerdo con su edad.

d) Para obtener el total de miembros con edad entre 20 y 39 años, se suman los elementos del segundo renglón de la matriz **D**, dando un total de 398.

e) 49.52%

19. *a)* Para construir la matriz **A** de los estudiantes que viajaron en la ruta Anáhuac, se omiten los encabezados y se respeta la posición de los datos.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 19 & 18 & 20 \\ 8 & 9 & 12 \\ 5 & 7 & 6 \\ 9 & 14 & 11 \end{bmatrix}$$

b) El orden de **A** es igual a 4×3.

c) a_{13} = 20 significa que a las 8:30 de la mañana del día viernes 10 de noviembre viajaron 20 estudiantes en el Expreso Tec en la ruta Anáhuac.

d) La columna tres representa las cantidades de estudiantes que viajaron en el Expreso Tec en la ruta Anáhuac el día viernes 10 de noviembre en el periodo de las 8:30 a.m. a las 12:05 p.m.

20. *a)* 7 *b)* 3 *c)* febrero *d)* modelo de lujo y color azul.

21. $\mathbf{C}^t = \begin{bmatrix} -8 \end{bmatrix}$

22. $\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

23. $\mathbf{J}^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

24. $\mathbf{R}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.2 OPERACIONES CON MATRICES

Así como se pueden realizar operaciones entre números reales, funciones, conjuntos, etc. también se pueden efectuar operaciones entre matrices que se definirán en esta sección.

Antes de definir formalmente cada una de las operaciones entre matrices se dará un ejemplo como motivación.

Suma de matrices

Ejemplo 1

Un proveedor de equipo computacional distribuye 3 tipos de computadoras Macintosh: Classic II (C II), LC II y LC III en dos poblaciones A y B.

Las siguientes matrices muestran la cantidad de computadoras, de cada tipo, recibidas en cada una de las poblaciones durante los meses de enero (**E**), febrero (**F**) y marzo (**M**).

$$\mathbf{E} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{C II} & \text{LC II} & \text{LC III} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 20 & 40 \\ 5 & 30 & 50 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array} \qquad \mathbf{F} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{C II} & \text{LC II} & \text{LC III} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 15 & 30 & 50 \\ 10 & 20 & 40 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array} \qquad \mathbf{M} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{C II} & \text{LC II} & \text{LC III} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 25 & 45 \\ 14 & 25 & 45 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}$$

a) ¿Cuántas computadoras Classic II se recibieron durante el primer trimestre del año en la población A?

b) ¿Cuántas computadoras LC III se recibieron en la población B durante el primer trimestre del año?

c) ¿Cuántas computadoras de cada tipo se recibieron en total en cada una de las poblaciones durante estos tres meses?

Solución

a) Al observar las matrices, se ve que los datos contenidos en la primera columna de cada una de ellas corresponden al número de computadoras Classic II que se recibieron en cada una de las poblaciones. Por lo que, para responder a la primer pregunta, basta con sumar los elementos $e_{11} = 10$, $f_{11} = 15$ y $m_{11} = 12$, obteniendo 37 computadoras Classic II, recibidas en la población A.

b) Siguiendo un proceso similar al inciso *a)*, el número total de computadoras LC III recibidas en la población B durante los meses de enero, febrero y marzo se obtienen sumando los elementos $e_{23} = 50$, $f_{23} = 40$ y $m_{23} = 45$:

$$e_{23} + f_{23} + m_{23} = 135 \text{ computadoras LC III en la población B.}$$

c) Para determinar la cantidad total de computadoras de cada tipo recibidas en las poblaciones A y B durante estos tres meses, bastará con sumar los elementos correspondientes de cada matriz. El resultado será nuevamente una matriz llamada matriz Suma:

$$\mathbf{E}+\mathbf{F}+\mathbf{M}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{C II} & \text{LC II} & \text{LC III} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 37 & 75 & 135 \\ 29 & 75 & 135 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{A} \\ \text{B} \end{array}$$

Esto conduce a la siguiente definición.

Suma de matrices

Si $\mathbf{A}=(a_{ij})$ y $\mathbf{B}=(b_{ij})$ son dos matrices del mismo orden $m \times n$, entonces la **suma** de **A** y **B**, denotada por **A**+**B** es nuevamente una matriz $m \times n$, que se define como sigue: $\mathbf{A}+\mathbf{B}=(a_{ij}+b_{ij})$ para todos los valores $i=1,\ldots, m$ y $j=1,\ldots, n$.

Es decir, los elementos de la matriz **A**+**B** se obtienen sumando los elementos correspondientes de las matrices **A** y **B**. En forma explícita:

$$\text{Si } \mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

$$\text{entonces } \mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Nota: Si las matrices no son del mismo orden, entonces no pueden sumarse.

Producto de una matriz por un escalar

Ejemplo 2

Los precios mínimos en dólares, para los modelos ‘96[1] de los autos Cavalier (C), Neón (N) y Grand Marquis (G) están dados por la siguiente matriz de precios **P**.

$$\mathbf{P}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{C} & \text{N} & \text{G} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 11{,}000 & 10{,}500 & 22{,}500 \end{bmatrix} \end{array}$$

Suponiendo que la paridad del dólar es \$7.9 por dólar, ¿cuál es el precio de cada auto en pesos?

[1] Fuente: Periódico *EL NORTE*/Sección Automotriz/Diciembre 2 de 1995.

Solución

Para obtener los precios en pesos de cada auto, basta con multiplicar el precio en dólares de cada uno por el factor de conversión 7.9.

Hay que estar conscientes de que al hacer esto la nueva matriz de precios en pesos ya no se puede llamar **P**, porque sus elementos tendrán un valor de 7.9 veces los elementos de **P**. Si **N** es la matriz de precios en pesos entonces, **N** = 7.9 **P**, es decir,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathrm{C} & \mathrm{N} & \mathrm{G} \end{array} \\ \mathbf{N} = & \begin{bmatrix} 7.9(11000) & 7.9(10500) & 7.9(22500) \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 86900 & 82950 & 177750 \end{bmatrix}$$

Esta operación recibe el nombre de *multiplicación* o *producto por escalar*, ya que se realiza entre una matriz y un número. La definición formal queda como sigue:

Producto por un escalar

Sea $\mathbf{A}=(a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$ y k un número real. Para multiplicar una matriz **A** por el escalar $\boldsymbol{k}$, se denota por $\boldsymbol{k}\mathbf{A}$ y se define como sigue:

$$\boldsymbol{k}\mathbf{A} = (ka_{ij}) \qquad i = 1,..., m \text{ y } j = 1,..., n.$$

La manera de interpretar la definición anterior es que si una matriz es multiplicada por un número k, entonces todos los elementos de la matriz deberán multiplicarse por ese número. En forma explícita, la definición queda:

$$\text{Si } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \text{entonces} \quad \boldsymbol{k}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 3

Dadas las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 12 \\ -5 & -6 & 12 \\ 3 & 0 & -8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix},$$

encontrar:

a) 2**B** + **A** *b)* – **A**+3**B** *c)* **U**+**V**

Solución

a) Primero para encontrar la matriz 2**B**, se multiplica cada término de la matriz **B** por 2 y después se le suma la matriz **A**:

$$2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 16 & 24 \\ -10 & -12 & 24 \\ 6 & 0 & -16 \end{bmatrix}, \text{ por tanto, } \mathbf{A} + 2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & 18 & 20 \\ -5 & -6 & 32 \\ 9 & 0 & -16 \end{bmatrix}.$$

b) Al igual que el inciso anterior, se encuentran primero las matrices –**A** y 3**B**, y después se suman:

$$-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 4 \\ -5 & -6 & -8 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad 3\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9 & 24 & 36 \\ -15 & -18 & 36 \\ 9 & 0 & -24 \end{bmatrix}$$

Sumando estas dos matrices se obtiene la matriz buscada:

$$-\mathbf{A} + 3\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 22 & 40 \\ -20 & -24 & 28 \\ 6 & 0 & -24 \end{bmatrix}.$$

c) Las matrices **U** y **V** no son del mismo orden, por tanto, no pueden sumarse.

Ejemplo 4

Dadas las matrices **A** y ***k*A**, encontrar el valor de ***k***:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad k\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12 & -9 \\ 24 & -6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución

Al comparar los valores de los elementos de las matrices anteriores, se deduce que si la matriz **A** se multiplica por el escalar 3, se obtiene la matriz ***k*A**, así que, el valor de ***k*** es 3.

Producto de matrices

Normalmente se piensa que para multiplicar matrices basta con multiplicar los elementos correspondientes de cada una de ellas. Sin embargo, la definición de esta operación no es tan obvia; además, se realiza bajo ciertas restricciones. Se ilustrará el comentario anterior mediante algunos sencillos ejemplos.

Ejemplo 5

La matriz **C** muestra las calificaciones obtenidas por Lucía en cada uno de los exámenes del curso de Matemáticas II, y la matriz **P** contiene las ponderaciones que le dio el maestro a cada uno de los exámenes, para elaborar la nota final del curso.

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1^\circ & 2^\circ & 3^\circ & \text{final} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 9.2 & 10 & 9.5 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \mathbf{P} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 10\% \\ 20\% \\ 30\% \\ 40\% \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1^\circ \\ 2^\circ \\ 3^\circ \\ \text{final} \end{array} \qquad \text{o bien} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

¿Cuál va a ser la calificación final de Lucía en el curso de Matemáticas II?

Solución

Para obtener la calificación final **F** de Lucía, primero habrá que multiplicar cada una de las calificaciones de Lucía por la ponderación correspondiente, es decir, hay que multiplicar el primer elemento de la matriz **C** por el primer elemento de la matriz **P,** el segundo elemento de **C** por el segundo elemento de **P**, y así sucesivamente hasta terminar y después sumar todos estos productos. Al hacer esto, se está multiplicando la matriz **C** por la matriz **P**:

$$\mathbf{F} = \mathbf{CP} = \begin{bmatrix} 10 & 9.2 & 10 & 9.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 10(0.1) + 9.2(0.2) + 10(0.3) + 9.5(0.4) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 9.64 \end{bmatrix}$$

Por lo que la calificación final obtenida por Lucía en el curso será 9.64.

Nota: Observa que para obtener la calificación final de Lucía, no fue suficiente multiplicar cada una de sus calificaciones por la ponderación correspondiente, todavía fue necesario sumar estos productos.

¡Reflexiona!

El orden de la matriz de calificaciones **C** es: ______________________.

El orden de la matriz de ponderaciones **P** es: ______________________.

¿Qué relación hay entre el número de columnas de la matriz **C** y el número de renglones de la matriz **P**? ______________________.

Si faltara la calificación del examen final, ¿podríamos haber obtenido la calificación final obtenida por Lucía en el curso? _________ y ¿si faltara alguna de las ponderaciones? ______________________.

Conclusión

Para que el producto de matrices **CP** se pueda efectuar es necesario que se cumpla la condición:

número de columnas de **C** = *número de renglones de* **P**.

Para comprobar que esta condición se cumple, puedes hacer lo siguiente:

escribe las matrices en el orden en que se van a multiplicar y abajo de cada una de ellas anota su orden, como se muestra en el esquema inferior.

$$\underset{1\times 4}{\mathbf{C}}\ \underset{4\times 1}{\mathbf{P}} = \underset{1\times 1}{\mathbf{F}}$$

iguales

Así es muy fácil comprobar que el número de columnas de **C** es igual al número de renglones de **P**.

Además también se puede observar que la matriz resultante **F**, tiene el mismo número de renglones que la matriz **C** y el mismo número de columnas que la matriz **P.**

Aquí surge una pregunta: ¿qué pasa si la matriz de calificaciones **C** tiene más renglones? La respuesta se dará, por lo pronto, con otro ejemplo.

Ejemplo 6

Supón ahora que se tienen las calificaciones de José y Lucía, con las mismas ponderaciones del ejemplo 5.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1° & 2° & 3° & \text{final} \end{array} \\ \mathbf{C} = & \begin{bmatrix} 8.75 & 10 & 7.5 & 7.5 \\ 10 & 9.2 & 140 & 9.5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{J} \\ \text{L} \end{array}$$

¿Cuál será la matriz de calificaciones finales **F**, de José y Lucía?

¿Cuál es el orden de la matriz de calificaciones finales **F**?

Solución

Primero debemos comprobar si puede efectuarse el producto entre estas dos matrices, analizando el orden de cada matriz $\underset{2\times 4}{\mathbf{C}}\ \underset{4\times 1}{\mathbf{P}}$ como se cumple que el número de columnas de **C** es igual al número

iguales

de renglones de **P**, se concluye que la multiplicación de matrices **CP** puede realizarse.

Al efectuar la multiplicación, se seguirá un proceso similar al del ejemplo anterior, solo que se deberá tener cuidado de que la calificación final de cada uno quede en el renglón que les corresponda, es decir, la calificación de José deberá escribirse en la posición f_{11} de la matriz **F**; mientras que la de Lucía se colocará en la posición f_{21}.

$$\mathbf{F} = \mathbf{CP} = \begin{bmatrix} 8.75 & 10 & 7.5 & 7.5 \\ 10 & 9.2 & 10 & 9.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 8.75(0.1) & + & 10(0.2) & + & 7.5(0.3) & + & 7.5(0.4) \\ 10(0.1) & + & 9.2(0.2) & + & 10(0.3) & + & 9.5(0.4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.13 \\ 9.64 \end{bmatrix}$$

Así que la matriz de calificaciones finales de José y Lucía es $\mathbf{F} = \begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 8.13 \\ 9.64 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{J} \\ \text{L} \end{matrix} \end{array}$

Es fácil saber que José obtuvo 8.13 como nota final, mientras que Lucía obtuvo 9.64. Además, el orden de la matriz **F** es 2×1.

Nota: En el siguiente esquema se puede observar la relación que existe entre el número de renglones y columnas de la matriz resultante **F** con la cantidad de renglones y columnas de las matrices **C** y **P**, respectivamente.

$$\underset{2\times 4}{\mathbf{C}} \quad \underset{4\times 1}{\mathbf{P}} \quad = \quad \underset{2\times 1}{\mathbf{F}}$$

Obsérvese que nuevamente el número de renglones de **F** es igual al número de renglones de la matriz **C**, lo mismo ocurre con el número de columnas de **P** y **F**.

Considera ahora el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ es una matriz 2×3 y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$ es una matriz 3×2, determina si es válido efectuar el producto de matrices **AB**; si lo es, encuentra la matriz **AB**.

Solución

Para decidir si el producto **AB** puede realizarse, primero hay que determinar el orden de cada una de las matrices que se van a multiplicar y verificar si el número de columnas de **A** es igual al número de renglones de **B**:

$$\underset{2\times 3}{\mathbf{A}} \quad \underset{3\times 2}{\mathbf{B}}$$

iguales

Del esquema anterior podemos concluir que el producto **AB** sí puede realizarse y además, que el orden de la matriz resultante **AB** será 2×2.

Para obtener el elemento que está en el renglón 1 y columna 1 de la matriz **AB** se deben "multiplicar en forma ordenada" los elementos del renglón1 de la matriz **A** por los elementos de la columna 1 de la matriz **B**, y se deberán sumar estos productos.

Nota: ***Multiplicar en forma ordenada*** significa multiplicar el primer elemento de un renglón de la matriz **A** por el primer elemento de una columna de la matriz **B**; el segundo elemento del renglón por el segundo elemento de la columna, y así sucesivamente hasta terminar con todos los elementos del renglón y la columna seleccionados.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

Así que, para obtener el elemento que está en el renglón 2 y columna 1 de la matriz **AB**, se deberán multiplicar en forma ordenada los elementos del renglón 2 de **A** por los elementos de la columna1 de **B**, y la suma de estos productos será el elemento buscado.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \text{elemento}_{11} & \text{elemento}_{12} \\ \underbrace{a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}}_{\text{elemento}_{21}} & \text{elemento}_{22} \end{bmatrix}$$

De manera similar se deben obtener los otros elementos.

$$\mathbf{A\,B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

El resultado de la multiplicación de las matrices A y B queda como sigue:

$$\mathbf{A\,B} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 8

Dadas las matrices $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ encontrar el producto **QP**.

Solución

Primero se debe comprobar si el producto está definido, es decir, si se puede efectuar. Para ello se hará un esquema, escribiendo las matrices de acuerdo con el producto que se pide; debajo de cada una de ellas se pondrá su orden.

$$\underset{1\times 3}{\mathbf{Q}}\ \underset{3\times 2}{\mathbf{P}}$$

iguales

Como el número de columnas de **Q** es igual al número de renglones de **P**, entonces se concluye que el producto **QP** sí se puede efectuar y además el orden de la matriz resultante será de 1 × 2.

Al multiplicar en forma ordenada, la matriz renglón **Q** por la primera columna de **P** y sumar estos productos, se obtiene el elemento −7, que está en el primer renglón y primera columna de la matriz producto **QP**; de manera similar se obtiene el otro elemento.

$$\mathbf{QP} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{QP} = \begin{bmatrix} -1(3) + 2(4) + 6(-2) & -1(-1) + 2(0) + 6(8) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{QP} = \begin{bmatrix} -7 & 49 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 9

Encuentra el producto **PQ** de las matrices dadas si es posible:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 8 & -3 \\ 0 & 10 & -4 \end{bmatrix}$$

Solución

La matriz **P** es de orden 2 × 3 y la matriz **Q** es de orden 2 × 3 y el producto que se pide es **PQ**; al crear el esquema de verificación para el producto se tiene:

$$\underset{2\times 3}{\mathbf{P}} \quad \underset{2\times 3}{\mathbf{Q}}$$

iguales

Se observa que el número de columnas de **P** es diferente del número de renglones de **Q** así que el producto **PQ** no se puede obtener, es decir, no existe.

A continuación se da la definición general del producto de matrices

Producto de matrices

Si $\mathbf{A} = (a_{ij})$ es una matriz $m \times n$ y $\mathbf{B} = (b_{ij})$ es una matriz $n \times p$, entonces el ***producto*** de **A** y **B**, denotado por **AB**, es una matriz **C** de orden $m \times p$ cuyos elementos se obtienen multiplicando en forma ordenada los elementos de cada renglón de la matriz **A** por los elementos de cada columna de la matriz **B** y sumando estos productos, es decir:

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \boxed{c_{ij}} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \cdot & c_{mp} \end{bmatrix}$$

donde

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1}; \quad c_{1p} = a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \ldots + a_{1n}b_{np}.$$

Y en general $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$.

Cabe recordar que para que el producto de 2 matrices se pueda realizar es necesario que **el número de columnas de la primera matriz por multiplicar sea igual que el número de renglones de la segunda matriz**; si esta condición **no se cumple**, se concluye que el producto **no se puede efectuar**, o bien, que el producto no existe.

Si se quiere obtener un elemento específico de la matriz **C** = **AB**, por ejemplo si se quiere el elemento c_{23}, no es necesario obtener todos los elementos de la matriz producto: basta con multiplicar en forma ordenada los elementos del renglón 2 de **A** por los elementos de la columna 3 de **B** y, al sumar dichos productos, se obtiene el valor del elemento buscado.

Analiza el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10

Sean $\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ dos matrices cuyo producto **PQ** se puede efectuar. Si al producto **PQ**, lo denotamos con la letra **R**, es decir, **R** = **PQ**, encuentra los elementos que se piden de la matriz **R**.

a) r_{32} *b)* r_{21} *c)* r_{11}

Solución

Para el producto de matrices **PQ** estamos seguros de que se puede efectuar, debido a que se cumple la condición *número de columnas de* **P** = *número de renglones de* **Q**.

Observa el esquema

$$\underset{3\times 2}{\mathbf{P}}\ \underset{2\times 2}{\mathbf{Q}}$$

Además podemos asegurar que el orden de la matriz resultante **R** es 3 × 2.

a) Para encontrar el elemento r_{32} basta con multiplicar en forma ordenada los elementos del renglón 3 de la matriz **P** por los elementos de la columna 2 de la matriz **Q** y luego sumar estos productos, es decir:

$$\mathbf{R} = \mathbf{PQ} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ \boxed{1 \quad 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}} \\ 0 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \\ r_{31} & \boxed{r_{32}} \end{bmatrix}$$

$$r_{32} = (1)(-1) + (1)(2) = 1.$$

b) Para obtener r_{21} se multiplican en forma ordenada los elementos del renglón 2 de **P** y por los elementos de la columna 1 de **Q**, y se suman estos productos:

$$r_{21} = (-1)(4) + (2)(0) = -4.$$

c) Multiplicando en forma ordenada los elementos del renglón 1 de **P** por los elementos de la columna 1 de **Q**, y sumando estos productos, se obtiene:

$$r_{11} = (3)(4) + (0)(0) = 12.$$

A medida que las matrices por multiplicar empiezan a ser de mayor tamaño, esta operación se vuelve algo complicada de realizar, debido a que se confunde con relativa facilidad el renglón y la columna que se están multiplicando.

Una alternativa para evitar ese tipo de confusiones se explica mediante el ejemplo dado a continuación.

Ejemplo 11

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, encontrar **AB**, si es posible.

Solución

Primero hay que decidir si el producto que se pide puede efectuarse.

A es una matriz de orden 4 × 2 y el orden de la matriz **B** es 2 × 3; se observa que el número de columnas de **A** es igual al número de renglones de **B**, y por tanto, el producto **AB** puede efectuarse y el resultado será una matriz 4 × 3.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\_\_) & (\_\_) & (\_\_) \\ (\_\_) & (\_\_) & (\_\_) \\ (\_\_) & (\_\_) & (\_\_) \\ (\_\_) & (\_\_) & (\_\_) \end{bmatrix}$$

Se sabe que para obtener cada uno de los elementos de la matriz producto **AB**, se debe multiplicar ordenadamente cada renglón de **A** por cada columna de **B** y cada vez se deberán sumar dichos productos. Dependiendo de qué renglón de **A** y qué columna de **B** que se hayan multiplicado, será la posición que ocupe este elemento en la matriz **AB**. Para evitar errores al momento de colocar dicho elemento, se sugiere como siguiente paso dibujar ejes coordenados, al hacerlo obtenemos cuatro cuadrantes:

$$\begin{array}{c|c} \mathbf{II} & \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{III} & \mathbf{IV} \end{array}$$

Ahora en el cuadrante III se coloca la matriz **A** (que es el factor izquierdo) y en el cuadrante I se coloca la matriz **B** (que es el factor derecho):

$$\begin{array}{c|c} & \mathbf{B} \\ & \begin{bmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ \hline \mathbf{A} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & \end{array}$$

Lo anterior trae como consecuencia que el cuadrante IV se pueda cuadricular de acuerdo con el número de renglones de **A** y el número de columnas de **B**.

$$\begin{array}{cc|c|c|c} & & 4 & 6 & -1 \\ & & 0 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & & & \\ \hline -1 & 1 & & & \\ \hline 1 & 6 & & & \\ \hline 2 & 3 & & & \end{array}$$

Cabe recordar que la matriz producto **AB** tiene el mismo número de renglones que **A** y el mismo número de columnas que **B**; así que los elementos de la matriz **AB** serán los que se obtengan en el cuadrante IV al multiplicar ordenadamente cada renglón de la matriz en el cuadrante III por cada columna de la matriz en el cuadrante I.

Matriz **B** / Matriz **A**	$\begin{matrix}4\\0\end{matrix}$	$\begin{matrix}6\\-1\end{matrix}$	$\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}$
		Matriz **AB**	
1 2	1(4) + 2(0)	1(6) + 2(−1)	1(−1) + 2(2)
−1 1	−1(4) + 1(0)	−1(6) + 1(−1)	−1(−1) + 1(2)
1 6	1(4) + 6(0)	1(6) + 6(−1)	1(−1) + 6(2)
2 3	2(4) + 3(0)	2(6) + 3(−1)	2(−1) + 3(2)

Por tanto, al realizar las operaciones en cada una de las celdas del cuadrante IV, se obtiene que la matriz producto **AB** queda como sigue:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 \\ -4 & -7 & 3 \\ 4 & 0 & 11 \\ 8 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 12

Dadas las matrices $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 8 & -3 \\ 0 & 10 & -4 \end{bmatrix}$, encontrar el producto $\mathbf{P}^t\mathbf{Q}$, si es posible.

Solución

Primero obtenemos $\mathbf{P}^t$ escribiendo los renglones de la matriz **P** como columnas, al hacerlo nos queda: $\mathbf{P}^t = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

En segundo lugar hay que encontrar tanto el orden de $\mathbf{P}^t$ como el de **Q**.

Vemos que $\mathbf{P}^t$ es de orden 3×2 y que **Q** es de orden 2×3, de donde se concluye que el número de columnas de **P** es igual al número de filas de **Q**, y, por tanto, el producto puede ser calculado.

Utilizando la estrategia dada en el ejemplo anterior se tiene:

Matriz **Q** / Matriz $\mathbf{P}^t$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 8 \\ 10 \end{matrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$
		Matriz **AB**	
5 –6	$5(-1) + (-6)(0)$	$5(8) + (-6)(10)$	$5(-3) + (-6)(-4)$
–1 0	$-1(-1) + 0(0)$	$-1(8) + 0(10)$	$-1(-3) + 0(-4)$
0 3	$0(-1) + 3(0)$	$0(8) + 3(10)$	$0(-3) + 3(-4)$

$$P^tQ = \begin{bmatrix} -5 & -20 & 9 \\ 1 & -8 & 3 \\ 0 & 30 & -12 \end{bmatrix}$$

Cuando multiplicamos números reales, sabemos que siempre se cumple la siguiente propiedad "el orden de los factores no altera el resultado del producto", esto significa que si **A** y **B** son dos números reales cualesquiera, entonces la igualdad **AB** = **BA** es válida.

La propiedad anterior no es válida para matrices. Analiza el siguiente ejemplo.

Ejemplo 13

Dadas las matrices **A** y **B**, determina si la igualdad **AB** = **BA** es válida.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

Solución

Antes de obtener cualquier producto de matrices, se debe determinar si el producto de ellas existe o no.

En este caso se hará un esquema de verificación para cada uno de los productos que se piden.

$$\underset{1\times 3}{\mathbf{B}} \; \underset{3\times 2}{\mathbf{A}} \qquad\qquad \underset{3\times 2}{\mathbf{A}} \; \underset{1\times 3}{\mathbf{B}}$$

$$\text{iguales} \qquad\qquad \text{diferentes}$$

De acuerdo con los resultados anteriores se tiene que el producto **AB** *no* existe; mientras que el producto **BA** sí existe, por tanto, se concluye que para las matrices dadas, la igualdad **AB** = **BA** es falsa.

El ejemplo anterior nos conduce a un resultado importante.

> **El producto de matrices no es conmutativo**, ya que si **A** es una matriz de orden $m \times n$ y **B** es una matriz de orden $n \times p$, el producto **AB** sí se puede efectuar; sin embargo, el producto **BA** no se puede realizar; observa el esquema:

$$\underset{n\times p}{\mathbf{B}}\ \underset{m\times n}{\mathbf{A}} \qquad\qquad \underset{m\times n}{\mathbf{A}}\ \underset{n\times p}{\mathbf{B}}$$

diferentes   iguales

El resultado anterior significa que un producto de matrices puede existir; pero si invertimos el orden de sus factores, el nuevo producto pudiera no existir.

Además, aunque las matrices fueran cuadradas y los productos **AB** y **BA** se pudieran efectuar, en general **AB** ≠ **BA**.

Analiza el siguiente ejemplo.

Ejemplo 14

Sí $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, comprueba que **AB** ≠ **BA**.

Solución

Las matrices dadas **A** y **B** son cuadradas de orden 2, por tanto los productos **AB** y **BA** se pueden efectuar. Se utilizará la estrategia del ejemplo 11 para obtener los productos buscados.

$$\begin{array}{c|c}
 & \text{Matriz } \mathbf{B} \\
 & \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \\ \hline
\text{Matriz } \mathbf{A} & \text{Matriz } \mathbf{AB} \\
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|c}
 & \text{Matriz } \mathbf{A} \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \\ \hline
\text{Matriz } \mathbf{B} & \text{Matriz } \mathbf{BA} \\
\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Como $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$, entonces **AB** ≠ **BA**.

Ejemplo 15

Una fábrica de chocolates recibe un pedido de 850 chocolates con relleno de cereza y 900 chocolates macizos. El director de producción decide la cantidad (de cada tipo de chocolate) que ha de producirse en cada una de las tres plantas. La siguiente matriz muestra cómo se distribuirá la producción:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{rellenos} & \text{macizos} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 5000 & 200 \\ 100 & 450 \\ 250 & 250 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Planta 1} \\ \text{Planta 2} \\ \text{Planta 3} \end{array}$$

Para fabricar cada tipo de chocolate se requieren tres diferentes tipos de ingredientes: cacao, cobertura y cerezas. La cantidad requerida de cada ingrediente para fabricar un chocolate de cada tipo está dada por la siguiente matriz:

$$\mathbf{I} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{rellenos} & \text{macizos} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 4 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{cacao (g)} \\ \text{cobertura (g)} \\ \text{cerezas} \end{array}$$

Utiliza el producto de matrices para encontrar la cantidad de ingredientes requerida por cada una de las plantas.

Solución

Primero hay que determinar qué producto de matrices es el que se debe efectuar para obtener lo que se pide. Si se quisiera saber la cantidad de material que requiere la planta 1, se multiplicaría el primer renglón de la matriz **P** por cada uno de los renglones de la matriz **I**, pero eso no concuerda con la definición de producto de matrices, ya que deberían multiplicarse los renglones de una por las columnas de la otra. Sin embargo, si se obtiene la transpuesta de **I**, la información no se altera y los renglones de **I** quedan como columnas de $\mathbf{I}^t$, así que el producto a efectuar sería $\mathbf{PI}^t$ (el lector puede verificar que el producto $\mathbf{P}^t\mathbf{I}$ también resuelve el problema). Utilizando el procedimiento del ejemplo 11 se tiene:

			CACAO 0.5 1	COBERTURA 4 4	CEREZAS 1 0
P1	P relleno 500	macizo 200	500(0.5) + 200(1)	500(4) + 200(4)	500(1) + 200(0)
P2	100	450	100(0.5) + 450(1)	100(4) + 450(4)	100(1) + 450(0)
P3	250	250	250(0.5) + 250(1)	250(4) + 250(4)	250(1) + 250(0)

La matriz de ingredientes requeridos por cada una de las plantas es:

$$\mathbf{PI}^t = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{cacao} & \text{cobertura} & \text{cerezas} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 450 & 2800 & 500 \\ 500 & 2200 & 100 \\ 375 & 2000 & 250 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Producción 1} \\ \text{Producción 1} \\ \text{Producción 1} \end{array}$$

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Un agricultor tiene tres diferentes tierras donde cultiva calabazas, aguacates, tomates y cebollas. Cuando estos son cosechados se distribuyen en cajas para que sean vendidos, la tabla muestra el número de cajas cosechadas de cada tipo de verdura.

SEMBRADÍO	CALABAZAS	AGUACATES	TOMATES	CEBOLLAS
1	125	215	420	280
2	98	178	340	210
3	75	135	520	190

Supón que el agricultor venda cada caja de calabazas a \$110, la caja de aguacates por \$600, la caja de tomate por \$350 y la caja de cebollas por \$120. Encuentra cual es el ingreso total para el agricultor, utiliza el producto de matrices.

(Fuente: http://www.campomexicano.gob.mx/portal_siap/Integracion/EstadisticaDerivada/InformaciondeMercados/Mercados/snim/edob1101.htm)

a) ¿Cuál será el orden de la matriz que represente la cantidad de cajas por verdura? __________

b) Construye la matriz para el número de cajas cosechadas de verduras.

c) ¿Cuál será el orden de la matriz que representa el precio por caja según el tipo de verdura?

____

d) Construye la matriz para el precio por caja de verdura.

e) Plantea el producto de matrices que ayude a determinar el ingreso total para el agricultor y resuélvelo.

¡A trabajar!

EJERCICIO 2

Karla compró 7 pantalones, 9 camisas, 9 pares de calcetines y 4 suéteres. Si los pantalones tienen un costo de $850 cada uno, las camisas $650 cada una, los pares de calcetines $120 el par y cada suéter $1200, usa el producto de matrices para representar la cantidad total que Karla gastó en la ropa y encuentra esa cantidad.

a) ¿Cuál es el orden de la matriz que representa la cantidad de ropa? ______________.

b) Construye la matriz del inciso *a).*

c) ¿Cuál es el orden de la matriz que representa los precios? ______________.

d) Construye la matriz del inciso *b).*

e) Plantea el producto de matrices que te ayude a resolver este problema y encuentra la cantidad total de dinero que Karla gastó.

¡A trabajar!

EJERCICIO 3

Un empleado realiza tres actividades diferentes en una empresa y por cada una de esas actividades gana \$12.50, \$8.5 y \$11.25, respectivamente, por hora y en pesos. El número de horas que trabajó en cada actividad en un periodo de tres semanas está dado por la siguiente matriz:

$$\begin{array}{cc} \text{Actividades} & \\ \begin{array}{ccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 13 & 15 & 2 \\ 9 & 13 & 24 \\ 19 & 11 & 14 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{semana 1} \\ \text{semana 2} \\ \text{semana 3} \end{array} \end{array}$$

Calcula el ingreso total del empleado.

a) ¿Qué orden tiene la matriz del pago por hora? ____________________.

b) Construye la matriz de los pagos por hora.

c) Plantea el producto de matrices y resuelve.

Propiedades de las operaciones con matrices

Supón que las matrices son de los órdenes apropiados para que las operaciones indicadas puedan efectuarse.

A, **B** y **C** representan matrices, mientras que k y p son escalares.

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$
2. $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$
3. $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$
4. $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$
5. $(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA}+\mathbf{CA}$
6. $\mathbf{A}(\mathbf{B}-\mathbf{C}) = \mathbf{AB}-\mathbf{AC}$
7. $(\mathbf{B}-\mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA}-\mathbf{CA}$
8. $k(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = k\mathbf{B}+k\mathbf{C}$
9. $k(\mathbf{B}-\mathbf{C}) = k\mathbf{B}-k\mathbf{C}$
10. $(k+p)\mathbf{C} = k\mathbf{C}+p\mathbf{C}$
11. $(k-p)\mathbf{C} = k\mathbf{C}-p\mathbf{C}$
12. $(kp)\mathbf{C} = k(p\mathbf{C}) = p(k\mathbf{C})$
13. $k(\mathbf{BC}) = (k\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{B}(k\mathbf{C})$

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.2

En los ejercicios 1 a 5 realiza las operaciones indicadas con las matrices dadas.

1. Si $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, encontrar $\mathbf{VU} + \mathbf{W}$

2. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$, encontrar $\mathbf{A}^2 - 11\mathbf{A} + 10\,\mathbf{I}_3$

3. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, encontrar $\mathbf{AB} - \mathbf{CD}^t$.

4. Si $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y si la matriz $\mathbf{R}$ es igual a la matriz $\mathbf{PQ}$, es decir $\mathbf{R} = \mathbf{PQ}$, encontrar los elementos $\mathbf{R}_{21}$, $\mathbf{R}_{32}$ y $\mathbf{R}_{12}$ de la matiz producto $\mathbf{R}$.

5. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -7 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$, encontrar una matriz $\mathbf{D}$ para la cual se cumpla que $2\mathbf{A} + \mathbf{B} - 2\mathbf{C}^t + \mathbf{D}$ sea la matriz nula de orden 3×2.

6. Las siguientes matrices muestran la cantidad de alumnos que viajaron en el Expreso Tec en la ruta Anáhuac (matriz **A**), Valle 2 (matriz **V2**) y Galerías 1 (matriz **G1**) durante la mañanas de los días lunes 6, miércoles 8 y viernes 10 de noviembre de 1995. [3]

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{lunes} & \text{miércoles} & \text{viernes} \\ \text{06 de nov.} & \text{08 de nov.} & \text{10 de nov.} \end{array} \\ \mathbf{A} = & \begin{bmatrix} 19 & 18 & 20 \\ 8 & 9 & 12 \\ 5 & 7 & 6 \\ 9 & 14 & 11 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 8:30 \\ 9:30 \\ 11:05 \\ 12:05 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{lunes} & \text{miércoles} & \text{viernes} \\ \text{06 de nov.} & \text{08 de nov.} & \text{10 de nov.} \end{array} \\ \mathbf{V2} = & \begin{bmatrix} 32 & 33 & 35 \\ 33 & 36 & 32 \\ 30 & 31 & 24 \\ 32 & 34 & 36 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 8:30 \\ 9:30 \\ 11:05 \\ 12:05 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{lunes} & \text{miércoles} & \text{viernes} \\ \text{06 de nov.} & \text{08 de nov.} & \text{10 de nov.} \end{array} \\ \mathbf{G1} = & \begin{bmatrix} 33 & 33 & 28 \\ 28 & 28 & 23 \\ 11 & 16 & 14 \\ 23 & 21 & 18 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 8:30 \\ 9:30 \\ 11:05 \\ 12:05 \end{array} \end{array}$$

[3] Datos proporcionados por el Dr. Eusebio Olivo

Obtener una matriz que contenga la cantidad total de alumnos que se transportaron en estas tres rutas, clasificados en los días y horarios previamente señalados.

7. El precio de los productos A, B y C están dados, en ese orden, por la matriz de precios:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix}.$$

Si se aumentan los precios en 10%, la matriz con los nuevos precios se puede obtener multiplicando la matriz **P** por un escalar ¿cuál?

8. Un distribuidor de automóviles (A), vagonetas (V) y camiones (C) tiene agencias en dos diferentes poblaciones P_1 y P_2.

En las siguientes matrices aparece la cantidad (P) de de cada tipo de vehículo, recibida durante los meses de octubre (**O**), noviembre (**N**) y diciembre (**D**) en cada una de las poblaciones.

$$\mathbf{O} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{V} & \text{C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 38 & 9 & 22 \\ 49 & 14 & 24 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \end{array} \quad \mathbf{N} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{V} & \text{C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 33 & 7 & 21 \\ 45 & 9 & 21 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \end{array} \quad \mathbf{D} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{V} & \text{C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 43 & 10 & 28 \\ 51 & 8 & 26 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \end{array}$$

a) ¿Cuántos vehículos de cada tipo se recibieron en total en cada una de las poblaciones durante el último trimestre del año?

b) Supón que los costos de adquisición (CA) y los gastos generales (G) de los vehículos están dados en dólares por la matriz **P**

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{CA} & \text{G} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 9300 & 340 \\ 15400 & 500 \\ 22900 & 660 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A \\ V \\ C \end{array}$$

Efectuar el producto **OP**.

¿Cuál es el significado práctico de la matriz producto **OP**?

9. Pronóstico de las elecciones.[4]

La siguiente matriz **P** contiene porcentajes de electores, clasificados por distrito que, según las proyecciones, votarán por los diferentes candidatos al puesto de alcalde (de los partidos demócrata, republicano e independiente).

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \text{Distrito} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.40 & 0.35 & 0.30 & 0.50 & 0.30 & 0.36 \\ 0.42 & 0.40 & 0.25 & 0.30 & 0.30 & 0.32 \\ 0.18 & 0.25 & 0.45 & 0.20 & 0.40 & 0.32 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Demócrata} \\ \text{Republicano} \\ \text{Independiente} \end{array}$$

[4] Frank S. Budnick, *Matemáticas Aplicadas a la Administración, Economía y Ciencias Sociales*, 3era. edición, McGraw- Hill.

Las estimaciones actuales de la cantidad de electores para cada distrito, que se espera que voten, aparecen en la matriz **V**.

$$\mathbf{V} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 30000 \\ 60000 \\ 70000 \\ 45000 \\ 55000 \\ 40000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Distrito 1} \\ \text{Distrito 2} \\ \text{Distrito 3} \\ \text{Distrito 4} \\ \text{Distrito 5} \\ \text{Distrito 6} \end{array}$$

a) Realiza un pronóstico del resultado de las elecciones.

b) ¿Qué candidato tiene una ventaja de más de 10 000 votos sobre los otros candidatos?

10. Planeación de necesidades de partes [5]

Una superrefaccionaria de partes de automóviles con sucursales en toda la república mexicana desea planear sus necesidades de inventario para el próximo año. La matriz **N** muestra la cantidad de automóviles clasificados por tamaño en las distintas regiones del país.

$$\begin{array}{cc} & \text{Tamaño} \\ & \begin{array}{ccc} \text{Mediano} & \text{Compacto} & \text{Subcompacto} \end{array} \\ \mathbf{N} = & \begin{bmatrix} 16000 & 40000 & 50000 \\ 15000 & 30000 & 20000 \\ 10000 & 10000 & 15000 \\ 12000 & 40000 & 30000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{Este} \\ \text{Oeste medio} \\ \text{Sur} \\ \text{Oeste} \end{array}$$

La matriz **R** que se muestra en seguida contiene el número promedio de unidades de repuesto que demanda cada tamaño de automóvil durante el año.

$$\begin{array}{cc} & \text{Tamaño} \\ & \begin{array}{ccc} \text{Mediano} & \text{Compacto} & \text{Subcompacto} \end{array} \\ \mathbf{R} = & \begin{bmatrix} 1.7 & 1.6 & 1.5 \\ 12.0 & 8.0 & 5.0 \\ 0.9 & 0.75 & 0.5 \\ 4.0 & 6.5 & 6.0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{Bandas de ventilador} \\ \text{Bujías} \\ \text{Acumuladores} \\ \text{Llantas} \end{array}$$

Por ejemplo, para la primera columna un automóvil de tamaño mediano demanda en promedio 1.7 bandas de ventilador, 12 bujías en promedio, 0.9 acumuladores y finalmente demanda 4 llantas en promedio durante el año.

a) La interpretación práctica para la matriz $\mathbf{R}^t$ ¿es la misma que para la matriz **R**? Justificar.

---

(5) *Ídem.*

b) Obtén una estimación de la cantidad de cada una de las partes que se necesitarán en la región Este.

c) Obtén una estimación de la cantidad de bujías que se necesitarán en cada una de las diversas regiones.

d) Obtén una matriz **P** que muestra la cantidad de partes de cada tipo que se necesitarán en cada una de las diferentes regiones.

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 5.2

1. $\mathbf{UV} + \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{A}^2 - 11\,\mathbf{A} + 10\,\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{AB} - \mathbf{CD}^t = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 9 \end{bmatrix}$

4. $r_{21} = 20, r_{32} = 1, r_{12} = 5$

5. $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 3 & -2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$

6. $$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \text{lunes} & \text{miércoles} & \text{viernes} \\ \text{6 de nov.} & \text{8 de nov.} & \text{10 de nov.} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 84 & 84 & 83 \\ 69 & 73 & 67 \\ 45 & 54 & 44 \\ 64 & 69 & 65 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 8:30 \\ 9:30 \\ 11:05 \\ 12:05 \end{array} \end{array}$$

7. El escalar k=1.1

8. *a)* $\mathbf{O} + \mathbf{N} + \mathbf{D} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{V} & \text{C} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 114 & 26 & 71 \\ 145 & 31 & 71 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \end{array} \end{array}$

b) $\mathbf{OP} = \begin{bmatrix} 995\ 800 & 31\ 940 \\ 1\ 220\ 900 & 39\ 500 \end{bmatrix} \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \end{matrix}$

9. *a)* $\begin{bmatrix} 107\ 400 \\ 96\ 900 \\ 95\ 700 \end{bmatrix}$

b) demócrata

10. *a)* sí

b)

Bandas del Ventilador	Bujías	Acumuladores	Llantas
166 200	762 000	69 400	624 000

c) $\begin{array}{cl} \text{Bujías} & \\ \begin{bmatrix} 762\ 000 \\ 520\ 000 \\ 275\ 000 \\ 614\ 000 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{Este} \\ \text{Oeste} \\ \text{Medio} \\ \text{Sur} \end{matrix} \end{array}$

d) $\mathbf{P} = \mathbf{NR}^t = \begin{array}{cc} \begin{matrix} \text{Bandas del ventilador} & \text{Bujías} & \text{Acumuladores} & \text{Llantas} \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} 166\ 200 & 762\ 000 & 69\ 400 & 624\ 000 \\ 103\ 500 & 520\ 000 & 46\ 000 & 375\ 000 \\ 55\ 500 & 275\ 000 & 24\ 000 & 195\ 000 \\ 129\ 400 & 614\ 000 & 55\ 800 & 488\ 000 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{Este} \\ \text{Oeste} \\ \text{Medio} \\ \text{Sur} \end{matrix} \end{array}$

5.3 DETERMINANTES

Funciones como $f(x)=x^2$, $g(x)=e^x$, $h(x)=\ln x$ se conocen con el nombre de *funciones de variable real*, porque los valores tanto de la variable de entrada como de la variable de salida son números que pertenecen al conjunto de los reales.

En esta sección se presentará una nueva función llamada función ***determinante*** que pertenece al tipo de funciones de variable matricial debido a que en esta función la variable de entrada debe ser una matriz cuadrada, mientras que la variable de salida seguirá siendo un número real. Observa el siguiente diagrama:

$$A_{n\,x\,n} \longrightarrow \boxed{\textit{función}} \longrightarrow \text{número real}$$

Al número real de salida se le llama determinante de **A** y se denota por det(**A**), o bien escribiendo el nombre de la matriz entre dos barras paralelas verticales, es decir |**A**|.

Usando esta notación el esquema anterior quedaría como sigue:

$$A_{n\,x\,n} \longrightarrow \boxed{\textit{función}} \longrightarrow \det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}|$$

Esta función tiene como dominio al conjunto de matrices cuadradas y como imagen al conjunto de los números reales.

Nota: El símbolo |**A**| no debe interpretarse como el valor absoluto de la matriz **A**; simplemente es otra forma de denotar al determinante de una matriz.

El ***valor del determinante*** de una matriz cuadrada **A** (orden $n \times n$) se obtiene al sumar todos los posibles productos distintos, que pueden formarse al tomar un elemento, y solamente uno, de cada renglón y de cada columna; estos productos van precedidos por los signos "+" o "−", dependiendo si el número de inversiones que presentan los subíndices es par o impar.

La descripción verbal para obtener el valor del determinante de una matriz la mayoría de las veces es difícil comprenderla de inmediato, motivo por el cual, se han desarrollado diferentes estrategias para obtenerlo, dependiendo del orden de la matriz.

A continuación se darán las definiciones para obtener los determinantes de matrices de orden 2 y 3.

Determinante de orden 2

Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ una matriz de orden 2 × 2; entonces el determinante de **A** se define como sigue: $\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

El siguiente esquema te pude ayudar a recordar dicha definición.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$a_{12}a_{21} \qquad a_{11}a_{22}$$

Esto significa que para obtener el determinante de una matriz de orden 2 × 2 se deben multiplicar los elementos de la diagonal principal y a este producto se le resta el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

Ejemplo 1

Encuentra el determinante de cada una de las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Solución

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (3)(2) - (4)(-1) = 6 + 4 = 10$$

$$(4)(-1) \qquad (3)(2)$$

$$\det(\mathbf{B}) = \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = (-5)(9) - (7)(0) = -45$$

Ejemplo 2

Si $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} k-2 & 3 \\ 2 & k-3 \end{bmatrix}$, encuentra el valor (o valores) de k que hacen que el det($\mathbf{P}$)=0.

Solución

Por un lado se tiene que la matriz **P** es una matriz de orden 2 × 2, por tanto, al obtener su determinante se tiene que:

$$\det(\mathbf{P}) = (k-2)(k-3) - 6;$$

por otro lado, queremos que se cumpla la condición que el determinante de **P** sea cero, es decir, det($\mathbf{P}$) = 0, así que al igualar estas dos expresiones obtenemos:

$$(k-2)(k-3) - 6 = 0.$$

Al efectuar el producto del lado izquierdo de la igualdad nos queda:

$$k^2 - 5k + 6 - 6 = 0;$$

al simplificar se obtiene $k^2 - 5k = 0$, al factorizar el lado izquierdo de la igualdad, se tiene $k(k-5) = 0$ esto implica que $k = 0$ y $k = 5$ son los valores buscados.

Desafortunadamente, la definición anterior solo es útil para obtener el determinante de una matriz de orden 2×2; motivo por el cual se da la siguiente definición.

Determinante de orden 3

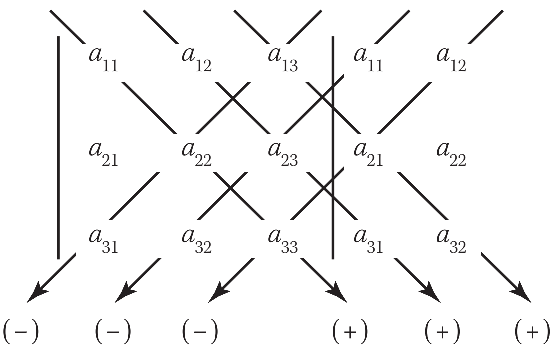
Sea $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ una matriz de orden 3×3. El determinante de $\mathbf{A}$ se define como sigue:

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Puede verse claramente que esta definición es bastante más complicada que la anterior; una manera de recordarla sin tener que memorizarla es aplicar la siguiente estrategia:

Se agregan a la derecha del arreglo las primeras dos columnas y luego realiza los productos de los elementos de acuerdo con el siguiente esquema:



en el cual las líneas diagonales acompañadas del signo (+) significan que los elementos que se encuentran sobre cada una de ellas deben multiplicarse, y a los resultados de dichos productos se les antepone el signo "+" ; análogamente, los elementos que se encuentran sobre cada una de las líneas diagonales con signo (–) se multiplican, y al resultado de cada producto se le antepone el signo "–"; por último, se suman algebraicamente todos los productos obtenidos.

Nota : El esquema anterior, conocido como *Regla de Sarrus*, es válido únicamente para matrices de 3×3.

Ejemplo 3

Encuentra el determinante de las matrices dadas:

a) $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & -8 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ *b)* $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ *c)* $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 11 \\ -15 & 3 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$

Solución

a) La matriz **S** es de orden 3 × 3, por tanto, para encontrar su determinante se repiten las dos primeras columnas al lado derecho del determinante y se aplica el esquema anterior. Recuerda, a los productos de los elementos sobre las líneas paralelas a la diagonal principal se les antepone el signo "+", y a los productos de los elementos correspondientes a las líneas paralelas a la diagonal secundaria se les antepone el signo "–".

$$\det(\mathbf{S}) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 6 & -8 & 1 & 6 & -8 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right.$$

$$-(-2)(-8)(0) - (3)(1)(3) - (0)(6)(4) + (3)(-8)(4) + (0)(1)(0) + (-2)(6)(3)$$

Al sumar algebraicamente todos los productos anteriores, se obtiene el valor del determinante.

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{S}) &= -(-2)(-8)(0) - (3)(1)(3) - (0)(6)(4) + (3)(-8)(4) + (0)(1)(0) + (-2)(6)(3) \\ &= -0 - 9 - 0 - 96 + 0 - 36 \\ &= -141 \end{aligned}$$

b) La matriz **T** es de orden 3 × 3, por tanto, para encontrar su determinante se escriben al lado derecho del determinante las primeras dos columnas y se aplica el esquema anterior.

$$\det(\mathbf{T}) = \left|\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 9 & 0 & 4 \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{T}) &= (0)(-1)(9) + (2)(1)(0) + (5)(3)(4) - (5)(-1)(0) - (0)(1)(4) - (2)(3)(9) \\ &= 0 + 0 + 60 - 0 - 0 - 54 \\ &= 6 \end{aligned}$$

c) Como la matriz **P** no es cuadrada, entonces det(**P**) no existe.

Si se observan las definiciones dadas para determinantes de orden 2 y 3, puede verse que cada uno de los productos contiene uno y solamente un elemento de cada renglón y cada columna y que dichos productos van precedidos por un signo, ya sea "+" o "−", lo cual es congruente con lo que se mencionó al inicio de este tema respecto a la forma de obtener el valor de un determinante.

Cuando las matrices son de orden 4 × 4 o de órdenes mayores, se utiliza un método llamado ***desarrollo por cofactores*** para obtener el valor del determinante; sin embargo, también se puede utilizar para obtener determinantes de matrices de orden 3 × 3.

Antes de explicar en que consiste dicho método, es necesario definir algunos conceptos.

Si **A** es una matriz cuadrada de orden $n \times n$, entonces el ***menor del elemento*** $\boldsymbol{a_{ij}}$, denotado por $\mathbf{M}_{ij}$, se define como el determinante de la submatriz de orden $(n-1) \times (n-1)$ que se forma al suprimir el renglón i y la columna j de la matriz **A**.

De acuerdo con la definición anterior, cada elemento de una matriz tiene asociado un menor, los subíndices del menor indican la posición del elemento al que corresponde, así como también el renglón y la columna de la matriz que se deberán eliminar para obtener el menor. Una matriz tiene tantos menores como elementos contenga dicha matriz. Por ejemplo, si la matriz es de orden 2 × 2, entonces tiene cuatro elementos y en consecuencia tiene cuatro menores.

Ejemplo 4

Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & -8 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, encuentra los menores que se piden.

a) $\mathbf{M}_{23}$ *b)* $\mathbf{M}_{31}$ *c)* $\mathbf{M}_{22}$

Solución

a) Para obtener $\mathbf{M}_{23}$ (es decir, el menor del elemento a_{23}) hay que eliminar los elementos del renglón 2 y la columna 3 de la matriz **A**, al hacerlo se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & \cancel{-2} \\ \cancel{6} & \cancel{-8} & \cancel{1} \\ 0 & 3 & \cancel{4} \end{bmatrix}$$

Ahora se deberá calcular el valor del determinante de la submatriz que se obtiene con los elementos que quedaron, es decir:

$$M_{23} = \det\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

b) El menor $\mathbf{M}_{31}$ se obtiene eliminando el renglón 3 y la columna 1 de la matriz **A** y después se encuentra el determinante de la matriz resultante, es decir:

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} = 0-(-2)(-8)=-16$$

c) De igual forma, el menor $\mathbf{M}_{22}$ se obtiene eliminando los elementos del renglón 2 y la columna 2 de la matriz **A**, para después encontrar el valor del determinante de la matriz resultante, es decir:

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 12-0 = 12$$

Ejemplo 5

Dada la matriz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, encuentra los menores que se piden.

a) $\mathbf{M}_{11}$ *b)* $\mathbf{M}_{22}$

Solución

a) Para obtener $\mathbf{M}_{11}$ (es decir, el menor del elemento b_{11}) se elimina el renglón 1 y la columna 1 de la matriz **B**, al hacerlo se obtiene:

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Ahora se deberá obtener el valor del determinante de la **submatriz** resultante:

$$\mathbf{M}_{11} = \det[3] = 3.$$

Nota: Cuando la matriz es de orden 1x1 el valor del determinante es igual al elemento.

b) Procediendo en forma análoga al inciso anterior se tiene:

$$\mathbf{M}_{22} = \det[-1] = |-1| = -1.$$

Al igual que ocurre con los menores, cada elemento de una matriz también tiene asociado otro número llamado *cofactor*, cuya definición se da a continuación.

El ***cofactor*** del elemento a_{ij}, denotado por $\mathbf{C}_{ij}$ se define como el número $\mathbf{C}_{ij} = (-1)^{i+j}\,\mathbf{M}_{ij}$ donde $\mathbf{M}_{ij}$ es el menor del elemento.

La expresión $(-1)^{i+j}$ a veces impresiona, confunde y, por tanto, no se comprende; sin embargo, recuerda que las letras i y j indican el número de renglón y columna a los que pertenece el elemento, así que al sumarlos, el resultado $i + j$ será un número que puede ser par o impar. Por tanto, si $i + j$ es par se tiene que -1 al elevarlo a un número par siempre da como resultado 1, es decir : $(-1)^{par} = 1$, análogamente si $i + j$ es impar se tiene que -1 elevado a una potencia impar siempre da como resultado -1, es decir $(-1)^{impar} = -1$.

De la reflexión anterior podemos concluir que el cofactor se obtiene a partir del menor, anteponiéndole un signo que puede ser positivo o negativo, dependiendo de la posición en que se encuentre el elemento. Es decir:

$$C_{ij} = \begin{cases} -M_{ij} & si \quad i + j \quad es \;\; impar \\ M_{ij} & si \quad i + j \quad es \;\; par \end{cases}$$

Ejemplo 6

Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 3/4 & 1/5 & -1/7 \\ 0 & -1 & 2/3 \end{bmatrix}$, encuentra los cofactores que se piden.

a) $\mathbf{C}_{21}$ *b)* $\mathbf{C}_{11}$ *c)* $\mathbf{C}_{32}$ *d)* $\mathbf{C}_{33}$

Solución

a) $\mathbf{C}_{21}$ significa que debemos encontrar el cofactor del elemento que se encuentra en el renglón 2 columna 1 de la matriz **A**. Para obtenerlo debemos encontrar el menor de dicho elemento y determinar el signo que hay que anteponerle. Observamos que la suma de los subíndices, 2 + 1 = 3, es un número impar, por tanto, al menor se le antepone el signo menos, es decir, se cumple que:

$$\mathbf{C}_{21} = -\mathbf{M}_{21}$$

Así que, al eliminar el renglón 2 y la columna 1 de la matriz **A** para encontrar el menor, la igualdad anterior queda como sigue:

$$\mathbf{C}_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2/3 \end{vmatrix} = -\left(\frac{2}{3} + 0\right) = -\frac{2}{3}$$

b) $\mathbf{C}_{11}$ denota al cofactor del elemento que se encuentra en el renglón 1 columna 1 de la matriz **A**.

Para obtenerlo debemos encontrar el menor de dicho elemento y determinar el signo que hay que anteponerle. Observamos que la suma de los subíndices, 1 + 1 = 2, es un número par, por tanto, al menor se le antepone signo positivo, esto indica que el cofactor y el menor de este elemento son iguales, es decir:

$$\mathbf{C}_{11} = \mathbf{M}_{11}$$

$$\mathbf{C}_{11} = \begin{vmatrix} 1/5 & -1/7 \\ -1 & 2/3 \end{vmatrix} = \left(\frac{2}{15} - \frac{1}{7}\right) = -\frac{1}{105}$$

c) Para determinar el cofactor $\mathbf{C}_{32}$ debemos primero encontrar el menor del elemento que se encuentra en el renglón 3 columna 2 de la matriz **A** y para determinar el signo que hay que anteponerle a dicho menor, observamos que la suma de los subíndices 3 + 2 = 5 es un número impar, por tanto, se antepone el signo menos, es decir:

$$\mathbf{C}_{32} = -\,\mathbf{M}_{32}$$

$$\mathbf{C}_{32} = -\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 3/4 & -1/7 \end{vmatrix} = -\left[8\left(-\frac{1}{7}\right) - 0\right] = \frac{8}{7}$$

d) Para determinar el cofactor C_{33} hay que encontrar el menor $\mathbf{M}_{33}$. La suma de los subíndices es par o impar __________ por tanto, el signo que se debe anteponer al menor es __________.

¿Qué renglón de la matriz **A** debes eliminar? __________. Y ¿qué columna? __________.
Por tanto, se cumple que $\mathbf{C}_{33} = \mathbf{M}_{33}$.

Al eliminar el renglón 3 y la columna 3 de la matriz **A** para obtener el menor se tiene:

$$\mathbf{C}_{33} = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 3/4 & 1/5 \end{vmatrix} = \frac{8}{5} - \frac{3}{4} = \frac{17}{20}.$$

Ejemplo 7

Si la matriz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, encontrar los cofactores que se piden.

a) $\mathbf{C}_{42}$ *b)* $\mathbf{C}_{34}$

Solución

a) A pesar de que la matriz es de mayor orden(4×4), el razonamiento empleado en el ejemplo anterior sigue siendo válido, por lo que para determinar el cofactor $\mathbf{C}_{42}$ debemos encontrar el menor del elemento que se encuentra en el renglón 4 columna 2 de la matriz **B** y hay que anteponerle a dicho menor signo positivo debido a que la suma de los subíndices 4+2 = 6 es un número par, por tanto, se tiene que $\mathbf{C}_{42} = \mathbf{M}_{42}$.

Al eliminar el renglón 4 columna 2 de la matriz **B** se tiene que hay que calcular un determinante de orden 3, cuyo valor puede obtenerse utilizando la estrategia de agregar las primeras dos columnas a la derecha.

$$\mathbf{C}_{42} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 0 + 12 - 12 - 0 - 0 = -4$$

b) Para determinar el cofactor $\mathbf{C}_{34}$ seguimos un razonamiento similar al anterior, solo que ahora el menor deberá ir precedido por el signo "–" ya que la suma de los subíndices $3 + 4 = 7$ es un número impar. Esto implica que $\mathbf{C}_{34} = -\mathbf{M}_{34}$. Al eliminar el renglón 3 columna 4 de la matriz **B** se obtiene:

$$\mathbf{C}_{34} = -\begin{vmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(4 - 12 + 0 - 0 - 0 - 18) = 26.$$

Ejemplo 8

Si la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, encontrar los cofactores que se piden.

a) $\mathbf{C}_{11}$ *b)* $\mathbf{C}_{12}$ *c)* $\mathbf{C}_{13}$

Solución

a) Como la suma de los subíndices del cofactor $\mathbf{C}_{11}$ es un número par, sabemos que se cumple que $\mathbf{C}_{11} = \mathbf{M}_{11}$ por lo que al eliminar el renglón 1 columna 1 de la matriz **A** se tiene que:

$$\mathbf{C}_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}.$$

b) Al sumar los subíndices del cofactor $\mathbf{C}_{12}$ se tiene un resultado impar; esto implica que $\mathbf{C}_{12} = -\mathbf{M}_{12}$ así que al eliminar el renglón 1 columna 2 de la matriz **A** se obtiene:

$$\mathbf{C}_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}).$$

Al multiplicar cada uno de los términos que está dentro del paréntesis por el signo negativo se obtiene:

$$\mathbf{C}_{12} = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}.$$

c) Utilizando un razonamiento similar a los anteriores para obtener el cofactor $\mathbf{C}_{13}$ se tiene que $\mathbf{C}_{13} = \mathbf{M}_{13}$, así que al eliminar el renglón 1, columna 3 de la matriz **A** se obtiene:

$$\mathbf{C}_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}.$$

A continuación se explicará en qué consiste el método de **desarrollo por cofactores** para obtener el determinante de una matriz **A**. La explicación por facilidad se hará para una matriz de orden 3 × 3, sin embargo, el método se puede aplicar para matrices de cualquier orden.

Partiremos de la definición que se dio para encontrar el determinante de una matriz cuadrada **A** de orden 3.

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

La definición anterior consta de seis términos y puede escribirse de manera diferente si se hace lo siguiente: del primero y del último término se saca como factor común al elemento a_{11}; del segundo y del penúltimo término se saca como factor común al elemento a_{12} y de los términos centrales se saca como factor común al elemento a_{13}; al hacerlo se obtiene:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) + a_{12}\left(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right).$$

Al observar los elementos encerrados en cada paréntesis y compararlos con los resultados del ejemplo anterior vemos que corresponden al cofactor del elemento que aparece como factor común, por lo que podemos concluir que:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}\,.$$

Lo anterior indica que el determinante de la matriz **A** se puede obtener multiplicando los elementos del primer renglón por sus cofactores correspondientes, y sumando los productos resultantes; a esta ecuación se le conoce con el nombre de ***desarrollo por cofactores*** mediante el primer renglón de **A**.

Si el desarrollo por cofactores se hace utilizando cualquier otro renglón o cualquier columna de **A** el resultado es siempre el mismo; esto es:

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{A}) &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} && \text{utilizando el renglón 2}\\
&= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33} && \text{utilizando el renglón 3}\\
&= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} && \text{utilizando la columna 1}\\
&= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} && \text{utilizando la columna 2}\\
&= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} && \text{utilizando la columna 3,}
\end{aligned}$$

los cuales se obtienen escribiendo de diferentes maneras la definición del determinante de orden 3.

Como se dijo anteriormente, este método se puede generalizar a una matriz cuadrada de orden *n*.

Desarrollo por cofactores

El determinante de una matriz cuadrada de orden *n* se puede obtener multiplicando los elementos de un renglón (o columna) por sus cofactores correspondientes y sumando estos productos.

Ejemplo 9

Dadas las matrices **A** y **B**, encontrar el valor del determinante de cada una de ellas, utilizando el método de los cofactores.

$$a)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 9 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad b)\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

a) Utilizando el renglón 2 de la matriz **A** para el desarrollo por cofactores se tiene:

$$\det(\mathbf{A}) = 4\left(-\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}\right) + 0\left(\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 0 \end{vmatrix}\right) -1\left(-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 6 \end{vmatrix}\right)$$

$$= -4(0-12) + 0 + 1(18+9)$$

$$= 48 + 27$$

$$= 75$$

b) Utilizando la columna 3 de la matriz **B** para el desarrollo por cofactores se tiene:

$$\det(\mathbf{B}) = 0\left(\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\right) + 0\left(-\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\right) + 1\left(\begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}\right)$$

$$= 0 + 0 + (-9-49)$$

$$= -58$$

Nota: Cuando se utiliza el método de desarrollo por cofactores para obtener el determinante, conviene escoger para el desarrollo, el renglón o columna que tenga mayor número de ceros, pues esto simplifica el número de operaciones a realizar.

Como se mencionó anteriormente, el signo que hay que anteponer al menor de un elemento para obtener su cofactor está directamente relacionado con la posición del elemento; el siguiente esquema te puede ayudar a recordar el signo que debes anteponer al menor para encontrar el cofactor.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & - & . & . & . \\ - & + & - & + & - & + & . & . & . \\ + & - & + & - & + & - & . & . & . \\ - & + & - & + & - & + & . & . & . \\ + & - & + & - & + & - & . & . & . \\ - & + & - & + & - & + & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

Algunas matrices, cumplen ciertas características que hacen que sus determinantes estén relacionados entre sí, o bien, que se puedan obtener fácilmente. A estas relaciones se les conoce con el nombre de *propiedades*. A continuación se mencionan algunas.

Propiedades del determinante

1. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^t)$
2. Si todos los elementos de un renglón de una matriz **A** son ceros, entonces
$$\det(\mathbf{A}) = 0.$$
3. Si **B** es la matriz que resulta de multiplicar un renglón de una matriz **A** por una constante k, entonces
$$\det(\mathbf{B}) = k\det(\mathbf{A}).$$
4. Si **B** es la matriz que resulta de intercambiar dos renglones de **A**, entonces
$$\det(\mathbf{B}) = -\det(\mathbf{A}).$$
5. Si **B** es la matriz que resulta cuando a un múltiplo de un renglón de **A** se le suma a otro renglón, entonces
$$\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}).$$
6. Si dos renglones de una matriz **A** son iguales o proporcionales, entonces
$$\det(\mathbf{A}) = 0.$$
7. El determinante de un producto es igual al producto de los determinantes:
$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}).$$
8. Si **A** es una matriz triangular superior (o inferior), entonces $\det(\mathbf{A})$ es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.

Nota: Las propiedades anteriores son válidas si la palabra *"renglón"* se sustituye por la palabra *"columna"*.

A continuación se explicarán algunas de las propiedades, sobre todo aquellas que serán de utilidad para transformar el arreglo matricial en una matriz triangular superior.

Una de ellas es la propiedad 3, ya que puede utilizarse para sacar un factor común de un renglón o una columna de un determinante; se utilizará un ejemplo para aclarar esta afirmación.

Ejemplo 10

Dadas las siguientes matrices, encuentra la relación entre sus determinantes.:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

Solución

Observa que la matriz **B** es una matriz que se obtiene al multiplicar el segundo renglón de **A** por el escalar k; entonces, por la propiedad 3, se cumple que:

$$\det(\mathbf{B}) = k \det(\mathbf{A}).$$

lo cual es equivalente a decir:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Al observar la igualdad anterior, podrás darte cuenta de que la propiedad 3 puede interpretarse como sigue: Si un renglón (o columna) tiene un factor común, este puede escribirse fuera del arreglo como factor del determinante.

Obsérvese que si **A** es una matriz $n \times n$ entonces la matriz $k\mathbf{A}$ está dada por:

$$k\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \dots & ka_{nn} \end{bmatrix}$$

Para obtener el determinante de esta matriz ase puede sacar de factor común al escalar k de cada renglón, y como son n renglones, entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\det(k\mathbf{A}) = k^n \det(\mathbf{A}).$$

Otra propiedad que es conveniente aclarar es la 5. Dadas las matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ ka+c & kb+d \end{bmatrix}$$

donde **B** es la matriz que resulta de multiplicar el primer renglón de **A** por el escalar k, y los resultados sumarlos al renglón 2 de **A**, entonces det(**B**) debe ser igual a det(**A**) :

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{B}) &= a\,(\,kb+d\,) - b\,(\,ka+c\,)\\ &= kab + ad - kba - bc\\ &= ad - bc\\ &= \det(\mathbf{A}).\end{aligned}$$

Ejemplo 11

Utiliza la propiedad 7 para calcular det(**AB**) si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

$$\det(\mathbf{A}) = 10 \quad \text{y} \quad \det(\mathbf{B}) = -17,$$

entonces por la propiedad 7 se obtiene det(**AB**) = −170.

Una manera de comprobar el resultado anterior, es multiplicar primero las matrices **A** y **B** y después obtener el determinante de la matriz resultante **AB**. La comprobación se deja al lector.

Ejemplo 12

Utiliza las propiedades de los determinantes para calcular los determinantes de las matrices dadas:

$$a)\ \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 8 \end{bmatrix} \qquad b)\ \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -14 \\ 3 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad c)\ \mathbf{R} = \begin{bmatrix} a & b \\ 7c & 7d \end{bmatrix}$$

Solución

a) Al observar cuidadosamente los elementos de la matriz **P** puede verse que las columnas 2 y 3 son proporcionales ya que si la columna 2 se multiplica por dos, se obtiene la columna 3. Por tanto, por la propiedad 6 se tiene que det(**P**) = 0.

b) La matriz **Q** tiene un renglón que consta exclusivamente de ceros, así que por la propiedad 2 puede concluirse con seguridad que det(**Q**) = 0.

c) Por la propiedad 3 puede escribirse el número siete como factor del determinante y luego obtener el determinante de la matriz resultante, es decir:

$$\det(\mathbf{R}) = 7\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 7(ad - bc).$$

Ejemplo 13

Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ y dado que det(**A**) = 5, encuentra el det(**B**) si la matriz **B** está dada por $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -g & -h & -i \\ -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \end{bmatrix}$

Solución

Si se comparan las matrices **A** y **B**, se observa que la matriz **B** puede obtenerse a partir de la matriz **A**, y viceversa.

Una forma de resolver este problema es utilizar las propiedades de los determinantes y construir la matriz **A** a partir de **B**:

$$\det(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} -g & -h & -i \\ -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ -g & -h & -i \\ 2d & 2e & 2f \end{vmatrix}$$ (intercambiando los primeros dos renglones de **B**)

$$= +\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$$ (intercambiando los últimos dos renglones de **B**)

$$= (-1)(2)(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$ (sacando el determinante el −1, que era el factor de los renglones 1 y 3, y el 2, que era el factor del renglón 2)

$$= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$= 2 \det(\mathbf{A})$

$= 2\,(5)$ (en el enunciado del problema se da como dato que $\det(\mathbf{A})=5$)

$= 10$

Proceso para obtener el determinante mediante sus propiedades (opcional)

Existe un método alternativo para encontrar el determinante de una matriz: que consiste en transformar una matriz **A** en una matriz triangular superior, mediante el uso de las propiedades de los determinantes; para lograrlo se deben usar tantas veces como sea necesario las propiedades 3, 4, o 5 hasta convertir en ceros todos los elementos que se encuentran debajo de la diagonal principal.

Una vez hecho lo anterior, el determinante de la matriz resultante puede evaluarse usando la propiedad 8. Para aclarar la explicación anterior se da el siguiente ejemplo:

Ejemplo 14

Calcula el valor del determinante de **A**, sabiendo que:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución

Llevando **A** a la forma escalonada y aplicando las propiedades 3, 4 y 5, se obtiene:

$$\det(\mathbf{A}) = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ intercambiando los renglones 1 y 4 de **A** (propiedad 4)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ al renglón 4 de **A** se le sumó el renglón 1 multiplicado por -4 (propiedad 5)

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & -12 & -6 \\ 0 & -3 & -3 & 7 \end{vmatrix}$$ al renglón 2 se le sumó el renglón 4 multiplicado por 1 (propiedad 5)

$$= -(-6)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$ sacando del determinante al −6 y al −1, que eran factores comunes de los renglones 3 y 4, respectivamente. (propiedad 3)

$$= -(-6)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 43 \end{vmatrix}$$ al renglón 4 se le sumó el renglón 2 multiplicado por −3. (propiedad 5)

$$= -(-6)(1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 43 & 3 \end{vmatrix}$$ intercambiando las últimas 2 columnas (propiedad 4 para columnas)

$$= -(-6)(1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -83 \end{vmatrix}$$ al renglón 4 se le sumó el renglón 3 multiplicado por −43 (propiedad 5)

$= (-6)(-1)(-83)(1)$ se multiplican los elementos de la diagonal principal (propiedad 8)

$= -498$

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.3

Encontrar el determinante de cada una de las matrices dadas, si existe.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{Bn} = \begin{bmatrix} 14 & 11 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{Cn} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 7 & 8 & 20 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 7 & 8 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

7. Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -6 & 7 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, resolver los siguientes ejercicios:

   a) $\mathbf{M}_{23}$

   b) $\mathbf{C}_{23}$

   c) $\mathbf{M}_{22}$

   d) $\mathbf{C}_{22}$

   e) $\mathbf{M}_{31}$

   f) $\mathbf{C}_{31}$

g) $\mathbf{M}_{12}$

h) $\mathbf{C}_{12}$

Utilizar el método de cofactores para encontrar el valor del determinante de las siguientes matrices:

8. $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

9. $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

10. $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -4 \\ -6 & 5 & 8 \\ 9 & 10 & 2 \end{bmatrix}$

11. $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

Resolver los siguientes ejercicios:

12. Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x-3 & 0 & 1 \\ 1 & x-3 & 0 \\ 0 & 1 & x-3 \end{bmatrix}$, encontrar el valor de x tal que $\det(\mathbf{A}) = 0$.

13. Si $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} k & -1 & -1 \\ -1 & k & -1 \\ -1 & -1 & k \end{bmatrix}$, encontrar el valor (o los valores) de k tal que $\det(\mathbf{B}) \neq 0$.

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 5.3

1. -18
2. -47
3. 0
4. 0
5. -36
6. -142
7 *a)* -9
   b) 9
   c) 10
   d) 10
   e) -9
   f) -9
   g) -41
   h) 41
8. 5
9. 6
10. 14
11. 29/36
12. $x = 2$
13. $k \neq -1$ y
    $k \neq 2$

5.4 MATRIZ INVERSA

Iniciaremos esta sección con la definición de algunas matrices que nos servirán para obtener la inversa de una matriz; esto debido a que no todas las matrices tienen inversa.

Si **A** es una matriz cuadrada tal que det(**A**) = 0, entonces se dice que **A** es una ***matriz singular.***

Si **A** es una matriz cuadrada tal que det(**A**) ≠ 0, entonces se dice que **A** es una ***matriz no-singular.***

Ejemplo 1

Clasifica las siguientes matrices como singulares, no-singulares o ninguna de las dos:

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1/4 & 2 & 1 \\ 0 & 2/3 & 9 \\ 1 & 2 & -1/2 \end{bmatrix}$ *b)* $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -5 & -1 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ *c)* $\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

Solución

a) Para determinar si la matriz **A** es singular o no singular, basta con encontrar su determinante. Utilizando el desarrollo por cofactores para la primera columna, se tiene:

$$\det(\mathbf{A})=\left(\frac{1}{4}\right)\left[\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)-18\right]-0\;+\;(1)\left[(18)-\left(\frac{2}{3}\right)\right]\;=\;\frac{51}{4}$$

Como el det(**A**) ≠ 0, entonces se concluye que la matriz **A** es no-singular.

b) Para obtener el determinante de la matriz **B** se hará mediante el desarrollo por cofactores en el caso del primer renglón, tenemos:

$$\det(\mathbf{B}) = 1(-5+7)-2(-3+4)+0 = 2-2 = 0.$$

Como el det(**B**) = 0 entonces se concluye que la matriz **B** es singular.

c) La matriz **C** no es cuadrada, por tanto, no puede ser ni singular ni no-singular.

Ejemplo 2

Encontrar el valor de k para que la matriz **P** dada sea singular:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & k \end{bmatrix}.$$

Solución

Por un lado, para que **P** sea singular es necesario que $\det(\mathbf{P}) = 0$.

Por otro lado se tiene que $\det(\mathbf{P}) = \left(-\frac{k}{3}\right) + \left(\frac{2}{9}\right)$.

Así que para que la matriz **P** sea singular es necesario que se cumpla la siguiente ecuación:

$$\left(-\frac{k}{3}\right) + \left(\frac{2}{9}\right) = 0.$$

Ahora despejamos el valor de k, para encontrar el valor que satisface la ecuación.

$$-\frac{k}{3} = -\frac{2}{9}$$

$k = \frac{2}{3}$, que es el valor buscado.

Sea **A** una matriz cuadrada de orden n. La ***matriz de cofactores*** de **A**, denotada por **cof**(**A**), se define como la matriz cuyos elementos son los cofactores correspondientes a los elementos de **A**.

Es decir, si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, entonces $\mathbf{Cof}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$.

Cabe aclarar que para obtener la matriz definida anteriormente, primero hay que encontrar el cofactor de cada uno de los elementos y luego en el lugar del elemento se coloca su cofactor (no se multiplica el cofactor por el elemento).

Ejemplo 3

Obtén la matriz de cofactores de las matrices dadas:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

Solución

a) Primeramente se obtienen los cofactores de cada uno de los elementos de la matriz **A**, y luego se acomodan de acuerdo con la posición del elemento. Recuerda que el cofactor se obtiene a partir del menor, anteponiéndole un signo que puede ser positivo o negativo, dependiendo si la posición en que se encuentra el elemento es par o impar.

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad C_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad C_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

La matriz de cofactores de **A** queda como sigue:

$$\mathbf{cof(A)} = \begin{bmatrix} 0 & -10 & -10 \\ -14 & -16 & 26 \\ -28 & 28 & -28 \end{bmatrix}.$$

b) En forma análoga al inciso anterior se obtiene la matriz de cofactores de **B**:

$$\mathbf{cof(B)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea **A** una matriz cuadrada; la ***matriz adjunta*** de **A**, denotada por **adj**(**A**), se define como la matriz transpuesta de la matriz de cofactores de **A**, es decir:

$$\mathbf{adj(A)} = [\mathbf{cof(A)}]^{\mathbf{t}}$$

Debido a que $[\mathbf{cof}(\mathbf{A})]^t = \mathbf{cof}(\mathbf{A}^t)$, una forma alterna de definir la matriz adjunta de **A** es como la matriz de cofactores de $\mathbf{A}^t$.

Ejemplo 4

Encontrar la matriz adjunta para las matrices dadas en el ejemplo 3.

Solución

a) Para encontrar la matriz adjunta de **A** basta con obtener la transpuesta a la matriz de cofactores de **A**:

$$\mathbf{adj(A)} = \begin{bmatrix} 0 & -14 & -28 \\ -10 & -16 & 28 \\ -10 & 26 & -28 \end{bmatrix}.$$

b) Similarmente, al obtener la transpuesta a la matriz de cofactores de **B** se tiene la adjunta de **B**:

$$\mathbf{adj(B)} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz inversa

Si **A** es una matriz cuadrada de orden n, y si existe una matriz $\mathbf{A}^{-1}$ tal que al multiplicarlas se obtiene como resultado a la matriz identidad $\mathbf{I}_n$, es decir

$$(\mathbf{A})(\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{I}_n \qquad \text{y} \qquad (\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{A}) = \mathbf{I}_n$$

entonces se dice que la matriz **A** es invertible y que $\mathbf{A}^{-1}$ es la ***matriz inversa*** de **A**.

Nota: *Invertible* significa que la matriz inversa existe.

Obsérvese que no importa el orden en el que se multiplica la matriz **A** y su matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$ se obtiene siempre como resultado a la matriz identidad.

Una desventaja de la definición anterior es que no indica cómo encontrar la matriz $\mathbf{A}^{-1}$, razón por la cual se da el siguiente método.

Método para obtener la inversa d una matriz mediante la adjunta

Este método para obtener la inversa de una matriz consiste en encontrar su adjunta y después dividir cada uno de los términos de la adjunta entre el determinante de la matriz. Es decir:

Si **A** es una matriz cuadrada tal que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, entonces la matriz inversa de **A** existe y está dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} adj(\mathbf{A}).$$

Nota: Si **A** es una matriz cuadrada tal que $\det(\mathbf{A}) = 0$, entonces la matriz $\mathbf{A}^{-1}$ no existe.

Ejemplo 5

Encontrar la matriz inversa para las matrices dadas en el ejemplo 3, si existen.

Solución

a) Primeramente hay que encontrar el valor del determinante de **A**, para ver que sea diferente de cero. Si utilizas cualquiera de los métodos vistos en clase para calcular el determinante, encontrarás que el $\det(\mathbf{A}) = -140$ es diferente de cero; esto implica que la matriz **A** es invertible, es decir, su inversa existe.

En el ejemplo 4, inciso *a)*, se obtuvo que $\mathbf{adj(A)} = \begin{bmatrix} 0 & -14 & -28 \\ -10 & -16 & 28 \\ -10 & 26 & -28 \end{bmatrix}$.

por tanto, para encontrar la inversa hay que dividir cada uno de los elementos de la adjunta por el determinante de **A** es decir:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{0}{-140} & \frac{-14}{-140} & \frac{-28}{-140} \\ \frac{-10}{-140} & \frac{-16}{-140} & \frac{28}{-140} \\ \frac{-10}{-140} & \frac{26}{-140} & \frac{-28}{-140} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{14} & \frac{4}{35} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{14} & -\frac{13}{70} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

b) Como el $\det(\mathbf{B}) = 8$, es decir, diferente de cero, entonces la matriz inversa de **B** existe.

Como resultado del ejemplo 4, inciso *b)*, se tiene que **adj (B)** = $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Así que al dividir cada uno de los elementos de la adjunta, por 8 se obtiene:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{8} & \frac{-2}{8} \\ \frac{2}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6

Utiliza el método de la adjunta para encontrar la matriz inversa de la matriz **P** = $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, si es que la inversa existe.

Solución

Primeramente se debe encontrar el determinante de la matriz **P**, para decidir si la inversa existe. En este ejemplo lo haremos mediante el desarrollo por cofactores, para la primera columna de **P**:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{P}) &= 1(-5+7) - 2(-3+4) + 0 \\ &= 2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Como det(**P**) = 0, entonces se concluye que la matriz inversa de **P** no existe.

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Utiliza el método de la adjunta para encontrar la matriz inversa de la matriz **Q** = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, si es que la inversa existe.

Solución

Paso 1. Encuentra el determinante de la matriz **Q**, para decidir si la inversa existe. Puedes utilizar cualquiera de los métodos vistos en clase.

det(**Q**) = ______________________

Nota: Si te dio 24, felicidades, ese es su valor; esto implica que la matriz inversa de **Q sí** existe.

Paso 2. Encuentra el cofactor de cada uno de los elementos de la matriz **Q**.

¡Cuidado con los signos!

$$C_{11} = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \qquad C_{12} = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \qquad C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \qquad C_{22} = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \qquad C_{23} = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \qquad C_{32} = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} \qquad C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Al resolver cada uno de los determinantes anteriores se obtiene :

$$\mathbf{cof}\,(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & -4 \\ -1 & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & 6 \end{bmatrix}$$

Paso 3. Encuentra la adjunta de **Q**, transponiendo la matriz de cofactores.

$$\mathbf{adj}\,(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} \_\_\_ & -1 & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ -4 & \_\_\_ & 6 \end{bmatrix}$$

Paso 4. Divide cada uno de los elementos de la adjunta por el determinante de la matriz **Q**. La matriz resultante es la inversa de **Q**.

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \_\_\_ & -1/24 & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ -1/6 & \_\_\_ & 1/4 \end{bmatrix}$$

Propiedades de la matriz inversa

Una matriz invertible es una matriz cuya inversa existe.

1. Si **A** y **B** son matrices invertibles, del mismo orden, entonces

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{A}^{-1}.$$

2. Si **A** es invertible, entonces:

   2.2 $(k\mathbf{A})^{-1} = \left(\frac{1}{k}\right)\mathbf{A}^{-1}$ para toda $k \neq 0$.

   2.2 $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$

   2.3 $(\mathbf{A}^{n})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{n}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$

3. Si **A** es invertible, entonces $\det\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}$

Mensajes codificados

El uso de las matemáticas en criptografía (sistemas de escritura secreta) ha llegado a ser particularmente significativo en los años recientes. Un ejemplo simple ocurre cuando un emisor codifica un mensaje usando una matriz cuadrada **A**. El receptor decodifica el mensaje con la inversa de la matriz **A**, la clave resulta difícil de descifrar, a menos que se conozca la matriz **A** con la que se codificó el mensaje; y llega a ser todavía más difícil de descifrar si la matriz **A** es cambiada periódicamente. La disponibilidad de un gran número de matrices con inversas sencillas se convierte en un factor muy importante.

En el siguiente ejemplo se ilustra cómo trabaja la codificación de mensajes.

Ejemplo 7

Codificar el mensaje “EXAMEN HOY”, utilizando la matriz de codificación

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución

Primero se debe asignar un número a cada letra del alfabeto. Para mantener los números relativamente pequeños, se usan tanto números positivos como negativos, A = 1, B = –1, C = 2, D = – 2, E = 3,... y así sucesivamente. Las palabras se separan utilizando 0 en los espacios.

De acuerdo con esto, la asignación de números para cada letra del mensaje queda como sigue:

E	X	A	M	E	N		H	O	Y
3	13	1	7	3	−7	0	−4	−8	−13

Para codificar el mensaje se escriben los números asignados a este, como vectores columna; cada uno de ellos deberá tener un número de elementos igual al orden de la matriz **A**, que en este caso es 3.

Los números del mensaje quedan separados en los siguientes cuatro vectores.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -13 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nótese que el último vector columna es completado con tantos ceros como sea necesario. Sea **B** la matriz cuyas columnas son los vectores anteriores. El mensaje se codifica calculando el producto **AB**.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 & -13 \\ 13 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & -7 & -8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 27 & 8 & -13 \\ 45 & 23 & -12 & -26 \\ 17 & 3 & -12 & -13 \end{bmatrix}$$

Para enviar el mensaje, se escriben los elementos de la matriz **AB** como sigue:

27, 45, 17, 27, 23, 3, 8, −12, −12, −13, −26, −13

Para decodificar un mensaje el receptor utiliza la inversa de la matriz de codificación **A**, ya que este recibe la matriz **AB** (mensaje codificado), así que al multiplicar:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB}) &= (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} \\ &= \mathbf{IB} \\ &= \mathbf{B} \end{aligned}$$

obtiene **B** (mensaje original).

Ejemplo 8

Descifrar el mensaje 27, 45, 17, 27, 23, 3, 8, −12, −12, −13, −26, −13 usando la matriz de codificación $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Solución

Como det(**A**) =1 se sabe que **A** tiene inversa, que se puede obtener por el método de la adjunta, para este caso:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 6 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para descifrar el mensaje se multiplica $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB})$ donde:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 27 & 27 & 8 & -13 \\ 45 & 23 & -12 & -26 \\ 17 & 3 & -12 & -13 \end{bmatrix}.$$

y luego,

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB}) = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 6 \\ -2 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 27 & 27 & 8 & -13 \\ 45 & 23 & -12 & -26 \\ 17 & 3 & -12 & -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 0 & -13 \\ 13 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & -7 & -8 & 0 \end{bmatrix},$$

que es la matriz del mensaje que se envió en el ejemplo anterior.

Mensaje:

3	13	1	7	3	−7	0	−4	−8	−13
E	X	A	M	E	N		H	O	Y

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.4

Determinar cuáles de las siguientes matrices son singulares y cuáles son no-singulares:

1. $\mathbf{M}n = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -9 & -3 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}$

Para los ejercicios 5 a 8 encontrar:

a) la matriz de cofactores

b) la matriz adjunta.

5. $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ -4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -8 \\ -1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

7. $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 14 & -2 \end{bmatrix}$

8. $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$

Determinar si las siguientes matrices tienen inversa, y en caso afirmativo, encontrarla utilizando el método de la adjunta:

9. $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

10. $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

11. $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$

12. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$

13. Mediante el sistema de escritura secreta, explicado en esta sección, codifique el mensaje "ESTUDIA Y TRIUNFARÁS" usando la matriz de codificación

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

14. Utilizando la matriz de codificación $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, descifrar el siguiente mensaje:

$$-4, -5, 1, -9, -1, -5, 33, 22, 12, 31, 17, 17, 39, 27, 17, -5, -6, 1.$$

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 5.4

1. Singular
2. No singular
3. No singular
4. Singular

5. $\mathbf{cof}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} 192 & 256 & 16 \\ 64 & 384 & 192 \\ 128 & -128 & 48 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{adj}(\mathbf{Q}) = \begin{bmatrix} 192 & 64 & 128 \\ 256 & 384 & -128 \\ 16 & 192 & 48 \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{cof}(\mathbf{R}) = \begin{bmatrix} -24 & 16 & -6 \\ -9 & 3 & 0 \\ -24 & 22 & -6 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{adj}(\mathbf{R}) = \begin{bmatrix} -24 & -9 & -24 \\ 16 & 3 & 22 \\ -6 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

7. $\mathbf{cof}(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} -2 & -14 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{adj}(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -14 & 4 \end{bmatrix}$

8. $\mathbf{cof}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{adj}(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

9. $\mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

10. **V** no tiene matriz inversa

11. **W** no tiene matriz inversa

12. $\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

13. 16, 15, 12, 0, −3, 8, −38, −25, −26, 52, 31, 31, 6, −20, −25, −3, −3, 0.

14. La guerra termina

5.5 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En cursos previos, tanto de algebra como de cálculo, has tenido la oportunidad de trabajar con ecuaciones lineales, ya que muchas situaciones de la vida cotidiana se pueden modelar mediante este tipo de ecuaciones. Por ejemplo, estás organizando junto con otros amigos una fiesta sorpresa para tu novia y tienes \$1500 para comprar carne para asar, refrescos, botana y flores. Un kilo de carne cuesta \$82, cada refresco cuesta \$15, la bolsa de botana cuesta \$18 y el precio de una rosa es de \$12.

Si compras x kilos de carne, y refrescos, z bolsas de botana y w rosas, la ecuación $82x + 15y + 18z + 12w = 1500$ es una ecuación lineal que describe la forma en que deberás distribuir tu presupuesto. Ahora bien, para determinar cuánto debes comprar de cada artículo se requiere más información a decir verdad, se requieren otras tres ecuaciones que contengan a algunas de las incógnitas anteriores. Cuando se tiene un conjunto de ecuaciones lineales, este recibe el nombre de *sistema de ecuaciones lineales*.

Recordarás que la forma general para una ecuación lineal con dos incógnitas es $ax + by = c$, la de una ecuación lineal con tres incógnitas es $ax + by + cz = d$, etc., sin embargo, cuando la ecuación contiene muchas incógnitas, para distinguirlas, se acostumbra utilizar subíndices tanto para las incógnitas como para los coeficientes que las acompañan.

La forma general de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es la siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\
 & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\
 & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

En donde tanto los coeficientes a_{ij} como los términos independientes b_i deben ser números reales.

Para determinar si un sistema de ecuaciones es lineal, se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. Todas las variables o incógnitas deben estar elevadas a la potencia 1.
2. No deben aparecer productos de variables o incógnitas.
3. Las incógnitas x_i no deben aparecer como argumentos de funciones logarítmicas, exponenciales o trigonométricas.

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Determina si los siguientes sistemas de ecuaciones son lineales o no. Justifica tu respuesta.

a)
$$\begin{aligned} 5x+2y &= 9 \\ \frac{x}{2}-y+w &= 3 \\ x^{1/2}+y+e^{z} &= -1 \end{aligned}$$
____

b)
$$\begin{aligned} x+3\operatorname{sen} y-z &= 2^{1/2} \\ x+5yz-1 &= 2 \\ 1+\frac{z}{2} &= 5 \end{aligned}$$
____

c)
$$\begin{aligned} 2^{1/2}x-y+\frac{z}{2} &= 0 \\ (\ln 2)x-z &= 5 \\ x-y-z &= 3 \end{aligned}$$
____

d)
$$\begin{aligned} x^{2}+y &= 1 \\ x-y^{2} &= 0 \end{aligned}$$
____

Los sistemas de ecuaciones lineales se dice que son ***homogéneos*** si los términos independientes $b_1, b_2, ..., b_m$ todos son cero, es decir, si el sistema tiene la forma:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\ & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

Si al menos uno de los términos b_i, es diferente de cero, se dice que el sistema es ***no homogéneo***.

Para determinar si un sistema de ecuaciones lineales es o no homogéneo, primero se deben acomodar del lado izquierdo de cada ecuación todos los términos que contengan incógnitas y del lado derecho los términos independientes. Hecho lo anterior, es muy fácil concluir si el sistema es homogéneo o no.

¡A trabajar!

EJERCICIO 2

Determina si los siguientes sistemas son o no homogéneos.

a)
$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= x_3 \\ x + 5x_2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x - y + z - 1 &= 0 \\ 2x + y - z &= 0 \\ y - z + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Solución

Primeramente, para cada sistema, acomoda los términos de cada ecuación de tal forma que las incógnitas se encuentren en el lado izquierdo y en el lado derecho los términos independientes, al hacerlo los sistemas quedan:

a) *b)*

Escribe en la línea la letra que completa correctamente cada enunciado.

El sistema que aparece en el inciso ______________ es homogéneo.

El sistema que aparece en el inciso ______________ no es homogéneo.

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es ***consistente*** si tiene solución, y se dice que es ***inconsistente*** si no tiene solución.

¡A trabajar!

EJERCICIO 3

Determina si los siguientes sistemas lineales son consistentes o inconsistentes.

a)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 &= 7 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 4x - y &= 3 \\ 16x - 4y &= 12 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ x + 2y &= -1 \end{aligned}$$

Solución

Para decidir si los sistemas son consistentes o no, lo que debes hacer es resolverlos; si la solución existe, será consistente; si no existe será inconsistente. Para resolver los sistemas anteriores puedes utilizar cualquiera de los métodos conocidos: eliminación por suma y resta, igualación o sustitución. ¡Resuélvelos y decide!

Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \cdots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\
 & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\
 & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

se puede representar usando la notación de matrices tal como sigue:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}$$

La matriz **A** se llama *matriz del sistema* o *de coeficientes*.

La matriz **X** se llama *matriz de incógnitas* y representa al conjunto de soluciones del sistema.

La matriz **B** recibe el nombre de *matriz de términos independientes*.

Para dar la representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales es importante que reescribas el sistema de tal forma que los términos que tienen las mismas incógnitas queden acomodados unos debajo de otros y que los términos independientes queden en el lado derecho de cada ecuación. Por ejemplo para dar la representación matricial del sistema $\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 5 & = & y \\ z & - & y & = & x \end{array}$ primero se debe reescribir como sigue $\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & & & = & 5 \\ -x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}$.

Observa que la primera ecuación carece de elemento con incógnita z, en este caso al escribir la matriz del sistema en esa posición se sustituye por 0, ya que equivale a decir $0z$. En este caso la representación matricial quedaría como sigue:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

¡A trabajar!

EJERCICIO 4

Expresar los siguientes sistemas de ecuaciones mediante la notación matricial.

a) $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 5 \\ & & x & - & y & = & 2 \\ & & y & - & z & = & 1 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 0 \\ 5x & + & y & = & z \end{array}$$

Solución

Primeramente deberás reescribir cada sistema de tal forma que los términos que tienen las mismas incógnitas queden acomodados unos debajo de otros y que los términos independientes queden en el lado derecho de cada ecuación.

a)

b)

Una vez acomodados los sistemas deberás reunir, en una matriz, los coeficientes de las incógnitas, en la misma posición en que aparecen en cada ecuación. Las incógnitas y los términos independientes se escriben siempre como matrices columna.

a) $$\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Solución de sistemas de ecuaciones lineales mediante matrices

En los cursos de Álgebra Elemental, aprendiste tres métodos llamados *eliminación por suma y resta*, *igualación* y *sustitución* para resolver sistemas de ecuaciones lineales; sin embargo, los métodos que se describen se describen en las siguientes secciones —Método de la Matriz Inversa, Regla de Cramer y Metodo de Eliminacion de Gauss— tienen tienen la ventaja de que aprovechan la representación matricial de un sistema de ecuaciones, ya que al utilizar la teoría de matrices y determinantes para resolver un sistema lineal, es posible trabajar únicamente con la matriz de coeficientes y la de términos independientes, sin necesidad de estar escribiendo las incógnitas cada vez que se realiza alguna operación. En el siguiente tema se presenta el primero de ellos.

5.6 MÉTODO DE LA MATRIZ INVERSA

Este método se puede utilizar únicamente cuando se cumplen las siguientes condiciones:

1. El sistema que se desea resolver es cuadrado, es decir, el número de ecuaciones lineales es igual al número de incógnitas.
2. El determinante de la matriz del sistema es diferente de cero.

Nota: Si alguna de las condiciones anteriores no se cumple, entonces la matriz inversa no existe, por tanto, en ese caso este método no podría utilizarse.

A continuación se explicará la estrategia general que se debe seguir para aplicar este método.

Supón que se desea resolver el siguiente sistema de n-ecuaciones con n-incógnitas y que el determinante de la matriz del sistema es diferente de cero.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \cdots + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Primeramente se escribe el sistema en forma matricial, al hacerlo queda como sigue:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}$$

Donde **A** es la matriz del sistema, **X** es la matriz de incógnitas y **B** es la matriz de términos independientes, así que se puede concluir que la representación anterior es una ecuación matricial de la forma:

$\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

Para resolver esta ecuación basta con despejar **X**, pero **A** y **B** no son valores reales, sino matrices reales, por lo que la matriz **A** aparentemente no se podría "pasar" dividiendo a la matriz **B**; pero sí se pueden multiplicar (por la izquierda) ambos lados de la ecuación por la matriz inversa de A, que se denota por $\mathbf{A}^{-1}$, al hacerlo se obtiene:

$\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$.

Pero se sabe que $\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{I}$, al sustituir este resultado, la ecuación anterior queda como sigue:

$\mathbf{I}\,\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$,

y como $\mathbf{I}\,\mathbf{X} = \mathbf{X}$ entonces se concluye que:

$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$.

La ecuación anterior $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$ garantiza que si se multiplica la inversa de la matriz **A** por la matriz de términos independientes **B**, se obtiene la solución buscada; esta es la razón por la cual es necesario que la inversa $\mathbf{A}^{-1}$ exista.

A continuación se dan, en forma resumida, los pasos para aplicar este método.

Proceso para resolver un sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de la matriz inversa

Paso 1. Dar la representación matricial del sistema e identificar las matrices **A**, **X** y **B**.
Paso 2. Verificar que det(**A**) sea *diferente de cero*, esto garantiza que su inversa exista.
Paso 3. Obtener $\mathbf{A}^{-1}$.
Paso 4. Efectuar el producto $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.
Paso 5. Determinar los valores de las incógnitas mediante la igualdad $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, es decir, se iguala la matriz **X** a la matriz obtenida en el paso 4.

Ejemplo 1

Utiliza el método de la matriz inversa para resolver el sistema de ecuaciones dado.

$$\begin{aligned} 2x+y+z &= 7 \\ 3x+2y+z &= -3 \\ y+z &= 5 \end{aligned}$$

Solución

Para la solución de este ejemplo se seguirá paso a paso el proceso dado anteriormente; a medida que te familiarices con el método, podrás suprimir aquellos pasos que consideres innecesarios.

Paso 1. La representación matricial está dada por :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Esto ayuda a que fácilmente se puedan identificar las matrices **A**, **X** y **B**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Paso 2. Ahora hay que encontrar el determinante de **A** para saber si la inversa de **A** existe:

$\det(\mathbf{A}) = 2 \neq 0$, por tanto, $\mathbf{A}^{-1}$ existe.

Paso 3. Para encontrar $\mathbf{A}^{-1}$ se utilizará el método de la adjunta.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\,\mathrm{adj}(\mathbf{A}) \quad \text{pero} \quad \mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \left[\mathrm{Cof}(\mathrm{A})\right]^t$$

por lo que habrá que obtener la matriz de cofactores de **A**.

$$\text{Cof}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Al trasponer la matriz anterior se obtiene: $\text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Ahora al dividir cada elemento de la matriz adjunta por el valor del determinante se obtiene la inversa de **A**.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0/2 & -1/2 \\ -3/2 & 2/2 & 1/2 \\ 3/2 & -2/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & 1 & 1/2 \\ 3/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Paso 4. Se realiza el producto $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$:

	$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$
$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -3/2 & 1 & 1/2 \\ 3/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$	$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ -11 \\ 16 \end{bmatrix}$

Paso 5. Como $\mathbf{X} = (\mathbf{A}^{-1})\mathbf{B}$, se tiene que:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ -11 \\ 16 \end{bmatrix},$$

pero $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, así que $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -11 \\ 16 \end{bmatrix}$, de donde se concluye que:

$x = 1$, $y = -11$ y $z = 16$ es la solución del sistema.

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Utiliza el método de la matriz inversa para resolver el sistema de ecuaciones dado.

$$\begin{aligned} x+y+z &= 2 \\ 8y-12z &= -1 \\ 3x+8y+12z &= 5 \end{aligned}$$

Solución

Para la solución de este ejercicio se dará la guía mencionando los pasos del proceso, a fin de que vayas dominándolo.

Paso 1. Da la representación matricial del sistema e identifica las matrices **A**, **X** y **B**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Paso 2. Encuentra el det(**A**)

det(**A**) = ____ .

¿Es diferente de cero? ________________ . Si la respuesta es sí, continúa con los siguientes pasos, si la respuesta es no, deberás buscar otro método para resolver el sistema.

Paso 3. Obtén la matriz $\mathbf{A}^{-1}$

$$\text{Cof}\,(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

Paso 4. Realiza el producto $\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$.

	$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$
$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$	$\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$

Paso 5. Determina el valor de las incógnitas mediante la igualdad $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$

$x =$ ____________________ $y =$ ________________________ $z =$ ________________________

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.6

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando el método de la matriz inversa.

1. $$\begin{aligned} x + 2y &= 7 \\ 2x + 5y &= -3 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 &= 8 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 1 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= -1 \\ x + 3y + z &= 4 \\ x + 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} \frac{x}{5} + \frac{y}{5} + \frac{z}{5} &= 1 \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{5} - \frac{4z}{5} &= 2 \\ \frac{-2x}{5} + \frac{y}{10} + \frac{z}{10} &= 0 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -1 \\ -x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 &= -2 \\ 4x_1 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} -2x - 3y + 4z &= 4 \\ y + 2z &= 8 \\ x - 2y + z &= -20 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} 4x - y + 2z &= -5 \\ 8x + y + 6z &= 4 \\ 20x &= y \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} x + 7y + z &= 19 \\ x - y - z &= 11 \\ 3x + 4y - 2z &= 37 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} 6x + 2y + 2z &= 14 \\ x + y + 5z &= 16 \\ 5x + 3y &= 6 \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ -30x + 40y - 10z &= -4 \\ 5x - y + 5z &= 32 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 16 \\ -x + 2y - z &= 16 \\ -3x + y - 5z &= 12 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} 2x + 5y + z &= 13 \\ x + 4y - 6z &= -38 \\ 7x + 10y - 8z &= 48 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} 8x + 12y - 4z &= -36 \\ -4x - y + z &= 13 \\ x + y + 3z &= 30 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} 12x - 3y - 2z &= 80 \\ 3x - y + z &= 42 \\ x + y - 5z &= -50 \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} x + 5y + z &= -6 \\ -4x + y - 2z &= -55 \\ -x - y + z &= 12 \end{aligned}$$

17. $$\begin{aligned} 4x - 2y + 10z &= 20 \\ 3x + y &= 55 \\ 10x - 5y + 4z &= 8 \end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned} 5x - 4y + z &= -32 \\ -x + y - 8z &= 37 \\ -4x + 16y + 20z &= -96 \end{aligned}$$

19. $$\begin{aligned} 12x - 5y + 8z + w &= 4 \\ 3x + y + z - 2w &= -16 \\ x + 2y + z + w &= 14 \\ -2x + 4z + w &= 4 \end{aligned}$$

20. $$\begin{aligned} x + y + z + w &= 9 \\ 6y - 4z + 3w &= -13 \\ 2x - z - w &= -18 \\ -x + 3y - 5z &= -32 \end{aligned}$$

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 5.6

1. $x = 41,\ y = -17$

2. $x_1 = \dfrac{46}{27},\ x_2 = \dfrac{-13}{27}$

3. $x = -7,\ y = 4,\ z = -1$

4. $x = 1,\ y = 5,\ z = -1$

5. $x_1 = \dfrac{-4}{3}$, $x_2 = \dfrac{5}{3}$

6. $x_1 = \dfrac{-30}{11}$, $x_2 = \dfrac{-38}{11}$, $x_3 = \dfrac{-40}{11}$

7. $x = -3,\ y = 0,\ z = 7,\ w = 5$

8. $x = 1/4,\ y = 5,\ z = -1/2$

9. $x = 15,\ y = 0,\ z = 4$

10. $x = 1.5,\ y = -0.5,\ z = 3$

11. $x = 2.7,\ y = 3,\ z = 4.3$

12. $x = -7,\ y = 6,\ z = 3$

13. $x = 24,\ y = -8,\ z = 5$

14. $x = -1,\ y = 1,\ z = 10$

15. $x = 18,\ y = 32,\ z = 20$

16. $x = 6,\ y = -5,\ z = 13$

17. $x = 11,\ y = 22,\ z = 2$

18. $x = -8,\ y = -3,\ z = -4$

19. $x = 1,\ y = 2,\ z = -1,\ w = 10$

20. $x = -3,\ y = 0,\ z = 7,\ w = 5$

5.7 REGLA DE CRAMER

Este método, al igual que el de la matriz inversa, solo se puede utilizar cuando se requiere obtener la solución de un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas.

La regla de Cramer es el resultado de utilizar el método de suma y resta (que aprendiste en cursos previos) para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

Antes de establecer la regla de Cramer, primero se resolverá el siguiente sistema general mediante el método de eliminación por suma y resta:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 && \text{ec. (1)} \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 && \text{ec. (2).} \end{aligned}$$

Se iniciará eliminado la incógnita y para obtener el valor de x. Para ello se multiplican ambos lados de la ecuación (1) por a_{22} y ambos lados de la ecuación (2) por $-a_{12}$, obteniendo:

$$\begin{aligned} (a_{11}x + a_{12}y)\,a_{22} &= b_1(a_{22}) \\ -a_{12}(a_{21}x + a_{22}y) &= (-a_{12})\,b_2. \end{aligned}$$

Al efectuar los productos y quitar los paréntesis se tiene:

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}x + a_{12}\cancel{a_{22}}y &= b_1 a_{22} \\ -a_{12}a_{21}x - \cancel{a_{12}}a_{22}y &= -b_2 a_{12}. \end{aligned}$$

Al sumar término a término las dos ecuaciones anteriores se eliminan los términos que contienen a la incógnita y, quedando el resultado como sigue:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x = (b_1 a_{22} - b_2 a_{12}) \qquad \text{ec. (3)}$$

Al despejar x de la ecuación (3) se obtiene:

$$x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad (4)$$

Siguiendo un proceso similar al anterior, pero ahora eliminando x, para obtener y, se obtiene que:

$$y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad (5)$$

El numerador y el denominador de los resultados (4) y (5) se pueden escribir como determinantes, quedando las soluciones de la forma:

$$x = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

las cuales existen, siempre y cuando el determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ sea diferente de cero.

Un hecho curioso es que si se obtiene la representación matricial del sistema original

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ y se identifican la matriz de coeficientes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ y la matriz de términos independientes $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ puede comprobarse que el determinante que aparece en el denominador de las soluciones obtenidas para las incógnitas x y y es el determinante de **A**.

Otro hecho curioso es que en la solución $x = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$ en el determinante que aparece en el numerador, en lugar de los coeficientes de x aparecen los valores de la matriz **B**, mientras que en la solución $y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$ en el determinante que aparece en el numerador, en lugar de los coeficientes de la incógnita y aparecen los valores de la matriz **B**.

Las observaciones anteriores son válidas si el sistema tiene n-ecuaciones lineales con n-incógnitas.

La **regla de Cramer** utiliza las dos observaciones anteriores para obtener fácilmente la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Para utilizar esta regla es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

1. El sistema que se desea resolver debe ser cuadrado, es decir, el número de ecuaciones lineales debe ser igual al número de incógnitas.
2. El determinante de la matriz del sistema debe ser diferente de cero.

Nota: Si alguna de las condiciones anteriores no se cumple, entonces este método no podrá utilizarse.

Si el sistema que se desea resolver es:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \cdots + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array},$$

entonces su representación matricial está dada por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Y el valor de cada una de las incógnitas se obtiene sustituyendo los elementos de la matriz de términos independientes por los elementos de la columna correspondiente a la variable que se desea obtener.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(\mathbf{A})}; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(\mathbf{A})}; \ldots \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{\det(\mathbf{A})}$$

En general, para obtener el valor de cualquiera de las incógnitas x_j se obtiene como sigue: $x_j = \dfrac{\det(\mathbf{A}_j)}{\det(\mathbf{A})}$ en donde $\mathbf{A}_j$ es la matriz que se obtiene al sustituir la columna j de la matriz de coeficientes **A**, por los valores de la matriz de términos independientes **B**.

Ejemplo 1

Resuelve el siguiente sistema usando la regla de Cramer (si es posible).

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= -5 \\ 2x + y &= 4 \end{aligned}$$

Solución

Primero se da la representación matricial del sistema, se identifican las matrices **A** y **B**, y se encuentra el determinante de la matriz **A**, para ver si es diferente de cero.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = 3 - (-8) = 11 \neq 0$$

Ahora se utilizan las soluciones establecidas por la regla de Cramer para encontrar los valores de las incógnitas.

$\mathbf{A}_x$ se obtiene al sustituir la columna 1 de la matriz **A** por los valores de la matriz **B** y $\mathbf{A}_y$ se obtiene al sustituir la columna 2 de la matriz **A** por los valores de la matriz **B**.

$$x = \frac{\det(\mathbf{A}_x)}{\det(\mathbf{A})} = \frac{\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{11} = \frac{-5 + 8}{11} = 1$$

$$y = \frac{\det(\mathbf{A}_y)}{\det(\mathbf{A})} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{11} = \frac{12 + 10}{11} = 2$$

Ejemplo 2

Resolver el siguiente sistema usando la regla de Cramer (si es posible).

$$\begin{aligned} 4x + 5y \quad\quad &= 2 \\ 11x + y + 2z &= 3 \\ x + 5y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

Solución

El sistema dado contiene tres ecuaciones y tres incógnitas, por lo que la primera condición se cumple. Ahora se da la representación matricial del sistema, se identifican la matriz de coeficientes **A** y la matriz de términos independientes **B** y se encuentra el determinante de la matriz **A**, para ver si es diferente de cero.

La matriz del sistema es $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 11 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y el $\det(\mathbf{A}) = -132 \neq 0$,

por lo que se puede aplicar la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{-132} = \frac{3}{11} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 11 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-132} = \frac{2}{11} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 11 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{-132} = \frac{-1}{11}$$

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.7

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando la regla de Cramer.

1. $$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ x \quad\quad + 3z &= 4 \\ 4x + 2y + z &= 5 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} -3x + y &= 3 \\ 2x - 4y &= -6 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x - y &= 2 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= 3 \\ x + y - z &= 5 \\ 3x + 2y \quad\quad &= -4 \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} x - y + 6z &= -2 \\ -x + 2y + 4z &= 9 \\ 2x + 3y - z &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} \frac{5}{2}x + \frac{1}{3}y &= -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}x + \frac{2}{5}y &= -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} -x + 2y - 4z &= 0 \\ 2x + 3y - 5z &= 1 \\ 7x + 2y + 8z &= 8 \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} 4x - 2y + z &= 1 \\ 5x + 2y - 9z &= 0 \\ 2x + y + 6z &= -5 \end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned} x + 3z &= 3 \\ 2x - 5y + 4z &= -2 \\ -2x + 4y + z &= 1 \end{aligned}$$

10.
$$\begin{aligned} 2x - y + 5z &= 0 \\ -x + 6y + 5z &= 2 \\ 3x + 4y - 4z &= -5 \end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned} -3x + y + 9z &= 1 \\ 2y - 6z &= 0 \\ 4x + z &= 0 \end{aligned}$$

12.
$$\begin{aligned} 5x - 6y + 8z &= 4 \\ 2x + 3y &= 3 \\ x - y - 2z &= -2 \end{aligned}$$

13.
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}y + \frac{1}{4}z &= 1 \\ \frac{2}{5}x + \frac{5}{2}y - z &= -2 \\ -2x - 4y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} \frac{3}{8}x+\frac{8}{5}y-\frac{3}{2}z&=2\\ -x+3y-2z&=1\\ -\frac{1}{6}x+\frac{1}{3}y&=3 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} -x+2y+5z+4w&=1\\ 2x+5y+4z-3w&=5\\ x+y+2z-2w&=0\\ -5x+6y+3z+w&=2 \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} 4x-2y+3z&=2\\ x-2y-3z+4w&=-1\\ 2y-z-w&=4\\ 5x+2z-3w&=1 \end{aligned}$$

17. $$\begin{aligned} 2x+y-3w&=0\\ -2x-y+4z&=1\\ -4x+2z+w&=-2\\ -4x+2y+5z+8w&=3 \end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned} -3x+2y-z+w&=1\\ 4x+2y-5z+w&=0\\ 2y-2z-w&=0\\ 3x+2y+5z-3w&=-2 \end{aligned}$$

19. $$\begin{aligned} \frac{2}{a}+\frac{3}{b}-\frac{4}{c}-\frac{1}{d}&=4\\ \frac{5}{b}-\frac{1}{d}&=6\\ -\frac{1}{a}-\frac{2}{c}+\frac{1}{d}&=2\\ \frac{4}{a}-\frac{1}{b}+\frac{2}{c}&=0 \end{aligned}$$

20. $$\frac{4}{3a}-\frac{3}{8b}-\frac{1}{4c}+\frac{1}{5d}=\frac{1}{2}$$
$$-\frac{1}{2b}-\frac{5}{3c}-\frac{1}{3d}=0$$
$$\frac{1}{5c}+\frac{4}{5d}=-3$$
$$\frac{5}{8a}+\frac{9}{6c}-\frac{1}{4d}=5$$

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 5.7

1. $z=\frac{8}{9},\ y=\frac{-11}{18},\ x=\frac{4}{3}$

2. $y=\frac{6}{5},\ x=\frac{-3}{5}$

3. $y=2,\ x=2$

4. $z=-5,\ y=4,\ x=-4$

5. $z=\frac{61}{126},\ y=\frac{136}{63},\ x=\frac{-173}{63}$

6. $x=-\frac{8}{55},\ y=-\frac{9}{22}$

7. $x=\frac{2}{17},\ y=\frac{21}{17},\ z=\frac{10}{17}$

8. $x=\frac{-59}{181},\ y=\frac{-123}{7},\ z=\frac{-89}{181}$

9. $x=\frac{8}{3},\ y=\frac{14}{9},\ z=\frac{1}{9}$

10. $x=-\frac{207}{209},\ y=-\frac{29}{209},\ z=\frac{7}{19}$

11. $x=-\frac{1}{51},\ y=\frac{4}{17},\ z=\frac{4}{17}$

12. $x=\frac{18}{47},\ y=\frac{35}{47},\ z=\frac{77}{94}$

13. $x=\frac{179}{101}, y=\frac{-80}{61}, z=\frac{-35}{61}$

14. $x=\frac{71}{8},\ y=\frac{215}{16},\ z=\frac{487}{32}$

15. $x=\frac{66}{61},\ y=\frac{136}{93},\ z=-\frac{201}{305},\ w=\frac{187}{305}$

16. $x=\frac{25}{19},\ y=\frac{137}{38},\ z=\frac{37}{19},\ w=\frac{60}{19}$

17. $x=\frac{65}{68},\ y=-\frac{11}{34},\ z=\frac{11}{17},\ w=\frac{9}{17}$

18. $x=-\frac{3}{14},\ y=-\frac{1}{224},\ z=-\frac{1}{8},\ w=\frac{27}{112}$

19. $a=\frac{13}{6},\ b=\frac{26}{43},\ c=-\frac{52}{5},\ d=\frac{26}{59}$

20. $a=-\frac{587}{72},\ b=-\frac{476}{2803},\ c=\frac{94}{249},\ d=-\frac{114}{503}$

5.8 MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS

Hasta el momento se tienen dos métodos matriciales para resolver sistemas de ecuaciones lineales. No obstante, su utilización (en ambos métodos) se restringe a sistemas de igual número de ecuaciones que de incógnitas.

El método **de eliminación de Gauss** tiene la ventaja de que sirve para resolver cualquier tipo de sistemas de ecuaciones lineales, ya sea que:

a) El sistema tenga igual número de ecuaciones y de incógnitas y el determinante sea igual o diferente de cero.

b) El sistema tenga diferente número de ecuaciones y de incógnitas.

Este método, al igual que la Regla de Cramer, tiene su origen en el método de suma y resta, por lo que primero se resolverá un sistema de ecuaciones lineales por este método y luego se establecerá la conexión con el método de eliminación de Gauss.

Ejemplo 1

Resolver el sistema siguiente:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & 3z & = & 5 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & -8 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 16 \end{array} \qquad (1)$$

Solución

Cabe recordar que resolver el sistema significa, en este caso, encontrar tres valores *x, y, z* tales que al sustituirlos en cada una de las tres ecuaciones estas sean válidas. El método de solución consistirá en simplificar las ecuaciones de forma que las soluciones se puedan encontrar fácilmente.

Se iniciará intercambiando el lugar de las primeras dos ecuaciones del sistema (1), quedando como sigue:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -8 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & 5 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 16 \end{array} \qquad (2)$$

Recuerda que si se suman dos ecuaciones se obtiene una nueva ecuación, la cual puede sustituir a cualquiera de las dos que se sumaron. También se sabe que es válido multiplicar ambos lados de una ecuación por una constante diferente de cero. Es importante aclarar que al efectuar cualquiera de las operaciones anteriores el nuevo sistema que se obtiene es ***equivalente*** al anterior, es decir, sus soluciones son las mismas.

Tomando esto en cuenta se procederá a simplificar el sistema (2). Se multiplicarán ambos lados de la primera ecuación por -2 y la ecuación resultante se sumará con la segunda. Esto queda como sigue:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & - & 4y & - & 6z & = & 16 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & 5 \\ \hline & & -3y & - & 9z & = & 21 \end{array}$$

La ecuación $-3y - 9z = 21$ se sustituirá por la segunda ecuación del sistema (2), así que el nuevo sistema será:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -8 \\ & & -3y & - & 9z & = & 21 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 16 \end{array} \qquad (3)$$

Ahora se sumarán la primera y la tercera ecuación del sistema (3):

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -8 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 16 \\ \hline & & 4y & + & 4z & = & 8 \end{array}$$

La ecuación $4y + 4z = 8$ se sustituirá por la tercera ecuación del sistema (3), por lo que el nuevo sistema es:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -8 \\ & & -3y & - & 9z & = & 21 \\ & & 4y & + & 4z & = & 8 \end{array} \qquad (4)$$

Observa que en el sistema (4) la incógnita x no aparece en las ecuaciones segunda y tercera, pues ha sido "eliminada" de ellas. Ahora si se multiplican ambos lados de la segunda ecuación por $-1/3$ y ambos lados de la tercera ecuación por $1/4$, el sistema queda como sigue:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -8 \\ & & y & + & 3z & = & -7 \\ & & y & + & z & = & 2 \end{array} \qquad (5)$$

Al multiplicar ambos lados de la segunda ecuación por -1 y sumar la ecuación resultante con la tercera ecuación se obtiene:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -8 \\ & & y & + & 3z & = & -7 \\ & & & & -2z & = & 9 \end{array} \qquad (6)$$

Multiplicando ambos lados de la tercera ecuación del sistema (6) por $-1/2$ se obtiene:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -8 \\ & & y & + & 3z & = & -7 \\ & & & & z & = & -9/2 \end{array}$$

Al sustituir $z = -9/2$ en la segunda ecuación se obtiene que $y = 13/2$, y al sustituir estos dos valores en la primera ecuación se obtiene el valor de $x = -15/2$, así que el sistema ha quedado resuelto.

Antes de resolver otro sistema es importante que observes que las incógnitas x, y, z siempre están en la misma posición, tanto en el sistema original como en los equivalentes, lo que hace pensar que si no se escriben las incógnitas y se respeta la posición relativa de los coeficientes y los términos constantes se puede trabajar con una sola matriz, la cual recibe el nombre de *matriz aumentada*.

Sistema original

$$\begin{aligned} 2x &+ y - 3z = 5 \\ x &+ 2y + 3z = -8 \\ -x &+ 2y + z = 16 \end{aligned}$$

Matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -8 \\ -1 & 2 & 1 & 16 \end{array}\right]$$

Nótese que cada renglón de la matriz aumentada corresponde a una ecuación del sistema original. En general la matriz aumentada se obtiene al agregar a la derecha de la matriz de coeficientes **A**, la matriz de términos constantes **B**, esto es, la matriz aumentada tiene la forma $\left[\mathbf{A}|\mathbf{B}\right]$.

Para simplificar el sistema original se utilizaron tres operaciones (intercambiar dos ecuaciones, multiplicar ambos lados de una ecuación por una constante diferente de cero y sumar un múltiplo de una ecuación a otra) que cuando se aplican a los renglones de la matriz aumentada reciben el nombre de *operaciones elementales de renglón*, las cuales se establecen a continuación:

Operaciones elementales de renglón

1. **Intercambiar dos renglones**
2. **Multiplicar un renglón por un número diferente de cero**
3. **Sumar un múltiplo de un renglón a otro**

Para indicar las operaciones anteriores se utiliza la siguiente simbología:

NOTACIÓN	DESCRIPCIÓN
$R_i \leftrightarrow R_j$	Indica intercambiar los renglones *i* y *j*, es decir, el renglón *i* se escribe en la posición del renglón *j*, y viceversa. Los renglones a intercambiar no es necesario que sean consecutivos.
$k\,R_i$	Indica que los elementos del renglón *i* se multiplican por la constante *k*.
$k\,R_i + R_j$	Indica que cada elemento del renglón *i* se debe multiplicar por la constante *k*, y el resultado sumárselo al elemento correspondiente del renglón *j* (en la matriz resultante el renglón *i* pasa igual; el que se altera es el renglón *j*).

Esta notación no es única, ya que también se acostumbra indicar directamente en la matriz aumentada la operación que se está realizando.

A continuación se repiten los pasos para simplificar el sistema, pero ahora utilizando la matriz aumentada y las operaciones elementales de renglón.

Ejemplo 2

Sistema original

$$\begin{aligned} 2x &+ y - 3z = 5 \\ x &+ 2y + 3z = -8 \\ -x &+ 2y + z = 16 \end{aligned}$$

Matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -8 \\ -1 & 2 & 1 & 16 \end{array}\right]$$

Al intercambiar los renglones 1 y 2 $R_1 \leftrightarrow R_2$ se obtiene:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -8 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & 5 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 16 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -2 \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & -8 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 16 \end{array}\right].$$

Si se multiplica cada elemento, el primer renglón por −2 y el resultado se le suma al elemento correspondiente del segundo renglón $-2R_1 + R_2$ queda:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -8 \\ & & -3y & - & 9z & = & 21 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 16 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & -3 & -9 & 21 \\ -1 & 2 & 1 & 16 \end{array}\right].$$

Al multiplicar cada elemento el primer renglón por 1 y el resultado sumárselo al elemento correspondiente del tercer renglón $R_1 + R_3$ se tiene:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -8 \\ & & -3y & - & 9z & = & 21 \\ & & 4y & + & 4z & = & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ -(1/3) \\ -(1/4) \end{array}\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & -3 & -9 & 21 \\ 0 & 4 & 4 & 8 \end{array}\right].$$

Al multiplicar cada elemento, el segundo renglón por −1/3, que se denota por $(-1/3)R_2$ y cada elemento del tercer renglón por 1/4 cuya notación es $(1/4)R_3$ el sistema y la matriz aumentada correspondiente quedan como sigue:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -8 \\ & & y & + & 3z & = & -7 \\ & & y & + & z & = & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ -1 \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Ahora, si se multiplica cada elemento el segundo renglón por −1, y el resultado se le suma al elemento correspondiente del tercer renglón $-R_2 + R_3$ se tiene:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -8 \\ & & y & + & 3z & = & -7 \\ & & & & -2z & = & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ \\ -(1/2) \end{array}\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \end{array}\right].$$

Al multiplicar el tercer renglón por −1/2 se obtiene:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & -8 \\ & & y & + & 3z & = & -7 \\ & & & & z & = & -9/2 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -9/2 \end{array}\right].$$

Como cada renglón corresponde a una ecuación entonces ya se tiene que el último renglón es $z = -9/2$, el segundo renglón es $y + 3z = -7$ y el primero es $x+2y+3z = -8$. Así que al sustituir $z = -9/2$ en el segundo renglón se obtiene el valor de $y = 13/2$, y sustituyendo esos dos en la primera ecuación se encuentra el valor de $x = -15/2$.

Obsérvese que la matriz final es una matriz escalonada (ver definición en pág. 353).

La estrategia que se siguió para resolver el sistema anterior se le conoce con el nombre de *método de eliminación de Gauss* el cual se resume a continuación.

Proceso para resolver un sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de eliminación de Gauss

Paso 1. Se construye la matriz aumentada del sistema $\left[\mathbf{A}|\mathbf{B}\right]$, es decir, se agrega a la derecha de la matriz de coeficientes, la matriz de términos independientes.

Paso 2. Por medio de operaciones elementales del renglón, sobre la matriz aumentada, se transforma la matriz del sistema A en una matriz escalonada.

Para escalonar una matriz, se sugiere lo siguiente:

a) El elemento del primer renglón y la primera columna de la matriz debe ser un 1, si no lo es, hay que transformarlo para que lo sea.
b) Este 1 se utiliza para hacer cero todos los elementos que se encuentran debajo de él. De aquí en adelante el primer renglón ya no cambia.
c) Ahora el primer elemento diferente de cero en el segundo renglón debe ser un 1.
d) Este 1 se utiliza para hacer cero todos los elementos que se encuentran debajo de él. De aquí en adelante el segundo renglón ya no cambia.
e) Se repiten los pasos *c)* y *d)* para cada uno de los renglones que faltan, solo hay que cambiar la palabra "segundo" renglón por tercero, cuarto, ..., hasta terminar con todos los renglones.

Paso 3. Una vez que la matriz se ha escalonado, se reconstruye el sistema de ecuaciones.

Paso 4. Se hace una sustitución en reversa para encontrar los valores de las incógnitas.

Nota: Todas las transformaciones que se mencionan en el proceso anterior se realizan utilizando las operaciones elementales del renglón.

También es importante aclarar que en algunas ocasiones, dependiendo de los valores de los elementos de la matriz por escalonar y de la habilidad del estudiante, es posible invertir los incisos *c)* y *d)*, es decir, hacer cero algún o algunos elementos que se requieran y luego construir el 1. El siguiente ejemplo servirá para clarificar el proceso para escalonar una matriz.

Ejemplo 3

Resolver el siguiente sistema, utilizando el método de eliminación de Gauss.

$$\begin{aligned} x + 4y - 2z &= 3 \\ x + 6y - z &= 4 \\ 3x + 8y - 8z &= 1 \end{aligned}$$

Solución

Paso 1. Se construye la matriz aumentada agregando a la derecha de la matriz del sistema, la matriz de términos independientes.

Matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 6 & -1 & 4 \\ 3 & 8 & -8 & 1 \end{array}\right]$$

Paso 2. Se transforma la matriz del sistema **A** en una matriz escalonada. Lo haremos de acuerdo con el proceso sugerido para escalonar una matriz.

a) El elemento del primer renglón y la primera columna de la matriz **A** ya es un uno.
b) Con este uno, deberán de transformarse en ceros todos los elementos que se encuentran debajo de él.

Para convertir en 0 el número 1 que se encuentra en el segundo renglón, se multiplica por −1 cada elemento del primer renglón y el resultado se suma al elemento correspondiente del renglón 2.

$$\begin{array}{c} -1 \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 6 & -1 & 4 \\ 3 & 8 & -8 & 1 \end{array}\right]$$

Así que:
- El primer renglón queda igual
- El segundo renglón cambia
- El tercer renglón queda igual

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & -8 & 1 \end{array}\right]$$

Ahora para convertir en cero el número 3 que se encuentra en el tercer renglón, cada elemento del primer renglón se multiplica por −3 y el resultado se suma al elemento correspondiente del renglón 3.

$$\begin{array}{c} -3 \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 8 & -8 & 1 \end{array}\right]$$

Así que:
- El primer renglón queda igual
- El segundo renglón queda igual
- El tercer renglón cambia

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -8 \end{array}\right]$$

c) Ahora el primer elemento diferente de cero en el segundo renglón debe ser un uno.

Cada elemento del segundo renglón se multiplica por 1/2:

$$(1/2)\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & -8 \end{array}\right]$$

Así que:

- El primer renglón queda igual
- El segundo renglón cambia
- El tercer renglón queda igual

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -4 & -2 & -8 \end{array}\right]$$

d) Ahora se deberá hacer cero el número –4 que se encuentra en el renglón 3, columna 2.

Cada elemento del renglón 2 se multiplica por 4 y el resultado se suma al elemento correspondiente del renglón 3.

$$\begin{array}{r} \\ 4 \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -4 & -2 & -8 \end{array}\right]$$

Así que:

- El primer renglón queda igual
- El segundo renglón queda igual
- El tercer renglón cambia

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right]$$

La matriz **A** ya está escalonada.

Paso 3. Se reconstruye el sistema de ecuaciones.

Observa que al reconstruir el sistema, el último renglón corresponde a la ecuación $0x + 0y + 0z = -6$, lo cual es imposible ya que $0 \neq -6$, por lo que se concluye que este sistema no tiene solución.

Paso 4. En este ejemplo no aplica, ya que el sistema es inconsistente.

Nota: Un sistema de ecuaciones lineales será **inconsistente**, es decir, **no tiene solución**, si al terminar de escalonar la matriz aumentada, se obtiene un renglón de la forma:
$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = k$ en donde $k \neq 0$.

Ejemplo 4

Resolver el sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & 2x & + & 6z & = & 4 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array}$$

Solución

Se procederá igual que en los ejemplos anteriores, construyendo primero la matriz aumentada, después aplicando operaciones elementales de renglón para escalonar la matriz **A** y, por último, haciendo la sustitución en reversa para encontrar los valores de las incógnitas.

Paso 1. Se construye la matriz aumentada, agregando a la derecha de la matriz de coeficientes, la matriz de términos independientes.

Matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Paso 2.

a) El elemento que está en el renglón 1, columna 1 debe ser un uno, por lo que se multiplica el primer renglón de la matriz aumentada por ½.

$$(1/2)\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Al efectuar el producto, se obtiene la siguiente matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

b) Se transforma en 0 el número 3 que se encuentra en el segundo renglón; para ello se multiplica cada elemento del primer renglón por –3 y el resultado se suma al elemento correspondiente del renglón 2.

$$\begin{array}{c} -3 \\ \hookrightarrow \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Se obtiene la matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -6 \end{array}\right]$$

c) Ahora para que el primer elemento diferente de 0 en el segundo renglón sea 1, se multiplica el renglón 2 por $(1/2)$

$$\begin{array}{c} \\ (1/2) \end{array}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -6 \end{array}\right]$$

Al efectuar el producto, se obtiene la siguiente matriz escalonada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \end{array}\right]$$

Paso 3. Al reconstruir el sistema, las ecuaciones correspondientes son:

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 3z & = & 2 \\ y & - & 4z & = & -3 \end{array}$$

Paso 4. Al despejar las incógnitas x y y de las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & - & 3z \\ y & = & -3 & + & 4z \end{array}$$

Del resultado anterior, podemos observar que las incógnitas x y y dependen de la incógnita z.

Cuando esto ocurre se dice que z es libre, esto significa que puede tomar cualquier valor. Por ejemplo si $z = 0$, entonces $x = 2$ y $y = 3$; si $z = -1$, entonces $x = 5$ y $y = -7$, etcétera.

Por tanto, se concluye que el sistema tiene un número infinito de soluciones.

Nota: Un sistema de ecuaciones lineales puede tener un **número infinito de soluciones** en cualquiera de los siguientes casos:

1. Cuando al reconstruir el sistema se tengan más incógnitas que ecuaciones.
2. Si al llevar la matriz aumentada a su forma reducida en la matriz del sistema aparece una columna sin pivote.

Por ejemplo, en el ejercicio anterior la columna 3 no tiene pivote.

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de eliminación de Gauss.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 5 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 10 \\ x & + & y & - & 4z & = & -3 \end{array}$$

Solución

Paso 1. Construye la matriz aumentada del sistema.

Esta matriz se obtiene escribiendo un arreglo matricial con los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes.

En este caso la matriz aumentada será:	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & -4 & -3 \end{array}\right]$

Paso 2. Transforma la matriz del sistema A en una matriz escalonada.
Para escalonar la matriz se hace lo siguiente:

El elemento del primer renglón y la primera columna de la matriz aumentada **debe ser** un **uno**.	
Utiliza este **uno** para hacer ceros todos los elementos de esa columna que estén abajo de él. **Nota:** De aquí en adelante el primer renglón queda igual.	
El primer elemento diferente de cero en el segundo renglón **debe ser** un **uno**.	
Utiliza este **uno** para hacer ceros todos los elementos de esa columna que estén abajo de él. **Nota:** De aquí en adelante los renglones 1 y 2 quedan igual.	
El primer elemento diferente de cero en el tercer renglón **debe ser** un **uno**.	

Paso 3. Reconstruir el sistema de ecuaciones.

Paso 4. Hacer una sustitución en reversa.

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.8

Usar el método de eliminación de Gauss para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

1. $$\begin{aligned} 2x + y + z &= 8 \\ 3x - 2y - z &= 1 \\ 4x - 7y + 3z &= 10 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ -2x + 5y + 2z &= 0 \\ -7x + 7y + z &= 0 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ 2x - 3y &= -2 \\ 3x + 2y &= 1 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} 4s - 8t &= 12 \\ 3s - 6t &= 9 \\ -2s + 4t &= -6 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 3x - 5y &= 0 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} x + y - 2z &= 1 \\ 2x - y + z &= 2 \\ x - 2y - 4z &= -4 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} 3x + y &= 1 \\ 12x + 4y &= 4 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} x + 6y - 2z &= 0 \\ 2x - 3y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} 3x + 4y &= 0 \\ x - 2y &= 0 \\ 2x + y &= 0 \\ 2x + 3y &= 0 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ -x + 2y &= 7 \\ 3x + y &= 0 \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 1 \\ 3x + 2y - z &= 5 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} x - 9y + 5z &= 33 \\ x + 3y - z &= -9 \\ x - y + z &= 5 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} x + 2y + z - 4 &= 0 \\ 3x + 2z - 5 &= 0 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} x - 3y &= 0 \\ 2x + 2y &= 3 \\ 5x - y &= 1 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} x - y - 3z &= -4 \\ 2x - 4z &= -6 \\ x + y - z &= -2 \end{aligned}$$

16. $$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & & & - & 4z & = & 8 \\ x & - & 2y & - & 2z & = & 14 \\ x & + & y & - & 2z & = & -1 \\ 3x & + & y & + & z & = & 0 \end{array}$$

17. $$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 5x & + & 3y & + & 3z & = & 3 \\ -2x & - & y & + & 5z & = & 6 \end{array}$$

18. $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & t & = & 4 \\ 2x & + & y & - & 3z & + & t & = & 4 \\ x & - & 2y & + & 2z & - & t & = & 3 \\ x & - & 3y & + & 3z & - & 3t & = & 2 \end{array}$$

19. $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & - & 2z & + & t & = & 4 \\ x & + & y & + & z & - & t & = & 5 \\ x & - & y & - & z & + & t & = & 6 \\ 6x & - & 3y & - & 3z & + & 2t & = & 32 \end{array}$$

20. $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & y & - & z & + & w & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & - & w & + & t & = & 0 \\ x & - & y & - & z & + & w & - & t & = & 0 \\ x & + & y & - & z & - & w & - & t & = & 0 \end{array}$$

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 5.8

1. $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$

2. $x = \dfrac{-3z}{7}$, $y = \dfrac{-4z}{7}$, $z =$ variable libre, es decir, el sistema tiene un número infinito de soluciones

3. sistema inconsistente, no tiene solución

4. $s = 3 + 2t$, $t =$ variable libre, es decir, el sistema tiene un número infinito de soluciones; por ejemplo si $t = 0$, entonces $s = 3$

5. $x = 0,\ y = 0$

6. $x = \dfrac{26}{21},\ y = \dfrac{25}{21},\ z = \dfrac{5}{7}$

7. $x = (-1/3)\,r + (1/3),\ \ y = r$, donde r es cualquier número real

8. $x = -(14/15)\,r,\ y = (8/15)\,r,\ z = r$, donde r es cualquier número

9. $x = 0,\ y = 0$

10. $x = -1,\ y = 3$

11. $x = 1 - (5/7)\,r,\ y = 1 + (11/7)\,r,\ z = r$, donde r es cualquier número real

12. $x = (3/2) - (1/2)\,r,\ y = (-7/2) + (1/2)\,r,\ z = r$, donde r es cualquier número real

13. $x = -2/3\,r + 5/3,\ y = -1/6\,r + 7/6, z = r$, donde r es cualquier número real

14. No tiene solución

15. $x = -3 + 2r,\ y = 1 - r,\ z = r$, donde r es cualquier número real

16. $x = 2,\ y = -5,\ z = -1$

17. $x = -3,\ y = 5,\ z = 1$

18. $x = 5 - 3r,\ y = (9/2) - (11/2)\,r, z = (7/2) - (7/2)\,r,\ t = r$, donde r es cualquier número real

19. $x = (11/2),\ y = 2 - r,\ z = r, t = (5/2)$, donde r es cualquier número real

20. $x = 0,\ y = -r,\ z = -r,\ w = -r,\ t = r$, donde r es cualquier número real

5.9 APLICACIONES DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Los sistemas de ecuaciones sirven para representar de manera simbólica una situación real. Es decir, son el modelo matemático de una situación o problema real que se necesita resolver.

Ejemplo 1

Una fábrica tiene una producción semanal fija de 42 unidades. La fábrica abastece a tres casas de mayoreo, que demandan toda la producción. Para una determinada semana, la primera casa solicitó tantas unidades como la segunda y tercera juntas, mientras que la segunda casa pidió un 10% más que la tercera. ¿Cómo debe dividirse la producción para que cada casa obtenga las cantidades solicitadas?

Para resolver este ejemplo es necesario primero establecer un modelo matemático que lo represente. Para lograr dicha representación es importante primero definir las incógnitas que se van a utilizar; al definirlas se debe tomar en cuenta que estas responden a las preguntas planteadas.

Solución

Paso 1. Definición de incógnitas

En este caso se requiere que cada casa *obtenga las cantidades solicitadas*, así que:
x = cantidad solicitada por la primera casa
y = cantidad solicitada por la segunda casa
z = cantidad solicitada por la tercera casa.

Paso 2. Planteamiento de las ecuaciones

Ahora se tendrá que interpretar la información dada para representarla matemáticamente, mediante las incógnitas que ya se definieron. Para lograrlo hay que volver a leer el enunciado.

Una fábrica tiene una producción semanal fija de 42 unidades. La fábrica abastece a tres casas de mayoreo, que demandan toda la producción.

Esto significa que lo que pide la primera casa, más lo que pide la segunda, más lo que pide la tercera es igual a la producción de la fábrica, en símbolos queda
$x + y + z = 42$.

Para una determinada semana, la primera casa solicitó tantas unidades como la segunda y tercera juntas.

Esto significa que el pedido de la primera casa es igual a la suma de los pedidos de la segunda y la tercera casas, lo que en símbolos se puede escribir como $x = y + z$.

Por último, la segunda casa pidió un 10% más que la tercera,

Esto quiere decir que el pedido de la segunda casa es igual al de la tercera casa más un 10% del pedido de esa casa. Recuerda que cuando nos dan la información en porcentaje, es necesario convertirlo a decimales, 10% = 0.1.

En símbolos la información anterior corresponde a la ecuación $y = z + 0.1z$.

De manera que se tiene toda la información resumida en 3 ecuaciones con 3 incógnitas, si estas ecuaciones se escriben de tal forma que todas las incógnitas estén del lado izquierdo se obtiene:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 42 \\ x-y-z &= 0 \\ y-1.1z &= 0 \end{aligned}$$

que es un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo.

La representación matricial del sistema quedaría como sigue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 42 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para contestar a la pregunta planteada en el enunciado es necesario encontrar los valores de x, y y z que satisfacen a todas las ecuaciones del sistema; es decir, se necesita resolver el sistema; puedes utilizar cualquiera de los métodos vistos anteriormente.

¡A trabajar!

EJERCICIO 1

Una zapatería adquiere cierta cantidad de zapatos en estilos de $80, $100 y $110, que vende a $120, $150 y $180, respectivamente. Una vez que todos los pares de zapatos hayan sido vendidos, se tendrá una ganancia de $6700. El número de zapatos pedidos del estilo 2 fue dos veces el del estilo 3, mientras que el número de zapatos del estilo 1 fue de 10 unidades más que las del estilo 3. ¿Cuántos zapatos se ordenaron del estilo 2?

Solución

Paso 1. Define las incógnitas.

Al definir las incógnitas es importante describir lo que representa cada una de las literales que utilizarás. Recuerda que la descripción debe ayudar a responder a la pregunta planteada.

Paso 2. Secciona la información dada en el enunciado, plantea las ecuaciones que describen cada parte y explica en forma global el significado práctico de cada una de ellas.

Una zapatería adquiere cierta cantidad de zapatos en estilos de $80, $100 y $110, que vende a $120, $150 y $180, respectivamente. Una vez que todos los pares de zapatos hayan sido vendidos, se tendrá una ganancia de $6700.

Ecuación 1: ______________________ Significado: ____________

El número de zapatos pedidos del estilo 2 fue dos veces el del estilo 3.

Ecuación 2: ______________________ Significado: ____________

El número de zapatos del estilo 1 fue de 10 unidades más que las del estilo 3.

Ecuación 3: ______________________ Significado: ____________

Paso 3. Resuelve el sistema.

Incluye todos los procedimientos utilizados para llegar a la solución y responde la pregunta planteada.

¡A trabajar!

EJERCICIO 2

La gerencia de una sociedad de inversión tiene un fondo de \$200 000 para invertir en acciones. Con el propósito de alcanzar un nivel aceptable de riesgo, las acciones consideradas se han clasificado en tres categorías: de alto, mediano y bajo riesgo. La gerencia estima que las acciones de alto riesgo tendrán una tasa de recuperación de 15% por año; las de mediano, 10% por año y las de bajo riesgo tendrán un 6% por año. La cantidad invertida en las acciones de bajo riesgo será el doble de la suma invertida en las otras dos categorías. Si el objetivo de la inversión es tener una tasa promedio de recuperación de 9% por año sobre la inversión total, ¿cuánto se debe invertir en cada tipo de acción?

Solución

Paso 1. Define las incógnitas.

Al definir las incógnitas es importante describir lo que representa cada una de las letras que utilizarás. Recuerda que la descripción debe ayudar a responder a la pregunta planteada.

Paso 2. Plantea las ecuaciones que describen el enunciado y explica, en forma global, el significado práctico de cada una de ellas.

La gerencia de una sociedad de inversión tiene un fondo de \$200 000 para invertir en acciones. Con el propósito de alcanzar un nivel aceptable de riesgo, las acciones consideradas se han clasificado en tres categorías: de alto, mediano y bajo riesgo.

Ecuación 1: ______________________ Significado: ____________

La gerencia estima que las acciones de alto riesgo tendrán una tasa de recuperación de 15% por año; las de mediano, 10% por año y las de bajo riesgo tendrán un 6% por año y el objetivo de la inversión es tener una tasa promedio de recuperación de 9% por año sobre la inversión total.

Ecuación 2: ______________________ Significado: ____________

La cantidad invertida en las acciones de bajo riesgo será el doble de la suma invertida en las otras dos categorías.

Ecuación 3: ____________________ Significado: ____________

Paso 3. Resuelve el sistema.

Incluye todos los procedimientos utilizados para llegar a la solución y responde la pregunta planteada.

CONJUNTO DE EJERCICIOS DE LA SECCIÓN 5.9

Para cada uno de los siguientes problemas, plantea el sistema de ecuaciones que los representa.

1. Un hombre tiene invertidos $40 000 en un boliche, un restaurante y una lavandería. El año pasado obtuvo un ingreso del 3% de la inversión en el boliche, un 8% de la inversión en el restaurante y un 12% de la lavandería. Sus ingresos totales fueron de $2850. Los ingresos del restaurante fueron iguales a los de la lavandería. Encuentra la cantidad invertida en cada negocio.
2. Se ha instalado un circo en la ciudad, el cual tiene espacio para 1550 personas, los boletos de entrada tienen un valor de $20 para niños, $50 para adultos y $30 para adultos con credencial de descuento. Se sabe que en la función de las 8:00 p.m. se tuvo un ingreso de $63 000 y que la cantidad de adultos fue igual a 450 más de la suma de la cantidad de niños y adultos con credencial de descuento. Calcular la cantidad de adultos con credencial que entraron a esa función.
3. Una fábrica de refrescos elabora tres tipos de refrescos, A, B y C, para ello ocupa 3 tipos de máquina: una donde se realiza el llenado de líquido, otra que coloca la tapa del refresco y la última que pega la etiqueta; el tiempo en segundos requerido para cada máquina, según el tipo de refresco, se da en la siguiente tabla:

	A	B	C
LLENADO	12	10	8
TAPA	3	3	3
ETIQUETA	6	4	2

   Las maquinas de llenado, tapa y etiquetado disponen de un máximo de 118 000; 34 500 y 49 000 segundos, respectivamente por día. Cuántos refrescos del tipo A se producen en un día, si la fábrica opera a toda su capacidad.
4. En una fábrica que tiene 50 trabajadores entre profesionistas, técnicos y estudiantes, los cuales ganan por hora $150, $60 y $40 respectivamente, la empresa cuenta con un presupuesto para salarios de $5600 por hora. Los profesionistas y técnicos tiene una jornada de

8 h, mientras que los estudiantes solo trabajan medio tiempo; si se pagó un total de 380 h, ¿cuántos profesionistas trabajaron ese día?

5. Una persona por asuntos de trabajo tiene que viajar a Londres, París y España gasta en alojamiento, por día, \$400 dólares en Londres, \$450 en París y \$300 dólares en España. En comidas gastó \$200, \$180 y \$150 dólares, respectivamente y también gastó \$50 dólares por día en cada país como gastos varios; cuando regresa de su viaje, hizo un reporte de sus gastos totales, que fueron de \$4700 dólares por alojamiento, \$2170 dólares por alimentos y \$600 dólares como gastos varios. ¿Cuántos días paso en cada país?

6. Un inversionista compra acciones en diferentes compañías, una telefónica, una televisora y una de aviación. Revisando la bolsa de valores se percata de que el lunes el precio de sus acciones bajó en \$450 dólares, pero el martes subieron \$800 dólares, el lunes el precio de la acción de la compañía telefónica bajo \$1, la empresa televisora bajo \$0.75 y la compañía de aviación subió \$1.50 por acción. El martes los precios de las acciones se comportaron de la siguiente manera: la compañía telefónica se fue a la alza \$3, la televisora a la baja \$0.5 y la compañía de aviación a la alza \$1. Si el inversionista tiene 150 acciones de la compañía de aviación, determina el número de acciones en la compañía telefónica y en la empresa televisora.

7. Una empresa se dedica a la fabricación y venta de dos productos A y B; la empresa paga por la publicidad de cada producto \$30, por el producto A paga una mano de obra de \$70 y \$120 por el producto B. Los precios de venta son de \$120 el producto A y \$200 el producto B. ¿Cuántas unidades de cada producto se fabrican y venden, si se gastó \$600 000 en publicidad, \$180 000 en mano de obra y se obtuvo un ingreso de \$304 000?

8. Una compañía cuenta con tres tipos de maquinas expendedoras que proveen: jugos, agua potable, refrescos en lata y refrescos en envases de plástico, según se muestra en la tabla. Al final del día se agotan todos los productos, 1580 jugos, 2052 botes de agua potable, 2350 refrescos de lata y 2700 refrescos en envase de plástico. ¿Cuántas maquinas de cada tipo tiene la compañía?

PRODUCTO	MÁQUINA		
	TIPO I	TIPO II	TIPO III
JUGOS	20	30	28
AGUA	30	42	30
REFRESCOS DE LATA	40	45	35
REFRESCOS PLÁSTICO	50	50	40

9. La gerencia de una empresa ha asignado \$7 250 000 para la compra de 50 automóviles nuevos de tipo austero, equipado y de lujo con precios de \$120 000; \$150 000 y \$200 000, respectivamente. Encuentra dos opciones para el comprador

10. Un grupo de inversionistas decidieron invertir \$700 000 en la compra de acciones de tres compañías. La compañía "x" vende en \$50 cada acción y tiene un rendimiento esperado de 12% anual. La compañía "y" vende en \$70 cada acción y tiene un rendimiento esperado de 15% anual, mientras que la compañía "z" vende cada acción en \$25 con un rendimiento esperado de 8% anual. El grupo de inversionistas planea comprar 2 veces más acciones de la compañía "z" que de la compañía "x", y se han puesto como meta alcanzar un rendimiento anual del 12.5%. ¿Cuántas acciones de cada compañía deben comprar los inversionistas?

11. Una empresa se dedica a la elaboración de 3 productos (A, B y C) los cuales para su producción tiene que pasar por tres departamentos (ensamblado, pegado y pintura). Las horas requeridas por unidad de cada producto en cada departamento se muestran en la siguiente tabla, así como también las capacidades semanales de cada departamento en términos de las horas de trabajo disponibles. ¿Cuántas unidades de cada producto se deben producir para aprovechar al máximo las capacidades de los tres departamentos?

DEPARTAMENTO	PRODUCTO			
	A	B	C	HORAS POR SEMANA
ENSAMBLADO	2	3	3	11 500
PEGADO	3	2	2	11 000
PINTURA	1	2	1	5 500

12. Una compañía necesita \$5 310 000 para ampliar sus instalaciones y tiene tres opciones de préstamo: el Banco la presta al 15% de interés; el Corporativo de la empresa, al 9%, y el crédito hipotecario, al 12%. Si el corporativo le presta el doble del crédito hipotecario otorgado por el banco y el crédito hipotecario juntos y la compañía puede pagar un total de \$559 500 de intereses. ¿Qué cantidad debe pedir prestada en cada uno de las opciones?

13. Un camión urbano recolectó \$2164 durante su turno de trabajo. El costo del pasaje es de \$5.60 por adulto, \$3.80 por estudiante y \$3.50 para personas con credencial del INAPAM (Instituto Nacional de las Persona Adultas Mayores). Si se sabe que en ese turno dieron el servicio a 440 personas y que el número de estudiantes fue tres veces el número de personas del INAPAM, ¿Cuántos adultos utilizaron ese camión?, ¿cuántos estudiantes?, ¿cuántas personas del INAPAM?

14. Una empresa produce albercas de fibra de vidrio en tres tamaños: chico, mediano y grande, a un costo de \$250, \$320 y \$400, respectivamente, más costos fijos de \$15 000. Si se tiene un presupuesto de \$230 250, y se le ha solicitado un pedido de 700 unidades, en donde se le pidió que las del tamaño chico sean 50 unidades más que las del tamaño grande, ¿Cuántas albercas se deben producir de cada tamaño?

15. Una compañía fabrica televisores, estéreos y radios; para ello es necesario que se procese en tres departamentos distintos. Las horas de procesamiento requeridas por unidad, así como las capacidades de cada departamento se muestran en la siguiente tabla:

DEPARTAMENTO	TELEVISORES	ESTÉREOS	RADIOS	HORAS DISPONIBLES POR SEMANA
1	6	2	2	86
2	7	4	1	87
3	5	5	3	125

¿Cuántas unidades de cada producto deben de fabricarse por semana para aprovechar el máximo la disponibilidad de horas de trabajo en todos los departamentos?

16. A una persona le prescribió el doctor tomar 10 unidades de vitamina A, 9 unidades de vitamina D y 19 unidades de vitamina E diariamente. La persona puede elegir entre tres marcas

de píldoras vitamínicas. La marca X contiene 2 unidades de vitamina A, 3 de vitamina D y 5 de vitamina E; la marca Y tiene 1, 3 y 5 unidades, respectivamente; y la marca Z tiene 1 unidad de vitamina A, ninguna de vitamina D y 1 unidad de vitamina E.

a) Encuentra todas las combinaciones posibles de píldoras que puede proporcionar de manera exacta las cantidades requeridas

b) Si la marca X cuesta 1 centavo cada píldora, la marca Y cuesta 6 centavos y la marca Z cuesta 3 centavos, existe alguna combinación de la parte *a*) que cueste exactamente 15 centavos.

c) ¿Cuál es la combinación menos cara de la parte *a*), y la más cara?

RESPUESTAS DE LA SECCIÓN 5.9

1. Debe invertir $15 000 en el boliche, $15 000 en el restaurante y $10 000 en la lavandería
2. 200
3. 4500
4. 30 profesionistas
5. 5 días en Londres, 4 días en París y 3 días en España
6. Telefonía 300 acciones y Televisora 500 acciones
7. 1200 unidades del producto A y 800 unidades del producto B
8. 12 máquinas del tipo I, 26 máquinas del tipo II y 20 máquinas del tipo III
9. Opción 1: 25 austeros, 15 equipados y 10 de lujo
   Opción 2: 15 austeros, 31 equipados y 4 de lujo
10. Compañía “x” 3500 acciones; compañía “y” 5000 acciones y la compañía “z” 7000 acciones
11. En el departamento de ensamblado 2000 unidades, en el departamento de pegado 1000 unidades y en el departamento de pintura1500 unidades
12. $950 000 al banco, $3 540 000 al corporativo de la empresa y $820 000 al crédito hipotecario
13. 280 adultos, 120 estudiantes y 40 con credencial del INAPAM
14. 325 albercas chicas, 200 albercas medianas y 175 albercas grandes
15. 5 televisores, 8 estéreos y 20 radios
16. *a*) las posibles combinaciones son: 3 de X, 4 de Z; 2 de X, 1 de Y, 5 de Z; 1 de X, 2 de Y, 6 de Z; 3 de X, 7 de Z
    b) La combinación de 3 de X, 4 de Z cuesta 15 centavos al día
    c) La combinación menos cara es de 3 de X, 4 de Z; y la más cara es de 3 de Y, 7 de Z

anexos

Hojas de trabajo

PROPIEDADES Y FÓRMULAS BÁSICAS PARA INTEGRAR

Nombre ______________________________ Matrícula ______________ Grupo ________

Nombre ______________________________ Matrícula ______________

Instrucciones: Utiliza las propiedades y fórmulas básicas de integración para resolver las siguientes integrales. Describe paso a paso el procedimiento utilizado y justifícalo. Observa el ejemplo.

$\int (5x^2 + 2e^x)\, dx = \int 5x^2\, dx + \int 2e^x\, dx$ Propiedad de la suma de integrales.

$= 5\int x^2\, dx + 2\int e^x\, dx$ Propiedad del producto de una constante por una función.

$= \dfrac{5x^3}{3} + 2e^x + C$ Fórmulas para integrar función potencia y exponencial.

1. $\int \left(w^{-5/2} - \dfrac{3}{w} + 1 \right) w\, dw$

2. $\int (\pi^x + x^\pi)\, dx$

3. $\int \left(5e^t + \dfrac{3}{2t} \right) dt$

4. $\int \left(\frac{2^x \, 8^x}{4^x} \right) dx$

5. $\int \left(\frac{y^2 - y^{1/2} + 2y}{y^2} \right) dy$

6. $\int \left(\frac{4x^2 - 36}{2x + 6} \right)^2 dx$

ENCONTRAR EL VALOR DE LA CONSTANTE

Nombre ______________________ Matrícula ____________ Grupo ________

Cuando se integra una función se obtiene una antiderivada general de la forma $F(x) + C$. Una **antiderivada particular** se obtiene cuando la constante de integración toma un valor específico, por lo que es necesario que nos den un punto para poder obtener el valor de la constante.

Un fabricante estima que cuando se producen q unidades, el ingreso marginal será de $230\, q^{-1/2}$ dólares por unidad y el correspondiente costo marginal se estima que será de 0.4 dólares por unidad. Si la utilidad del fabricante es de $750 cuando el nivel de producción es de 16 unidades, encuentra una fórmula para la utilidad obtenida por el fabricante, como una función de la cantidad de unidades producidas q y utilízala para determinar la utilidad obtenida por el fabricante si se producen 100 unidades.

Solución

Conocimientos previos requeridos

Ingreso marginal = derivada del ingreso = I'
Costo marginal = derivada del costo = C'
Utilidad marginal = derivada de la utilidad = U'
Por tanto $U' = I' - C'$

¿Qué información te dan?

¿Qué debes hacer para obtener la función de utilidad? ______________________.

¡Hazlo!

¿Qué debes hacer para obtener el valor de la constante? ______________________.

¡Hazlo!

Escribe la antiderivada particular para la función de utilidad: ______________________.

Utiliza el resultado anterior para responder a la pregunta planteada.

ANTIDERIVADA

Nombre ______________________________ Matrícula ______________ Grupo ________

Responde las preguntas de acuerdo con tus propias ideas generadas durante el estudio del tema.

1. ¿En qué consiste el proceso de integración?

2. ¿Cómo se define la antiderivada de una función f?

3. ¿Por qué la antiderivada de una función no es única?

4. ¿Cuál es la representación simbólica de la integral indefinida?

¿REGLA DE LA CADENA O FÓRMULAS BÁSICAS?

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo ________

a) Decide el método que utilizarías para resolver cada una de las siguientes integrales y márcalo con una ✔.

b) En las integrales en que se aplica **la Regla de la Cadena**, especifica la función f, encuentra su derivada f' y determina si la función compuesta corresponde a una función potencia, exponencial de base a, base e o trigonométrica.

c) Resuelve la integral de acuerdo con el análisis realizado.

		FUNCIÓN f	DERIVADA f'	FUNCIÓN COMPUESTA	ANTIDERIVADA
1. $\int \left(x^2 - 2x + 1\right) dx$	F. básicas ☐ R. cadena ☐				

		FUNCIÓN f	DERIVADA f'	FUNCIÓN COMPUESTA	ANTIDERIVADA
2. $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$	F. básicas ☐ R. cadena ☐				

		FUNCIÓN f	DERIVADA f'	FUNCIÓN COMPUESTA	ANTIDERIVADA
3. $\int 2xe^{x^2} dx$	F. básicas ☐ R. cadena ☐				

		FUNCIÓN f	DERIVADA f'	FUNCIÓN COMPUESTA	ANTIDERIVADA
4. $\int 3\left(x^3+3\right)^5 x^2\, dx$	F. básicas ☐ R. cadena ☐				

		FUNCIÓN f	DERIVADA f'	FUNCIÓN COMPUESTA	ANTIDERIVADA
5. $\int 5^t\, dt$	F. básicas ☐ R. cadena ☐				

		FUNCIÓN f	DERIVADA f'	FUNCIÓN COMPUESTA	ANTIDERIVADA
6. $\int \frac{4t}{t^2-1}\, dt$	F. básicas ☐ R. cadena ☐				

		FUNCIÓN f	DERIVADA f'	FUNCIÓN COMPUESTA	ANTIDERIVADA
7. $\int 2w\, Cos\left(w^2-5\right) dw$	F. básicas ☐ R. cadena ☐				

		FUNCIÓN f	DERIVADA f'	FUNCIÓN COMPUESTA	ANTIDERIVADA
8. $\int \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt$	F. básicas ☐ R. cadena ☐				

Nota: Recuerda que si a la derivada de la interna *solo le falta una constante*, entonces la derivada se pude completar.

REGLA DE LA CADENA

Nombre ____________________ Matrícula __________ Grupo ______

Obtén la antiderivada de la función $\int \frac{e^{\left(\frac{2}{x}+3\right)}}{x^2}\,dx$. Responde a las preguntas planteadas.

1. ¿Qué fórmula vas a utilizar? Justifica tu respuesta. ____________________

   ____.

2. No olvides la condición.

   Compruébala.

   $f(x) =$ ____________________ entonces $f'(x) =$ ____________________.

   ¿Se cumple la condición? __________.

   ¿Qué falta en el integrando para que se cumpla? ____________________.

   ¿Puedes agregar lo que le falta? __________. ¿Por qué? ____________________.

   ¿Qué debes hacer para **no** alterar la función original? ____________________.

3. Si ya se cumple la condición y **no** se altera la función original, utiliza la fórmula y obtén la antidervada:

   $F(x) =$ ____.

REGLA DE LA CADENA

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo ________

Obtén la antiderivada de la función $\int \frac{\sqrt[3]{\left(\ln x^2+3\right)^2}}{x}\,dx$. Responde a las preguntas planteadas.

1. ¿Qué fórmula vas a utilizar? Justifica tu respuesta. ______________________________.

   ____.

2. No olvides la condición.

   Compruébala.

   $f(x) =$ ______________________ entonces $f'(x) =$ ______________________.

   ¿Se cumple la condición? __________.

   ¿Qué falta en el integrando para que se cumpla? ______________________________.

   ¿Puedes agregar lo que le falta? ____________. ¿Por qué? ______________________.

   ¿Qué debes hacer para **no** alterar la función original? ______________________.

3. Si ya se cumple la condición y **no** se altera la función original, utiliza la fórmula y obtén la antidervada:

   $F(x) =$ ____.

REGLA DE LA CADENA

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo __________

Obtén la antiderivada de la función $\int \frac{1}{x \cdot \left(\ln(2x^3)+1\right)} dx$. Responde a las preguntas planteadas.

1. ¿Qué fórmula vas a utilizar? Justifica tu respuesta. ______________________.

   ____

2. No olvides la condición.

   Compruébala.

   $f(x) =$ ______________________ entonces $f'(x) =$ ______________________.

   ¿Se cumple la condición? __________.

   ¿Qué falta en el integrando para que se cumpla? ______________________.

   ¿Puedes agregar lo que le falta? __________. ¿Por qué? ______________.

   ¿Qué debes hacer para **no** alterar la función original? ______________________.

3. Si ya se cumple la condición y **no** se altera la función original, utiliza la fórmula y obtén la antidervada:

   $F(x) =$ ____

REGLA DE LA CADENA

Nombre ______________________ Matrícula ____________ Grupo ________

Obtén la antiderivada de la función $\int \operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot 6^{\cos^2 x}\,dx$. Responde a las preguntas planteadas.

1. ¿Qué fórmula vas a utilizar? Justifica tu respuesta. ______________________.

   ____

2. No olvides la condición.

   Compruébala.

   $f(x) =$ ______________________ entonces $f'(x) =$ ______________________

   ¿Se cumple la condición? __________.

   ¿Qué falta en el integrando para que se cumpla? ______________________.

   ¿Puedes agregar lo que le falta? ____________. ¿Por qué? ______________.

   ¿Qué debes hacer para **no** alterar la función original? ______________________.

3. Si ya se cumple la condición y **no** se altera la función original, utiliza la fórmula y obtén la antidervada:

   $F(x) =$ ____.

ANTIDERIVADA MEDIANTE REGLA DE LA CADENA

Nombre ______________________________ Matrícula _____________ Grupo ________

Responde las preguntas de acuerdo con tus propias ideas generadas durante el estudio del tema.

1. ¿En qué tipo de funciones es posible utilizar la regla de la cadena para obtener su antiderivada?

2. ¿Qué condición debe cumplirse para aplicar la regla de la cadena para integrar?

3. ¿En qué casos se puede "ajustar" la función del integrando para obtener su antiderivada mediante la regla de la cadena?

INTEGRACIÓN POR PARTES

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo ________

Nombre ______________________ Matrícula ______________

En cada una de las siguientes integrales determina si se debe aplicar la regla de la cadena o el método de integración por partes. Si es la regla de la cadena, determina *u* y *du* y si fuera el método de integración por partes, determina *u, du, dv* y *v* para cada una de las funciones que aparecen en el integrando.

INTEGRAL	MÉTODO DE INTEGRACIÓN		SOLUCIÓN
1. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$	Regla de la cadena ☐ Integración por partes ☐	$u =$ ______ $dv =$ ______ $du =$ ______ $v =$ ______	
2. $\int \ln x \; dx$	Regla de la cadena ☐ Integración por partes ☐	$u =$ ______ $dv =$ ______ $du =$ ______ $v =$ ______	
3. $\int x^2 \ln x \; dx$	Regla de la cadena ☐ Integración por partes ☐	$u =$ ______ $dv =$ ______ $du =$ ______ $v =$ ______	
4. $\int xe^{x^2} \; dx$	Regla de la cadena ☐ Integración por partes ☐	$u =$ ______ $dv =$ ______ $du =$ ______ $v =$ ______	

INTEGRAL	MÉTODO DE INTEGRACIÓN		SOLUCIÓN
5. $\int x^2 e^x \, dx$	Regla de la cadena ☐ Integración por partes ☐	$u =$ ______ $dv =$ ______ $du =$ ______ $v =$ ______	
6. $\int t \operatorname{sen} t \, dt$	Regla de la cadena ☐ Integración por partes ☐	$u =$ ______ $dv =$ ______ $du =$ ______ $v =$ ______	
7. $\int x \cos(2x) dx$	Regla de la cadena ☐ Integración por partes ☐	$u =$ ______ $dv =$ ______ $du =$ ______ $v =$ ______	

INTEGRAL POR PARTES

Nombre ______________________ Matrícula ____________ Grupo _______

Responde las preguntas de acuerdo con tus propias ideas generadas durante el estudio del tema.

1. ¿Se puede resolver $\int \ln x dx$ con la regla de la cadena? ¿Por qué?

2. ¿Se puede resolver $\int xe^x dx$ con la regla de la cadena? ¿Por qué?

3. ¿Cuándo es recomendable utilizar el método de integración por partes?

4. ¿Cuál es la fórmula para integrar por partes?

5. Describe el proceso para integrar por partes.

¿Qué aprendí?

Nombre ______________________ Matrícula ____________ Grupo ________

Responde las preguntas de acuerdo con tus propias ideas generadas durante el estudio del tema.

1. Intuitivamente, ¿qué comprendiste acerca del concepto de ecuación diferencial?

2. ¿Qué tipos de soluciones tiene una ecuación diferencial?

3. ¿Cómo se obtiene la solución particular de una ecuación diferencial?

4. Describe el método para resolver ecuaciones diferenciales con variables separables.

5. ¿Qué relación encuentras entre una integral con condiciones iniciales y una ecuación diferencial?

Nombre ________________________________ Matrícula ______________ Grupo ________

Nombre ________________________________ Matrícula ______________

Instrucciones: Para cada uno de los siguientes enunciados escribe una ecuación diferencial que describa la situación dada, resuelve dicha ecuación y utilízala para responder a la pregunta planteada.

1. **Crecimiento de bacterias.** El número de bacterias de un cultivo crece a un ritmo que es proporcional al número de bacterias presentes. Si la población inicial es de 100 bacterias y después de dos días es de 500 bacterias, ¿cuántas bacterias habrá en el quinto día?

Solución

Identifica y define las variables

Variable independiente: ______________________________________ = ________.

Variable dependiente: ______________________________________ = ________.

Plantea la ecuación diferencial: ____.

Identifica las condiciones iniciales

Condición inicial 1: ________________________.

Condición inicial 2: ________________________.

Resuelve la ecuación diferencial

Sustituye las condiciones iniciales para obtener la solución particular.

Responde a la pregunta planteada.

2. **Criminología**. Se encontró asesinado en su hogar un rico industrial. La policía llegó al lugar del crimen a las 11:00 p.m. En ese momento la temperatura del cuerpo era de 31ºC y una hora después era de 30ºC. La temperatura del cuarto en el que se encontró el cuerpo era de 22ºC. Si se sabe que **la razón a la que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su propia temperatura y la temperatura del medio ambiente que la rodea,** ayuda a la policía a determinar la hora en que ocurrió el asesinato

Solución

Plantea una ecuación diferencial que describa la forma en que cambia la temperatura del cuerpo con respecto al tiempo.

Variable independiente: ____________________ = __________.

Variable dependiente: ____________________ = __________.

Plantea la ecuación diferencial: ____________________.

Resuelve la ecuación diferencial (solución general implícita).

Identifica las condiciones iniciales y sustitúyela para encontrar la solución particular (implícita):

Condición inicial 1: ____________________.

Condición inicial 2: ____________________.

Determina la hora en que ocurrió el asesinato: ____________________.

ECUACIONES DIFERENCIALES (FINANZAS)

Nombre ______________________ Matrícula ____________ Grupo ________

Investiga la tasa de interés anual de tres bancos de la localidad, plantea las ecuaciones diferenciales que describen la forma en que cambia el saldo en una cuenta. Suponiendo que el saldo inicial es de $50 000 pesos, calcula el saldo en la cuenta dentro de 3 años y determina cuál banco ofrece mejores rendimientos.

	BANCO 1	BANCO 2	BANCO 3
TASA			
ECUACIÓN DIFERENCIAL			
SOLUCIÓN PARTICULAR			
SALDO DENTRO DE 3 AÑOS			

SUMAS IZQUIERDA Y DERECHA

Nombre ______________________ Matrícula ____________ Grupo ________

Responde las preguntas de acuerdo con tus propias ideas generadas durante el estudio del tema.

1. Explica el significado de los términos *suma por la izquierda* y *suma por la derecha*.

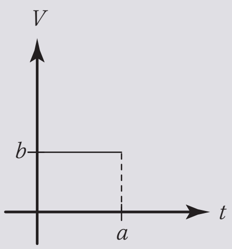
2. ¿A qué se le llama estimación superior y estimación inferior?

3. La suma por la izquierda y la estimación inferior ¿siempre son iguales?

Nombre ______________________________ Matrícula ______________ Grupo ________

Cada una de las gráficas siguientes representa la velocidad de un objeto en función del tiempo. Responde a las preguntas planteadas para obtener la distancia recorrida por el objeto en el intervalo de tiempo $[0, a]$.

Situación 1



En la gráfica que aparece a la izquierda, ¿la velocidad es constante? _____.

¿Cuál es el valor de la velocidad en el intervalo de $[0, a]$? ________. Cuando la velocidad es constante la distancia se obtiene mediante la fórmula *distancia* = *velocidad x tiempo*.

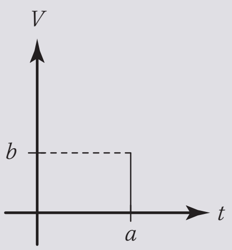
Por tanto, puede decirse que la **distancia total recorrida** $\boldsymbol{s}$ en el intervalo de tiempo $[0, a]$ es: $\boldsymbol{s}$ = __________ .

Ahora, encuentra el valor del área $\boldsymbol{A}$ encerrada por la función de velocidad el eje x y el eje y en el intervalo $[0, a]$.

Área de la región: A = ____________. Compara el valor obtenido para el área con el valor de la distancia recorrida. ¿Son iguales? __________. Del análisis anterior podemos concluir que:

La distancia total recorrida $\boldsymbol{S}_{[0,\, a]}$ = Área $\boldsymbol{A}$ de la región.

Situación 2



En la gráfica que aparece a la izquierda, ¿la velocidad es constante? ____; entonces ¿puede utilizarse la fórmula *distancia* = *velocidad* × *tiempo?* __________.

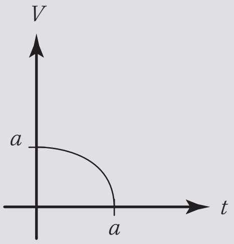
¿Qué resultado de la situación 1 puede utilizarse en este otro caso, para obtener la distancia total recorrida por el objeto en el intervalo $[0, a]$?.

____

¿Qué forma tiene la región encerrada por esta función de velocidad y el eje x, en el intervalo de tiempo $[0, a]$? ____________________.

En conclusión, para esta situación la **distancia total** recorrida en el intervalo de tiempo $[0, a]$ es: $\boldsymbol{S}$ = __________ .

Situación 3



Nuevamente, en la gráfica que aparece a la izquierda, ¿la velocidad es constante? ____________.

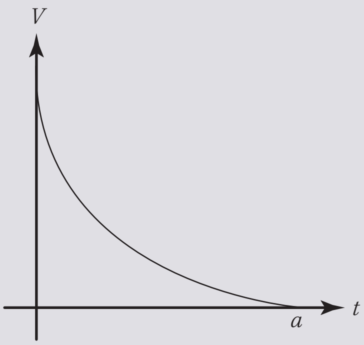
Si se procede de manera similar a las situaciones anteriores, ¿qué es necesario hacer para obtener la distancia total recorrida por el objeto en el intervalo $[0, a]$? ____.

¿Qué forma tiene la región encerrada por esta función de velocidad, el eje x y el eje y, en el intervalo de tiempo $[0, a]$? ________________.

En conclusión, para esta situación la **distancia total** recorrida en el intervalo de tiempo $[0, a]$ es:

$\boldsymbol{S}$ = ________________.

Situación 4



Si la gráfica velocidad contra tiempo fuera como la que se da en la figura que aparece a la izquierda, ¿qué harías para obtener la distancia total recorrida en el intervalo $[0, a]$?

____.

En este caso, ¿el área corresponde a una figura conocida?.

____

¿Qué harías para obtener el área? ______________________

____.

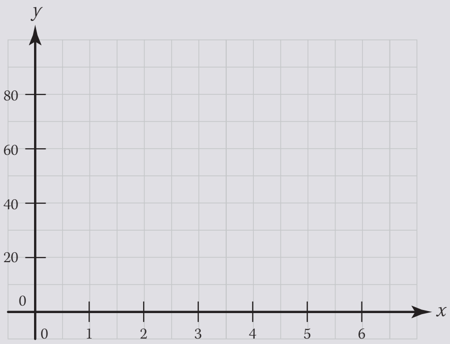
INTEGRAL DEFINIDA

Nombre ______________________ Matrícula ____________ Grupo ________

Nombre ______________________ Matrícula ____________

Un auto se detiene 5 segundos después de que un conductor aplica los frenos; mientras estos se aplican, se registran las siguientes velocidades:

TIEMPO (s)	0	1	2	3	4	5
VELOCIDAD (pies/s)	88	60	40	25	10	0



a) Traza la gráfica de velocidad contra tiempo.

b) Sombrea en la gráfica la distancia recorrida en los primeros dos segundos.

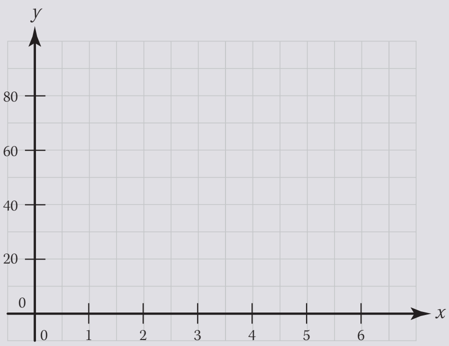
c) Encuentra la estimación superior de la distancia recorrida en los primeros dos segundos:

______________________.

d) Encuentra la estimación inferior de la distancia recorrida en los primeros dos segundos:

______________________.

e) La distancia total recorrida en los primeros dos segundos aproximadamente es igual a: ________.



a) Traza la gráfica de velocidad contra tiempo.

b) Sombrea en la gráfica la distancia recorrida en los primeros tres segundos

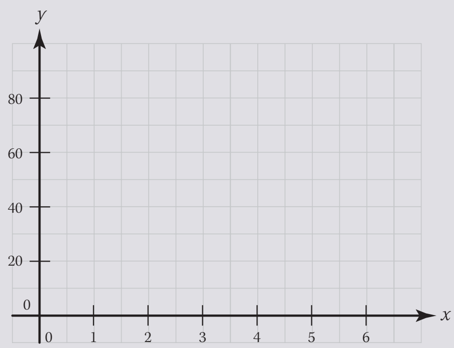
c) Encuentra la estimación superior de la distancia recorrida en los primeros tres segundos:

______________________.

d) Encuentra la estimación inferior de la distancia recorrida en los primeros tres segundos:

______________________.

e) La distancia total recorrida en los primeros tres segundos, aproximadamente es igual a: ________.



a) Traza nuevamente la gráfica de la velocidad

b) Sombrea en la gráfica la distancia recorrida en todo el intervalo.

c) Encuentra la estimación superior de la distancia recorrida en todo el intervalo

________________________________.

d) Encuentra la estimación inferior de la distancia recorrida en todo el intervalo

________________________________.

e) La distancia total recorrida en todo el intervalo, aproximadamente es igual a: ________________.

Pensamiento crítico

a) El valor obtenido en la distancia representa exactamente la distancia recorrida ________.

Justifica.

____.

b) ¿Cómo harías para obtener una mejor estimación de la distancia recorrida?

____.

INTEGRAL DEFINIDA

Nombre ______________________________ Matrícula _____________ Grupo ________

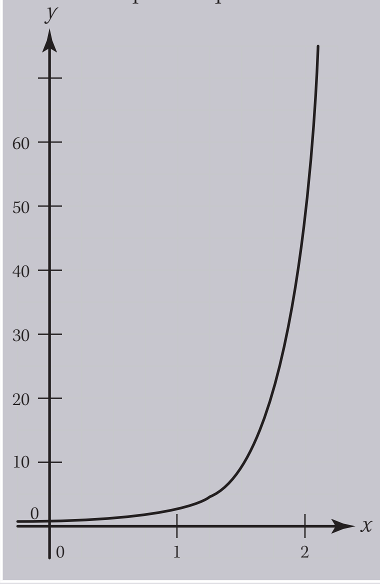
Estima el valor de la integral definida $\int_1^2 e^{x^2}\,dx$ mediante la suma por la izquierda y la suma por la derecha. Contesta lo que se pide a continuación:

Solución

a) Divide el intervalo [1, 2] en **6** subintervalos de igual longitud y **sombrea en la gráfica correspondiente** las sumas por la izquierda y por la derecha para el valor de dicha integral. Construye una tabla de valores que te sirva para aproximar el valor de la integral.

GRÁFICA DE $y = e^{x^2}$

Suma por la izquierda



Suma por la derecha

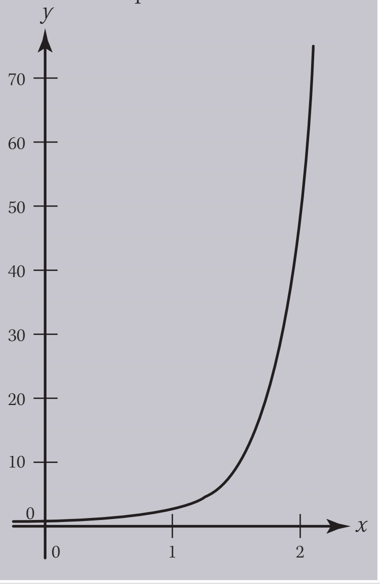


TABLA DE VALORES

x	y

Plantea y determina el valor de la suma por la izquierda.

Suma por la izquierda = ______________________________.

El valor de la suma por la izquierda ¿es una estimación superior o inferior? ____________.

Plantea y determina el valor de la suma por la derecha.

Suma por la derecha = ______________________________.

El valor de la suma por la derecha ¿es una estimación superior o inferior? ____________.

Utiliza los resultados anteriores para aproximar el valor de la integral.

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \le \int_1^2 e^{x^2}\,dx \le \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

El valor de la integral $\int_1^2 e^{x^2}\,dx$ es aproximadamente igual a: ______________.

Aproxima el valor de la integral (Parte B)

Nombre ______________________________ Matrícula ______________ Grupo ________

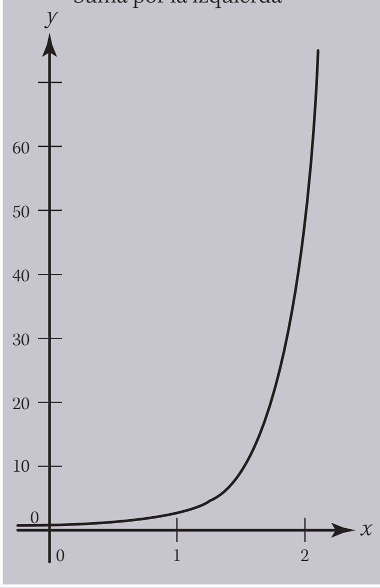
Estima el valor de la integral definida $\int_1^2 e^{x^2}\,dx$ mediante la suma por la izquierda y la suma por la derecha. Contesta lo que se pide a continuación:

Solución

a) Divide el intervalo [1, 2] en **8** subintervalos de igual longitud y **sombrea en la gráfica correspondiente** la suma por la izquierda y la suma por la derecha para el valor de dicha integral. Construye una tabla de valores que te sirva para aproximar el valor de la integral.

GRÁFICA DE $y = e^{x^2}$

Suma por la izquierda



Suma por la derecha

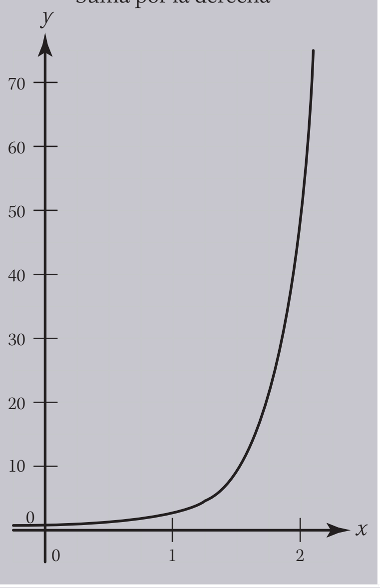


TABLA DE VALORES

x	y

Plantea y determina el valor de la suma por la izquierda.

Suma por la izquierda = ____.

El valor de la suma por la izquierda ¿es una estimación superior o inferior? ____________.

Plantea y determina el valor de la suma por la derecha.

Suma por la derecha = ____.

El valor de la suma por la derecha ¿es una estimación superior o inferior? ____________.

Utiliza los resultados anteriores para aproximar el valor de la integral.

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \leq \int_1^2 e^{x^2}\,dx \leq \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

El valor de la integral $\int_1^2 e^{x^2}\,dx$ es aproximadamente igual a: ______________________.

Aproxima el valor de la integral (Parte C)

Nombre ______________________________ Matrícula ______________ Grupo ________

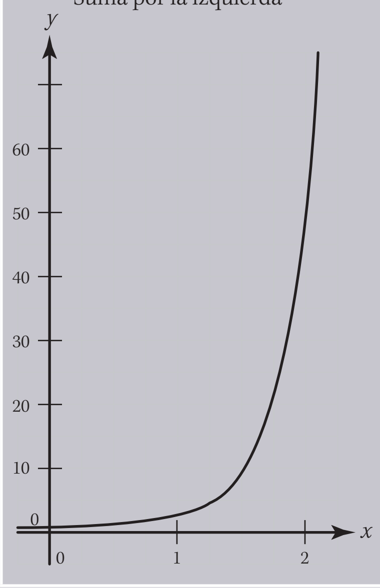
Estima el valor de la integral definida $\int_1^2 e^{x^2}\,dx$ mediante la suma porla izquierda y la suma por la derecha. Contesta lo que se pide a continuación:

Solución

a) Divide el intervalo [1, 2] en **10** subintervalos de igual longitud y **sombrea en la gráfica correspondiente** la suma por la izquierda y la suma por la derecha para el valor de dicha integral. Construye una tabla de valores que te sirva para aproximar el valor de la integral.

GRÁFICA DE $y = e^{x^2}$

Suma por la izquierda



Suma por la derecha

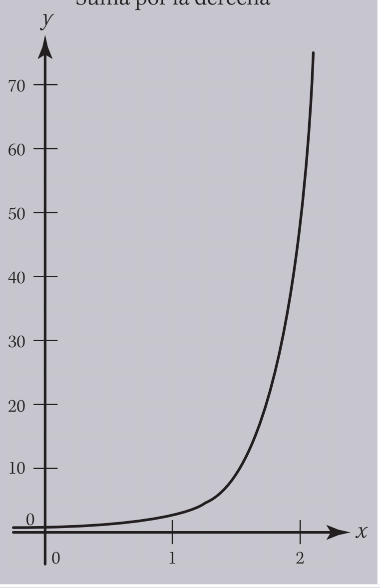


TABLA DE VALORES

x	y

Plantea y determina el valor de la suma por la izquierda.

Suma por la izquierda = ____.

El valor de la suma por la izquierda ¿es una estimación superior o inferior? ____________.

Plantea y determina el valor de la suma por la derecha.

Suma por la derecha = ____.

El valor de la suma por la derecha ¿es una estimación superior o inferior? ____________.

Utiliza los resultados anteriores para aproximar el valor de la integral.

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \le \int_1^2 e^{x^2}\,dx \le \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

El valor de la integral $\int_1^2 e^{x^2}\,dx$ es aproximadamente igual a: ____________________.

SUMAS DE RIEMANN

Nombre ______________________ Matrícula ____________ Grupo ________

Nombre ______________________ Matrícula ____________

Nombre ______________________ Matrícula ____________

Utilicen los resultados de las hojas de trabajo individuales A, B y C para completar la siguiente tabla.

NÚMERO DE SUBINTERVALOS n	VALOR DE LA SUMA POR LA IZQUIERDA	VALOR DE LA SUMA POR LA DERECHA
6		
8		
10		

Reflexión

a) De acuerdo con los valores de la tabla anterior ¿cuál sería la mejor estimación para el valor de $\int_1^2 e^{x^2}\,dx$? ______________________

b) La diferencia entre los valores de la suma por la izquierda y la suma por la derecha ¿aumenta o disminuye a medida que aumenta el número de subintervalos n? ______________.

c) ¿Qué harías para que el valor de la suma por la izquierda y la suma por la derecha fueran más aproximados entre sí?

d) ¿Qué ocurrirá con la diferencia entre la suma por la izquierda y la suma por la derecha si $n = 250$?

Coevaluación

Marca con una ✔ el valor que asignarías al trabajo individual que realizaron tus compañeros de equipo, de acuerdo con los siguientes criterios:

A = asistió a esta clase

100 = el trabajo individual fue resuelto correctamente

70 = el trabajo individual fue resuelto en forma parcialmente correcta

0 = no cumplió con el trabajo individual

	NOMBRE DE LA PERSONA QUE SE LE ASIGNÓ LA...	MATRÍCULA	A	100	70	0
Parte A						
Parte B						
Parte C						

Nombre ______________________ Matrícula ____________ Grupo ________

1. Si se tiene la siguiente integral $\int_1^2 e^{x^2}\,dx$, contesta las siguientes preguntas:

   a) La antiderivada de la función $f(x)=e^{x^2}$ ¿puede obtenerse con fórmulas básicas? ________.

   ¿Por qué? ____.

   b) La antiderivada de la función $f(x)=e^{x^2}$ ¿puede obtenerse mediante Regla de la Cadena? ________.

   ¿Por qué? ____.

   c) La antiderivada de la función $f(x)=e^{x^2}$ ¿puede obtenerse utilizando integración por partes? ________.

   ¿Por qué? ____.

2. Si la velocidad de un auto, en cada segundo t, está aumentando según la función $f(t) = t^2$, ¿cuál es la distancia total recorrida por el auto en el intervalo de tiempo desde t=2 hasta t=5 segundos?

   a) Traza la gráfica de la función y marca en ella la distancia que se desea calcular.

   b) ¿Es necesario calcular la distancia total recorrida por el auto con sumas por la izquierda y por la derecha? ________ ¿Por qué? ______________________________

   c) ¿Cuál es tu estrategia de solución?

d) Escribe la fórmula general que representa la distancia total recorrida por el auto en cualquier segundo t.

e) ¿Cuál es la distancia recorrida por el auto en los primeros 5 segundos?

f) ¿Cuál es la distancia recorrida por el auto en los primeros 2 segundos?

g) ¿Cómo calcularías la distancia total recorrida por el auto entre $t = 2$ y $t = 5$ segundos?

____________________________________.

¿Cuál es esa distancia?

Reflexión

i) ¿Se puede resolver $\int_1^2 x^x dx$ con el Teorema Fundamental del Cálculo? ________________.

¿Por qué? ____.

ii) ¿En qué casos puede utilizarse el Teorema Fundamental del Cálculo para resolver una integral?

iii) ¿Qué representa el resultado de cada una de las siguientes integrales?

a) $\int f(t)dt$

____.

b) $\int_a^b f(t)dt$

____.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Nombre ______________________ Matrícula ____________ Grupo ________

Responde las preguntas de acuerdo con tus propias ideas generadas durante el estudio del tema.

1. Escribe el resultado que establece el teorema fundamental del cálculo.

2. Explica: ¿por qué es útil el teorema fundamental del cálculo?

3. Explica qué condición debe cumplirse si se quiere utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo para obtener el valor de una integral definida.

4. Investiga las siguientes propiedades de la integral definida y completa la igualdad en cada caso.

   a) $\int_a^b Cf(x)\,dx =$

   b) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx =$

   c) $\int_a^a f(x)\,dx =$

   d) Si $a < b$, entonces $\int_b^a f(x)\,dx =$

   e) Si $a < c < b$, entonces $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$

ÁREA ENTRE CURVAS

Nombre ______________________ Matrícula ____________ Grupo ______

Nombre ______________________ Matrícula ____________

Las tasas de ingreso y costo, con respecto al tiempo, de una productora de lácteos están dadas por las siguientes funciones: $I'(t)=(1.5)^t$ y $C'(t)=20(.85)^t$ en miles de euros/año. Si los costos fijos anuales ascienden a 3 mil euros, determina la máxima utilidad real.

Solución

1. ¿Qué se debe hacer para encontrar el tiempo en el que las tasas de ingreso y costo son iguales? Puedes ayudarte de un graficador.

2. ¿Qué debes hacer con las tasas de ingreso y costo para obtener la utilidad real?

   ____

   ¿Cómo queda planteada la integral? ______________________.

3. Resuelve la integral.

4. Evalúa la integral.

5. ¿Cuál es la utilidad máxima real?

ÁREA Y VALOR PROMEDIO

Nombre ______________________ Matrícula ____________ Grupo ________

Responde las preguntas de acuerdo con tus propias ideas generadas durante el estudio del tema.

1. ¿En qué casos el valor de la integral definida representa un área superficial y en qué casos no?

2. ¿Cuál es la diferencia entre la definición de valor promedio de una función $\boldsymbol{f}$ desde $\boldsymbol{a}$ hasta $\boldsymbol{b}$, y la forma en que se obtiene el promedio de un conjunto de datos?

3. ¿Cómo se obtienen las unidades para el valor de la integral definida?

4. En general, la integral definida ¿es un valor numérico o una función?

INTEGRAL IMPROPIA

Nombre ______________________ Matrícula ____________ Grupo ________

Resuelve la siguiente integral contestando lo que se te pide:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx.$$

a) Dibuja la gráfica de la función del integrando y marca el área que se pide obtener. Utiliza un graficador.

b) Plantea la integral impropia de tal forma que no aparezca con límites infinitos de integración.

____.

c) Encuentra la antiderivada y evalúala en los límites de integración.

d) Antiderivada (ya evaluada en los límites): ______________________.

e) Determina el valor del límite (sustituyendo valores negativos muy grandes en a). Además, escribe los valores que tomaste y el resultado de la evaluación.

VALOR DE a	VALOR DE LA ANTIDERIVADA

Conclusión (converge, ¿a qué valor? o diverge): ______________________.

INTEGRAL IMPROPIA

Nombre ________________________ Matrícula ____________ Grupo ________

Responde las preguntas de acuerdo con tus propias ideas generadas durante el estudio del tema.

1. ¿Cuándo se le llama impropia a la integral definida?

2. Representa gráficamente una integral impropia:

   a) Con límite superior infinito

   b) Con límite inferior infinito

   c) Con ambos límites de integración infinitos

3. ¿Qué debe entenderse cuando se dice que una integral impropia es convergente?

INTEGRAL IMPROPIA

Nombre ____________________ Matrícula __________ Grupo ______

El tiempo x en minutos que un cliente utiliza para hacer fila en una oficina de gobierno es una variable aleatoria que está distribuida exponencialmente y cuya función de densidad es:

$$f(x)=\begin{cases}0.25e^{-0.25x} & \text{si} \quad x\geq 0,\\ 0 \quad \text{si} \quad x<0.\end{cases}$$

donde x es el número de minutos que un cliente seleccionado al azar debe esperar en la fila. Si la política de calidad en la atención a la ciudadanía se ha establecido que mayormente un ciudadano no debe esperar más de 8 minutos, ¿la oficina gubernamental está cumpliendo la norma establecida?

a) Traza un bosquejo gráfico que te permita visualizar el área a calcular.

b) Plantea la integral.

c) Obtén la probabilidad.

d) Interpreta el resultado.

FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Nombre ________________________ Matrícula ____________ Grupo ________

Responde las preguntas de acuerdo con tus propias ideas generadas durante el estudio del tema.

1. ¿Cómo se define una función en el espacio de tres dimensiones?

2. ¿Cómo se define dominio e imagen de una función de dos variables?

Investiga los siguientes conceptos que aprendiste en tu curso de Cálculo Diferencial.

3. Definición de función:

4. Definición de dominio de una función:

5. Definición de rango o imagen de una función:

6. Compara las definiciones de los puntos 1 y 2 con las definiciones de los puntos 3, 4 y 5. ¿En qué son semejantes? ¿En qué difieren?

7. Si la notación funcional para una función de una variable es $y = f(x)$, entonces, ¿cómo sería la representación funcional para una función de:

a) 2 variables ______________________.

b) 3 variables ______________________.

c) n variables ______________________.

FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Nombre ______________________ Matrícula ____________ Grupo ________

Nombre ______________________ Matrícula ____________ Grupo ________

Instrucciones para trabajar colaborativamente

Deberán trabajar conjuntamente en la solución del siguiente problema; es importante que aporten sus ideas, intercambien puntos de vista y que acepten la diversidad de opiniones, siendo tolerantes a ellas. Recuerden que el trabajo colaborativo no es repartirse el trabajo, sino juntos, como equipo, llegar a un consenso en los resultados.

Problema

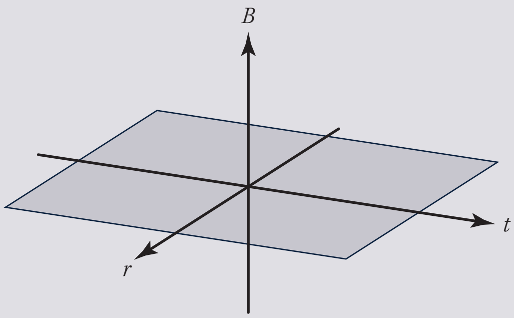
Se depositan $10 000.00 en una cuenta bancaria a una tasa de interés anual de *r* % compuesto continuamente.

1. Planteen una fórmula para la cantidad de dinero *B* que se obtendrá después de *t* años, como una función de *t* y *r*. Esto es $B = f(t, r)$ = ______________________.
2. Usando la función anterior completen la siguiente tabla:

MONTO DESPUÉS DE *t* AÑOS A UNA TASA DE *r*%			
AÑOS / TASA	5	10	15
0.08			
0.15			

3. La tabla anterior ¿representa a una función? ________.
   ¿Por qué? ______________________.
4. Tomando como base los valores de la tabla anterior, determina el dominio y el rango de la función.
   Dominio = ______________________.
   Rango = ______________________.
5. Utilicen la fórmula obtenida en el inciso 1 para obtener los siguientes valores:
   $B(0.32, 12)$ = ______________ y $B(12, 0.32)$ = ______________.
   Los valores obtenidos ¿son iguales? ________. El significado práctico ¿será el mismo? ______.
   Justifica.

6. En el siguiente sistema coordenado dibuja los puntos de la segunda columna de la tabla.



Nombre ______________________________ Matrícula ______________ Grupo ________

Nombre ______________________________ Matrícula ______________

1. Dada la función $f(x,y,z)=xy^2z^3+x^3y^2z$, determina las derivadas parciales que se piden, respondiendo a las preguntas planteadas.

   a) ¿Qué significa f_x? ______________________________.

   b) ¿Cómo se obtiene f_x? ______________________________.

   c) Obtén f_x

   d) ¿Qué significa f_{xz}? ______________________________.

   e) ¿Cómo se obtiene f_{xz}? ______________________________.

   f) Obtén f_{xz}

2. Dada la función $h(p,q)=pe^{pq^2}$, determina las derivadas parciales que se piden, respondiendo a las preguntas planteadas.

   a) ¿Qué significa $\dfrac{\partial h}{\partial q}$? ______________________________

   b) ¿Cómo se obtiene $\dfrac{\partial h}{\partial q}$? ______________________________

   c) Obtén $\dfrac{\partial h}{\partial q}$.

   d) ¿Qué significa $\dfrac{\partial^2 h}{\partial q^2}$? ______________________________

   e) ¿Cómo se obtiene $\dfrac{\partial^2 h}{\partial q^2}$? ______________________________

   f) Obtén $\dfrac{\partial^2 h}{\partial q^2}$.

3. Dada la función $h(p,q) = pe^{pq^2}$ determina las derivadas parciales que se piden, respondiendo a las preguntas planteadas.

   a) ¿Qué significa h_p? ______.

   b) ¿Cómo se obtiene h_p? ______.

   c) Obtén h_p

   d) ¿Qué significa h_{pq}? ______.

   e) ¿Cómo se obtiene h_{pq}? ______.

   f) Obtén h_{pq}

4. Dada la función $f(x,y) = 3x^2 \ln(xy)$, determina las derivadas parciales que se piden, respondiendo a las preguntas planteadas.

   a) ¿Qué significa $\dfrac{\partial f}{\partial x}$? ______.

   b) ¿Cómo se obtiene $\dfrac{\partial f}{\partial x}$? ______.

   c) Obtén $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

   d) ¿Qué significa $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$? ______.

   e) ¿Cómo se obtiene $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$? ______.

   f) Obtén $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

5. $f(x,y)=\sqrt{5x^3y+3}$

a) ¿Qué significa f_y? ______________________________.

b) ¿Cómo se obtiene f_y? ______________________________.

c) Obtén f_y

d) ¿Qué significa f_{yy}? ______________________________.

e) ¿Cómo se obtiene f_{yy}? ______________________________.

f) Obtén f_{yy}

DERIVADAS PARCIALES

Nombre ______________________________ Matrícula ______________ Grupo ________

Nombre ______________________________ Matrícula ______________

Responde las preguntas de acuerdo con tus propias ideas generadas durante el estudio del tema.

1. ¿Cómo se obtienen las primeras derivadas parciales?

2. Escribe por lo menos dos formas de representar a las primeras derivadas parciales.

3. ¿Cuál es el significado geométrico de las primeras derivadas parciales?

4. ¿Cuál es el significado físico de las primeras derivadas parciales?

DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo ________

Responde las preguntas de acuerdo con tus propias ideas generadas durante el estudio del tema.

1. ¿Cómo se obtiene una derivada parcial de orden superior?

2. ¿Qué significa f_{xx}?

3. Para obtener la derivada parcial $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial z\, \partial y}$, ¿en qué orden con respecto a las variables se debe derivar la función f?

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS PARCIALES

Nombre ______________________ Matrícula ____________ Grupo ________

Supongamos que la demanda diaria del chorizo de pavo está dada por $f(a,b)=\dfrac{6b}{2+a^2}$ y que la demanda del chorizo de soya está dada por $g(a,b)=\dfrac{4a}{2+\sqrt{b}}$, $(a>0,\ b>0)$, donde a representa el precio en pesos del chorizo de pavo y b representan el precio en pesos del chorizo de soya, por cada 250 gramos en ambos casos. Determina si estos artículos son competitivos o complementarios.

Proceso

a) ¿Qué derivadas parciales debes calcular para poder decidir? ____________________ y ____________________.

b) Obtén las derivadas que mencionaste.

c) Determina los signos de cada una de ellas. Justifica tus respuestas.

d) Para que los productos sean competitivos, los signos de las derivadas deben ser ¿positivos o negativos? ____________________. Y ¿para que sean complementarios? ____________________.

e) De acuerdo con los datos obtenidos, cómo son estos dos productos, ¿competitivos o complementarios? ____________________.

INTERPRETACIÓN PRÁCTICA DE LAS DERIVADAS PARCIALES

Nombre ______________________ Matrícula ____________ Grupo ________

Costos Marginales. Una empresa fabrica dos tipos de zapatos: los modelos A y B. Suponga que la función de los costos conjuntos de producir x pares del modelo A y y pares del modelo B por semana es $C = f(x, y) = 0.01x^2 + 15x + 25y + 800$, en donde C está expresado en dólares.

a) Obtén las derivadas parciales que se indican:

$\frac{\partial f}{\partial x}$ = ______________________________.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ = ______________________________.

b) Evalúa las derivadas parciales en los valores dados:

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|$ (50, 25) = ______________________________.

$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ (50, 25) = ______________________________.

c) Escribe la interpretación práctica de los resultados obtenidos en el inciso *b)*.

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|$ (50, 25) = ______________________________.

______________________________.

$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ (50, 25) = ______________________________.

______________________________.

OPTIMIZACIÓN SIN RESTRICCIONES

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo ________

Responde las preguntas de acuerdo con tus propias ideas generadas durante el estudio del tema.

1. ¿Cuándo se dice que una función de dos variables tiene un valor máximo relativo (o local) y cuándo tiene un valor mínimo relativo (o local)?

2. ¿A qué se le llama *punto crítico*?

3. ¿Qué establece el criterio de la segunda derivada?

4. ¿Cuándo una función de dos variables tiene un valor máximo relativo de acuerdo con el criterio de la segunda derivada?

5. ¿Cuándo una función de dos variables tiene un valor mínimo relativo de acuerdo con el criterio de la segunda derivada?

6. Cuando no hay máximo ni mínimo, ¿qué nombre recibe este punto?

7. ¿En qué caso no hay información?

CRITERIO DE SEGUNDA DERIVADA

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo __________

Problema 1

Encuentra los puntos críticos de la función $g(x, y) = 6x + 4y - x^2 - 2y^2$ (si los hay) y utiliza el criterio de la segunda derivada para clasificarlos como máximo, mínimo, punto de silla o ninguno de ellos.

Proceso de solución

a) Obtener los puntos críticos.

b) Obtener la función discriminante $D = f_{xx} f_{yy} - \left[f_{xy} \right]^2$.

c) Clasifica los puntos críticos de acuerdo con el criterio de la segunda derivada.

PUNTO CRÍTICO	EVALUAR EL DISCRIMINANTE EN EL PUNTO CRÍTICO	¿SIGNO DEL DISCRIMINANTE?	¿SIGNO DE f_{xx}?	CONCLUSIÓN

Problema 2

Encuentra los puntos críticos de la función $h(r,s)=5r^2+5s^2+5rs-10r-5s+18$ (si los hay) y utiliza el criterio de la segunda derivada para clasificarlos como máximo, mínimo, punto de silla o ninguno de ellos.

Proceso de solución

a) Obtener los puntos críticos

b) Obtener la función discriminante $D=f_{xx}\,f_{yy}-\left[f_{xy}\right]^2$

c) Clasifica los puntos críticos de acuerdo al Criterio de la Segunda Derivada.

PUNTO CRÍTICO	EVALUAR EL DISCRIMINANTE EN EL PUNTO CRÍTICO	¿SIGNO DEL DISCRIMINANTE?	¿SIGNO DE f_{xx}?	CONCLUSIÓN

Problema 3

Encuentra los puntos críticos de la función $f(x,y)=2x^3+y^3-3x^2+\frac{3}{2}y^2-12x-90y$ (si los hay) y utiliza el criterio de la segunda derivada para clasificarlos como máximo, mínimo, punto de silla o ninguno de ellos.

Proceso de solución

a) Obtén los puntos críticos.

b) Obtén la función discriminante $D=f_{xx}f_{yy}-\left[f_{xy}\right]^2$.

c) Clasifica los puntos críticos de acuerdo con el criterio de la segunda derivada.

PUNTO CRÍTICO	EVALUAR EL DISCRIMINANTE EN EL PUNTO CRÍTICO	¿SIGNO DEL DISCRIMINANTE?	¿SIGNO DE f_{xx}?	CONCLUSIÓN

Problema 4

Encuentra los puntos críticos de la función $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$ (si los hay) y utiliza el criterio de la segunda derivada para clasificarlos como máximo, mínimo, punto de silla o ninguno de ellos.

Proceso de solución

a) Obtén los puntos críticos.

b) Obtén la función discriminante $D = f_{xx} f_{yy} - \left[f_{xy} \right]^2$.

c) Clasifica los puntos críticos de acuerdo con criterio de la segunda derivada.

PUNTO CRÍTICO	EVALUAR EL DISCRIMINANTE EN EL PUNTO CRÍTICO	¿SIGNO DEL DISCRIMINANTE?	¿SIGNO DE f_{xx}?	CONCLUSIÓN

Nombre ______________________________ Matrícula _____________ Grupo _______

Nombre ______________________________ Matrícula _____________

Resuelve los siguientes problemas.

1. Una compañía fabrica dos modelos de calefactores: un modelo estándar de gas y otro de halógeno de lujo. El ingreso mensual de la compañía (en cientos de dólares) está dado por

$$R(x,y)=(-1/8)x^2-(1/2)y^2-(1/4)xy+20x+60y.$$

En donde x (en cientos de unidades) representa el número de calefactores de gas fabricados y y (en cientos de unidades) representa el número de calefactores halógenos fabricados por mes. El costo total mensual en que incurren en la producción de estos calefactores es $C(x,y)=7x+20y+280$ en cientos de dólares.

a) Encontrar el número de calefactores de cada modelo que esta compañía debe fabricar por mes con el fin de maximizar sus utilidades.

b) ¿Cuál es la máxima utilidad?

Proceso de solución

¿Qué es lo que se desea optimizar? ____.

¿Cuál es la fórmula para obtener la utilidad? ___________________________________.

Establece la función de utilidad para este problema y utiliza el criterio de la segunda derivada para resolverlo.

2. Un fabricante vende su producto en dos diferentes ciudades A y B; debido a las diferentes situaciones económicas de las ciudades, debe fijar precios diferentes en cada una de ellas. (A esa fijación de precios se le llama *discriminación de precios* o *precios diferenciales*.)

   El fabricante desea vender x unidades del producto en la ciudad A y y unidades del producto en la ciudad B. Para hacer eso, el fabricante debe fijar el precio en la ciudad A a $86 - (x/18)$ dólares, y en la ciudad B a $122 - (y/28)$ dólares.

   El costo de producir todos los productos $x + y$ es $45\,000 + 4(x + y)$ dólares. ¿Cuántos artículos debe vender en cada una de las ciudades para maximizar las utilidades? ¿Cuál es la máxima utilidad posible?

Proceso de solución

¿Qué es lo que se requiere optimizar? ______________________. Como no se da explícitamente la función por optimizar, hay que plantearla a partir de los datos proporcionados. La fórmula para la función de utilidad es: ______________________.

Para obtener el ingreso se requiere saber: ______________ y ______________.

Como el producto se vende en dos ciudades diferentes y a precios distintos, se deberán calcular los ingresos de cada una de las ciudades. Completa los datos de la siguiente tabla:

CIUDAD A
Precio del producto ______________________.
Cantidad vendida ______________________.
Ingreso obtenido = I_A = ______________________.
CIUDAD B
Precio del producto ______________________.
Cantidad vendida ______________________.
Ingreso obtenido = I_B = ______________________.

¿Qué debes hacer para obtener el ingreso total? ______________________.

La fórmula para el ingreso total obtenido es ______________________.

Y la del costo total es ______________________.

Por tanto, la función de utilidad queda como sigue:

$U =$ ____

Ahora para optimizar la utilidad deberás obtener los puntos críticos y aplicar el criterio de la segunda derivada.

Responde a las preguntas planteadas.

¿Cuántos artículos debe vender en cada una de las ciudades para maximizar las utilidades?

¿Cuál es la máxima utilidad posible?

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Nombre ______________________________ Matrícula _____________ Grupo _______

Responde las preguntas de acuerdo con tus propias ideas generadas durante el estudio del tema.

1. ¿En qué casos se aplica el método multiplicadores de Lagrange?

2. Esta metodología ayuda a obtener: ____
3. ¿A qué se le llama *función objetivo*?

   ____

   ____

   ____.

4. ¿A qué valor debe estar igualada la función de restricción? ____________________.
5. El multiplicador de Lagrange ¿es una variable o es una constante? ________________.
6. ¿Cómo se construye la función lagrangeana?

   ____

   ____

   ____.

7. Describe brevemente en qué consiste el método de multiplicador de Lagrange.

   ____

   ____

   ____.

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Nombre ______________________ Matrícula ____________ Grupo ________

Nombre ______________________ Matrícula ____________

Suponga que la cantidad de unidades producidas Q de un cierto artículo depende del número de unidades de mano de obra L utilizadas y del número de unidades de capital invertido K, de acuerdo con la función $Q(L, K) = 900L^{2/3}K^{1/3}$.

El costo de mano de obra es de \$100 por unidad y el costo de capital es de \$200.00 por unidad.

a) ¿Qué combinación de mano de obra y capital debe ser utilizada para que el nivel de producción sea máximo, si se cuenta con un presupuesto de \$36 000?

b) Encontrar el nivel máximo de producción.

Proceso de solución

Analiza la información dada y responde lo que se te pide.

1. ¿Qué representa la función $Q(L,K)$? ______________________.
2. ¿Qué representa el 36 000? ______________________.
3. ¿Qué es lo que se desea maximizar? ______________________.
4. Determina la función objetivo: ______________________.
5. Plantea la ecuación de restricción: ______________________.
6. Establece la función lagrangeana que sirva para maximizar el nivel de producción.

7. Determina las tres primeras derivadas parciales de la función de Lagrange.

8. Encuentra los puntos críticos de la función de Lagrange; para ello iguala a cero cada una de las derivadas parciales y en seguida resuelve el sistema de ecuaciones obtenido.

9. Con el presupuesto asignado, ¿qué combinación de mano de obra y capital maximiza la producción.

10. Obtén el nivel máximo de producción.

SERIE GEOMÉTRICA

Nombre ______________________ Matrícula ____________ Grupo ________

Responde las preguntas de acuerdo con tus propias ideas generadas durante el estudio del tema.

1. ¿Cómo se define una serie geométrica?

2. ¿Cómo se obtiene la enésima suma parcial (suma de los primeros *n* términos) de una serie geométrica?

3. ¿Cómo se obtiene la suma de una serie geométrica infinita?

4. ¿Cuál es una condición para que una serie geométrica infinita sea convergente?

SERIE ARITMÉTICA

Nombre ______________________ Matrícula ____________ Grupo ________

Responde las preguntas de acuerdo con tus propias ideas generadas durante el estudio del tema.

1. ¿Cómo se define una serie aritmética?

____

____

____.

2. ¿Cómo se obtiene la *n*-ésima suma parcial (suma de los primeros *n* términos) de una serie aritmética?

____

____

____.

3. La serie aritmética infinita ¿podrá ser convergente?

____

____

____.

SERIE GEOMÉTRICA Y/O ARITMÉTICA

Nombre ______________________ Matrícula ____________ Grupo ________

1. El porcentaje de aportación patronal que se hace al Infonavit (fondo para vivienda) es de 5% mensual; si un trabajador tiene un sueldo base de $18 000 pesos mensuales, ¿cuánto habrá acumulado en un año, suponiendo que no hubo aumento salarial?

Proceso de solución

a) ¿Es el fenómeno una serie geométrica o aritmética? ¿Por qué?

b) ¿A cuánto asciende la aportación mensual?

c) ¿Qué harás para saber cuánto acumuló en un año? ¡A calcularlo!

2. Con base en el ejemplo anterior, ¿cuál es el monto total al cabo de 6 años en la cuenta de Afore (fondo para el retiro) si las aportaciones son del 6.5% y crece a una tasa del 4% anual?

a) ¿Es el fenómeno una serie geométrica o aritmética? ¿Por qué?

b) ¿A cuánto asciende la aportación mensual del Afore?

c) ¿Qué harás para saber cuánto acumuló en 5 años? ¡A calcularlo!

SERIE GEOMÉTRICA Y/O ARITMÉTICA

Nombre ______________________________ Matrícula ______________ Grupo ________

Supón que un empleado tiene un salario actual de $28 000 por año y tiene la oportunidad de escoger una de las siguientes opciones: 1) un aumento anual de 4.5% por año durante los próximos 10 años, o bien, 2) un aumento fijo del 5.36% del salario actual cada año.

a) ¿A qué tipo de serie corresponde la propuesta 1? ______________________________

¿por qué? ______________________________

b) Plantea los primeros tres términos de la serie que representa los ingresos totales para esta opción.

c) ¿Cuáles serían los ingresos totales durante el periodo de 10 años?

d) ¿A qué tipo de serie corresponde la propuesta 2? ______________________________

¿Por qué? ______________________________

e) Plantea los primeros tres términos de la serie que representa los ingresos totales para esta opción.

f) ¿Cuáles serían los ingresos totales durante el periodo de 10 años?

g) ¿Cuál opción le conviene más, considerado los ingresos totales durante el periodo de 10 años?

Introducir a una persona en una disciplina va más allá de pedirle conservar resultados en su memoria; es enseñarle a **participar en el proceso del aprendizaje**, lo que hace posible obtener el conocimiento.

Las tendencias actuales de acuerdo con el proyecto de PISA (2004), señalan que se debe desarrollar en los estudiantes la **competencia matemática de alfabetización**, la cual se refiere a las capacidades de los estudiantes para **analizar, razonar y comunicar eficazmente** cuando **enuncian, formulan y resuelven problemas matemáticos** en una variedad de dominios y situaciones.

Matemáticas con aplicaciones presenta una **propuesta innovadora** en el proceso de enseñanza-aprendizaje del **cálculo integral de una variable, cálculo diferencial de varias variables y álgebra matricial**, donde se promueve la competencia matemática y el proceso de matematización (modelación matemática).

El enfoque de la obra **define al estudiante** como un **participante activo** en el proceso de aprendizaje y bajo la competencia matemática le permite ser un ciudadano **reflexivo**, bien **informado y capaz de afrontar los retos** que plantea una sociedad compleja y en constante cambio. El texto propone una serie de problemas para resolver en clase, aplicados a la vida cotidiana, los cuales incluyen una secuencia didáctica basada en la **técnica de la pregunta**, que guía al estudiante en la resolución del problema.

Este libro enfatiza en la modelación matemática y en la interpretación de resultados, logrando un aprendizaje significativo; asimismo, fomenta el desarrollo para trabajar en equipo y la búsqueda de información, lo cual favorece las habilidades y actitudes como la reflexión, el razonamiento y el desarrollo de habilidades del pensamiento.

CENGAGE Learning®

Visite nuestro sitio en http://latinoamerica.cengage.com

ISBN-13: 978-607-519-133-1
ISBN-10: 607-519-133-X

9 786075 191331