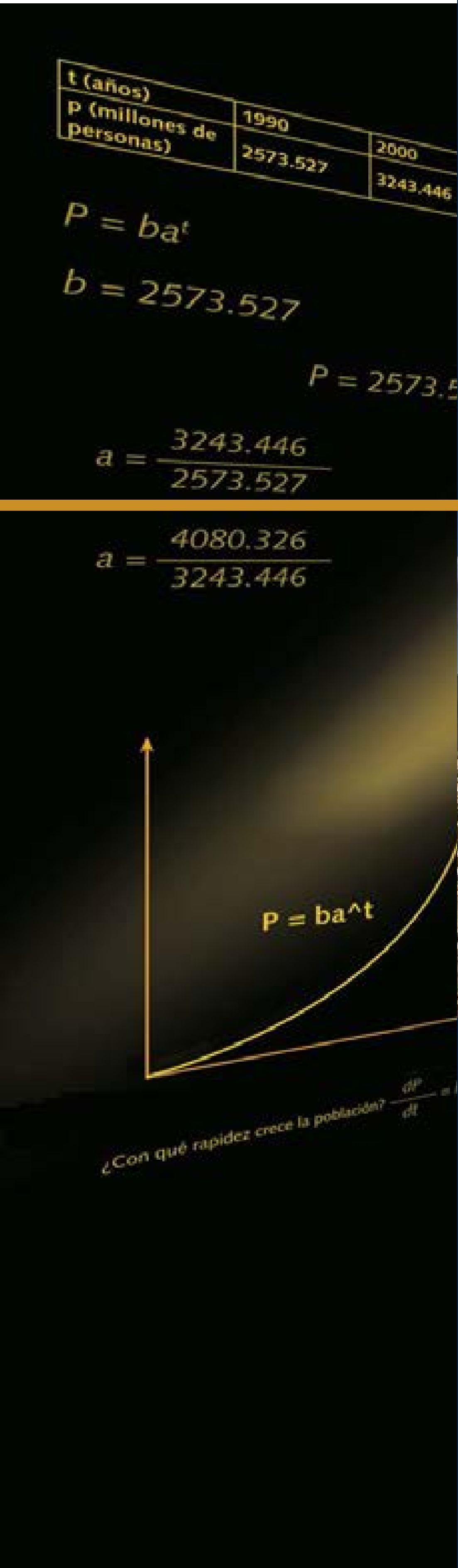
CENGAGE Learning®

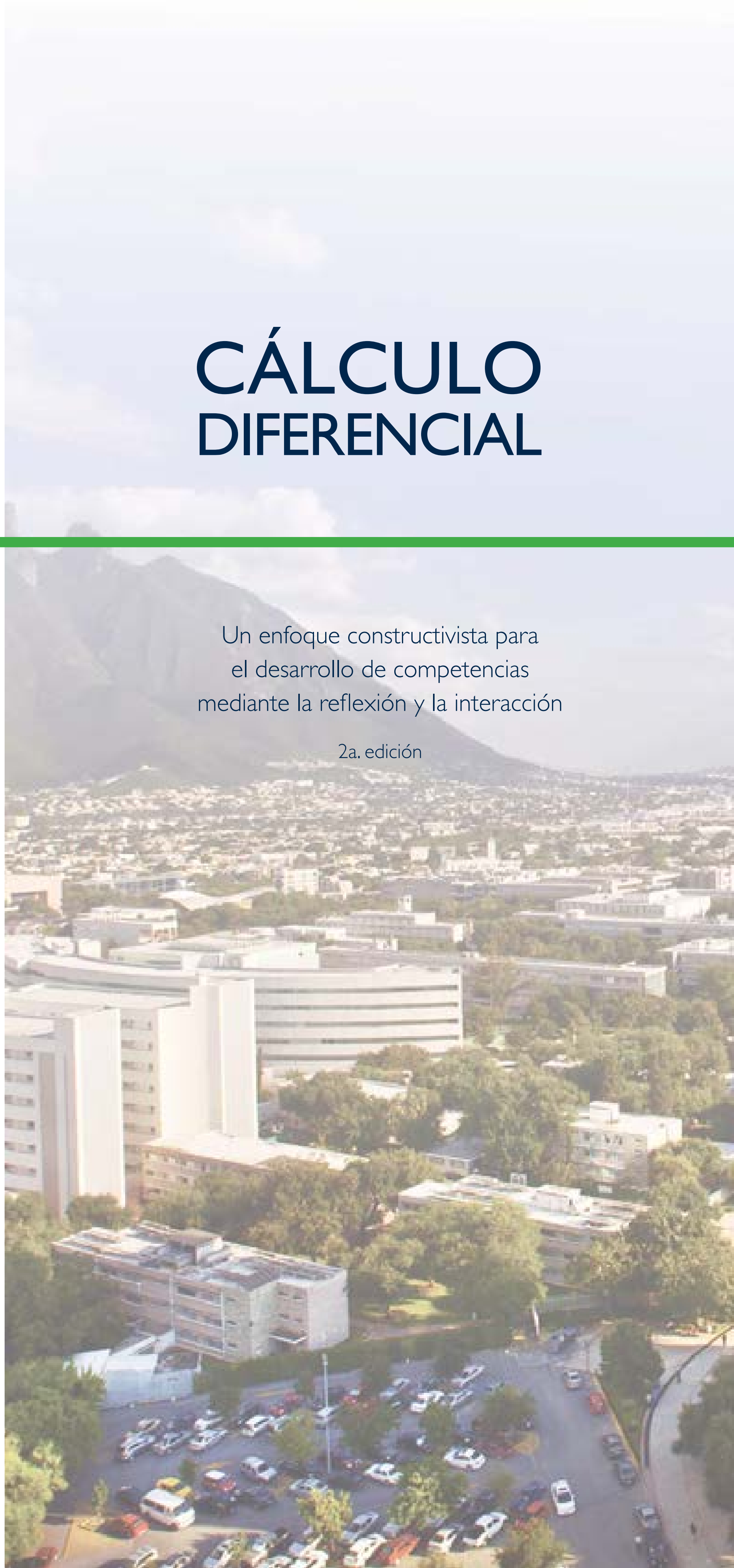
Galván • Cienfuegos • Romero
Fabela • Elizondo • Rodríguez • Rincón

CÁLCULO DIFERENCIAL



Un enfoque constructivista para
el desarrollo de competencias
mediante la reflexión y la interacción

2a. edición



CÁLCULO DIFERENCIAL

Un enfoque constructivista para
el desarrollo de competencias
mediante la reflexión y la interacción

2a. edición

Delia Aurora Galván Sánchez • Dora Elia Cienfuegos Zurita
José de Jesús Romero Álvarez • María de la Luz Fabela Rodríguez
Isabel Cristina Elizondo Ordóñez • Ana María Rodríguez López
Elvira Guadalupe Rincón Flores

CÁLCULO DIFERENCIAL

Un enfoque constructivista para el desarrollo de competencias mediante la reflexión y la interacción

2a. edición

Revisores técnicos

Dr. Gerardo P. Aguilar Sánchez
Profesor del Departamento de Física y Matemáticas
División de Ingeniería y Arquitectura
Tecnológico de Monterrey, Campus Ciudad de México

L.F.M. Daniel Barriga Flores
Director del Departamento de Ciencias Básicas
División Profesional
Tecnológico de Monterrey, Campus Morelia

Dr. Leopoldo Zúñiga Silva
Doctor en Ciencias en Matemática Educativa, CICATA-IPN
Tecnológico de Monterrey, Campus San Luis Potosí

CENGAGE Learning®

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

Cálculo Diferencial: un enfoque constructivista para el desarrollo de competencias mediante la reflexión y la interacción, 2a. edición.

Delia Aurora Galván Sánchez, Dora Elia Cienfuegos Zurita, José de Jesús Romero Álvarez, María de la Luz Fabela Rodríguez, Isabel Cristina Elizondo Ordóñez, Ana María Rodríguez López y Elvira Guadalupe Rincón Flores

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Fernando Valenzuela Migoya

Director Editorial, de Producción y de Plataformas Digitales para Latinoamérica:
Ricardo H. Rodríguez

Gerente de Procesos para Latinoamérica:
Claudia Islas Licona

Gerente de Manufactura para Latinoamérica:
Raúl D. Zendejas Espejel

Gerente Editorial de Contenidos en Español:
Pilar Hernández Santamarina

Gerente de Proyectos Especiales:
Luciana Rabuffetti

Coordinador de Manufactura:
Rafael Pérez González

Editora:
Cinthia Chávez Ceballos

Diseño de portada:
Jorge Manzano Olmos

Imagen de portada:
Instituto Tecnológico de Monterrey (ITESM)

Composición tipográfica:
Humberto Núñez Ramos

Datos para catalogación bibliográfica:
Galván Sánchez Delia Aurora *et al.*
Cálculo Diferencial: un enfoque constructivista para el desarrollo de competencias mediante la reflexión y la interacción, 2a. edición.
ISBN: 978-607-481-888-8

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 16 15 14 13

Dedicatorias

A mis padres, Guillermo (†) y Aurora, pues con su ejemplo, dedicación y sacrificio me inspiraron a crecer profesionalmente.

A mi principal fuente de motivación, orgullo y alegría: mi esposo José Armando y mis hijos, Jorge, Ricardo, Alejandro, Miguel Ángel, Roberto y Carolina… gracias por su apoyo incondicional.

Delia A. Galván Sánchez

Gracias a Dios por el don de la vida y por mis padres.

A mis padres, Ciro y Honorina (†), por la formación que me dieron, a mi amado esposo Gerardo y a mis hijos, Luis, Oscar, Jorge y Elia, por su comprensión y paciencia

Dora Elia Cienfuegos Zurita

Gracias a DIOS por este logro tan importante en mi vida. Todo mi amor y agradecimiento a mis PADRES Reynaldo y Maclovia, que son mi razón de ser y me inspiran a ser la persona que hoy soy. Gracias a mis HERMANAS, por brindarme todo su cariño y apoyo, al igual que a mis cuñados. Dedicado con todo mi amor a mis SOBRINOS, que son el motor de mi vida.

Isabel Cristina Elizondo Ordóñez

Gracias a Dios por guiarme y acompañarme en todo momento.

A mis padres, Ma. de la Luz y José Heriberto, por darme el estudio y valores que los caracterizan.

A mi esposo, Sergio Saúl, e hija, Luz Yazmín, por su comprensión y apoyo incondicional, ya que han dado sentido y alegría a mi vida.

María de la Luz Fabela Rodríguez

Agradezco todo el apoyo, amor y comprensión de mis hijos, Ana Alejandra y Sergio Alberto, así como de mis padres, Benicia y Alonso, para la realización de este trabajo.

Ana María Rodríguez López

Para mis padres, que me brindaron la oportunidad de crecer como persona; a mis hermanos, que siempre han estado conmigo.

A mis maestros, que gracias a ellos he podido sembrar la semilla de sus aprendizajes en cada una de mis ideas.

A mis amigos y mis jefes por concederme su fe y confianza para continuar este gran camino de éxitos personales.

José de Jesús Romero Álvarez

A mi madre, Lina, por su gran ejemplo de lucha y amor por la vida; a mi hijo, Javier, por su comprensión y cariño; a mi amado esposo, Thibaut, por su apoyo incondicional, y a todos mis alumnos, por ser una pieza clave en mi formación docente.

Elvira G. Rincón Flores

Un agradecimiento especial a nuestros colegas de trabajo, quienes con sus valiosas aportaciones enriquecieron este material, y a nuestros jefes, pues su ejemplo y apoyo nos motivaron a la realización de este gran proyecto.

Los autores

Contenido

Introducción

El proceso de enseñanza-aprendizaje del Cálculo ha sido siempre objeto de preocupación a nivel mundial; el alto índice de reprobados, la dificultad para aprender la materia, la deserción escolar o la elección de una carrera profesional tomando como base la ausencia de las matemáticas en el currículo son motivo suficiente para estudiar este fenómeno y buscar estrategias de solución a esta problemática. Desde hace varios años inició una reforma en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas; las tendencias actuales enfatizan la búsqueda de estrategias centradas en el aprendizaje donde el estudiante participe activamente en la adquisición de su conocimiento. En esta búsqueda para mejorar y optimizar este proceso han surgido lineamientos, modelos, enfoques conceptuales y metodológicos encaminados a lograr su eficiencia.

Este libro presenta una propuesta innovadora en el proceso enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas donde se utiliza la estrategia de **aprendizaje activo** mediante la técnica de la pregunta para promover la participación de los estudiantes, entendiendo el **aprendizaje activo** como la incorporación de actividades que alienten a los estudiantes a hacer y pensar sobre lo que hacen. Se fomenta la participación del alumno durante la sesión de clase, participando en la construcción de los conceptos y la solución de problemas en un ambiente de interacción constante entre profesor-alumnos y alumno-alumno.

El profesor asume el papel de facilitador del aprendizaje de los estudiantes utilizando como herramienta didáctica la técnica de la pregunta.

Se espera que los estudiantes que sean expuestos a un aprendizaje activo sean capaces de leer, entender, interpretar y resolver un problema dado formulando un razonamiento matemático y exponerlo con claridad.

Nuestra experiencia al aplicar este tipo de actividades ha sido muy gratificante: se observa un cambio de actitud de los estudiantes hacía el estudio de las Matemáticas, una disminución en el índice de reprobados y los *test* aplicados para determinar el desarrollo de habilidades cognitivas arrojan resultados positivos en la mayoría de los estudiantes.

Es importante destacar que estos resultados se han observado en aquellos estudiantes que asumen su compromiso y responsabilidad en el proceso de aprendizaje y participan activamente en clase contestando las preguntas planteadas por el profesor.

Es un hecho que los profesores están impacientes por obtener información para mejorar su enseñanza y transformar el aprendizaje de sus estudiantes, y para ello se requiere que las ideas previas —producto de la investigación— se inserten directamente en formas de proceder justificadas teóricamente y validadas en condiciones escolares.

Es necesario trabajar en la búsqueda de estrategias que permitan que los estudiantes vayan desarrollando capacidades de análisis de la realidad, de generalización de sus conocimientos a otros contextos, de reflexión y crítica y de imaginación y razonamiento. Todo ello requiere aprender a pensar.

Propuesta metodológica

A continuación presentamos nuestra propuesta metodológica, cuya principal característica es la participación activa del estudiante en su proceso de aprendizaje.

Cada uno de los temas en este texto está desarrollado de la siguiente manera:

1o. Empezamos con la construcción del concepto matemático a través del planteamiento de una situación de la vida cotidiana que da solución a un problema. Para ello proponemos una serie de preguntas que se deben resolver en clase, en una interacción constante entre estudiantes y profesor, quienes dan respuesta a las preguntas para descubrir o construir el concepto.

De esta manera se promueve la participación, la reflexión y el razonamiento de los estudiantes, y la clase se desarrolla en un ambiente más activo y ameno, el cual ayuda al profesor a cumplir con su papel de ser facilitador del aprendizaje de sus alumnos.

2o. Después, incluimos ejercicios resueltos, a los que llamamos ejemplos, cuyo fin es el siguiente:

- que el estudiante los consulte antes de la clase y llegue a ella con un avance para que su participación sea más activa,
- que los utilice después de la clase, para complementar y reforzar su aprendizaje, y
- que el estudiante que no pudo asistir a clase tenga conocimiento del tema que se vio y de los diferentes tipos de problemas que se resolvieron en ella. Aquí la sugerencia es que el estudiante que se encuentre en esta situación asuma el reto de resolver los ejercicios propuestos, siguiendo la guía de preguntas que se plantean como estrategia de solución del problema.

3o. Más adelante proponemos una serie de problemas para resolver en clase en la sección "¡A trabajar!": son ejercicios que incluyen una secuencia didáctica basada en preguntas que guían al estudiante hacia la solución del problema. Esta etapa también favorece la participación activa del estudiante, la reflexión, el razonamiento y el desarrollo de habilidades verbales, pues las respuestas a las preguntas deben ser redactadas por el estudiante con sus propias palabras, y no ser una copia de lo que el profesor comente en clase o escriba en el pizarrón.

Además, fomenta una estructura de pensamiento para solucionar problemas, lo que le será de gran utilidad en el transcurso de su vida.

4o. Por último ofrecemos gran variedad de ejercicios para practicar fuera del salón de clases; con la ventaja de incluir la respuesta de todos los ejercicios y no sólo de los pares o impares, como ocurre en la mayoría de los libros de texto. De esta manera, el alumno puede revisar sus respuestas y, en su caso, replantear el problema, lo que le dará mayor confianza y seguridad tanto de sus capacidades como de su aprendizaje.

5o. Al final del libro incluimos una sección de anexos que contiene algunas actividades que recomendamos utilizar durante el curso para hacer una clase más activa y enriquecedora. Algunas de estas actividades incluyen investigaciones con datos de la vida real en donde se utilizan los conceptos aprendidos en clase para dar solución a un problema o reflexionar sobre alguna situación de nuestra vida diaria. Entre las actividades se incluye lo siguiente:

- hojas de trabajo que pueden ser utilizadas como un reporte de lectura de un tema previo o posterior a la clase, como una autoevaluación de lo aprendido.
- hojas de trabajo de práctica que pueden utilizarse en el salón de clases para fomentar el trabajo en equipo.
- investigaciones para descubrir algún concepto o para conocer aplicaciones de la vida real relacionados con los conceptos vistos en el curso.

Cabe mencionar que estas actividades son sólo una muestra de lo que el profesor puede utilizar como apoyo en su curso. Es conveniente que cada profesor diseñe sus propias actividades para complementar el curso, de manera que coincidan con situaciones de su comunidad, lo que hará que sus clases sean más amenas y enriquecedoras para los estudiantes.

En los anexos incluimos una sección, llamada "Conocimientos previos", que contiene las bases del álgebra que los estudiantes necesitarán a lo largo del curso, de esta forma lo tiene disponible para consultarlo cuantas veces sea necesario.

Contenido del libro

Este libro incluye los temas necesarios para un primer curso de matemáticas universitarias.

El material se divide en cuatro unidades: *Funciones: representación y análisis, Límites y continuidad, Derivada y Optimización de funciones.*

En la primera unidad estudiamos algunas de las funciones que más aplicación tienen en la vida real, a saber: lineal, potencia, trigonométricas seno y coseno, exponencial, logarítmica y polinomial. En la segunda analizamos el comportamiento de estas funciones mediante el estudio de los límites y continuidad para luego, en la tercera unidad abordar el concepto más importante del cálculo: la derivada. Finalizamos en la Unidad 4 con aplicaciones de la derivada, resaltando el papel que ésta juega en la optimización de funciones.

Es importante dar a conocer que este texto es parte de un proyecto más amplio que incluye otros temas: la integral, funciones de varias variables, algunas series y álgebra lineal; temas que abordaremos en un segundo libro.

Mensaje para los profesores

Esta propuesta metodológica tiene sus fundamentos en teorías de aprendizaje propuestas por autores como Piaget, Ausubel y Bruner, entre otros. También tomamos en cuenta las actuales tendencias utilizadas en el proceso de enseñanza-aprendizaje, como la presentación de los conceptos por medio de los enfoques geométrico, numérico y algebraico, en el uso de tecnología y el énfasis en el planteamiento de modelos e interpretación de resultados.

Aquí presentamos las principales ideas de algunas de las teorías de aprendizaje en las que se basa este libro.

Bruner afirma que los maestros deben proporcionar situaciones problemáticas que estimulen a los estudiantes a descubrir por sí mismos la estructura del material. Para él, esto significa comprender los conceptos de tal manera que les permita establecer relaciones significativas con dichos conceptos.

Otra de las menciones importantes de Bruner es que el aprendizaje logrado por medio de la estructuración tiende a ser permanente, situación que todo profesor desea en sus estudiantes, ya que es común observar que alumnos que tuvieron un gran desempeño en el primer curso no recuerdan mucho de lo que han aprendido.

Bruner propone una estrategia inductiva, que aliente a los estudiantes a hacer especulaciones basadas en evidencias incompletas y luego confirmarlas o desecharlas. Él organiza la clase de tal manera que los estudiantes aprendan a través de su participación activa. Asimismo, exhorta a los profesores a enfrentar con problemas a los estudiantes y ayudarlos a buscar soluciones, no a darles la respuesta.

El método de Bruner se resume en la siguiente declaración:

> Introducir a alguien a una disciplina no es simplemente cuestión de hacer que acumule los resultados en su memoria. Más bien es enseñarle a participar en el proceso que hace posible el establecimiento del conocimiento.

Piaget, por su parte, afirma que sus teorías de aprendizaje tienen como premisa la participación activa del alumno. Establece que los maestros deben estimular a los estudiantes a aprender por medio de preguntas y recomienda que al alumno se le permita interactuar con objetos, con situaciones y con otros estudiantes, con lo que se pretende lograr un aprendizaje más significativo y permanente que aquél con las ideas adquiridas mediante la memorización de un material ordenado y presentado por otros.

Para Piaget, “La acción es el factor en el proceso del conocimiento”.

Ausubel, con su teoría cognoscitivista, arirma que el aprendizaje es determinado por los conocimientos y experiencias previas del estudiante.

Su énfasis está en la teoría del aprendizaje verbal significativo —el cual es uno de los aportes más relevantes dentro de la teoría psicopedagógica actual—, el desarrollo del pensamiento y la solución de problemas. Ausubel concibe al alumno como un procesador activo de la información, donde el aprendizaje es organizado y sistemático.

Para Ausubel aprender es sinónimo de entender e implica una visión del aprendizaje basada en los procesos internos del alumno y no sólo en las respuestas externas. Con intención de promover la asimilación de saberes, el profesor utilizará organizadores previos que favorezcan la creación de relaciones adecuadas entre los saberes previos y los nuevos. Los organizadores tienen la finalidad de facilitar la enseñanza receptivo —significativa, lo cual permite que la exposición organizada de los contenidos propicie una mejor comprensión.

El análisis del aprendizaje significativo es un proceso, activo y personal, en el que los pensamientos, expresados simbólicamente de modo no arbitrario y objetivo, se unen con los conocimientos ya existentes.

Sánchez afirma que para manejar un proceso de pensamiento de manera eficaz no es suficiente conocer y entender las funciones que definen el proceso, sino que es necesario practicar su aplicación hasta lograr el hábito y la habilidad de usarlo en forma natural y espontánea en una variedad de situaciones y contextos. Esto significa que: “el desarrollo de habilidades para pensar en términos de procesos requiere un aprendizaje interno y una ejercitación dirigida a promover la transferencia; logrado esto, los procesos de pensamiento son herramientas que posibilitan la toma de decisiones y contribuyen a mejorar la capacidad para resolver problemas y manejar el entorno”.

Podemos observar que los autores coinciden en la importancia de propiciar una clase donde los estudiantes tengan más participación; que se promueva la reflexión, el análisis y el razonamiento, que el aprendizaje sea significativo y que se los ayude a pensar, no darles todo ya hecho. Es precisamente lo que buscamos en este libro.

Te invitamos a ser un profesor-facilitador del aprendizaje de tus alumnos siguiendo la metodología que aquí proponemos.

Mensaje para los estudiantes

Si piensas que

- no te gustan las matemáticas;
- no eres bueno para “mate” porque se te han dificultado;
- en estas áreas las matemáticas no se utilizan mucho, y
- que una vez acreditados los cursos básicos de matemáticas jamás volverás a necesitarlos,

este libro puede ayudarte a cambiar tus ideas.

Nuestro principal objetivo es ayudarte en el proceso de aprendizaje de los conceptos del Cálculo Diferencial, que son básicos para tus cursos posteriores de especialidad.

Al hojear el libro te darás cuenta de que el desarrollo de los temas y el planteamiento de los ejercicios es muy diferente de cualquier otro libro de texto de Matemáticas.

Una de las principales diferencias es que algunos ejemplos y ejercicios no siempre contienen escrita toda la solución, sino que hay espacios para que junto con el profesor, a través de un proceso de reflexión, participes en la construcción de los conceptos y en la solución de los problemas. Podríamos decir que éste es un libro interactivo donde se te va guiando en el proceso de pensamiento que debes seguir para resolver un problema, para construir un concepto o para obtener una definición.

Esto es algo que todos los profesores llevamos a cabo de una u otra forma en el aula, pero la mayoría de las veces lo hacemos de manera verbal y no queda nada escrito para llevar a cabo un repaso y reforzar lo aprendido.

Nuestra hipótesis es que esta propuesta metodológica —la participación activa, el proceso de reflexión constante, escribir en tu propio lenguaje y el hecho de que tu atención puede estar completamente centrada en las explicaciones del maestro, y no en estar copiando lo que escribe en el pizarrón— favorece tu aprendizaje, ayuda a que lo aprendido permanezca en tu memoria por mucho más tiempo y contribuye a mejorar tu capacidad para resolver problemas y tomar decisiones, lo que te proporcionará seguridad al momento de evaluar tus conocimientos.

Tu participación activa, compromiso y responsabilidad son factores clave para tener éxito en este proyecto.

Te invitamos a formar parte del grupo de estudiantes que opinan que las matemáticas no son difíciles.

Esperando que este material cumpla en verdad con su objetivo, te deseamos ¡mucho éxito!

Los autores

UNIDAD 1

Funciones: representación y análisis

Temas

En nuestra vida diaria, continuamente surgen situaciones en las cuales dos o más cantidades o variables se relacionan entre sí mediante alguna regla o patrón. Es ahí donde, sin darnos cuenta, están presentes las matemáticas, y lo más sorprendente es que aún sin conocerlas formalmente… ¡las estamos utilizando!

Entre los muchos ejemplos de esto podemos mencionarte los siguientes:

- El costo de publicar en un periódico un aviso de venta de un automóvil depende del número de palabras que tiene el texto publicado.
- El valor de las unidades de inversión (UDIS) dependen del tiempo (en días), ya que éstas cambian diariamente.
- El costo de transportarnos en un taxi depende de la distancia en kilómetros recorridos.

Reconocer que en determinada situación está presente una función y poder establecer un modelo matemático que la represente es de gran utilidad, ya que con la función podemos realizar un análisis de la situación, hacer predicciones a futuro y tomar mejores decisiones fundamentadas en el conocimiento.

En esta unidad aprenderás a reconocer cuándo una situación de la vida real es, desde un punto de vista matemático, una función. Conocerás los tipos de funciones que más aplicación tienen en la vida diaria, y aprenderás a reconocerla y a plantear su ecuación.

En algunos de los ejercicios que se plantean (y resuelven) utilizamos datos reales a fin de demostrar que en verdad utilizamos las matemáticas para resolver los problemas cotidianos de la vida real y con ello aumentar la motivación por el aprendizaje de éstas.

1.1 Concepto de función

Reflexiona y contesta las preguntas planteadas.

1. Cuando hablas por celular, ¿de qué depende el costo de esa llamada? ____________________
2. Un vendedor de automóviles tiene un sueldo fijo de $6000 por quincena y recibe una comisión por cada automóvil vendido. ¿De qué dependerá su sueldo en la próxima quincena?
____

Si analizas las situaciones anteriores, te darás cuenta de que en ambos casos existe una relación entre dos variables o cantidades y se cumple con que una de las variables depende de la otra; en matemáticas, para describir esa relación, usamos el concepto de **función**.

En nuestra vida diaria encontramos una infinidad de situaciones en las que identificamos una relación entre dos variables, donde una depende de la otra; sin embargo, no toda relación entre dos variables es una función (desde un punto de vista matemático). Hay una condición que se debe cumplir; veamos en la siguiente definición cuál es esa condición.

Decimos que la variable y está en función de la variable x, si se cumple que cada valor de x se relaciona con un único valor de y.

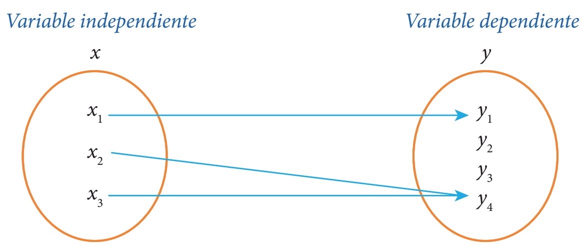
A la variable y se le llama variable dependiente y a la variable x se le llama variable independiente.

La forma de denotar esta relación funcional es: $y = f(x)$ que se lee como "y está en función de x" o "y depende de x".

Nota Se acostumbra utilizar la letra f para denotar una función, ya que es la letra más representativa para el concepto; sin embargo, se puede utilizar cualquier otra letra para denotarla.

Cómo comprobar si una relación entre dos variables es función

¡A reflexionar! Para verificar si existe una relación funcional entre dos variables, podemos representar la situación mediante diagramas, de la siguiente manera:



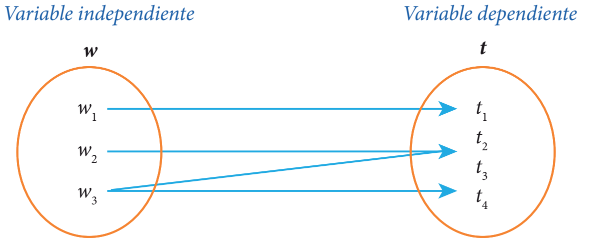
Debemos analizar los valores de x y de y, y comprobar que se cumple que cada valor de x se relaciona con un único valor de y.

¿Esto se cumple? __________

Observa que x_2 y x_3 se relacionan con el mismo valor de y_4; en ese caso, ¿la relación es una función? _________ ¿Por qué? ____________________
____
____.

Cuándo una relación no es función

Observa el siguiente diagrama:



La relación entre estas dos variables, ¿es una función? __________ ¿Por qué? ________________

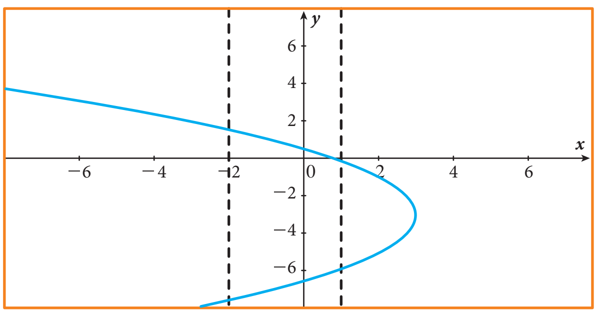
____

____

Otra forma para determinar si una relación entre dos variables es una función

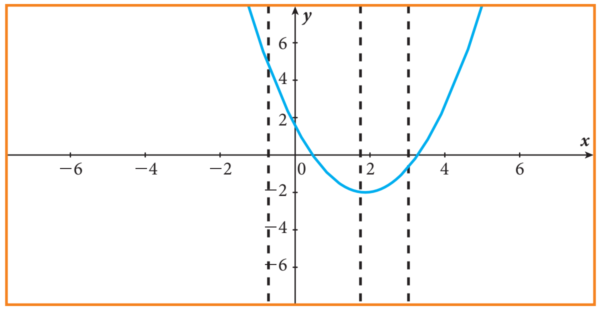
Si conocemos la gráfica de una relación, podemos determinar si es una función por medio de la **regla de la línea vertical**, la cual consiste en trazar líneas verticales en la gráfica. Si al trazar dichas líneas, todas cortan la gráfica en un solo punto, entonces sí es una función, ya que se cumple con que cada valor de la variable independiente se relaciona con un único valor de la variable dependiente. Si al menos una línea vertical corta a la gráfica en dos o más puntos, entonces no es una función, ya que la variable independiente se estaría relacionando con más de un valor de la variable dependiente.

Ejemplo 1 Indica si la gráfica dada corresponde a una función.



Solución Observa que aquí las líneas verticales tocan a la gráfica en dos puntos, por lo que no cumple con la condición para ser función, ya que para una x hay dos valores de y.

Ejemplo 2 Indica si la gráfica dada corresponde a una función.



Solución En esta gráfica toda línea vertical corta a la gráfica en un solo punto, por lo que a cada x le corresponde un único valor de y; por lo tanto, sí es una función.

Dominio y rango de una función

El **dominio** y el **rango** de una función son conceptos relacionados con sus variables; veamos cómo se definen.

Dominio: es el conjunto de todos los posibles valores de la variable independiente.

Rango o imagen: es el conjunto de valores correspondientes a la variable dependiente.

Nota El dominio y el rango de una función no necesariamente son valores numéricos, también pueden representarse con un conjunto de palabras, el cual puede estar escrito por enumeración o por descripción (mediante un enunciado).

Algunos ejemplos de lo anterior son:

- Si la variable representa los meses del año, los valores que puede tomar se representan como el conjunto {enero, febrero, marzo…, diciembre}; también pueden representarse mediante el enunciado {Todos los meses del año}.
- Si la variable representa colores de automóvil, los valores que puede tomar se representan como el conjunto {azul, gris, blanco, ...}.

Nota Cuando la variable representa algo de la vida real (por ejemplo: costos, tiempo, edad, altura, precio, etc.) el conjunto de valores del dominio y del rango deben ser razonables, de acuerdo con lo que la variable representa.

Cómo clasificar las variables

Las variables de una función pueden ser discretas o continuas.

- Se dice que una variable es **discreta** cuando sólo puede tomar valores aislados, es decir, sus valores pueden enumerarse; la forma de representarla es como un conjunto de datos y se escribe de la siguiente forma: {todos los x, donde x es un elemento del dominio}.

  Ejemplos de variables discretas son:

  - Si la variable representa el número de automóviles vendidos, los valores que puede tomar se representan mediante el conjunto $\{x$, donde $x = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
  - Si la variable representa el costo de envío de un paquete, los valores que puede tomar son valores aislados, ya que el costo se calcula por medio de rangos de acuerdo con el peso del paquete; por ejemplo, si el peso está entre 0 y 3 kilos, el costo es de \$5 y si el peso está entre 3 y 6 kilos, el costo es de \$8.50, y así sucesivamente; en este caso los valores que puede tomar la variable costo se representan mediante el conjunto $\{y$, donde $y = 5, 8.50, \ldots\}$.

- Se dice que una variable es **continua** cuando puede tomar cualquier número (incluso decimales y fracciones); en este caso sus valores no se pueden enumerar; la forma de representarla es con un intervalo y se escribe de la siguiente forma:

$$x \in (a, b)$$

Los extremos del intervalo pueden ser abiertos o cerrados, de acuerdo con lo que la variable represente. Si los extremos están incluidos, esto se llama intervalo cerrado y los valores se colocan entre corchetes, por ejemplo [a, b]; si los extremos no están incluidos, esto se llama intervalo abierto y los valores se colocan entre paréntesis, por ejemplo (a, b). Puede suceder que un extremo sea cerrado y el otro abierto, por ejemplo, (a, b] o [a, b).

  - Si, por ejemplo, una variable T representa temperaturas, no necesariamente debe ser un número entero o un valor aislado: puede tomar valores decimales, así que el conjunto solución puede denotarse con un intervalo como el siguiente,

$$T \in (-5, 48)$$

si consideramos las temperaturas máxima y mínimas registradas en Monterrey, Nuevo León.

Cómo representar funciones

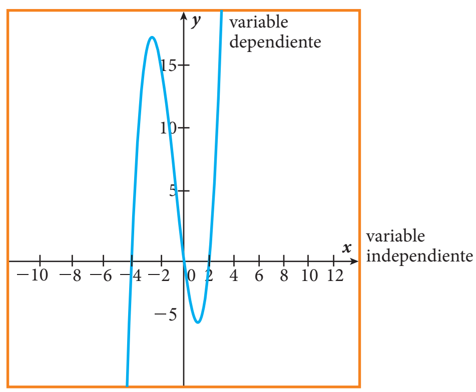
Las funciones pueden presentarse de diferentes formas; es importante que sepas identificar y trabajar cada una de ellas. En este curso manejaremos tablas de datos, gráficas y fórmulas.

- En el primer renglón colocamos los valores de la variable independiente y en el segundo renglón los de la variable dependiente. Por ejemplo,

x (variable independiente)	1	2	3
y (variable dependiente)	1	4	9

- Para graficar utilizaremos el plano xy.

En el eje horizontal dibujaremos los valores de la variable independiente y en el eje vertical los de la variable dependiente. Por ejemplo,



Nota Al graficar una función en la que las variables son discretas, la gráfica está formada por puntos aislados; sin embargo, es válido unir los puntos para identificar a qué tipo de función se ajusta la gráfica; en las siguientes secciones estudiaremos los diferentes tipos de funciones.

- Son ecuaciones matemáticas donde dejamos expresada la variable dependiente en términos de la variable independiente, es decir, $y = f(x)$.

Por ejemplo, $y = 2x - 5$, $y = 2^x$, etcétera.

Ejemplo 3 Analicemos la situación planteada al inicio del capítulo:

El costo de una llamada por celular depende del tiempo, en minutos, que dure la llamada. Supón que tu celular está inscrito en el Plan Amigo y tienes \$100 de crédito, que equivalen a 40 minutos de tiempo aire.

La relación entre las variables, ¿es una función?

Solución Lo primero que debemos hacer es verificar si se cumple con la condición para que la relación entre las dos variables sea una función. Para ello identificamos las variables, es decir, cuál es la independiente y cuál la dependiente y seleccionamos la letra con la que las vamos a representar (por lo general, se acostumbra utilizar la primera letra de la palabra):

- La variable independiente es el tiempo que dura la llamada y la podemos representar con la letra t.
- La variable dependiente es el costo y lo podemos representar con la letra C.

Ahora debemos comprobar que se cumple con la relación uno a uno entre las variables, para lo cual tenemos que elegir un valor de la variable independiente y relacionarlo con el valor correspondiente de la variable dependiente.

Consideremos una llamada que dura 5 minutos, el costo de esa llamada sería \$12.50; entonces relacionamos 5 con 12.50 y reflexionamos haciéndonos la pregunta:

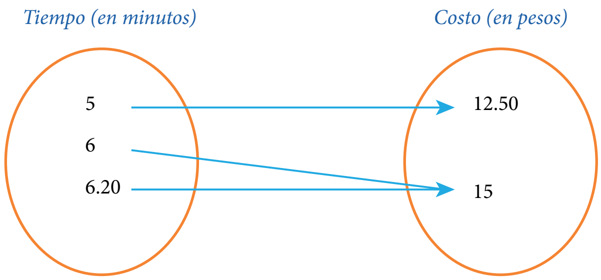
Para esa misma llamada de 5 minutos, ¿habrá otro costo?; es decir, ¿puede tener un costo con dos o más valores diferentes?

Tomemos otro valor para t, por ejemplo: 6 minutos. Esta llamada tendría un costo de \$15, ¿es el único valor posible?

Utilicemos diagramas para representar la situación anterior y analizarla.

Debemos pensar en diferentes valores de la variable independiente t (inventarlos), de tal manera que el valor que tomemos sea *razonable* con lo que la variable representa y relacionarlos con su posible valor de la variable dependiente, que también debe ser un valor *razonable* de acuerdo con el valor independiente con el que se relaciona.

Es decir,



Observa que para cada valor de tiempo hay un único valor de costo, por lo tanto, la relación entre las variables es función; no importa que $t = 6$ y $t = 6.20$ se relacionen con el mismo valor de costos, eso no contradice la definición ya que para un valor t sólo le corresponde un único costo.

Dado que la situación anterior es una función, podemos hablar del dominio y del rango de la función.

Nota Recuerda que los valores asignados al dominio y al rango deben ser valores razonables de acuerdo con lo que la variable representa.

El dominio para la función sería $D = t \in [0, 40]$ si consideramos a 0 como una llamada sin contestar y a 40 como el tiempo máximo que se puede hablar con una tarjeta de \$100.

La variable es de tipo continua, ya que puede tomar todos los valores intermedios y se representan en un intervalo.

El rango para la función es $R = C \in [0, 100]$, donde el 0 y el 100 son los valores correspondientes para los valores máximo y mínimo en el dominio.

La variable es de tipo continua, ya que puede tomar todos los valores intermedios y se representan en un intervalo.

Nota En este caso las variables no pueden tomar valores negativos, pues no podemos hablar de tiempos ni de costos negativos; considerando la situación planteada, hay un valor máximo a considerar en ambos casos.

Por último, denotemos la función.

Dado que utilizamos la letra t para representar el tiempo que dura la llamada y la letra C para representar el costo de ésta, la notación funcional quedaría expresada como $C = f(t)$ que se lee como "el costo está en función del tiempo o el costo depende del tiempo".

Ejemplo 4 La siguiente tabla muestra el consumo mensual de agua durante los meses de enero a junio de 2003.

Mes	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
Consumo de agua en m^3	20	17	20	19	22	21

La relación entre las variables, ¿es una función?

Solución Observa que en cada mes hay un único valor de consumo; por lo tanto, la relación es una función. En este caso, la variable independiente es el mes y podemos representarla con la letra m.

La variable dependiente es el consumo mensual y podemos representarla con la letra C.

Dado que la relación es una función, es posible hablar del dominio y del rango de la función.

El dominio de la función es D = {enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio}. La variable es de tipo discreta, ya que sólo toma valores aislados.

El rango de la función es R = {17, 19, 20, 21, 22}, el cual contiene los valores correspondientes al consumo mensual; éstos deben escribirse en orden creciente, y si algún valor se repite, sólo se escribe una vez. La variable es del tipo discreta, pues solamente toma valores aislados.

Por último, denotemos la función.

Dado que utilizamos la letra m para representar el mes y la letra C para representar el consumo mensual, la notación funcional quedaría expresada como $C = f(m)$, que se lee: "el consumo está en función del mes o el consumo depende del mes".

En los ejercicios 1, 2 y 3, determina si la relación entre las variables del enunciado es una función. Si cumple con ser función: da el dominio, el rango y clasifica las variables como discreta o continua.

Ejercicio 1 El costo expresado en pesos) de enviar por correo un paquete depende de su peso, expresado en gramos:

a) La relación entre las variables del enunciado, ¿es una función?

b) Proporciona el dominio y el rango, y clasifica las variables como discretas o continuas.

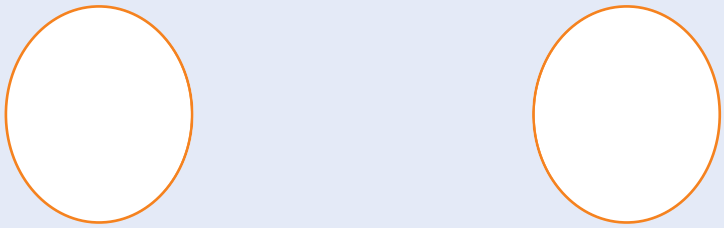
Solución Identifica primero las variables y define después la letra para representarlas.

Independiente: ________________________ = ________

Dependiente: ________________________ = ________

Utiliza diagramas para comprobar si una variable independiente se relaciona con una única variable dependiente.

________________________ ________________________



¿Es función? ________ ¿Por qué? ____

Dominio (valores de la variable independiente) ______________________________

La variable es ☐ discreta. ☐ continua.

Rango (valores de la variable dependiente) ______________________________

La variable es ☐ discreta. ☐ continua.

b) ¿Cómo se representa la función? ____

Ejercicio 2 Supongamos que la temperatura, en °C, depende del mes del año en que estemos.

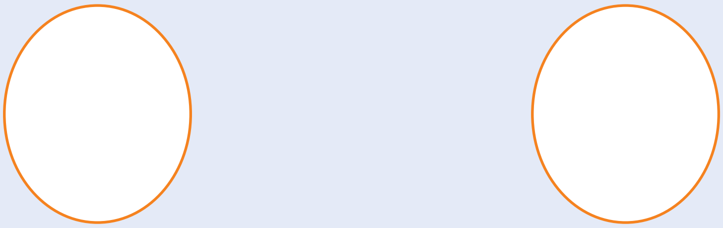
La relación entre las variables del enunciado, ¿representa una función?

Solución Identifica primero las variables y define después la letra para representarla.

Independiente: ________________________ = ________

Dependiente: ________________________ = ________

Utiliza diagramas para comprobar si una variable independiente se relaciona con una única variable dependiente.



¿Es función? ________ ¿Por qué? ____

____

____

Ejercicio 3 Supongamos que en el enunciado del ejercicio 2 sustituimos temperatura por temperatura máxima.

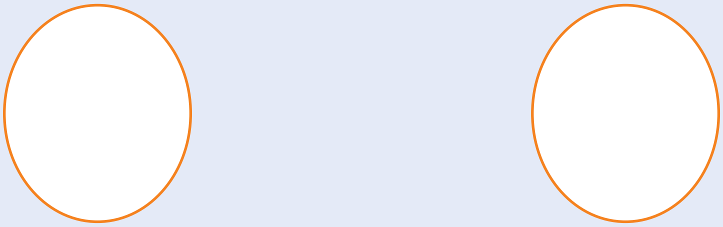
a) ¿La relación representa una función?

Solución Identifica primero las variables y define después la letra para representarlas.

Independiente: ______________________ = __________

Dependiente: ______________________ = __________

Utiliza diagramas para comprobar si una variable independiente se relaciona con una única variable dependiente.



b) Proporciona el dominio y el rango y clasifica las variables como discretas o continuas.

Dominio (valores de la variable independiente) ______________________________

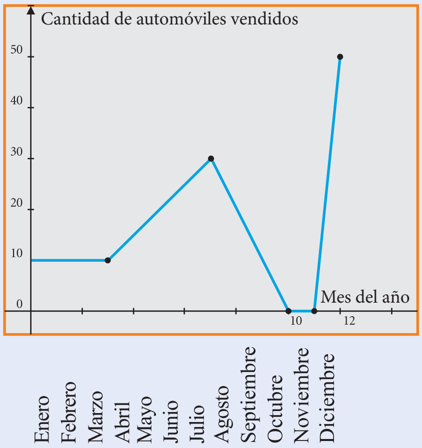
La variable es ❑ discreta. ❑ continua.

Rango (valores de la variable dependiente) ______________________________

La variable es ❑ discreta. ❑ continua.

c) ¿Cómo se representa la función? ______________________

Ejercicio 4 La siguiente gráfica muestra una función que indica las ventas en una agencia de automóviles en los meses de enero a diciembre de cierto año.



Contesta lo que se indica respecto a la situación planteada.

a) Cuál es la variable independiente? ____________________

b) ¿Cuál es la variable dependiente? ____________________

c) ¿En qué periodo las ventas fueron disminuyendo? ____________

d) ¿En qué mes no hubo ventas? ____________________

e) ¿Cuál fue el comportamiento de las ventas en los primeros tres meses del año? ____________

f) ¿En qué periodo las ventas fueron aumentando? De ____________ a ____________.

g) De los dos periodos en que las ventas aumentaron, ¿hay alguno que sea mejor que otro? ____________

¿Cuál periodo? ____________ ¿Por qué es mejor? ____________

____

Ejercicio 5 Consdidera la relación entre las cantidades de la siguiente tabla.

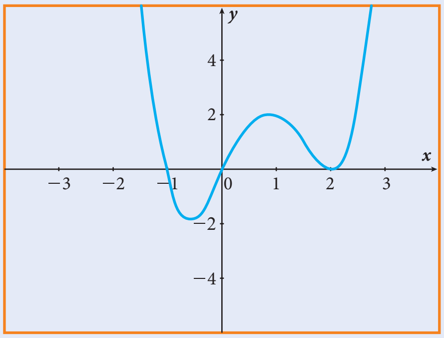
T	-2	-1	0	1	2
S	4	1	0	1	4

Conclusión ¿Es función? ____________ ¿Por qué? ____________

____

Ejercicio 6 ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función? Justifica tu respuesta.

a)



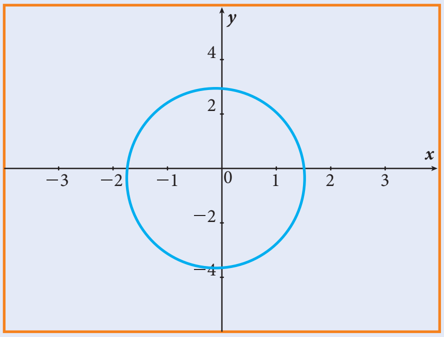
¿Es una función? ___________

¿Por qué? ____

¿Cuál es el dominio de la función? ______________________________

¿Cuál es el rango de la función? ______________________________

b)



¿Es una función? ___________

¿Por qué? ____

En los ejercicios del 1 al 18 indica si la relación entre las cantidades es una función; si lo es, señala su dominio, rango y si las variables son discretas o continuas.

1.

t	-1	0	1	0
y	$-1/2$	0	$1/2$	1

2.

r	5	10	15	5	10	15	0
t	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	0

3.

x	7	14	21	28
p	1	2	3	4

4.

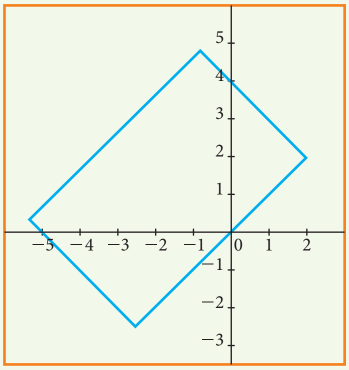
n	1980	1983	1987	1989
I	40 000	23 000	3 500	16 000

5. La estatura que debe tener un niño depende de su edad (medida cada año). Considera la edad del niño desde recién nacido hasta 10 años de edad.
6. Los grupos de Matemáticas I y los profesores de Matemáticas I. Supón que el grupo depende del maestro.
7. Los alumnos de Matemáticas I (específicamente los de este grupo) y su día de cumpleaños. Supón que la fecha de cumpleaños depende del alumno.
8. Los alumnos de Matemáticas I (específicamente los de este grupo) y su fecha de cumpleaños. Supón que el alumno depende de la fecha de cumpleaños.
9. Los cursos de idiomas en que se pueden inscribir los alumnos de un colegio depende del alumno.
10. Los maestros del Departamento de Matemáticas y el número de libros que tiene el maestro. Supón que el número de libros depende del maestro.
11. La calificación que obtienen los alumnos de Matemáticas depende del número de horas que invierten en estudiar.
12. El número de becarios asignados a los maestros del colegio X y maestros del departamento de Matemáticas. Supón que el maestro depende del número de becarios asignados.
13. Los alumnos de la clase de Matemáticas I y la cantidad de computadoras portátiles de cada alumno. Supón que la cantidad de computadoras portátiles depende del alumno.
14. El maestro del colegio X y el número de computadoras por maestro. Supón que el número de computadoras depende del maestro.
15. La producción de maíz en una empresa depende (producción máxima de 50 toneladas) del número de trabajadores.
16. El costo de la siembra (máximo \$200 000) depende de los kilogramos de semilla utilizada.
17. Los litros de gasolina que gasta diariamente un automóvil (máximo 35 litros) depende de los kilómetros recorridos.
18. Los litros de agua que se gastan en un centro de lavado de autos depende del tamaño del automóvil (chico, mediano y grande).

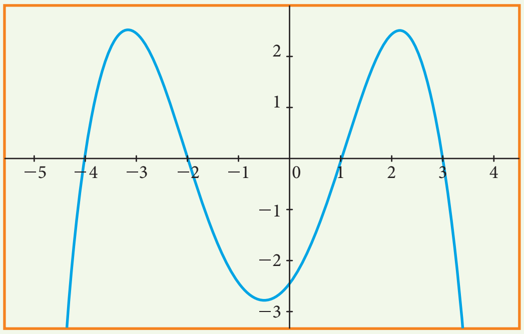
Gráficas y funciones

19. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa una función? Explica tu respuesta.

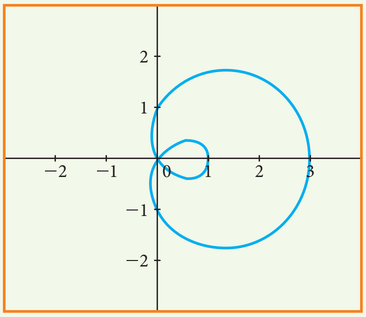
a)



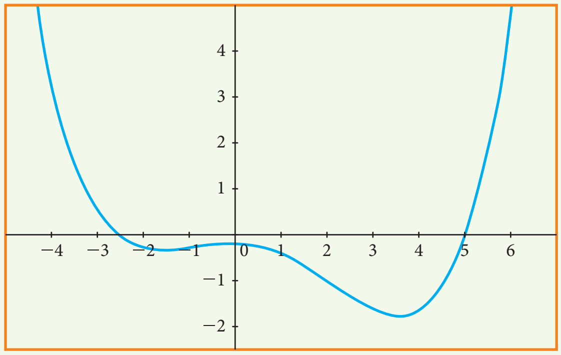
b)



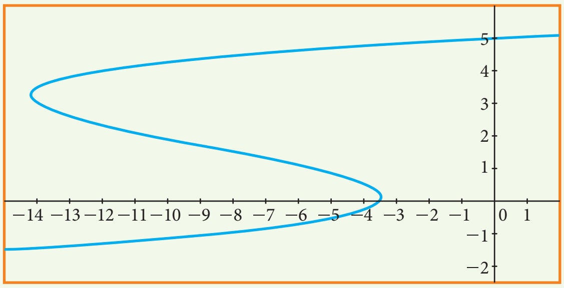
c)



d)

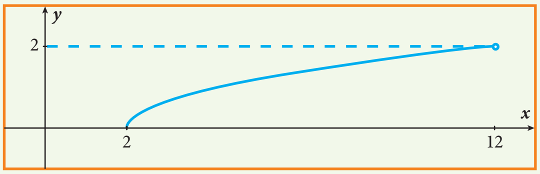


e)

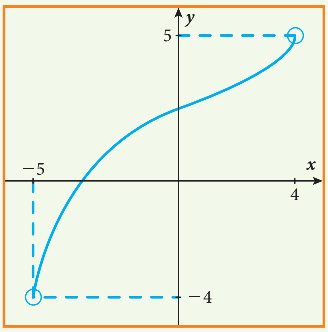


20. Determina el dominio y el rango de las siguientes funciones.

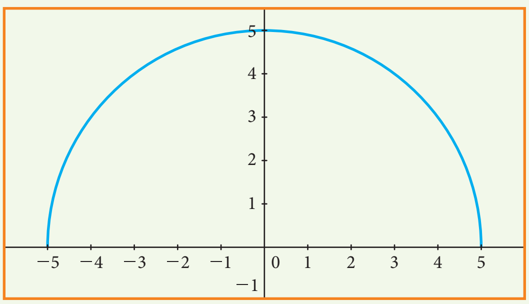
a)



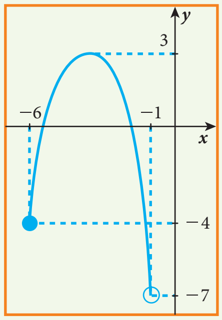
b)



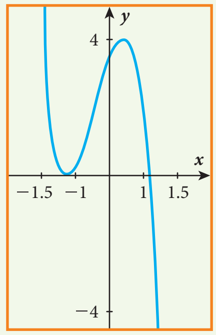
c)



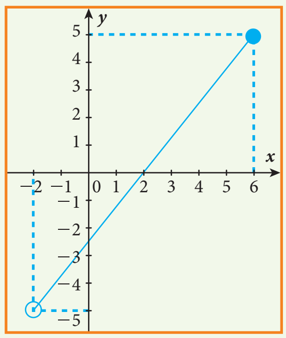
d)



e)



f)

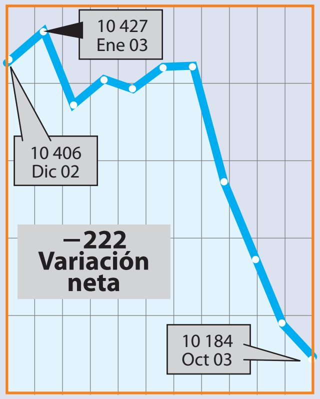


21. Las perspectivas del Banco de México indican que la economía, en 2003, tuvo el siguiente comportamiento: un inicio promisorio; luego entre abril y septiembre la situación se deterioró y, finalmente, en el último trimestre la situación mejoró sustancialmente. Dibuja una posible gráfica del comportamiento de la economía en 2003. (*Fuente: El Norte*, 29 de enero de 2004). *Nota: promisorio*: alentador.

22. La siguiente gráfica muestra el número de empresas industriales en Nuevo León durante los primeros 10 meses de 2003. (*Fuente: El Norte*, 29 de enero de 2004). *a*) ¿Qué representan la variable independiente y la variable dependiente? *b*) ¿En qué mes se registró el mayor número de empresas industriales y cuántas fueron? *c*) ¿En qué mes se registró el menor número de empresas industriales y cuántas fueron?

Saldo negro...

En los primeros 10 meses de 2003, el número de empresas industriales bajó en NL. (Número de industrias de la transformación en el estado).



Fuente: IMSS

23. La siguiente información indica el avance de la epidemia SARS en el mundo, en el periodo noviembre 2002–mayo 2003. Dibuja una posible gráfica del número de casos respecto al tiempo. (*Fuente: Selecciones del Reader´s Digest*, agosto de 2003).

Avance de la epidemia

16 de noviembre de 2002: se registra el primer caso de SARS en la provincia de Guangdong, China.

Principios de marzo de 2003: la enfermedad se propaga a Hong Kong, Canadá, Singapur y Vietnam.

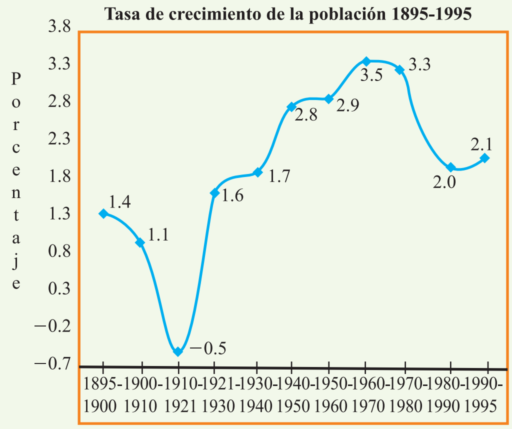
26 de marzo de 2003: hasta el 28 de febrero se habían contabilizado 792 casos y 31 muertes en Guangdong.

11 de abril de 2003: se informa de 2 890 casos (de los cuales, 1 309 se registraron en China, 1 059 en Hong Kong y 133 en Singapur) y 116 decesos.

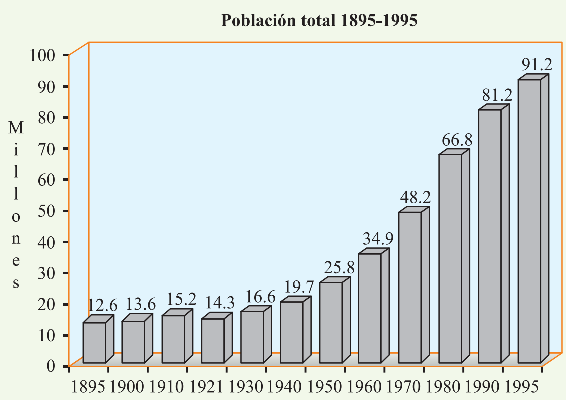
22 de abril de 2003: en China han ocurrido 2 000 casos y 92 muertes, y se registran cinco casos nuevos de infección por hora. La epidemia avanza en Canadá, donde se registran 304 casos. Hay un total de cuatro 4 500 casos confirmados en todo el mundo.

1 de mayo de 2003: 5 220 casos y 329 fallecimientos registrados en 28 países.

24. Dada la siguiente gráfica, que muestra la tasa de crecimiento de la población desde 1895 a 1995: *a*) ¿Qué representan la variable independiente y la variable dependiente? *b*) Identifica en qué periodo (de años) se obtuvo la tasa más baja y cuál fue. *c*) ¿En qué periodo (de años) se obtuvo la tasa más alta y cuál fue? (INEGI, XII Censo General de Población y Vivienda 2000).



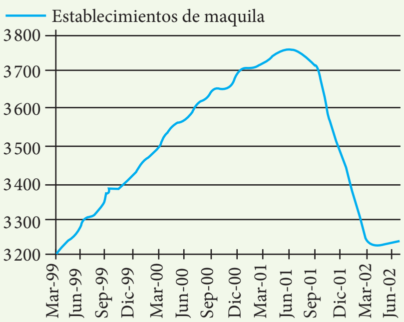
25. A partir de los datos mostrados en la siguiente gráfica publicada por el INEGI (XII Censo General de Población y Vivienda 2000), *a*) ¿qué representan la variable independiente y la variable dependiente? *b*) ¿En qué periodo disminuyó la población?



26. Observa y describe el comportamiento entre la producción manufacturera y la maquiladora que se muestra en la siguiente gráfica.

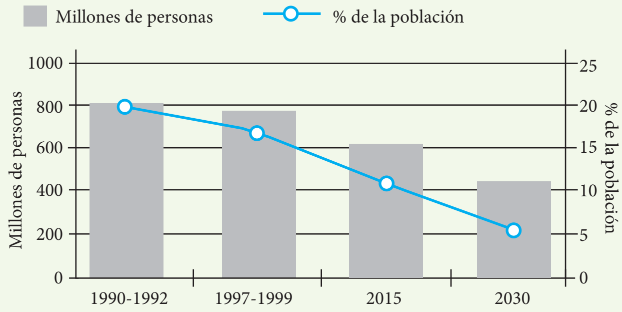
Fuente: Basados en datos del INEGI y Census Bureau, EU.

27. La siguiente gráfica muestra los efectos de la oferta laboral en nuestro país debido a la desaceleración industrial en Estados Unidos. Describe el comportamiento de Jun-01 a Mar-02.



Fuente: Basados en datos del INEGI.

28. Con base en los datos que ofrece la siguiente gráfica: *a*) ¿Cómo podemos interpretar la desnutrición en los países desarrollados? *b*) De continuar esta tendencia, ¿qué comportamiento se espera en la desnutrición después de 2030?



Fuente: FAO (Organización para la Agricultura y la Alimentación, ONU).

29. Por medio de un graficador determina si las siguientes ecuaciones corresponden a una función.

a) $x - 4y + y^2 = 0$

b) $y = \dfrac{x^{3/2} + 3x^3}{4^x - 5}$

c) $y = \sqrt[3]{x^4 + 4x^2}$

d) $16(y - 2)^2 + 25(x - 5)^2 = 400$

e) $y = \dfrac{x^{3/2} + 3x^3}{5^x}$

1.2 Función lineal

La función lineal es una función que se puede aplicar en muchas situaciones, por ejemplo, en economía (la oferta y la demanda). Los economistas se basan en la linealidad de esta función, y las leyes de la oferta y la demanda son fundamentales en cualquier análisis económico. En medicina ciertas situaciones requieren del uso de ecuaciones lineales para entender determinados fenómenos. Un ejemplo es el resultado del experimento psicológico de Stenberg sobre recuperación de información. Éstas son sólo unas de las aplicaciones; conforme avances en el estudio de esta sección conocerás algunas aplicaciones más de esta importante función.

El Cálculo es una rama de la Matemática que estudia el cambio. Si observamos a nuestro alrededor nos damos cuenta de que todo cambia: la población, el nivel de contaminación, la economía, la inflación, la temperatura; también nosotros cambiamos, nuestra edad, estatura, peso, etcétera. Por esta razón el ser humano se interesa en medir el cambio. Reflexiona sobre cómo mides el cambio.

Construcción Supongamos que actualmente mides 1.70 m de estatura y pesas 65.30 kg y que hace 10 años tenías una estatura de 1.45 m, mientras que tu peso era de 44 kg.

¿Cuánto ha cambiado tu estatura de diez años a la fecha? ____________________

¿Cuánto cambió tu peso en ese tiempo? ________

¿Qué hiciste para obtener los valores anteriores?

____

Si se tratara de cualquier otra cantidad, ¿harías la misma operación para obtener el cambio en cierto periodo? ____________________

Nota En Matemáticas, al igual que en otras ramas de la ciencia, se utilizan símbolos especiales para denotar algunos conceptos. Tal es el caso del cambio, que para denotarlo se utiliza el símbolo Δ, el cual corresponde a la letra "delta" mayúscula del alfabeto griego (que es equivalente a la letra "D" del abecedario romano); así que si a la estatura la denotamos con la letra e, entonces la expresión Δe representaría el cambio en la estatura.

¿Cómo denotarías el cambio en el peso? ______

¿Y el cambio en el tiempo? ______________

Es obvio que la estatura de una persona cambia paulatinamente, por lo que sería importante saber cuánto creciste por año, durante la última década. ¿Qué harías para obtener esta información? ______

____

¿Cuánto creciste por año? ______________

En Matemáticas, a este número se le llama **cambio promedio** de la estatura y se denota por $\dfrac{\Delta e}{\Delta t}$.

Encuentra el cambio promedio del peso en el periodo de 10 años.

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \underline{\qquad\qquad}$$

En resumen, para obtener el cambio (absoluto) de una cantidad y en un intervalo de tiempo $[a, b]$, al valor de dicha cantidad en el tiempo b se le resta el valor que ésta tenía en el tiempo a, es decir,

$$\boxed{\text{Cambio en } y = \Delta y = y_2 - y_1}$$

y para obtener el cambio promedio de una cantidad y en un intervalo de tiempo $[a, b]$, se divide el cambio en y entre el cambio en el tiempo, es decir,

$$\text{Cambio promedio de } y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} = \frac{\textit{cambio en la variable dependiente}}{\textit{cambio en la variable independiente}}$$

Nota Observa que obtener el cambio promedio en un intervalo $[a, b]$ es equivalente a obtener la pendiente de la línea que une los puntos (t_1, y_1) y (t_2, y_2). En lo sucesivo, llamaremos **pendiente** al cambio promedio.

La razón por la que se estudia el cambio y el cambio promedio es porque proporcionan información acerca del comportamiento de los valores de una variable y, con base en esto, se pueden analizar situaciones para tomar decisiones.

En Matemáticas también se emplea el cambio y el cambio promedio para clasificar funciones, por ejemplo, cuando una función tiene un cambio promedio constante para cualquier periodo que se analice, ésta recibe el nombre de función lineal.

Cómo reconocer una función lineal

Las funciones lineales se caracterizan por tener un cambio promedio (una pendiente) constante; es decir, para cualquier par de puntos que se analicen, el cambio promedio siempre será el mismo.

El cambio promedio (la pendiente) puede ser positivo si los valores de la función aumentan, o negativo si los valores de la función disminuyen.

El símbolo que se utiliza para denotar la pendiente es la letra m. Como el cambio promedio y la pendiente son conceptos equivalentes, entonces concluimos que $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}$, por lo que en adelante también utilizaremos la letra m para denotar el cambio promedio.

Ejemplo 1 Determina si la siguiente función, expresada en una tabla de valores, es lineal.

x	0	5	7	19
y	3	13	23	33

Solución Para determinar si es lineal, tenemos que encontrar el cambio promedio (la pendiente) para cada par de puntos consecutivos, es decir, entre los puntos (0, 3) y (5, 13), el cambio promedio es $m=\frac{13-3}{5-0}=2$ y entre los puntos (5, 13) y (7, 23) el cambio promedio es: $m=\frac{23-13}{7-5}=5$, no hay necesidad de continuar buscando los cambios promedio para los demás puntos, ya que de aquí podemos concluir que la función no es lineal porque el cambio promedio (la pendiente) para estos dos pares de puntos no es el mismo.

Ejemplo 2 Determina si la siguiente función, expresada en la tabla de valores, es lineal.

x	−1	0	3	5	9
y	5.5	7	11.5	14.5	20.5

Solución De nuevo, para determinar si es lineal hay que encontrar el cambio promedio (la pendiente) para cada par de puntos consecutivos, es decir, entre los puntos (−1, 5.5) y (0, 7), el cambio promedio es: $m=\frac{7-5.5}{0-(-1)}=1.5$

Entre los puntos (0, 7) y (3, 11.5) el cambio promedio es:

$$m=\frac{11.5-7}{3-0}=1.5.$$

El hecho de que en dos pares de puntos el cambio promedio sea el mismo, no implica que la función sea lineal; tenemos que verificar que la pendiente sea constante para todas las parejas dadas en la tabla.

Entre los puntos (3, 11.5) y (5, 14.5), la pendiente es

$$m=\frac{14.5-11.5}{5-3}=1.5.$$

Entre los puntos (5, 14.5) y (9, 20.5), la pendiente es

$$m=\frac{20.5-14.5}{9-5}=1.5.$$

Como el cambio promedio (la pendiente) es constante para todo par de puntos, concluimos que la función dada es lineal.

Observa que, aunque los valores de x y y no aumentan en forma constante, podemos decir que la función se ajusta a un modelo lineal, ya que sí aumentan en forma proporcional de un punto a otro; es decir, obtuvimos que el cambio promedio es de 1.5. Éste representa el cambio de y por cada unidad de x; también observa que del segundo al tercer punto la x aumentó 3 unidades. Ahora observa cuánto aumentó la y del segundo al tercer punto: aumentó en tres veces el cambio promedio, es decir, aumentó 4.5 unidades; lo mismo ocurre en los demás puntos, el aumento para x y y en puntos consecutivos se da en la misma proporción. Al ser un cambio proporcional, podemos asegurar que es una función lineal.

Ecuación de una función lineal

En la sección anterior mencionamos que podemos representar una función por medio de una tabla de valores como una gráfica o una fórmula.

Construcción Para encontrar una fórmula que describa una función lineal, podemos aprovechar el hecho de que el cambio promedio es constante.

Retomemos el ejemplo anterior, donde $m = 1.5$ y sabemos que si $x = 0$, $y = 7$ (observa la tabla de datos anterior).

Expresaremos cada uno de los puntos de la tabla anterior en términos del cambio promedio $m = 1.5$ y del punto (0, 7), que es la intersección con el eje y.

Para $x = 3$, el valor de y es $y = 11.5$; este valor lo podemos escribir como $11.5 = 7 + 1.5\,(3)$.

Para $x = 5$, el valor de y es $y = 14.5$; este valor lo podemos escribir como $14.5 = 7 + 1.5\,(5)$.

Para $x = 9$, el valor de y es $y = 20.5$; este valor lo podemos escribir como $20.5 = 7 + 1.5\,(9)$.

Por último, este comportamiento también se cumple para $x = -1$, ya que en este caso se tiene que $y = 7 + 1.5\,(-1)$

Podemos resumir el análisis anterior en la siguiente tabla:

$x = -1$	$y = 7 + 1.5\,(-1)$
$x = 0$	$y = 7 + 1.5\,(0)$
$x = 3$	$y = 7 + 1.5\,(3)$
$x = 5$	$y = 7 + 1.5\,(5)$
$x = 9$	$y = 7 + 1.5\,(9)$

Por lo tanto, concluimos que para un valor cualquiera de x, la ecuación para esta función lineal es

$$y = \underbrace{7}_{\substack{\text{valor de } y \\ \text{cuando} \\ x = 0}} + \underbrace{1.5}_{\substack{\text{Cambio} \\ \text{promedio} \\ \text{(pendiente)}}}\, x.$$

Al generalizar lo anterior tenemos que, la ecuación de una función lineal es de la forma

$$y = b + mx$$

donde m representa el cambio promedio de la función (conocida como pendiente) y b es la intersección con el eje y (el valor de y cuando $x = 0$).

Para obtener la ecuación, podemos utilizar la forma punto-pendiente

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

donde m es la pendiente (cambio promedio en la función respecto a x) y (x_1, y_1) es un punto de la función.

Si no conocemos la pendiente, podemos obtenerla con la fórmula

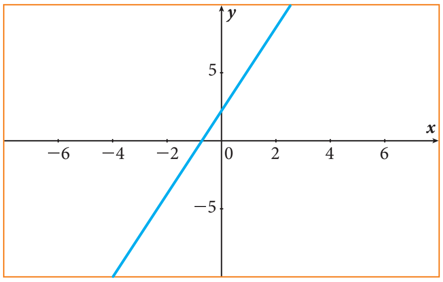
$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos de la función. Observa que la fórmula de la pendiente es la división del cambio en y entre el cambio en x.

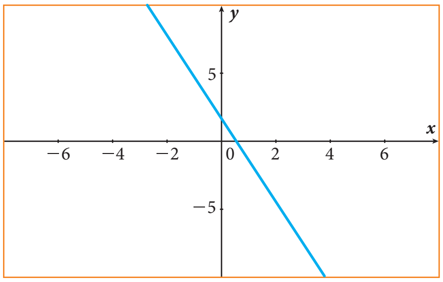
Gráfica de una función lineal

La gráfica de una función lineal es una línea recta que puede ser creciente, decreciente u horizontal, dependiendo de cómo sea la pendiente. Para la función $y = mx + b$,

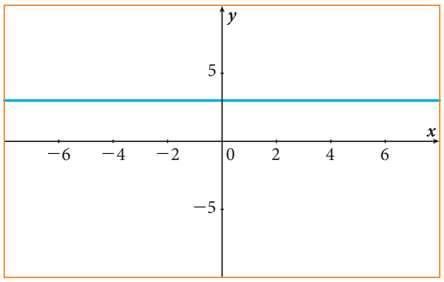
- Si la pendiente es positiva, entonces la función es creciente y su gráfica quedaría como:



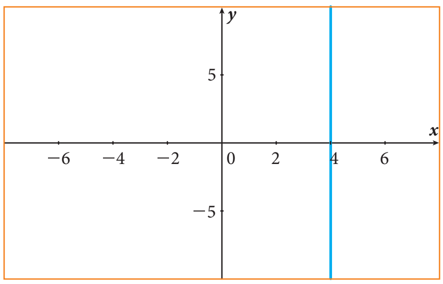
- Si la pendiente es negativa, entonces la función es decreciente y su gráfica quedaría como:



- Si la pendiente es cero, entonces la función es constante y su gráfica quedaría como una recta horizontal, que puede estar arriba o abajo del eje x. La ecuación es de la forma $y = a$, como:



- Las rectas cuyas gráficas son verticales no son funciones, ya que en este caso su ecuación sería de la forma $x = a$, lo que significa que para un solo valor de x, el valor de y puede ser cualquier valor. Por ejemplo:



Ejemplo 3 Supongamos que tienes \$3 600 para comprar pantalones y camisas. Si cada pantalón cuesta \$600 y cada camisa cuesta \$400:

a) Plantea la ecuación que representa el número total de camisas y pantalones que puedes comprar con \$3 600.

b) Si compraste cuatro pantalones, ¿cuántas camisas puedes comprar? Utiliza la ecuación.

c) Dibuja la ecuación.

d) En una súper promoción de fin de temporada, todo está rebajado 50%. ¿Cómo afecta a la gráfica?

Solución *a*) Si representamos con la letra C la cantidad de camisas y con la letra P, la cantidad de pantalones que puedes comprar, la ecuación que representa el total de camisas y pantalones que puedes comprar con \$3 600 quedaría como:

$$400C + 600P = 3\,600$$

b) Al sustituir $P = 4$ en la ecuación anterior obtenemos

$$400C + 600(4) = 3\,600$$

Al despejar, obtenemos que:

$C = \dfrac{3600 - 600(4)}{400}$ y al efectuar la operación nos queda $C = 3$, es decir, si ya compraste 4 pantalones, con lo que te queda de dinero puedes comprar 3 camisas.

c) Para dibujar la ecuación, planteamos una tabla de datos y buscamos las intersecciones con los ejes, éstas se obtienen al sustituir por cero cada una de las variables de la ecuación

$$400C + 600P = 3\,600.$$

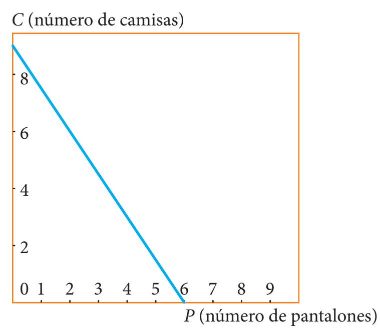
En la ecuación sustituimos $P = 0$ y al despejar obtenemos que $C = 9$ y si en la ecuación sustituimos $C = 0$, al despejar obtenemos que $P = 6$.

Escribimos estos dos puntos en una tabla de datos, en este caso cualquiera de las dos variables puede considerarse como dependiente o independiente, ya que esto va a depender de la variable que decidamos despejar en la ecuación; es decir, si en la ecuación de la solución del inciso *a*), despejamos C en términos de P, entonces C es la dependiente y P la independiente, y viceversa. Al hacerlo de esa forma, la ecuación es $C = \dfrac{3\,600}{400} - \dfrac{600P}{400}$ y al simplificar obtenemos: $C = 9 - \dfrac{3P}{2}$, la cual corresponde a una función lineal con cambio promedio $m = -\dfrac{3}{2}$ y $b = 9$.

La tabla de valores queda expresada como:

P	0	6
C	9	0

Dibujamos los puntos y los unimos para trazar la gráfica de la función.



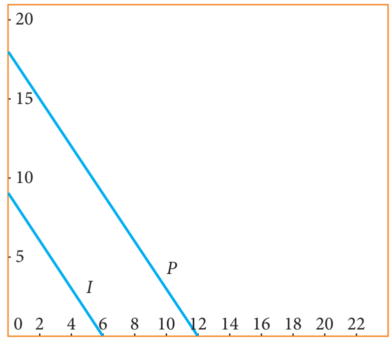
Nota Las intersecciones con los ejes representan el número máximo de sólo camisas o sólo pantalones que puedes comprar con todo el dinero disponible.

d) Si tanto las camisas como los pantalones tienen un descuento de 50%, entonces la cantidad que puedes comprar de ambas cosas se duplicará; observa las dos gráficas anteriores.

La línea *I* representa la situación inicial, y la línea *D* representa la situación en el último inciso.

Observa cómo se duplican las intersecciones con el eje *y* y el eje *x*; sin embargo, sus pendientes siguen siendo iguales.

A estas rectas se les llama **paralelas**.



¡A trabajar!

Ejercicio 1

Determina si la función dada en la tabla es lineal. Si lo es, proporciona su ecuación.

x	1	6	11	16
y	-2.38	-0.88	0.62	2.12

Solución

a) ¿Es una función lineal? __________ ¿Por qué? ____

____

b) La ecuación por obtener es de la forma ____.

¿Qué datos necesitas para plantear la ecuación? ________________________________

¿Cuál es el cambio promedio (la pendiente) de la función? ________________________

¿Cómo obtienes *b* (el corte con el eje *y*)? ____

Encuentra el valor de *b*.

Por último, la ecuación queda expresada como: ____.

Ejercicio 2

Supongamos que queremos contratar una línea telefónica y que al solicitar informes en dos compañías de la localidad obtuvimos los siguientes costos:

- Opción 1: renta mensual de \$257.25 con derecho a 100 llamadas y \$2.47 por cada llamada adicional.
- Opción 2: renta mensual de \$256.55 con derecho a 100 llamadas y \$2.48 por cada llamada adicional.

a) En cada una de las opciones, plantea una fórmula para el pago mensual en función del número de llamadas adicionales.

b) Traza las funciones en una sola gráfica.

Solución

Define las variables: Pago mensual ____________ Número de llamadas adicionales ____________

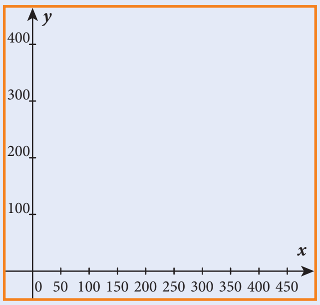
Función 1: ____

Función 2: ____

¿Las funciones planteadas son lineales? __________ ¿Por qué? ________________________________

____

c) Dibuja las dos funciones en la misma gráfica. Recuerda que es importante escribir en cada eje la variable que estás midiendo.



d) ¿Cuál es el dominio y el rango para esta función? ¿Las variables son discretas o continuas?

Dominio: ______________________ La variable es: ______________________

Rango: ______________________ La variable es: ______________________

e) ¿Con qué número de llamadas el pago mensual es el mismo en las dos opciones? ______________________

¿Qué ecuación debes plantear para contestar la pregunta? ______________________

Encuentra el número de llamadas.

Ejercicio 3 Una *laptop* de $15 684 se deprecia a un valor de $3 359 en cuatro años. Si la depreciación es lineal:

a) Obtén la fórmula para el valor de la *laptop* en función del tiempo.

Solución La ecuación es de la forma: ______________________

Si V es el valor de la *laptop* y t el tiempo, ¿cómo queda expresada la ecuación? ______________________

Describe cómo harías para obtener el cambio promedio (la pendiente m): ______________________

____

El valor del cambio promedio (la pendiente) es: $m =$ ______________________

¿Conoces el valor de b? __________ ¿Cuál es su valor? $b =$ __________

La ecuación queda expresada como ______________________

b) Utiliza la ecuación para calcular en cuántos años el valor de la *laptop* será de $1 971.

¿Qué variable conoces? ______________________ ¿Cuál es su valor? ______________________

¿Cuál es la variable que se pide calcular? ______________________

Utiliza la ecuación del inciso anterior y obtén el valor de la variable que se indica.

Ejercicio 4 Durante las primeras dos semanas de clases, los alumnos de Matemáticas I han trabajado excelentemente, por lo que el profesor les ha propuesto tomarse la hora de clase para ir a almorzar a la cafetería "El Borrego". Todos cooperaron y juntaron $______________________.

Para que una persona pudiera hacer el pedido, acordaron que sólo ordenarían chilaquiles y refrescos. Con lo que reunieron no alcanzaba para comprar una orden de chilaquiles y un refresco para cada persona, por lo que debían determinar la cantidad de chilaquiles y refrescos que podían comprar con ese dinero.

El precio de los chilaquiles es de $ __________ y el precio del refresco es de $ __________ .

Solución

Letra que representa la cantidad de chilaquiles que pueden pedir: ________________

Letra que representa la cantidad de refrescos que pueden pedir: ________________

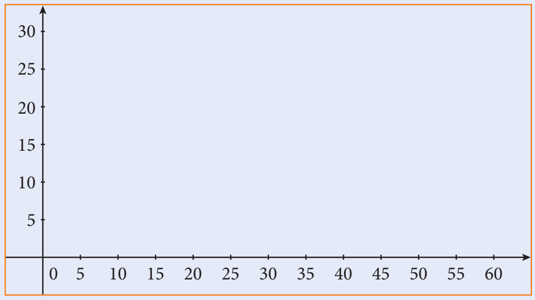
¿Cómo representas la cantidad gastada en chilaquiles? ________________

¿Cómo representas la cantidad gastada en refrescos? ________________

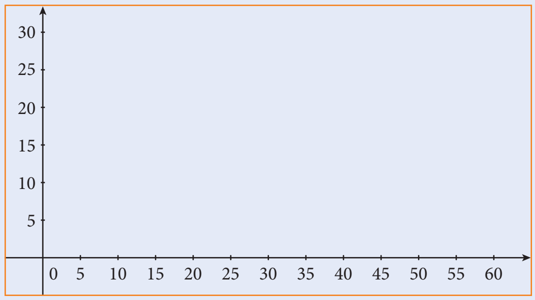
¿Cómo quedaría la ecuación para distribuir el presupuesto? ________________

Esta ecuación recibe el nombre de *restricción presupuestaria*.

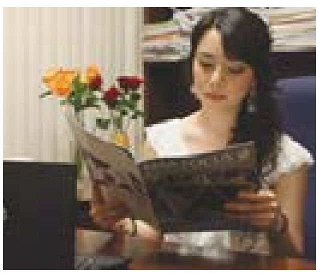
Traza una gráfica que describa la distribución del presupuesto. Recuerda que es importante escribir en cada eje la variable que estás midiendo.



Si sorpresivamente tanto el precio de los chilaquiles como el del refresco se duplicara, ¿cómo quedaría la gráfica de la restricción de presupuesto?



Aplicaciones de las funciones lineales en el área de economía



Veamos algunas de las funciones que se utilizan en el área de economía; solamente estudiaremos los aspectos matemáticos que nos interesan de momento, como el planteamiento de la función, dibujar su gráfica o, dado el valor de una de las variables, obtener el valor de la otra.

La **función costo** representa el *costo total* de producir una cantidad q de algún artículo.

Si C es el costo y q es la cantidad producida, podemos denotar la función como $C = f(q)$.

Los costos de producción se dividen en *costos fijos* y *costos variables*.

Los costos fijos son los que no dependen de la producción, por ejemplo: renta, servicios, sueldos de secretaria o recepcionista, etcétera.

Los costos variables son los que dependen directamente de la producción, por ejemplo: materiales, mano de obra, etcétera.

Entonces, tenemos que

$$\boxed{C_{\text{totales}} = C_{\text{fijos}} + C_{\text{variables}}}$$

Nota Los costos variables se obtienen multiplicando el costo de producir una unidad (llamado *costo unitario*) por el número de unidades producidas; así que la fórmula anterior queda como sigue:

$$\boxed{C_{\text{totales}} = C_{\text{fijos}} + C_{\text{variables}}}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{Costo unitario} \times \text{Cantidad de unidades producidas}}$$

Ejemplo 4 Una empresa que produce computadoras tiene costos fijos mensuales de \$150 000 y costos variables de \$3 000 por cada computadora que produce. Plantea la función del costo total para la empresa.

Solución Los costos fijos son de \$150 000; esto lo podemos determinar directamente de la redacción del problema.

Si representamos con la letra q la cantidad de computadoras que se producen, la función de costos variables queda expresada como $C_{\text{variables}} = 3\,000q$; entonces, la función de costos totales por mes está dada por

$$\boxed{C_{\text{totales}} = 150\,000 + 3\,000q}$$

La **función ingreso** representa la cantidad total obtenida al vender una cantidad q de algún artículo. Si I es el ingreso, q es la cantidad vendida y p es el precio al que se vende cada artículo, entonces el ingreso es:

$$\boxed{\text{Ingreso} = \text{Precio} \times \text{Cantidad}}$$

Es decir,

$$\boxed{I = p \times q}$$

Ejemplo 5 Supón que la empresa de computadoras vende cada una en \$8 000.

a) Plantea la función que dé el ingreso en términos del número de computadoras vendidas.
b) Si en el mes se venden 100 computadoras, ¿cuál es el ingreso obtenido?

Solución *a*) Si q es la cantidad de computadoras vendidas, el ingreso está dado por la función

$$I = 8\,000q.$$

b) Al sustituir $q = 100$ en la función de ingresos, obtenemos que $I = 8\,000\ (100) = 800\,000$.

La **función utilidad** representa las pérdidas o ganancias en una compañía; para obtenerla restamos la función ingreso menos los costos totales, es decir, si U es la utilidad, entonces

$$\boxed{Utilidad = Ingreso - Costos_{\text{totales}}}$$

Es decir,

$$\boxed{U = I - C_{\text{totales}}}$$

Al obtener la función de utilidad, se puede presentar una de las siguientes situaciones:

- El ingreso es mayor al costo total; en este caso hay ganancias para la compañía.
- El ingreso es menor al costo total; en este caso hay pérdidas para la compañía.
- El ingreso es igual al costo total; en este caso no hay pérdida ni ganancia para la compañía. El valor de q en el cual se da esta situación se llama **punto de equilibrio**.

Ejemplo 6 Para la empresa de computadoras, obtén:

a) La función para la utilidad en términos de la cantidad q.
b) Al vender las 100 computadoras, ¿cuál es la utilidad?
c) El punto de equilibrio.
d) Dibuja las gráficas de costo total e ingreso y selecciona la región que representa ganancias para la empresa.

Solución *a*) Si utilizamos las fórmulas de costo total e ingreso, la función utilidad queda expresada como

$$U = 8\,000q - (150\,000 + 3\,000q).$$

Utilizamos el álgebra para eliminar paréntesis y obtenemos:

$U = 8\,000q - 150\,000 - 3\,000q$. Después agrupamos términos semejantes y vemos que la función utilidad queda expresada como:

$$U = 5\,000q - 150\,000.$$

b) Al sustituir $q = 100$ en la función de utilidad, obtenemos:

$U = 5\,000\,(100) - 150\,000$
$U = 350\,000$; esto representa ganancias para la empresa.

c) Para obtener el punto de equilibrio, igualamos las funciones costo total e ingreso:

$$150\,000 + 3\,000q = 8\,000q.$$

Para resolver esta ecuación, dejamos en un lado de la ecuación los términos que tienen q, y en el otro los que no la tienen:

$$150\,000 = 8\,000q - 3\,000q.$$

Al efectuar la operación en el lado derecho, tenemos que:

$$150\,000 = 5\,000q.$$

Para despejar q, pasamos dividiendo el 5 000 hacia el lado izquierdo y obtenemos:

$$\frac{150000}{5000} = q, \text{ o bien } q = 30.$$

Esto significa que con 30 computadoras vendidas al mes la empresa estará en equilibrio; es decir, no gana, pero tampoco pierde.

d) La función de costo total,

$$C = 150\,000 + 3\,000q,$$

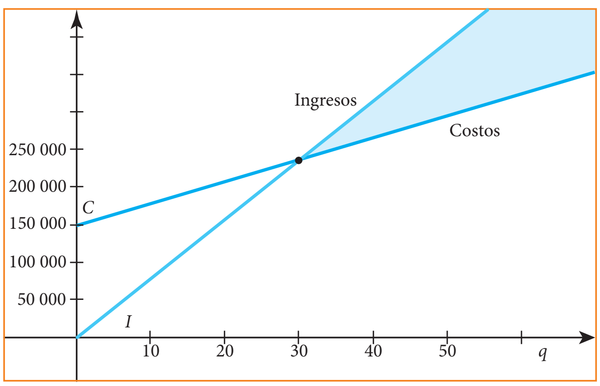
es una función lineal, ya que tiene la forma $y = b + mx$; en este caso utilizamos C y q como variables, en vez de x y y.

Lo mismo sucede con la función ingreso

$$I = 8\,000q,$$

sólo que aquí el valor de b es cero.

Sabemos que la gráfica de una función lineal es una línea recta; si utilizamos un graficador, obtenemos la gráfica de ambas funciones:



Nota La recta C es la de costo total: la recta I es la de ingresos.

Observa cómo el punto de equilibrio efectivamente ocurre en $q = 30$.

El área sombreada representa las ganancias para la compañía, pues es cuando se presenta la situación en que el ingreso es mayor que el costo total.

La **función de oferta** representa la cantidad de artículos que un fabricante está dispuesto a ofrecer a la venta, y depende del precio de venta.

Si el precio al cual se debe vender el artículo es bajo se ofrecen pocos artículos a la venta, conforme el precio aumenta se ofrecen más artículos a la venta; esta función es creciente.

Si Q es la cantidad y p es precio, denotamos la función oferta como $Q = f(p)$.

Ejemplo 7 Si un comerciante tiene que vender su producto a un precio bajo, debido a la regulación de los precios por la Procuraduría Federal del Consumidor y a la competencia que existe, entonces no le conviene ofrecer a la venta una cantidad grande de su producto, y solamente ofrece unos cuantos. En el momento en que pueda ofrecer su producto a un precio más alto (debido a que la competencia también ya aumentó el precio y está dentro del rango establecido por la Procuraduría Federal del Consumidor), entonces pondrá más artículos a la venta.

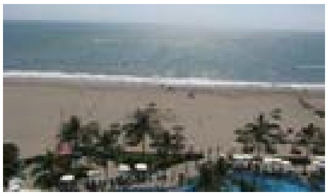
La **función de demanda** representa la cantidad de artículos que se venden de acuerdo con el precio de venta.

Si el precio del artículo es bajo, se venden muchos artículos; conforme el precio aumenta, las ventas disminuyen. Esta función es *decreciente*.

Si Q es la cantidad vendida y p es el precio, denotamos la función demanda como $Q = f(p)$.

Nota Aunque está comprobado que las funciones de oferta y demanda dependen del precio, en economía se acostumbra plantear estas funciones al revés; por ejemplo, en el caso de la función demanda se escribe como $P = f(q)$ y se dibuja la variable q en el eje horizontal y la variable P en el eje vertical. Desde un punto de vista matemático, esto no es correcto, ya que es la cantidad ofrecida o vendida la que depende del precio (al cual se debe vender o al que se vende). Sin embargo, consideraremos válidas cualquiera de las dos opciones al momento de plantear la función.

Ejemplo 8 Una empresa que organiza viajes turísticos ha observado que en la época de Semana Santa, si el precio de un paquete todo incluido a Cancún es de $8 000 por persona, se venden 100 paquetes, pero si disminuye el precio en 25%, el número de paquetes que se venden aumenta 140. Supón que la demanda es lineal.



a) Plantea la función demanda en términos del precio.

b) Si en una súper promoción de un día la empresa vende el paquete a mitad de precio, ¿cuántos paquetes se venderán en ese día?

Solución *a*) Dado que la demanda es lineal, la función es de la forma $y = mx + b$, utilizaremos la letra N para representar el número de paquetes vendidos y p para representar el precio del paquete; con estas variables la ecuación queda expresada como

$$N = mp + b.$$

Tenemos que obtener el valor de m y de b.

Observa que lo que tenemos como información son dos puntos:

Uno es $p = 8000$ con $N = 100$; para formar el otro punto utilizamos la información de que si el precio se disminuye 25%, es decir, ahora el precio es $6 000, el número de paquetes aumenta a 140, entonces el otro punto es $p = 6000$ con $N = 240$.

Podemos escribir la información en una tabla de datos que se expresa de la siguiente forma:

p	6 000	8 000
N	240	100

Observa que el cambio promedio está dado por

$$m = \frac{100 - 240}{8000 - 6000} = \frac{-140}{2000} = -0.07$$

Al sustituir el valor de m en la ecuación obtenemos

$$N = -\ 0.07p + b.$$

Falta obtener el valor de b, para lo que sustituimos cualquiera de los dos puntos de la tabla en la ecuación.

Al sustituir el primer punto, obtenemos:

$240 = -0.07(6\,000) + b$, esto es igual a
$240 = -420 + b$.

Despejamos b y obtenemos que $b = 240 + 420$, es decir, $b = 660$.

Al sustituir el valor de b en la ecuación, tenemos que:

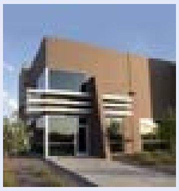
$$N = -\ 0.07p + 660.$$

b) Observa que nos dan un valor de p y debemos obtener N, en este caso $p = 4000$.

Si sustituimos ese valor en la ecuación anterior, obtenemos:

$N = -0.07(4000) + 660$, haciendo el cálculo obtenemos que $N = 380$, es decir, el número de paquetes vendidos el día de la súper promoción fue de 380.

Ejercicio 1



Una pequeña compañía que ofrece clases particulares de Matemáticas tiene como personal a una secretaria y un profesor. Mensualmente se tienen los siguientes gastos fijos: renta de oficina \$9 700, servicios \$3 000, sueldo de secretaria \$6 500, y \$1 500 en materiales (hojas, plumas, lápices, gises y borradores).

El profesor recibe \$250 por hora de clase impartida, si la compañía cobra \$500 por hora de clase:

a) Plantea la función de costos totales y la de ingresos.

b) ¿Cuál es el punto de equilibrio para la compañía?

c) ¿Cuántas horas de clase se deben dar durante el mes para que la compañía tenga ganancias? ____________

d) Dibuja la gráfica de costos totales e ingresos; marca el área que representa ganancias para la compañía.

Solución

a) ¿Cuál es la variable independiente? ____________

¿Con qué letra la vas a representar? ____________

¿Cuál es la fórmula del costo total? ____________________________________

¿Cuál es la fórmula del ingreso? ____________________________________

b) ¿Cuándo se le llama punto de equilibrio? ____

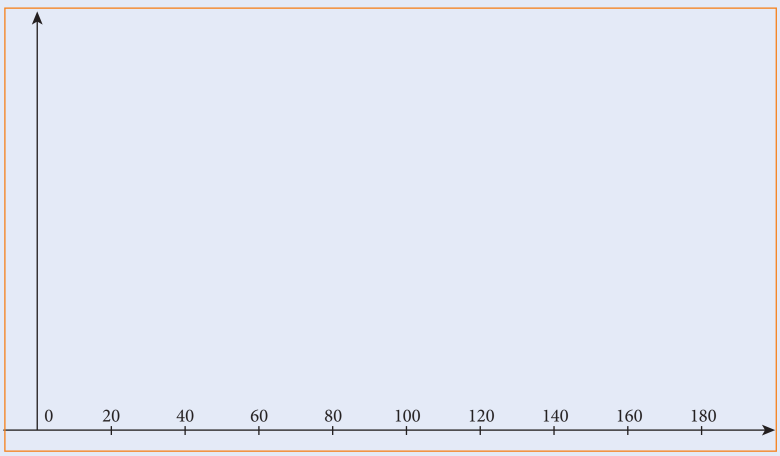
¿Cómo se obtiene? ____

Plantea la ecuación necesaria para obtener el punto de equilibrio y resuélvela.

Punto de equilibrio $q =$ ____________

c) Con el punto de equilibrio, que ya encontraste, responde el inciso *c*) ___________.

d) Con la información previa, traza su gráficas.



Ejercicio 2 Los valores de costos e ingresos de una compañía aparecen en las tablas siguientes:

q	100	120	140	160	180
C	1 200	1 320	1 440	1 560	1 680

q	100	120	140	160	180
I	1 000	1 280	1 560	1 840	2 120

a) ¿Cuál es el punto de equilibrio para la compañía?

b) Dibuja en la misma gráfica las dos funciones y marca el punto de equilibrio, el área que representa pérdidas y la que representa ganancias.

Solución

a) ¿Qué ecuaciones necesitas plantear para obtener el punto de equilibrio?

Las funciones dadas en las tablas, ¿son lineales? ____________________

¿Por qué? ____________________

____

¿Cuál es la forma general para la ecuación de costos? ____________________

Describe qué harías para obtener el cambio promedio en el costo (la pendiente). ____________________

____

Encuentra el valor del cambio promedio del costo (pendiente) $m =$ ____________.

Describe qué harías para obtener b. ____________________

Encuentra el valor de b.

La ecuación de costos totales quedaría como: ____________________.

¿Cuál es la forma general para la ecuación de ingresos? ____________________

Describe qué harías para obtener el cambio promedio en el ingreso (la pendiente). ____________________

____

Encuentra el valor del cambio promedio del ingreso (la pendiente) $m =$ ____________.

Describe, en forma escrita, qué harías para obtener b. ____________________

Encuentra el valor de b.

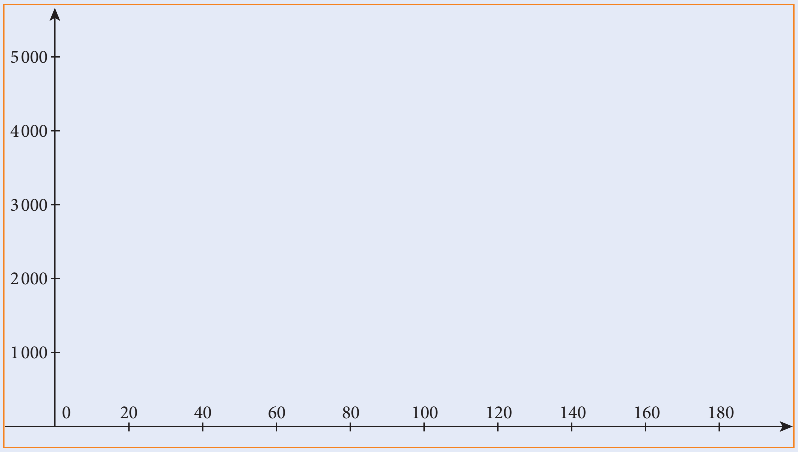
La ecuación de ingresos quedaría como: ____________________.

¿Cómo se obtiene el punto de equilibrio? ____________________

Plantea la ecuación para obtener el punto de equilibrio y resuélvela.

El punto de equilibrio es $q =$ ____________

b) Con la información previa, traza las líneas y áreas solicitadas.



Ejercicio 3

Un estudio de simulación realizado en un parque determinó que si el costo del boleto es de \$140, se reciben 2 800 visitantes por semana, y que si el precio disminuye en \$30, se reciben 3 500 visitantes por semana. Suponiendo que la demanda es lineal, obtén:

a) La fórmula que da el número de visitantes *V* en función del precio *p*.

b) ¿Cuántos visitantes se recibirán si el precio es de \$95?

Solución

a) La ecuación es de la forma:

Describe qué harías para obtener el cambio promedio de la demanda (la pendiente). ______________________

____

Encuentra el valor del cambio promedio de la demanda (la pendiente) $m =$ ______________________

Describe qué harías para obtener *b*. ____

Encuentra el valor de *b*.

La ecuación de demanda (número de visitantes en función del precio) quedaría como: ________________.

b) Utiliza la fórmula para obtener cuántos visitantes se recibirán si el precio es de \$95.

¿Qué variable conoces? ______________________

¿Cuál es su valor? ______________________

¿Cuál es la variable que se pide calcular? ________________

Utiliza la ecuación del inciso anterior y encuentra el valor de la variable que se indica.

En los siguientes ejercicios obtén la ecuación solicitada.

1. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-2, 3)$ y $(3, -5)$.
2. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, -5)$ y $(3, 4)$.
3. La ecuación de la función definida por la siguiente tabla de datos.

x	−3	−1	1	3
y	−6.2	−1.2	3.8	8.8

4. Determina cuál de las siguientes tablas corresponde a un modelo lineal.

a)

p	−1	3	7	11
q	3.4	4.6	5.8	7

b)

r	1.1	2.2	3.3	4
t	18	23	28	33

c)

x	2	4	6	8
y	−10	−12	−15	−17

d)

z	−1/2	1/2	3/2	5/2
w	120	100	80	60

Resuelve los siguientes problemas.

5. La siguiente tabla muestra el porcentaje de defunciones de niños de 1 a 4 años en el periodo de 1999 a 2001 de acuerdo con datos publicados por el INEGI.

Año	1999	2000	2001
%	1.7	1.8	1.9

a) Plantea una fórmula para el porcentaje de defunciones en función del tiempo.
b) Si el porcentaje de defunciones continúa con esta tendencia, ¿en qué año se tendrá 2.5% de defunciones?

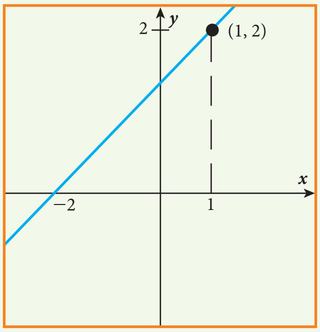
6. La siguiente tabla muestra los indicadores de mortalidad de mujeres en el periodo de 2000 a 2002 de acuerdo con los datos Estadísticos Demográficos de Aguascalientes (INEGI).

Año	2000	2001	2002
%	77.6	77.9	78.2

a) Plantea una fórmula para el indicador de mortalidad en función del tiempo.
b) Si el indicador de mortalidad continúa con esta tendencia, ¿qué porcentaje se tendrá en 2010?

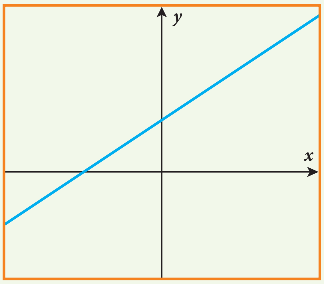
Gráficas y ecuaciones

7. Obtén la ecuación para la función dada en la siguiente gráfica.

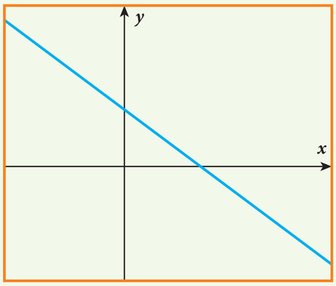


8. Dadas las siguientes gráficas, obtén el signo de la pendiente y la intersección con el eje *y*. Proporciona una posible ecuación que represente la gráfica.

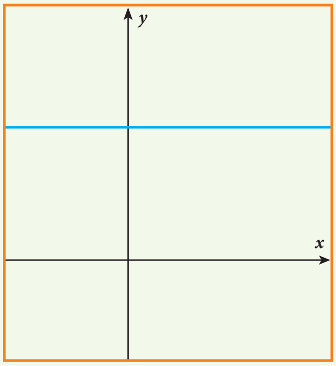
a)



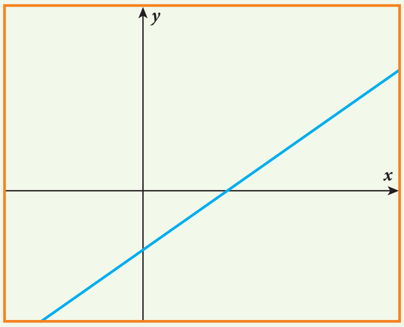
b)



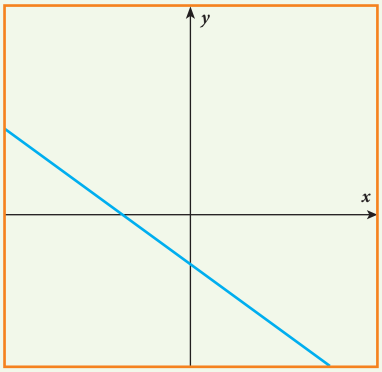
c)



d)



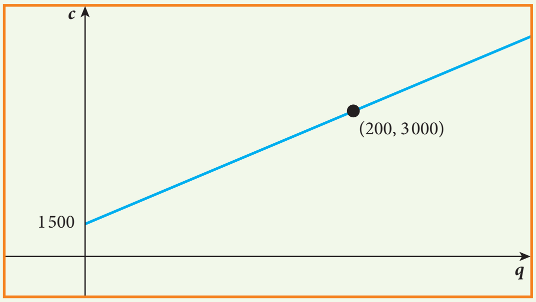
e)



9. Grafica las siguientes ecuaciones y marca los puntos de intersección con los ejes coordenados.

   a) $y = -5x - 3$
   b) $2x - 3y = 1$
   c) $-5 - 3y = -x$
   d) $y = 0.3 + 4.3x$
   e) $\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$

10. La siguiente gráfica representa la función de costos de una compañía.



   a) ¿Cuál es el costo fijo de la empresa?
   b) ¿Cuál es el costo variable?

Resuelve los siguientes ejercicios.

11. Una casa tiene un valor actual de \$800 000, si su valor aumenta en forma constante cada año en 5% del valor original:

   a) Obtén una fórmula para el valor de la casa en función del tiempo.
   b) Utiliza la fórmula que obtuviste para determinar dentro de cuántos años la casa tendrá un valor de \$1 650 782.

12. Una empresa tiene costos fijos de \$6 000 por semana y costos variables de \$220 por cada artículo fabricado. Si el precio al cual vende su artículo es \$580 cada uno. ¿Cuántos artículos se deben fabricar y vender para que la empresa tenga una utilidad de \$12 000 por semana?

13. El planetario ALFA tiene 150 visitantes diarios cuando el boleto de entrada tiene un costo de \$65. Si se rebajan \$7 en el costo, el número de visitantes aumentará a 230 por día. Supón que la demanda es lineal; responde a las siguientes preguntas:

   a) Plantea una fórmula para determinar el número de visitantes en función del precio.
   b) Utiliza la fórmula para determinar cuántos visitantes se tendrán si se ofrece una promoción de descuento de 20% del precio original.

14. Una empresa que vende calculadoras puede vender 1 000 piezas si el precio es de \$1 200. Si el precio aumenta a \$1 500, se estima que se venderán 120 calculadoras menos. Si la demanda es lineal,

a) Plantea una fórmula para determinar el número de calculadoras vendidas en función del precio.
b) Utiliza la fórmula para determinar cuál fue el precio si en total se vendieron 965 calculadoras.

15. Un turista recién llegado a la ciudad recibe dos ofertas de costo en el traslado del aeropuerto a su hotel: un taxista independiente le cobra \$10 el banderazo y \$2.50 por cada kilómetro recorrido. La compañía de taxis del aeropuerto le cobra una cuota única de \$200.

    a) ¿Cómo podría decidir el turista qué opción le conviene más?
    b) ¿A qué distancia, en kilómetros, debe estar su hotel para que el costo sea el mismo en ambas compañías?

16. Una joven desea iniciar un negocio propio de venta de joyería de oro. Cuenta con un capital inicial de \$10 000; al inicio desea vender solamente pulseras y anillos. Cada pulsera le cuesta \$292, y cada anillo, \$180.

    a) Plantea una ecuación para la cantidad de anillos y pulseras que puede comprar con los \$10 000.
    b) Utiliza la ecuación para determinar cuántas pulseras puede adquirir si ya compró 15 anillos.

17. Una empresa que fabrica focos tiene costos fijos de \$4 825 y costos de mano de obra y material de \$5 por foco. Si cada foco se vende en \$13.50, determina las ecuaciones de costo total, ingreso y utilidad en función del número de focos producidos.

18. Considera que una televisión Sony de 21 pulgadas tiene 56 meses de uso. Actualmente su valor comercial es de \$6 000, pero hace 14 meses era de \$8 300. Supón que el valor comercial de la televisión decrece linealmente con el tiempo, determina:

    a) La ecuación que exprese el valor de la televisión en función de los meses de uso.
    b) ¿Cuándo consideras que la televisión ya no tendrá valor comercial?

19. El valor de un automóvil nuevo es de \$152 000, si su valor se deprecia linealmente 13.5% del valor inicial por año, encuentra:

    a) La ecuación que exprese el valor del automóvil después de t años de uso.
    b) ¿Cuál es el valor del automóvil después de siete años?

20. Con \$195 000 de presupuesto, una escuela pretende comprar computadoras de escritorio y portátiles con un valor unitario de \$8 352 y \$15 796, respectivamente.

    a) Plantea una ecuación para la cantidad de computadoras de escritorio y portátiles que se deben comprar utilizando todo el presupuesto.
    b) Utiliza la ecuación para determinar cuántas computadoras portátiles se pueden comprar si ya se adquirieron 12 computadoras de escritorio.

21. El dueño de un camión repartidor de refrescos gasta \$450 en gasolina, \$300 en sueldo del chofer, \$250 en sueldo del ayudante del chofer y \$500 en mantenimiento del camión. Si cada caja de refrescos le cuesta \$48 y la vende en \$72, ¿cuántas cajas de refrescos debe vender por semana para que se cubran los costos?

22. En 1984 se compró un terreno con un valor de \$250 000. En 1992 fue valuado para su venta en \$325 000. Suponiendo que el valor del terreno crece linealmente con el tiempo, determina:

    a) La ecuación particular que relaciona el valor del terreno con el tiempo.
    b) ¿Cuál fue el valor estimado del terreno en 1987?
    c) ¿Cuál será el valor del terreno en 2003?

23. El valor de una lavadora automática nueva es de \$4 000. Si su valor se deprecia linealmente 6% de su valor inicial por año, ¿cuál será el valor después de doce años de uso?

24. El valor de una onza oro es de \$4 353.45. Su valor aumentará 7% del valor original cada año.

    a) Escribe el valor (V) de la onza oro en función del tiempo después de su adquisición.
    b) ¿Cuál será el valor de la moneda dentro de siete años?

25. Una caja de ahorro funciona de la siguiente manera: por cada peso depositado entrega \$1.43 después de haber pasado un año del depósito.

    a) Escribe una ecuación que represente la cantidad de dinero que se recibe al año en función de la cantidad de dinero que se deposita.
    b) ¿Cuánto dinero se debe depositar para recibir \$5 050 al término de un año?

26. La función de producción de un artículo depende linealmente de la cantidad invertida, por lo que si se invierten \$10 125 se producen 90 artículos, y si se invierten \$45 000 se producen 400 artículos.

a) Escribe una fórmula para la producción en función de la cantidad invertida.

b) ¿Si se invierten \$36 000 cuántos artículos se producen?

27. Grafica las siguientes funciones con ayuda de un graficador.

a) $y = 2x + 3$

b) $y = 2x - 5$

c) $y = 2x$

¿Cómo será la gráfica de $y = 2x + \frac{1}{55}$?

28. Grafica las siguientes funciones con ayuda de un graficador.

a) *i*) $y = 5x - 4$

ii) $y = 11x - 4$

iii) $y = 35x - 4$

¿Cómo será la gráfica de $y = 100x - 4$?

b) *i*) $y = 2x + 4$

ii) $y = \frac{1}{2}x + 4$

iii) $y = \frac{1}{5}x + 4$

¿Cómo será la gráfica de $y = 0.15x + 4$?

29. Grafica las siguientes funciones con ayuda de un graficador.

a) *i*) $y = -8x + 20$

ii) $y = -40x + 20$

iii) $y = -70x + 20$

¿Cómo será la gráfica de $y = -120x + 20$?

b) *i*) $y = -x - 3$

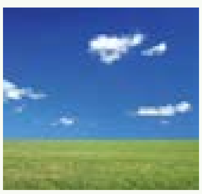
ii) $y = -0.5x - 3$

iii) $y = -0.3x - 3$

¿Cómo será la gráfica de $y = -0.05x - 3$?

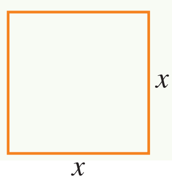
30. La empresa Productos Naturales tiene dos plantas: una en Monterrey y otra en Guadalajara. Las funciones de utilidad son $P_1 = 234x - 48\,500$ y $P_2 = 225x - 35\,000$, respectivamente, donde x representa las unidades producidas y vendidas. Utiliza una calculadora graficadora para obtener las unidades que deben producirse y venderse para que la utilidad en las dos plantas sea la misma.

1.3 Función potencia



El tipo de función que estudiaremos en esta sección se conoce como función potencia; en algunas ocasiones ya la hemos utilizado, tal vez sin saber que se trataba de esta función.

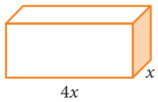
Por ejemplo, cuando calculamos el área de un terreno cuadrado cuyo lado mide x. Éste es un problema muy fácil de resolver, ya que el terreno es de la siguiente forma:



y sabemos que el área de un cuadrado es el producto de sus lados, entonces $A = x^2$.

La función que representa el área del terreno es llamada **función potencia**, ya que la variable aparece elevada a un número, en este caso el número 2.

Si queremos calcular el volumen de la siguiente caja,



sabemos que el volumen está dado por $V =$ (área de la base) $\cdot$ (altura), entonces, $V = (4x \cdot x) \cdot x = 4x^3$; es decir, $V = 4x^3$.

La función representada por el volumen también es una función potencia, ya que también aparece la variable elevada a un número.

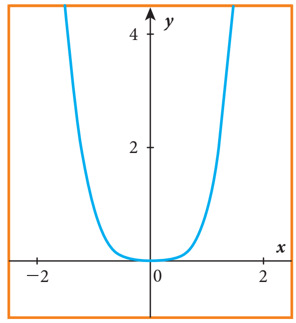
De acuerdo con los ejemplos anteriores, podemos decir que:

La función potencia es de la forma $y = kx^n$, donde el exponente n es cualquier número real y k representa una constante.

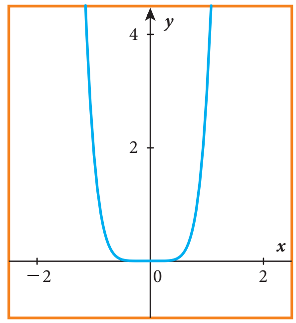
Podemos agrupar las funciones potencia por **familias**, en donde la característica que las distingue es el número al que está elevada la variable; la gráfica de las funciones que pertenecen a una misma familia son muy similares y ésta depende del exponente n.

Por ejemplo: por medio de un *software* graficador, dibujaremos la gráfica de algunas familias de funciones.

- Potencias pares positivas

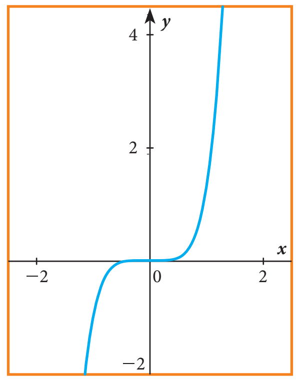


$y = x^4$

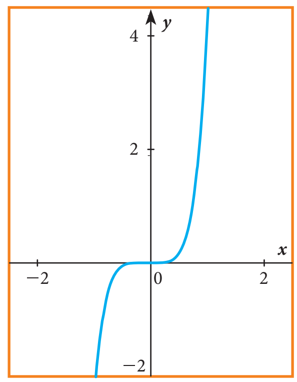


$y = 3x^6$

- Potencias impares positivas

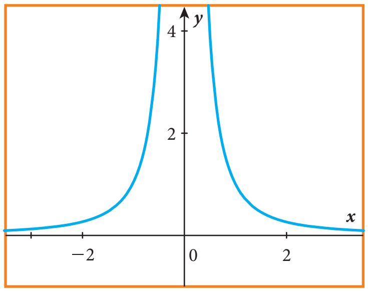


$y = x^5$

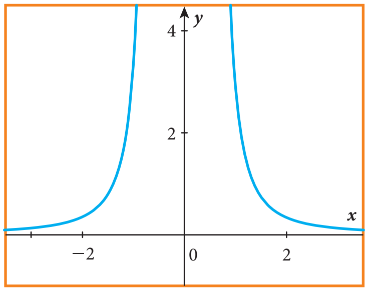


$y = 4x^7$

- Potencias pares negativas

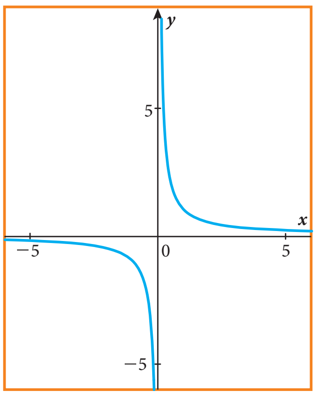


$y = x^{-2}$

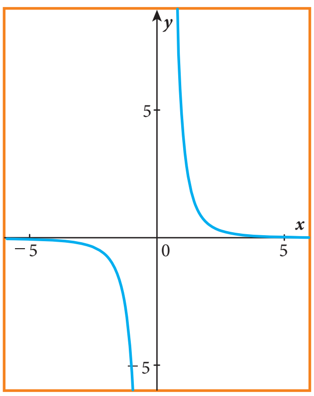


$y = 3x^{-4}$

- Potencias impares negativas

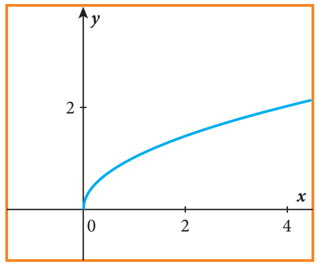


$y = x^{-1}$

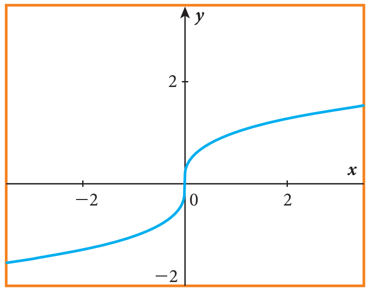


$y = 4x^{-3}$

- Potencias fraccionarias menores que 1

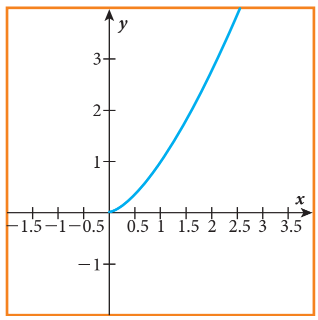


Con denominador par $y = x^{1/2}$

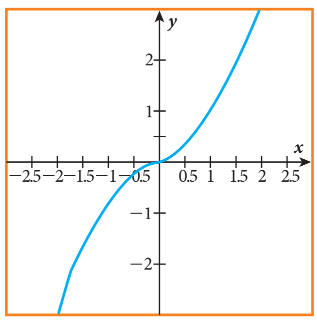


Con denominador impar $y = x^{1/3}$

- Potencias fraccionarias mayores que 1



Con denominador par $y = x^{3/2}$



Con denominador impar $y = x^{5/3}$

Aplicaciones de la función potencia

Ejemplo 1 Si la gasolina Premium cuesta \$6.70 el litro y compras n litros de gasolina, ¿cómo expresarías la función que representa la cantidad de dinero que debes pagar?

Solución Si llamamos p a la cantidad de dinero a pagar, entonces tenemos que, $p = f(n) = 6.70n$, o simplemente $p = 6.70n$

Observa que p es una función potencia donde el exponente de la variable es 1 y la constante es $k = 6.70$.

Ejemplo 2 El índice de masa corporal de una persona (IMC) se obtiene dividiendo el peso entre el cuadrado de la estatura; si el jugador de básquetbol Michael Jordan tiene un peso de 97.9 kg, plantea la fórmula para el IMC respecto a la estatura.

Solución Si x representa la estatura del jugador, la fórmula para el índice de masa corporal de Michael Jordan está dada por $\text{IMC} = \dfrac{97.9}{x^2}$, que podemos expresar como $\text{IMC} = 97.9x^2$.

Observa que IMC es una función potencia en donde el exponente de la variable es -2 y la constante es $k = 97.9$.

Ejercicio 1 Se desea construir una lata de forma cilíndrica que tenga una altura de 20 cm. La función que representa el volumen de la lata en términos del radio, ¿es una función potencia?

Solución *a*) ¿Cuál es la fórmula del volumen de un cilindro? $V =$ ____________________

Se desea construir un cono que contenga un volumen de 5 centímetros cúbicos. La función que representa la altura del cono en términos de su radio, ¿es una función potencia?

Al sustituir el valor de la altura obtenemos la función $V =$ ____________________

¿Se trata de una función potencia? __________ ¿Cuál es el exponente n?

¿Cuál es la constante k? __________

b) ¿Cuál es la fórmula para obtener el volumen de un cono? ____________________

Nos preguntan por la altura, entonces si h es la altura, $h =$ ____________________

¿Se trata de una función potencia? __________ ¿Cuál es el exponente? $n =$ __________

¿Cuál es la constante? $k =$ __________

Ejercicio 2 Plantea la función para el IMC de Michael Jordan si se sabe que su estatura es 1.98 m.

Solución ¿Cuál es la fórmula para obtener el IMC en función del peso? ____________________

¿Se trata de una función potencia? __________ ¿Cuál es el exponente n? __________

¿Cuál es la constante k? __________

Ejercicio 3 Determina si las siguientes funciones son función potencia. Para aquellas que sí lo sean, completa la información que se indica en la siguiente tabla.

	Escribe la función en la forma $y = kx^n$ (si es posible)	¿Es una función potencia?	¿Cuál es el valor de n?	¿Cuál es el valor de k?
$y=3\sqrt{x^3}$				
$y=\dfrac{-7}{2\sqrt[5]{x}}$				
$y=5(7^x)$				
$y=\dfrac{8x^{1/2}}{3}$				
$y=8^{-x}$				
$y=7x^2-5$				

En los siguientes ejercicios determina si las funciones son o no una función potencia. Si son funciones potencia, exprésalas en la forma $y = kx^n$ y escribe los valores del coeficiente k y de la potencia n.

1. $y=\dfrac{1.2}{x^3}$
2. $y=7\sqrt{x}$
3. $y = 5^x$
4. $y=(2x)^3$
5. $y=\dfrac{7}{3\sqrt{x^5}}$
6. $y = 3x^6 - 1$

Escribe los enunciados siguientes como una función potencia.

7. y es 7% del cubo de x.
8. y es el doble de la raíz cuadrada de x.
9. y es igual a la división de 8 entre el doble de x a la quinta.
10. y es la tercera parte del cuadrado de la raíz cúbica de x.
11. El precio P de un artículo es igual a la división de una constante positiva entre la demanda d.
12. El ingreso I es el producto de una constante positiva y el precio p de venta, ¿qué representa la constante?
13. La nómina mensual N de un grupo de trabajadores está dada por $N = 1500T$ donde T es el número de trabajadores. ¿Cuál será la nómina mensual si se tienen 35 trabajadores?
14. Se ofrece 30% de descuento en el departamento de zapatería de un centro comercial.

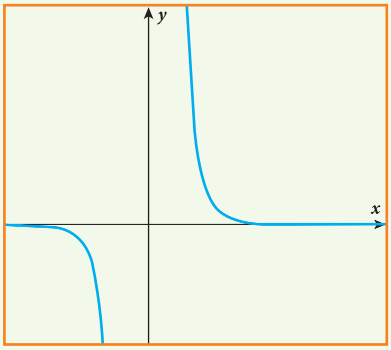
    a) Plantea una ecuación que exprese el costo C para el cliente, de un par de zapatos, en función del precio original p de dichos zapatos.
    b) ¿Cuánto pagaría el cliente por un par de zapatos si su precio original es de $825?
15. El peso B de un cerebro humano está dado por $B = kw$, donde w es el peso corporal y k una constante positiva. Si una persona que pesa 80 kg tiene un cerebro que pesa 2.13 kg, entonces

    a) encuentra el valor de k.
    b) ¿cuál es el peso del cerebro de una persona cuyo peso corporal es de 68 kg?
16. Un contratista sabe que el tiempo t (en semanas) necesario para terminar una casa está dado por $t=\dfrac{k}{n}$, donde n es el número de albañiles que trabaja en dicha construcción, y k una constante positiva. Si una casa se termina en 6 semanas cuando trabajan 15 albañiles,

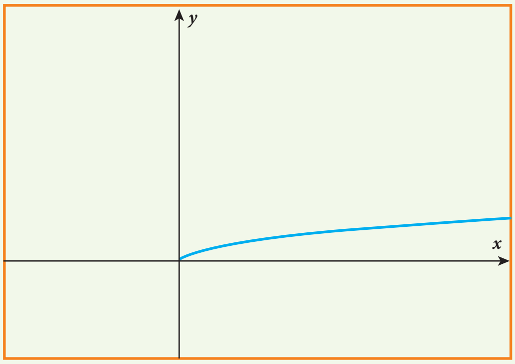
    a) encuentra el valor de k.
    b) Si trabajan 25 albañiles en la construcción, ¿en cuánto tiempo terminarán la casa?
    c) Si el contratista necesita terminar la casa en 7.5 semanas, ¿cuántos albañiles debe poner a trabajar?
17. Relaciona las gráficas con las siguientes ecuaciones.

    a) $y = 5x^3$ ___________
    b) $y = 7x^4$ ___________
    c) $y = 2x^{-5}$ ___________
    d) $y=0.75\sqrt{x}$ ___________

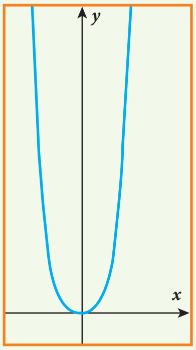
I.



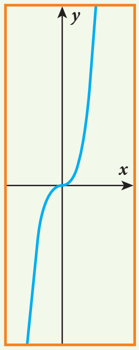
II.



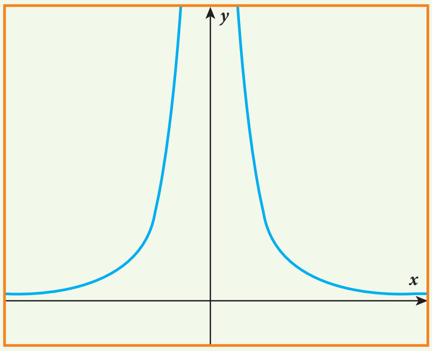
III.



IV.



II.



18. Relaciona las gráficas con las siguientes ecuaciones.

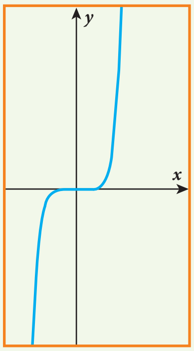
a) $y = 2\sqrt[3]{x}$

b) $y = 4x^{3/2}$

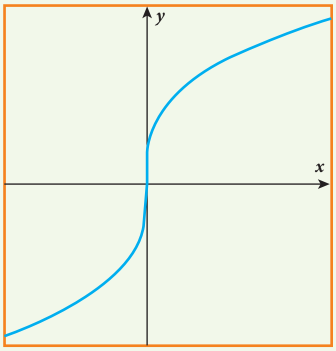
c) $y = \dfrac{1.5}{x^2}$

b) $y = x^7$

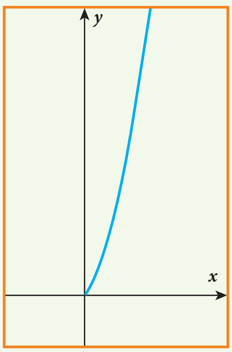
I.



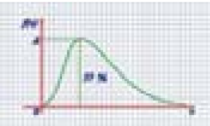
III.



IV.



1.4 Función polinomial



Las funciones polinomiales surgen al sumar o restar funciones potencias con exponente entero positivo.

Estas funciones se definen como:

> **Una función polinomial es de la forma**
>
> $$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0$$
>
> **donde:**
>
> **n es un número entero positivo, a_i representa los coeficientes de las x en cada término, y a_n se conoce como coeficiente principal (el coeficiente de la potencia más alta).**

Reglas de polinomios

Éstas son algunas reglas de polinomios que nos serán de utilidad para dibujar su gráfica.

1. El grado de un polinomio lo determina el exponente mayor de su variable.
2. El coeficiente principal es el número que acompaña al término que tiene la potencia más alta.
3. El número de raíces que tiene un polinomio coincide con su grado.

La gráfica de un polinomio depende de su grado. Para descubrir cómo es la gráfica de un polinomio de cualquier grado y llegar a una generalización, utilizaremos los resultados obtenidos en la investigación de función polinomial que se encuentra en la sección de anexos. Completa la siguiente tabla.

Grado	Si el coeficiente principal es positivo	Número de vueltas	Si el coeficiente principal es negativo
2		1	
3		2	
4			
5			
6			

Nota Llamaremos *vuelta* al lugar donde la función cambia de comportamiento, de creciente a decreciente, o viceversa. También podemos llamarle *cresta*.

Nota

1. Observa la relación que existe entre el grado y el número de vueltas. El número de vueltas es siempre una unidad menos que el número de grado.
2. También podemos identificar que si el grado del polinomio (con coeficiente positivo) es par, la gráfica empieza de arriba abajo, y que si es impar, la gráfica empieza de abajo hacia arriba (observando de izquierda a derecha).
3. Las gráficas con coeficiente principal negativo se invierten; si es par, empieza de abajo hacia arriba y si es impar, empieza de arriba abajo.
4. En general, todos los polinomios que son del mismo grado tienen la misma forma, sólo que a veces los vemos diferentes porque las constantes que los afectan, también afectan la gráfica (la encogen, alargan, desplazan, etcétera).

Las observaciones anteriores nos permitirán dibujar un polinomio de cualquier grado.

Ecuación de un polinomio

Utilizaremos la forma reducida para plantear la ecuación del polinomio, para ello necesitamos conocer todas sus raíces.

Si r_1, r_2, r_3, r_4, etc., son las raíces del polinomio, su ecuación está dada por:

$$y = k(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)\ldots$$

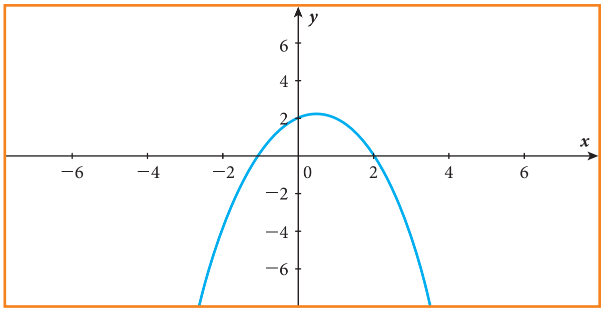
donde k representa el coeficiente principal.

Observa que para cada raíz existe un factor de la forma $(x - r)$.

Recuerda que:

a) Los ceros o raíces del polinomio son los puntos donde $y = 0$. En estos puntos, la gráfica del polinomio cruza con el eje x; a estos puntos los llamaremos **raíces simples** o **sencillas** y se representarán en la ecuación como $(x - r_1)$.

Ejemplo 1

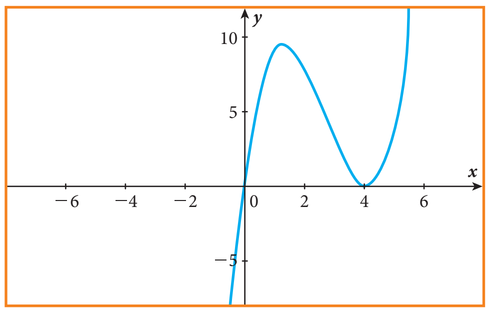


La gráfica corresponde a un polinomio de grado ______________. Tiene coeficiente principal de signo __________. Sus raíces son r_1 = __________ y r_2 = __________.

Utiliza la ecuación reducida de un polinomio, $y = k(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)\ldots$ y obtén la ecuación: ______________________________

b) Las **raíces dobles** se representan en la ecuación como $(x - r_1)^2$; en estos puntos la gráfica del polinomio rebota con el eje x.

Ejemplo 2



Nota

Observa cómo en $x = 4$ la gráfica *rebota*, es decir, llega al número 4 y se regresa; la gráfica no cruza el eje x.

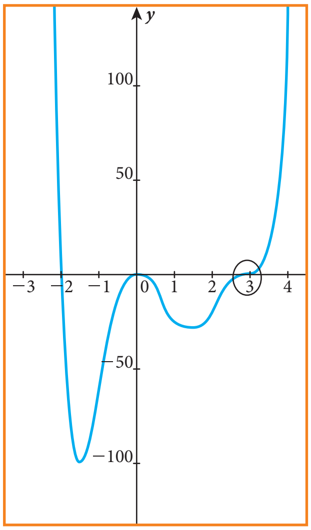
La gráfica corresponde a un polinomio de grado ______________________________. Con coeficiente principal de signo __________. Sus raíces son r_1 = __________, r_2 = __________ y r_3 = __________.

Utiliza la ecuación reducida de un polinomio $y = k(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)\ldots$ y obtén la ecuación: ______________________________.

c) Las **raíces triples** se representan en la ecuación como $(x - r_1)^3$. Podemos identificar la raíz triple (encerrada en el círculo), ya que la gráfica se comporta en ese valor como una función cúbica básica, positiva o negativa. Se diferencia de una raíz sencilla, que también cruza al eje x, ya que en ese punto la gráfica del polinomio llega al eje x antes del punto, se pega al eje x en ese número y sale después del punto; es decir no entra y sale por el mismo punto al cruzar el eje de las x.

Nota En una raíz triple la gráfica da dos vueltas.

Ejemplo 3



El polinomio tiene una raíz simple en: __________,

una raíz doble en: ____________________________ y

una raíz triple en: ____________________________.

Utiliza la ecuación reducida de un polinomio, $y = k(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)\ldots$, y obtén la ecuación: ________________________________.

Nota Las raíces de un polinomio pueden ser *reales* o *complejas*; en este curso trabajaremos solamente con raíces reales.

¡A trabajar!

Ejercicio 1 Dibuja una posible gráfica para los polinomios y contesta en las líneas lo que se te indica.

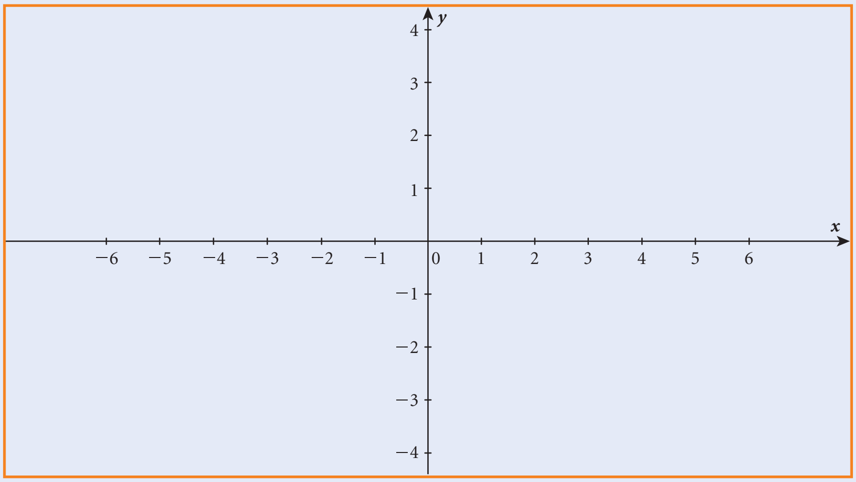
a) $y = 3x^2 - 5x - 2x^5 + 6$

b) $y = -2x^2 - 5x^3 + 12x^4 - 9x$

Solución *a*) El polinomio es de grado ____________ ¿Cuántas vueltas va a tener la gráfica? _____________

El coeficiente principal es ____________ y la gráfica empieza ____

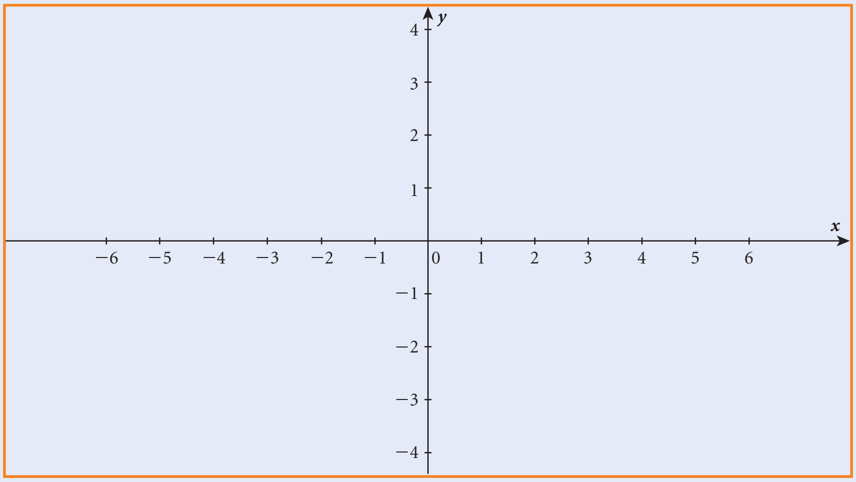
Dibuja la gráfica.



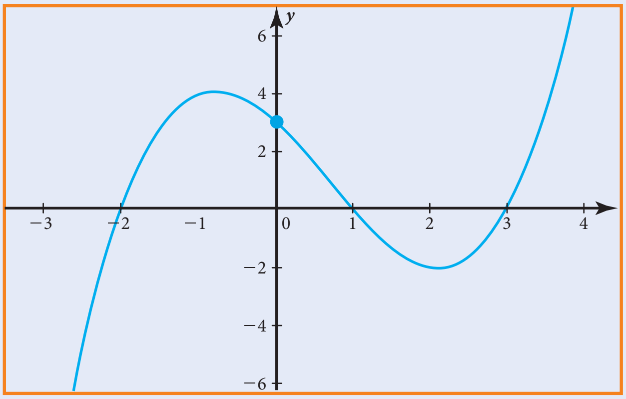
b) El polinomio es de grado ______________________. ¿Cuántas vueltas va a tener la gráfica? ________________

El coeficiente principal es ____________ y la gráfica empieza ____

Dibuja la gráfica.



Ejercicio 2 Plantea la ecuación del polinomio dado en la gráfica y proporciona el valor del coeficiente principal.



Solución ¿Cuántas vueltas tiene el polinomio? ____________________. Entonces, el grado del polinomio es: ____________________________.

Completa la siguiente tabla para conocer la información que te permitirá plantear la ecuación:

Escribe la raíz	Identifica de qué tipo es (sencilla, doble o triple)	¿Cómo queda expresado el factor para esa raíz?

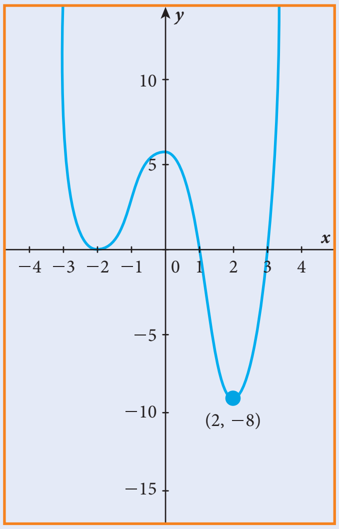
La ecuación queda expresada como ____.

Nota Para obtener k (el coeficiente principal) utilizamos cualquier punto de la gráfica que no sea una raíz; en este caso el punto conocido es (0, 3).

Obtén k.

La ecuación, ya con el coeficiente principal, es: ____.

Ejercicio 3 Plantea la ecuación del polinomio dado en la gráfica y proporciona el valor del coeficiente principal.



Solución ¿Cuántas vueltas tiene el polinomio? ________________. Entonces, el grado del polinomio es: ________________________.

Completa la siguiente tabla para conocer la información que te permitirá plantear la ecuación:

Escribe la raíz	Identifica de qué tipo es (sencilla, doble o triple)	¿Cómo queda expresado el factor para esa raíz?

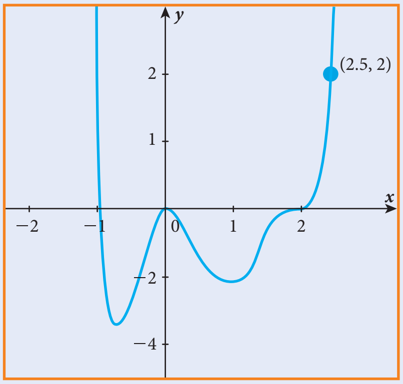
La ecuación queda expresada como ____.

¿Cuál es el punto con el que vas a obtener el valor del coeficiente principal, *k*? ____________________

Obtén *k*.

La ecuación, ya con el coeficiente principal, es: ______________________________________.

Ejercicio 4 Plantea la ecuación del polinomio dado en la gráfica y proporciona el valor del coeficiente principal.



¿Cuántas vueltas tiene el polinomio? ________________. Entonces, el grado del polinomio es: ____________________.

Completa la siguiente tabla para conocer la información que te permitirá plantear la ecuación.

Escribe la raíz	Identifica de qué tipo es (sencilla, doble o triple)	¿Cómo queda expresado el factor para esa raíz?

La ecuación queda expresada como ____.

¿Cuál es el punto con el que vas a obtener el valor del coeficiente principal, *k*? ________________________________

Obtén *k*.

La ecuación, ya con el coeficiente principal, es: ____.

Ejercicio 5 Dibuja la gráfica para los polinomios dados.

a) $y = 5(x + 3)(x - 3)(x + 4)$

b) $y = 2(16 - x^2)(x - 2)^2\, x$

c) $y = -3(x + 5)(x^2 - 1)^2(4 - x^2)^2(x - 3)^3$

Solución *a*) ¿Cuántos factores de la forma $(x - r)$ tiene la ecuación? ________________.

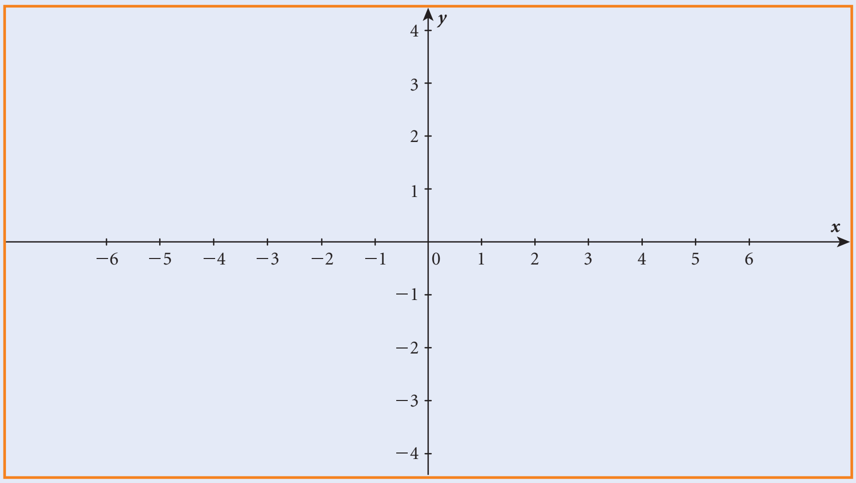
Entonces es un polinomio de grado ________________ con coeficiente principal ________________.

¿Cómo empiezas a dibujar la gráfica; de arriba abajo o de abajo hacia arriba? ____________________________

Completa la siguiente tabla para conocer la información que te permitirá dibujar la gráfica.

Escribe la raíz	Identifica de qué tipo es (sencilla, doble o triple)	¿Cuál es el efecto en la gráfica? (cruza al eje x, rebota o se comporta como la función cúbica básica, es decir, no entra y sale por el mismo punto)

Dibuja la gráfica.



b) Para resolver este inciso, tenemos lo siguiente.

Nota

Observa que en esta función no todos los factores están expresados en la forma $(x - r)$, por lo que no podemos decir que el 2 que aparece al inicio es el coeficiente principal; primero deberemos cambiar la función de tal manera que todos los factores estén expresados como indica la ecuación reducida $y = k(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\ldots$, y después realizar todo el proceso anterior.

Para cambiarlo utilizaremos reglas de factorización de álgebra en el factor $(16 - x^2)$; al hacerlo nos queda como $y = 2(4 - x)(4 + x)(x - 2)^2 x$, que es equivalente a $y = 2(-x + 4)(x + 4)(x - 2)^2 x$.

Observa que el primer factor todavía no tiene la forma $(x - r)$, ya que la x tiene signo negativo. Entonces, lo que hacemos es sacar el signo como factor común, y nos queda como $y = 2[-(x - 4)](x + 4)(x - 2)^2 x$.

Al multiplicar el 2 por el signo negativo, la función queda expresada como $y = -2(x - 4)(x + 4)(x - 2)^2 x$.

Ahora sí, todos los factores tiene la forma $(x - r)$: ya podemos empezar a resolver la ecuación.

¿Cuántos factores de la forma $(x - r)$ tiene la ecuación? _____________

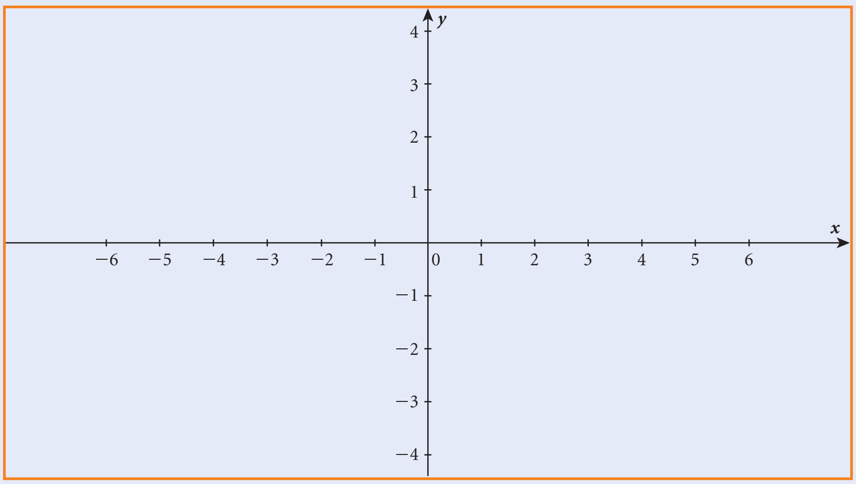
Entonces es un polinomio de grado _____________, con coeficiente principal _______________________________.

La gráfica la empiezas a dibujar, ¿de arriba abajo o de abajo hacia arriba? ____________________________________

Completa la siguiente tabla para conocer la información que te permitirá dibujar la gráfica.

Escribe la raíz	Identifica de qué tipo es (sencilla, doble o triple)	¿Cuál es el efecto en la gráfica? (cruza al eje x, rebota o se comporta como la función cúbica básica, es decir, no entra y sale por el mismo punto)

Dibuja la gráfica.



c) Resolvamos este inciso.

¿Todos los factores tienen la forma $(x - r)$? _____________

¿Qué debes hacer antes de empezar a resolver la ecuación? ____

¡Resuélvelo! (Cambia la ecuación como en el ejemplo anterior.)

¿Cuántos factores de la forma ($x - r$) tiene la ecuación? ____________

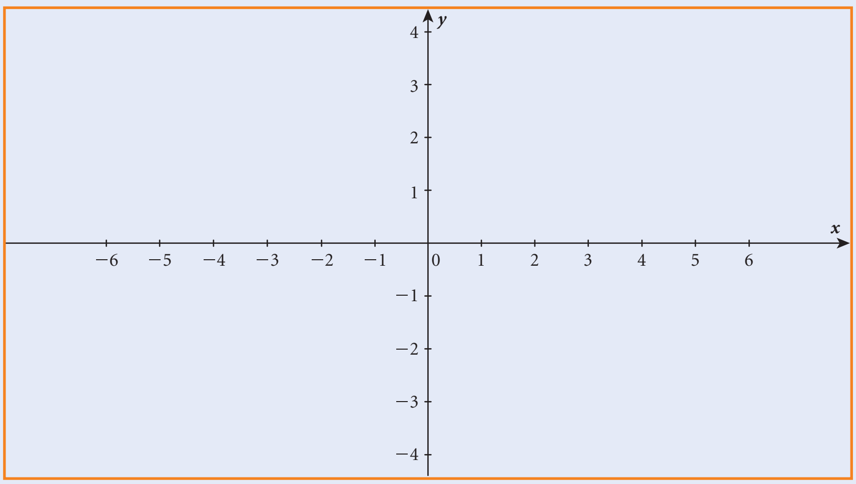
Entonces es un polinomio de grado ____________ con coeficiente principal ________________________________.

La gráfica la empiezas a dibujar, ¿de arriba abajo o de abajo hacia arriba? ___________________________________

Completa la siguiente tabla para conocer la información que te permitirá dibujar la gráfica.

Escribe la raíz	Identifica de qué tipo es (sencilla, doble o triple)	¿Cuál es el efecto en la gráfica?: cruza el eje x, rebota o se comporta como la función cúbica básica, es decir, no entra y sale por el mismo punto

Dibuja la gráfica.



Función cuadrática

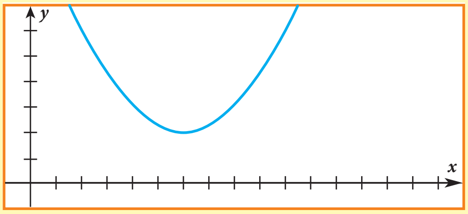
La **función cuadrática** es la función polinomial que más aplicación tiene en el mundo real; es asociada a movimientos de partículas cuya trayectoria describen una parábola o a eventos de la vida real en cualquier ámbito que tienen comportamiento similar.

En general, una función cuadrática es de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Su gráfica es una parábola, que abre hacia arriba o hacia abajo, dependiendo del valor de la constante a.

Si $a > 0$, se dice que la parábola es positiva y abre hacia arriba.

Dominio: reales.

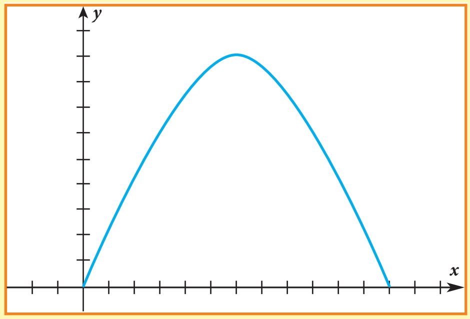
Rango: desde el valor y del vértice hasta $+\infty$.



Si $a < 0$, se dice que la parábola es negativa y abre hacia abajo.

Dominio: reales.

Rango: desde $-\infty$ hasta el valor y del vértice.



Observa que en una función cuadrática podemos obtener el valor máximo o mínimo de la función a partir de su vértice, para toda parábola se tiene que el vértice se encuentra en el punto $\left(\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

Utilizando esta información veamos algunas aplicaciones de la función cuadrática.

Ejercicio 1 Determina las medidas del rectángulo de área máxima, con perímetro de 20 cm.

¿Cuál es el área máxima?

Solución Plantea la función para el área:

¿Qué tipo de función es? ______________________

¿Cómo se obtiene el máximo para la función? ____

¡Resuélvelo!

Ejercicio 2 La función de utilidad para una compañía fabricante de bicicletas está dada por $U(p) = -p^2 + 20p + 12$, donde p es el precio de una bicicleta y tanto la utilidad como el precio son medidos en cientos de pesos.

a) Obtén el precio que lleve las utilidades al máximo.

b) ¿Cuál es la máxima utilidad de la compañía?

Solución ¿Qué tipo de función es la función utilidad? ______________________________

¿Cómo se obtiene el máximo para la función? ____

¡Resuélvelo!

Ejercicio 3 Una persona tiene un edificio de 100 departamentos de lujo que renta en $2 000 dólares por mes. Actualmente sólo tiene ocupados 60 departamentos. La experiencia le ha demostrado que por cada disminución de $200 dólares al mes en la renta, el número de departamentos rentados aumenta en 10.

a) Plantea la función de ingresos y obtén el ingreso máximo.

b) ¿Con qué precio se tiene el ingreso máximo?

c) ¿Cuántos departamentos tendrá en renta?

Solución *a*) Plantea la función para el ingreso:

¿Qué tipo de función es? ______________________________________

b) ¿Cómo se obtiene el máximo para la función? ______________________________

¡Resuélvelo!

Nota

Otro ejemplo de un fenómeno que se puede describir por medio de una función cuadrática es el siguiente: se lanza una pelota desde el suelo hacia arriba. Se quiere conocer la altura alcanzada por la pelota en cada segundo contado a partir del momento en que fue lanzada. La función que permite obtener la altura de la pelota en cada segundo es una función cuadrática que depende de la inclinación con la cual se lanzó y de la fuerza que se le imprimió al lanzamiento, de acuerdo con ciertas leyes de la Física.

Ejercicio 4

Se lanza una pelota hacia arriba; la altura de la pelota en cada segundo está dada por la función $h(t) = 10t - 5t^2$.

a) ¿Cuál es la máxima altura alcanzada? ______________________________

Solución

a) ¿Qué tipo de función es $h(t)$? ______________________________

¿Cómo se obtiene la máxima altura? ______________________________

¡Resuélvelo!

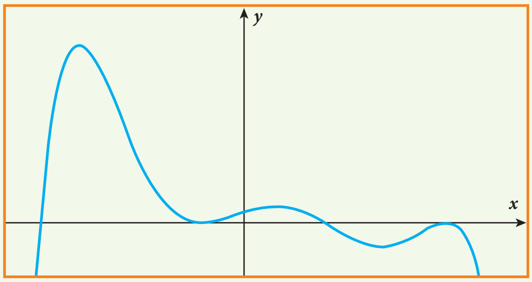
Conjunto de ejercicios de práctica 1.4

En los ejercicios 1 y 2, utiliza las gráficas de los siguientes polinomios y proporciona la información que se te pide.

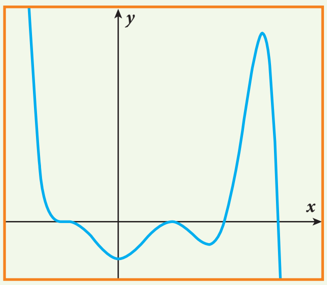
1.

a) Grado del polinomio.
b) Signo del coeficiente principal.
c) Número de raíces simples, número de raíces dobles y número de raíces triples.

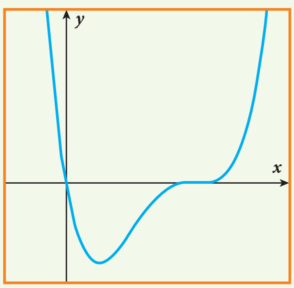
i)



ii)



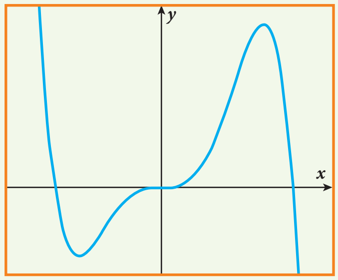
iii)



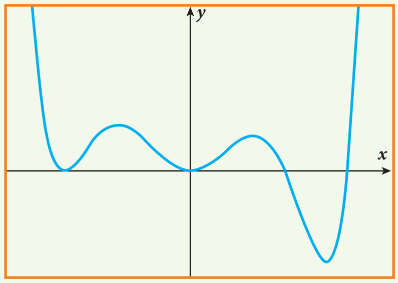
2.

a) Grado del polinomio.
b) Signo del coeficiente principal.
c) Número de raíces simples, número de raíces dobles y número de raíces triples.

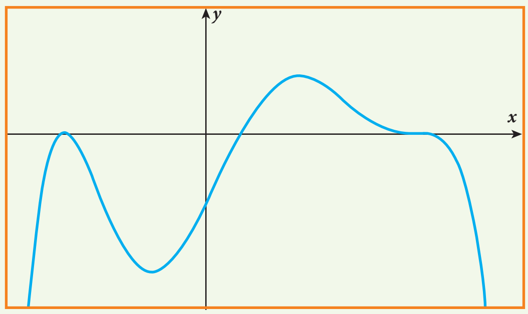
i)



ii)



iii)



En los ejercicios 3 a 6, determina el grado y el coeficiente principal del polinomio y dibuja una posible gráfica.

3. $y = 10x^3 + 3x - 8x^5 + 4x^2 + 3$
4. $y = 4x^3 - 26x^2 - 5x^4 + 20x - 3$
5. $y = 2x^4 - 7x^3 + x^2 + 7x$
6. $y = 65x^3 - 9x^7 - 325x^2 + 720$

En los ejercicios 7 a 18, dibuja la gráfica del polinomio dado y marca el corte o rebote con el eje *x*.

7. $y = 3(x - 2)(x + 3)^3$

8. $y = \frac{1}{2}(x+1)^2(x-5)^2$

9. $y = -2(x + 3)(x - 2)(x + 4)$

10. $y = -\frac{1}{3}(x-7)^2(x^2)(x+3)$

11. $y = -2(x + 4)(2 - x)(x^2 - 4)^2$

12. $y = -5(x^2 - 9)^2(x + 2)(3 - x)$

13. $y = 8(3 - x)^3$

14. $y = 7(x^2 - 1)(2 - x)$

15. $y = (1 - x^2)^2(x^2 - 9)$

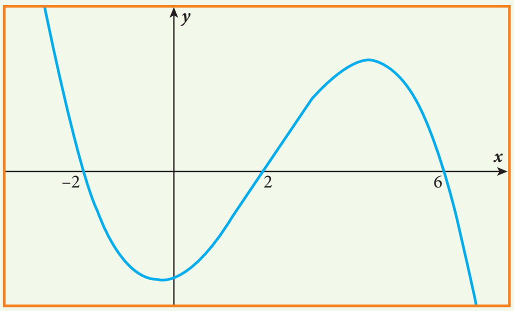
16. $y = (4 - x^2)^2(x - 1)(x + 2)$

17. $y = (3x - 6)(x + 2)(x^3)$

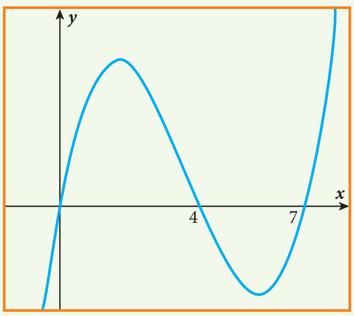
18. $y = x^2(x - 7)(5x + 10)$

En los ejercicios 19 a 22, obtén una posible ecuación para el polinomio que se da en la gráfica. (Las gráficas no están a escala.)

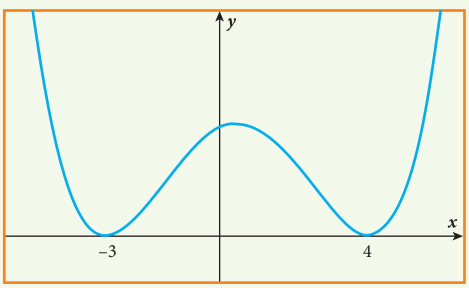
19.



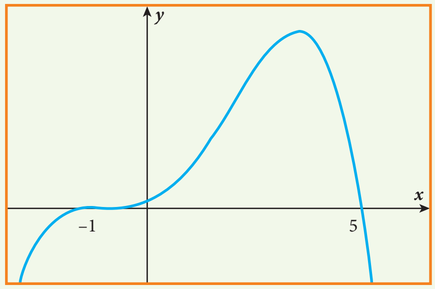
20.



21.

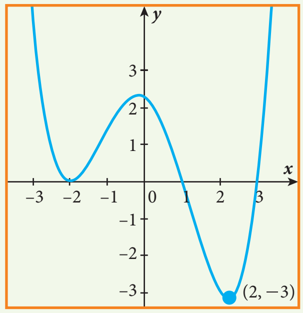


22.

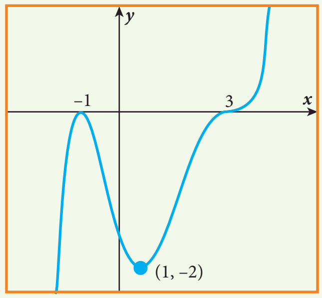


En los ejercicios 23 a 28, obtén la ecuación para el polinomio que se da en la gráfica.

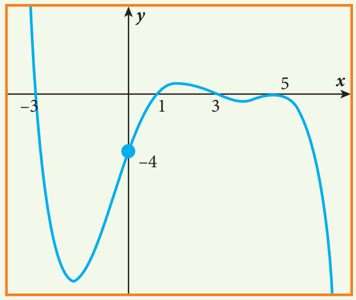
23.



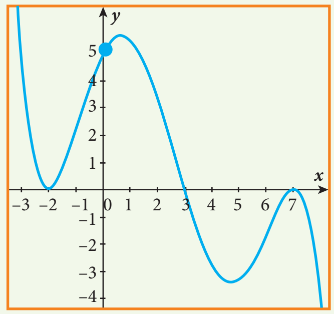
24.



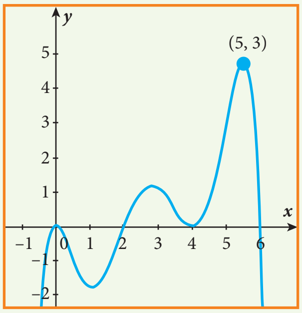
25.



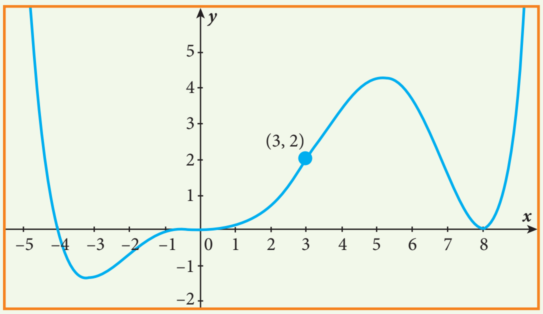
26.



27.



28.



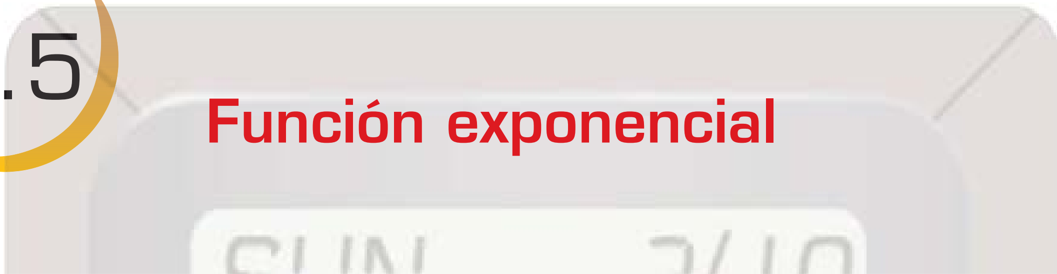
Resuelve los siguientes problemas.

29. Una compañía vende CD regrabables a un precio de \$15 cada uno. Si se venden x cientos de CD, la función de costos totales (en pesos) está dada por $c(x) = 1.5x^2 - 10C$. ¿Cuántos CD se deben vender para que la compañía tenga una máxima utilidad y cuál sería ésta?

30. En una prueba para determinar el metabolismo del azúcar en la sangre, llevada a cabo en cierto intervalo, la cantidad de azúcar en la sangre es una función del tiempo t (medido en horas) dada por $A(t) = 12 + 9t - 3t^2$. Determina la hora en que se tiene la cantidad máxima de azúcar en la sangre.

31. Una compañía ha determinado que el costo de producir x unidades de su producto a la semana, está dado por $C(x) = 5\,000 - 6x + 0.002x^2$. Obtén el número de unidades que se deben producir para que la compañía tenga un costo mínimo.

32. El costo de construir un edificio de n pisos está dado por $C(n) = 20n^2 - 160n - 82$. Determina el número de pisos que se deben construir para que el costo sea mínimo.



1.5 Función exponencial

Otra de las funciones con gran aplicación en la vida real es la función exponencial. La característica que define a estas funciones es que cambian (aumentan o disminuyen) muy rápidamente y no en forma constante como ocurre con las lineales.

El crecimiento de una población, la propagación de una epidemia, un producto de reciente introducción al mercado, la forma en que el organismo desecha un medicamento, la cantidad de sustancia radiactiva en el ambiente producto de un accidente, el saldo en una cuenta bancaria cuando la tasa de interés es compuesta o capitalizable son algunos ejemplos de aplicación de la función exponencial.

Cómo reconocer que una función es exponencial

Construcción La siguiente tabla de datos representa una población de conejos P como una función del tiempo t.

Analiza los datos para encontrar un patrón de comportamiento para esta función; para ello, reflexiona y contesta en las líneas lo que se pide.

t (meses)	0	1	2	3	4	5
P (número de conejos)	3	6	12	24	48	

¿La tabla dada corresponde a un modelo lineal?

____

¿Por qué? ______________________________

____

____

¿Cómo crece la población de conejos? __________

¿Qué población de conejos esperas que haya para el quinto mes? ______________________

¿Qué hiciste para obtener la cantidad anterior?

____

Nota Al número 2, por el cual multiplicamos un término para obtener el siguiente, se le llama **factor de cambio**. Observa que si multiplicamos por 2 cualquier término en la tabla obtenemos el siguiente término; entonces decimos que existe un factor de cambio constante.

Para generar la fórmula que representa a esta población de conejos, llena los siguientes espacios:

Cuando $t = 0$,	$P = 3$		
Cuando $t = 1$,	$P = 6$	que podemos escribir como	$6 = 3(2) = 3(2)^{(1)}$
Cuando $t = 2$,	$P = 12$	que podemos escribir como	$12 = 3(4) = 3(2)^{(2)}$
Cuando $t = 3$,	$P = 24$	que podemos escribir como	$24 = 3(\ \ ) = 3(\ \ )^{(\ )}$
Cuando $t = 4$,	$P = 48$	que podemos escribir como	$48 = 3(\ \ ) = 3(\ \ )^{(\ )}$

Si observamos el comportamiento de las expresiones anteriores, podemos concluir que la fórmula para obtener la población de conejos P en cualquier tiempo t está dada por:

$P =$ ______________________________

____

Esta función corresponde a un **modelo exponencial** y este tipo de funciones se caracteriza por tener un **factor de cambio constante**; es decir, podemos identificar un número que al multiplicarlo por un término obtenemos el siguiente término. Es por eso que estas funciones cambian muy rápidamente, pues no es lo mismo ir multiplicando el número que sumándolo.

En general, si se tiene una población inicial b que cambia de acuerdo con un factor constante a, la fórmula para encontrar la población P en cualquier tiempo t está dada por:

____

____

____

____

Nota En la tabla dada fue fácil determinar que el factor de cambio de la población era 2, ya que si se multiplicaba la población de cualquier mes por 2 se obtenía la del siguiente mes. En ocasiones no es fácil identificar cuál es ese factor.

¿Qué ocurre si dividimos la población de un mes entre la población del mes anterior?, es decir:

$$\frac{\text{Población primer mes}}{\text{Población inicial}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\frac{\text{Población segundo mes}}{\text{Población primer mes}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\frac{\text{Población tercer mes}}{\text{Población segundo mes}} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Observa que se obtiene como resultado el factor de cambio.

En conclusión, dada una tabla de valores cualesquiera, ¿cómo harías para determinar si corresponde a un modelo exponencial?

____

____

____

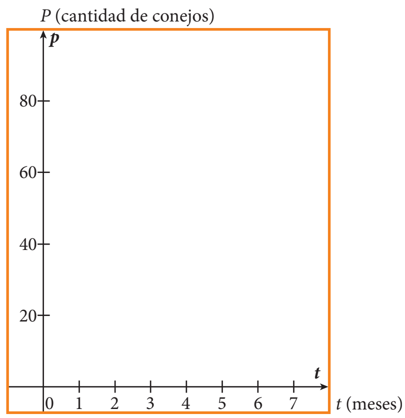
____

____

____

____

Dibuja la gráfica para la población de conejos; para ello, traza los puntos de la tabla.



Si unimos los puntos, ¿qué forma tiene la gráfica: curva o recta? ______________

Ecuación de una función exponencial

Una función es llamada **exponencial** si la variable aparece en el exponente. Su ecuación es de la forma:

$$\boxed{y = b \cdot a^x}$$

donde a (número positivo diferente de 1) representa el **factor de cambio** en la función cuando x aumenta de uno en uno.

b es la intersección con el eje y (el valor de y cuando $x = 0$), al que llamaremos **valor inicial**.

Cómo afecta a la ecuación de la función exponencial el hecho de que los valores de *x* (la variable independiente) no aumenten de uno en uno

Construcción Deduzcámoslo contestando las siguientes preguntas.

Supón que como información de una función exponencial tenemos que el valor inicial es 3 y que n años después el valor es 192 y queremos plantear la función.

Al indicarnos que es una función exponencial, sabemos que la ecuación tiene la forma $y = b \cdot a^x$.

¿Conoces el valor de b? ____________________

¿Cuál es? b = ____________________

Al sustituirlo en la ecuación obtenemos: ________

____.

¿Conoces el factor de cambio a?______________

Observa que en la información que se nos da, lo que tenemos es el punto $x = n$ y $y = 192$, podemos sustituirlo en la función para obtener el valor del factor de cambio a; al hacerlo obtenemos: $192 = 3 \cdot a^n$, observa que la a queda como única incógnita en la ecuación. Al despejar obtenemos: $\dfrac{192}{3} = a^n$ que es equivalente a $64 = a^n$; ¿cómo eliminamos el exponente, para que a quede despejada? ________

____

____

Al hacerlo obtenemos, $\sqrt[n]{64} = \sqrt[n]{a^n}$ y simplificando el lado derecho obtenemos $\sqrt[n]{64} = a$, que es equivalente a expresarlo con un exponente como a = ______________ .

Si sustituimos el valor de a en la ecuación, ésta queda expresada como $y = 3 \cdot (\quad)^x$.

Aplicando ley de los exponentes, la ecuación queda expresada como $y = 3 \cdot (\quad)^{(\ )}$.

En general, podemos concluir que:

En una función exponencial con valor inicial *b* y factor de cambio *a*, si la variable independiente *x* cambia en intervalos de *n* en *n*, donde $n \neq 1$, la función queda expresada de la forma $y = b \cdot a^{x/n}$.

Ejemplo 1 Plantea la función para la población que se representa en la siguiente tabla

x (años)	0	25	50	75
y (población en millones)	3	12	48	192

Solución Lo primero que debemos hacer es identificar qué tipo de función es, ya que la exponencial no es el único tipo de función que hemos estudiado.

Al obtener el cambio promedio (para ver si es lineal) obtenemos que:

$$\text{para los primeros dos puntos } m = \frac{12-3}{25-0} = 0.36$$

$$\text{para el segundo y tercer punto } m = \frac{48-12}{50-25} = 1.44.$$

Como no obtenemos el mismo valor para el cambio promedio, concluimos que la población no tiene un comportamiento lineal.

Veamos ahora si tiene un comportamiento exponencial, para ello debemos comprobar que la función tiene factor de cambio constante.

Recordemos que el factor de cambio a se obtiene dividiendo los valores de la función (la variable dependiente).

Al dividir los términos obtenemos:

$$\frac{\text{segundo}}{\text{primero}} = \frac{12}{3} = 4$$

$$\frac{\text{tercero}}{\text{segundo}} = \frac{48}{12} = 4$$

$$\frac{\text{cuarto}}{\text{tercero}} = \frac{192}{48} = 4$$

Observa que obtenemos siempre el mismo resultado, por lo que podemos afirmar que la población tiene un comportamiento exponencial.

La ecuación a utilizar es de la forma $y = b \cdot a^x$.

En este caso, el valor de $b = 3$, es decir, la población inicial (en el tiempo $x = 0$) y el factor de cambio resultó ser $a = 4$, pero como los valores de x cambian de 25 en 25, el exponente (la x) debe estar dividido entre 25; la ecuación queda expresada como:

$$y = 3 \cdot 4^{x/25}.$$

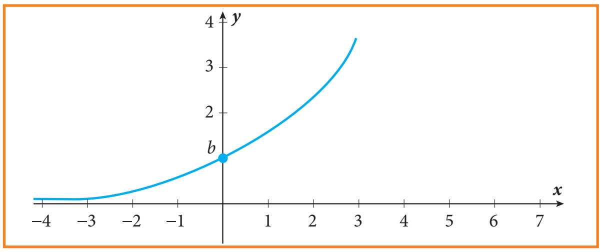
De esa forma queda indicado que el factor de cambio de la población es cada 25 años.

También puede escribirse como $y = 3 \cdot (4^{-1/25})^x$, al elevar el número 4 al exponente $\frac{1}{25}$, la ecuación queda expresada como $y = 3 \cdot (1.057018)^x$.

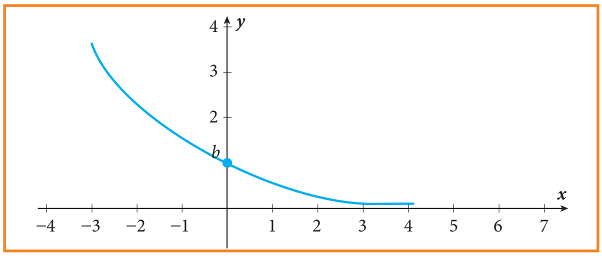
Gráfica de una función exponencial

La gráfica de una función exponencial es una curva que, al igual que la recta, puede ser creciente o decreciente; en estas funciones eso depende de cómo es el factor de cambio. Para la función $y = b \cdot a^x$ con $b > 0$, se cumple que:

- Si el factor de cambio es $a > 1$, se tiene un **crecimiento** exponencial y la gráfica será creciente. Por ejemplo:



- Si el factor de cambio es $0 < a < 1$ se tiene un **decaimiento** exponencial y la gráfica será decreciente. Por ejemplo:



Ejercicio 1 La epidemia del SARS inició en noviembre de 2002 en la provincia de Guangdong, China. La siguiente gráfica muestra el avance mensual de la epidemia, desde que se presentó el primer caso hasta abril de 2003. *Fuente: Selecciones del Reader´s Digest*, agosto de 2003.

El encabezado de este artículo dice así:

La epidemia del SARS ha puesto a temblar a todo el mundo. ¿Podrán los médicos acabar con ella?

Avance de la epidemia

16 de noviembre de 2002: Se registra el primer caso de SARS en la provincia de Guangdong, China.

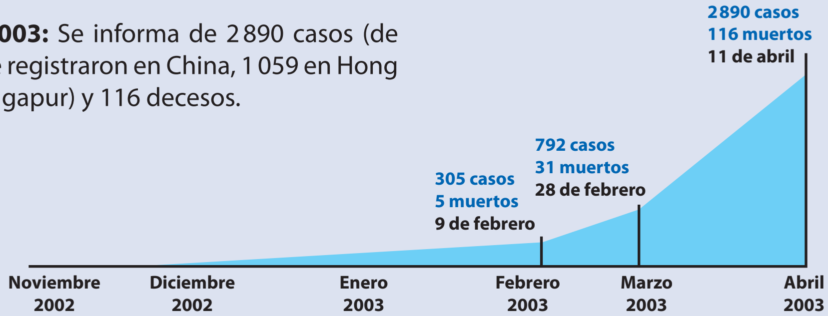
Principios de marzo de 2003: La enfermedad se propaga a Hong Kong, Canadá, Singapur y Vietnam.

26 de marzo de 2003: Hasta el 28 de febrero se habían contabilizado 792 casos y 31 muertes en Guangdong.

11 de abril de 2003: Se informa de 2 890 casos (de los cuales 1 309 se registraron en China, 1 059 en Hong Kong y 133 en Singapur) y 116 decesos.

22 de abril de 2003: En China han ocurrido 2 000 casos y 92 muertes, y se registran cinco casos nuevos de infección por hora. La epidemia avanza en Canadá, donde se registran 304 casos. Hay un total de 4 500 casos confirmados en todo el mundo.

1 de mayo de 2003: 5 220 casos y 329 fallecimientos registrados en 28 países.



a) ¿De acuerdo con la información, que tipo de función tiene la epidemia de SARS?

Solución *a*) ¿Qué indica el tipo de gráfica mostrada respecto a la epidemia? ______________________

____

b) ¿Por qué generó tanto pánico a nivel mundial? ______________________

____

Ejercicio 2 Como resultado de los censos de 2000, según datos del INEGI (Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática), la población (en millones de personas) que residía en el país, incluidos extranjeros, puede representarse mediante la siguiente fórmula $P(t) = 97.48\,(1.022)^t$.

Solución *a*) Interpreta la información que da la fórmula de la población. ______________________

____

¿Qué significa si la fórmula se expresa como $P(t) = 97.48(1.022)^{t/10}$? ______________________

____

Ejercicio 3 Plantea una posible fórmula para la función dada en la siguiente tabla. Contesta en la línea.

t	-2	-1	0	1
Q	2.5	1.3	0.676	0.35152

Solución

a) ¿Es una función lineal? ____________ ¿Por qué? ______________________________________

b) ¿Es una función exponencial? ___________ ¿Por qué? ____________________________________

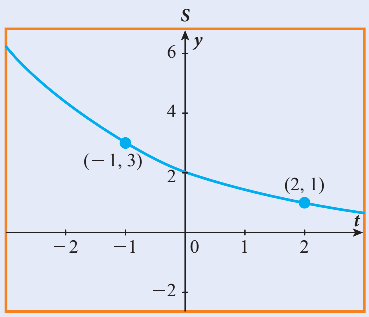
c) ¿Qué ecuación vas a utilizar? ______________________________

d) El factor de cambio es $a =$ ______________________ ¿Cómo lo obtuviste? ____________________

El valor inicial es $b =$ __________________

Al sustituir los datos, la ecuación es ______________________________ .

Ejercicio 4 Plantea la ecuación para la función representada en la gráfica.



Solución *a*) ¿Es una función lineal o exponencial? ______________________________________

¿Por qué? ____

b) La ecuación que vas a utilizar es: ____

Nota

Una estrategia para obtener la ecuación sería escribir la información dada en la gráfica en una tabla de datos; dicha tabla quedaría expresada como:

t		
S		

Para esta tabla tenemos que: $a =$ ___________________________ y, como los valores de t aumentan de 3 en 3, la ecuación queda expresada como: __________________________________.

Observa que no tienes el valor de b (ya que éste es el valor cuando $t = 0$, o el punto de intersección con el eje y). Para obtenerlo sustituimos cualquiera de los puntos en la ecuación y despejamos b.

Finalmente la ecuación es: ______________________________.

Ejercicio 5 Determina si la siguiente tabla de valores corresponde a una función exponencial; si lo es, encuentra su ecuación.

t	-1	2	5	8
Q	2	2.662	3.543122	4.715895382

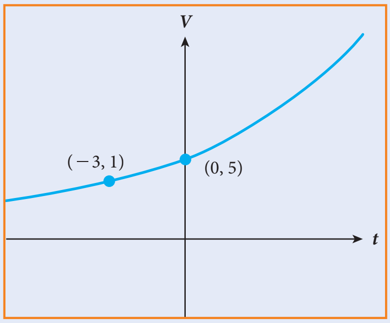
Solución Para decidir si es exponencial verifica si los valores de Q aumentan en un factor de cambio constante.

El valor del factor de cambio es $a =$ ______________ y los valores de t cambian en intervalos de ______________ en ____ , así que la ecuación, hasta este momento, quedaría expresada como ____________________________________ .

Observa que en la tabla de datos no aparece el valor inicial, es decir, el valor de Q para el cual la variable t es cero. Para encontrar el valor inicial, sustituye en la expresión anterior cualquiera de los puntos dados en la tabla y despeja b.

La ecuación es ____ .

Ejercicio 6 La función de ventas (en miles de unidades) de determinado producto está dada por la siguiente gráfica, donde t se mide en años y $t = 0$ representa el día de hoy.



Solución *a*) Da la interpretación práctica del punto $(-3, 1)$.

____

____

b) Escribe una fórmula que sirva para calcular las ventas como una función del tiempo.

Para determinar la ecuación realiza el siguiente análisis:

La forma gráfica corresponde a una función ❑ exponencial. ❑ lineal.

Si escribimos los datos de la gráfica en una tabla de valores, obtenemos:

t		
V		

de donde podemos determinar que el valor inicial es $b =$ ______________.

El factor de cambio es $a =$ ______________ y que los valores de t van de ______________ en ______________.

La fórmula para esta función de ventas es: ____.

c) Si el crecimiento de ventas no cambia, ¿cuál será el volumen de ventas dentro de 4 años a partir de hoy?

Ejercicio 7 Una persona ingirió una taza de café que contiene 100 mg de cafeína. Si la vida media de la cafeína en el cuerpo es de aproximadamente 4 horas, ¿qué cantidad de cafeína Q habrá en el cuerpo de la persona 6 horas después?

La *vida media* es el tiempo que tarda una cantidad (que decrece exponencialmente) en reducirse a la mitad.

Utiliza la definición de media para escribir, en la siguiente tabla, la información proporcionada en el enunciado.

t		
Q		

Nota Cuando en un enunciado se hace referencia a la vida media, significa que la situación corresponde a un modelo exponencial.

De acuerdo con la nota anterior, podemos determinar que el valor inicial es $b =$ ____________________; además, el factor de cambio es $a =$ __________ y los valores de t van de ________ en ________, por lo tanto, la función que nos da la cantidad de cafeína Q en el cuerpo como función del tiempo es

$Q(t) =$ ______________________________ .

Ahora contesta la pregunta: ¿qué cantidad de cafeína Q habrá en el cuerpo de la persona 6 horas después de haberse tomado una taza de café? ______________________________

Ejercicio 8 El precio de una casa aumenta exponencialmente. Si en 3 años el valor de la casa aumentó 40% del valor original, con base en esta información estima el tiempo de duplicación para su valor.

El *tiempo de duplicación* es el tiempo que tarda una cantidad (que crece exponencialmente) en duplicarse.

Solución La ecuación que vas a utilizar es: ______________________ .

Si V es el valor de la casa y t es el tiempo en años, ¿cómo queda expresada la ecuación?

Observa que no conocemos el valor inicial de la casa; en la ecuación éste quedará expresado como b.

Para obtener el factor de cambio a, podemos escribir la información dada en una tabla de datos.

En esta forma, ya puedes plantear la ecuación.

t		
V		

La ecuación queda como: ______________________________ .

Nota Otra forma de resolver este problema es plantear la ecuación y sustituir la información dada considerándola como el punto $t = 3$, $V = 1.4b$; después sustituimos en la ecuación y despejamos para obtener el factor de cambio a.

Para obtener el tiempo de duplicación, sustituimos $V =$ ______________ y despejamos ______________.

Observa que la variable que se te pide obtener aparece en el exponente, y no hemos visto cómo despejar una variable que se encuentra en el exponente. Para contestar la pregunta utilizaremos el método de **prueba y error**, éste consiste en ir sustituyendo valores de prueba en t hasta obtener el mejor valor de t con el cual se satisface la ecuación, es decir, obtenemos una estimación. Más adelante aprenderás a resolver este tipo de situaciones.

Prueba con:

$t_1 =$ ______________ $V =$ ______________

$t_2 =$ ______________ $V =$ ______________

$t_3 =$ ______________ $V =$ ______________

Solución Por prueba y error, tenemos que el tiempo de duplicación es $t =$ ______________.

Ejercicio 9 Para una compañía, las funciones de ingresos y costos están dadas por

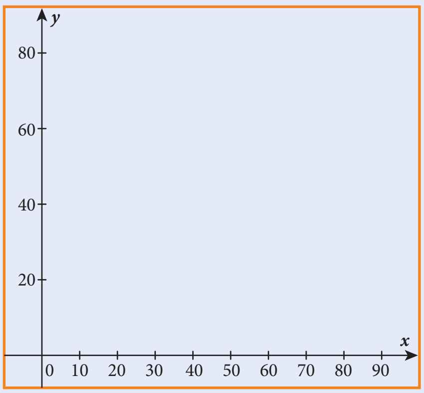
$$I(x) = 3(2^x) \quad \text{y} \quad C(x) = 9x + 25,$$

respectivamente, donde x son las miles de unidades producidas y vendidas.

Solución

a) Utiliza un graficador, dibuja en la misma gráfica ambas funciones y determina el punto de equilibrio para la compañía.

Indica el área que representa pérdidas y la que representa ganancias.



b) Si se venden 5 000 unidades, ¿hay pérdida o ganancia? Justifica tu respuesta. ______________

____

____

¡A reflexionar! ¿Puedes obtener el punto de equilibrio resolviendo algebraicamente la ecuación? Justifica.

____

____

____

____

Cómo obtener el factor de cambio cuando se conoce la tasa de cambio

En muchas ocasiones, la información que tenemos acerca del comportamiento de una función no está dada como una tabla de datos, sino como la tasa o el ritmo con el que la función aumenta o disminuye, por ejemplo: la población de una pequeña ciudad es actualmente de 250 000 personas, y crece a una tasa de 2% cada año.

La expresión "crece a una tasa de 2% cada año" nos da información acerca del **cambio porcentual** de la población, es decir, nos indica cuánto aumentará la población respecto a la cantidad actual de habitantes.

Esto significa que:

- Actualmente,
  $t = 0$ la población es
  $P = 250\,000$ habitantes
- Dentro de un año,
  $t = 1$ la población será
  $P = 250\,000 + 2\% \,(250\,000)$, es decir,
  la población del año anterior más lo que aumentó ese año.

Al tomar como factor común el número 250 000 nos queda $P = 250\,000\,(1 + 2\%)$.

Al trasformar 2% a decimal obtenemos que $P = 250\,000\,(1 + 0.02)$, y al efectuar la operación dentro del paréntesis se tiene que $P = 250\,000\,(1.02)$.

- Dentro de dos años, $t = 2$, la población será $P = 250\,000(1.02) + 2\%\,[250\,000(1.02)]$ es decir, la población del año anterior más lo que aumentó ese año.

Al tomar como factor común 250 000 (1.02) nos queda que $P =$ ______________________________

____.

Al trasformar 2% a decimal obtenemos que $P =$ ______________________________

____

y al efectuar la operación dentro del paréntesis tenemos que $P =$ ______________________.

- Dentro de tres años, $t = 3$ la población será $P =$ ______________________________;
  así que, si la población de un cierto año la multiplicamos por 1.02 se obtendrá la población del siguiente año.

  La fórmula que representa a esta población como una función del tiempo está dada por

  $P =$ ______________________________

  ______________________________________.

Nota Observa que la fórmula para la población corresponde a una función exponencial, ya que tiene la forma $y = b \cdot a^x$.

¡A reflexionar! ¿Encuentras alguna relación entre el factor de crecimiento $a = 1.02$ y la tasa con la que crece la población $r = 0.02$? ______________

Descríbela: ______________________________

____

____

____

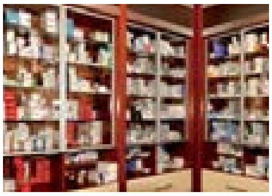
____

Del análisis anterior podemos concluir que cuando una función "crece a una tasa (razón o ritmo) de r % cada año" es equivalente a decir que la función *aumenta exponencialmente* y el factor de cambio a se obtiene sumando una unidad a la tasa anual. Cuando nos dan la tasa de decaimiento, el factor se obtiene restándolo de la unidad, es decir,

$$a = 1 + r \quad \text{si la función crece}$$
$$a = 1 - r \quad \text{si la función decrece}$$

Nota En ambos casos la tasa anual debe transformarse a decimales para sumarla o restarla.

Ejemplo 1 En el 2000, la cantidad de medicamentos disponibles en los almacenes del IMSS alcanzaba para cubrir los requerimientos de medicamentos para 2.10 meses, y disminuía a una tasa de aproximadamente 4%* cada año. Encuentra una fórmula para la disponibilidad de medicamento como una función del tiempo. Si la tasa no cambia, ¿cuál era la disponibilidad de medicamento para el 2002? (Supón que el 2000 corresponde a $t = 0$).



Solución

b (valor inicial) = ______________

Describe cómo obtienes el factor de cambio que necesitas para plantear la función:

____

____

____

____

a (factor de cambio) ______________________

____.

Función:

Utiliza la ecuación para obtener la disponibilidad de medicamentos para 2002.

Ejemplo 2 La siguiente información muestra la *tabla de amortización* para el financiamiento de una camioneta Voyager modelo 2000, en un trato directo con la agencia Chrysler Contry a un plazo de 2 años, efectuado en febrero de 2000. Datos reales solicitados en la agencia mencionada.

Observa que las mensualidades son una cantidad fija. Por lo general, en una transacción de este tipo, de la mensualidad pagada, una parte se destina a capital y la otra a interés. La situación mencionada se presenta en este caso. Observa cómo al sumar el capital con el interés se obtiene la cantidad mensual pagada.

V A L O R   C H R Y S L E R

T A B L A   D E   A M O R T I Z A C I Ó N   TASA DE INTERÉS: 18.00

MES	NETO A FIN.	CAPITAL	INTERÉS E IVA	MENSUAL
1	147,204.93	5,003.26	2,539.29	7,542.55
2	142,201.93	5,089.57	2,452.98	7,542.55
3	137,112.10	5,177.37	2,365.18	7,542.55
4	131,934.73	5,266.68	2,275.87	7,542.55
5	126,668.05	5,357.53	2,185.02	7,542.55
6	121,310.52	5,449.94	2,092.61	7,542.55
7	115,860.58	5,543.95	1,998.60	7,542.55
8	110,316.63	5,639.59	1,902.96	7,542.55
9	104,677.04	5,736.87	1,805.68	7,542.55
10	98,940.17	5,835.83	1,706.72	7,542.55
11	93,104.34	5,936.50	1,605.05	7,542.55
12	87,167.84	6,038.90	1,503.65	7,542.55
13	81,128.94	6,143.08	1,399.47	7,542.55
14	74,985.86	6,249.04	1,293.51	7,542.55
15	68,736.82	6,356.84	1,185.71	7,542.55
16	62,379.98	6,466.50	1,076.05	7,542.55
17	55,913.48	6,578.04	964.51	7,542.55
18	49,335.44	6,691.51	851.04	7,542.55
19	42,643.93	6,806.94	735.61	7,542.55
20	35,836.99	6,924.36	618.19	7,542.55
21	28,912.63	7,043.81	498.74	7,542.55
22	21,868.82	7,165.31	377.24	7,542.55
23	14,703.51	7,288.91	253.64	7,542.55
24	7,414.60	7,414.60	127.95	7,542.55
		147,204.93	33,816.27	181,021.20

a) Dibuja la gráfica para la cantidad de dinero mensual asignada a capital.

**Fuente*: *El Norte*, sección Negocios, 30 de marzo de 2004.

Solución Lo primero que debemos hacer es identificar qué tipo de función es. Si se trata de una exponencial, debemos tener un factor de cambio constante. Comprobémoslo dividiendo los términos:

$$\frac{\text{segundo}}{\text{primero}} = \frac{5\,089.57}{5\,003.26} = 1.0172$$

$$\frac{\text{tercero}}{\text{segundo}} = \frac{5\,177.37}{5\,089.57} = 1.0172$$

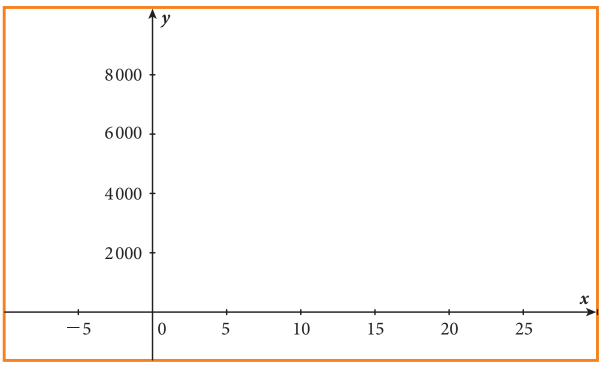
$$\frac{\text{cuarto}}{\text{tercero}} = \frac{5266.68}{5177.37} = 1.0172,$$

y así sucesivamente;

$$\frac{\text{término 24}}{\text{término 23}} = \frac{7\,414.60}{7\,288.91} = 1.0172$$

Hasta la cuarta cifra decimal podemos decir que la función se ajusta a un modelo exponencial, ya que al dividir los términos siempre obtenemos el mismo resultado, es decir, la función tiene un factor de cambio constante.

La gráfica debe ser una curva creciente, pues los valores de capital aumentan. ¡Dibújala!



b) ¿Cuál sería la ecuación para la cantidad de dinero asignada a capital, en función del tiempo?

Ya sabemos que se trata de una función exponencial, pues tiene un factor de cambio constante. La ecuación es de la forma $y = b \cdot a^x$, pero si tomamos la letra C para representar al capital y la letra t para representar al tiempo (meses), la ecuación es de la forma $C(t) = b \cdot a^t$.

Si tomamos la primera cantidad del capital como valor inicial, tenemos que $b = 5\,003.26$, y el factor de cambio ya lo conocemos: es $a = 1.0172$.

La ecuación es $C(t) = 5\,003.26(1.0172)^t$.

c) ¿Con qué tasa o razón está aumentando la cantidad de dinero asignada a capital?

Para determinar la razón con que crece la cantidad mensual asignada a capital, usamos la fórmula:

$a = 1 + r$; al sustituir el factor de cambio en la fórmula obtenemos:

$1.0172 = 1 + \text{r}$, despejando r, tenemos que

$1.0172 - 1 = r$, es decir, $r = 0.0172$ o $r = 1.72\%$

lo que significa que la cantidad de dinero asignada a capital aumenta a razón de 1.72% cada mes.

Ejercicio 1 Cada una de las siguientes funciones representa la población de diferentes ciudades, en millones de personas por año.

a) $P(t) = 1.2(1.035)^t$ *b*) $P(t) = 2.5(1.022)^t$ *c*) $P(t) = 1.1(1.017)^t$ *d*) $P(t) = 1.5(0.822)^t$

¿Cuál es la razón r con la que crecen o decrecen cada una de las cuatro poblaciones?

Solución *a*) $r =$ ______________ *b*) $r =$ ______________ *c*) $r =$ ______________
d) $r =$ ______________

¿Cuál población tiene mayor población inicial? ________________________________

¿Cuál es esa población? __________________________

¿Cuál población es decreciente? ___________________

Ejercicio 2 El valor de un automóvil se deprecia exponencialmente a razón de 8% cada 3 años. Si el automóvil se compró nuevo en $240 000 en 1998, plantea una fórmula para el valor del automóvil (V) en función del tiempo t y utilízala para calcular el valor que tendrá en 2010.

Solución La ecuación que vas a utilizar es: ____.

El valor inicial es $b =$ ________________________. El factor de cambio es $a =$ _____________________________.

La ecuación queda como: ____.

El año 2010 corresponde al valor $t =$ ______________________________________.

Al sustituirlo en la ecuación, tenemos que $V(t) =$ ______________________________.

Ejercicio 3 Una sustancia radiactiva se desintegra exponencialmente a razón de 2.4% cada año. Con base en esta información, determina la vida media de la sustancia. Si Q es la cantidad de la sustancia y t es el tiempo en años.

Solución ¿Qué ecuación vas a utilizar? _____________________________________

El valor inicial es $b =$ ________________________. El factor de cambio es $a =$ _____________________________.

La ecuación es: ____.

Para obtener la vida media, sustituimos $Q =$ ____________________ y despejamos ________________________.

¿Podemos despejar la variable? ____________

¿Cómo obtendríamos la vida media? ____

____

La vida media es $t =$ ________________________.

Ejercicio 4 La población de cierto país era de 60 millones en 1974 y creció a una tasa de 8.4% anual.

Solución *a*) Escribe una fórmula para la población como una función del tiempo, en donde t se mide a partir de 1974.

¿Qué tipo de función es útil para modelar la situación dada? ____

Población inicial b = ______________________________ Tasa de crecimiento r = ____________

Factor de crecimiento a = ________________________

Fórmula para la población ______________________________________

b) ¿Cuál será la población en 1989 si la tasa de crecimiento no cambia?

Cómo aplicar las funciones exponenciales en el área de finanzas

Conocerás una aplicación más de las funciones exponenciales; el cálculo del saldo en una cuenta bancaria, bajo ciertas condiciones, resulta ser una función exponencial.

Cuando se tiene algo de dinero y se decide invertirlo, esta inversión ganará intereses.

Si el interés se paga más de una vez al año y los intereses ganados no se retiran, es decir, se reinvierten, se dice que el interés gana interés; a este efecto se le llama **interés compuesto**, también llamado **interés capitalizable**.

Todas las situaciones que plantearemos en esta sección supondrán un interés compuesto.

La tasa de interés que manejan los bancos es anual, pero ofrece diferentes opciones para el pago, como anualmente, mensualmente, semestralmente, diario, etcétera.

Construcción Iniciaremos deduciendo la fórmula que nos da el saldo de una cuenta bancaria. Consideraremos la siguiente situación.

Supón que se hace un depósito inicial de $1 000 en una cuenta bancaria que gana 10% de interés capitalizable anualmente y que durante todo ese tiempo no se hace ningún otro depósito ni retiro.

¿Qué tipo de función es útil para modelar la situación dada? ______________________________

El saldo inicial es b = _________, la tasa de crecimiento (como decimal) es r = _____________ y el factor de crecimiento es a = ______________; por lo tanto, el saldo en la cuenta a los t años está dado por la fórmula S = ____________________.

¿Cómo queda expresada la fórmula que nos da el saldo S en la cuenta, si el depósito inicial es P (en vez de 1 000) y la tasa de interés es r (en vez de 10%)?

S = ____________________________________

¿Qué pasa si el interés se paga más de una vez al año? En la situación anterior consideramos que el interés era compuesto anualmente, es decir, se pagaba una vez al año. Ahora, si la tasa de interés es de 8% y elegimos que sea compuesto trimestralmente, es decir, que se pague cada tres meses, ¿significa que cada tres meses nos van a pagar 8% del saldo? ______________________________

Si el interés se paga cada tres meses, ¿cuántas veces en el año nos pagarían? ________________

¿Qué tasa de interés se pagará cada tres meses?

_______________________________________.

En general, ¿qué debemos hacer si el interés r se paga n veces al año? ________________________.

¿Cómo cambia la fórmula del saldo si el interés es compuesto n veces al año?

S = ____________________________________

Concluimos que la fórmula para obtener el saldo S de una cuenta bancaria, si se hace un depósito inicial de P y se paga un r% de interés anual capitalizable n veces en el año es:

$$\boxed{S = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}}$$

Ejercicio 1 Si se depositan \$10 000 en una cuenta bancaria que gana 8.5% de interés anual compuesto o capitalizable cada bimestre, ¿cuál es el saldo en la cuenta después de 5 años?

Solución ¿Qué variable te piden obtener? ____________________

Forma en que se capitaliza el interés ______________________________.

Número de veces que se paga el interés en un año, $n =$ ______________.

Cuál es el valor de:

Depósito inicial $P =$ _________________________

Tasa anual en decimal $r =$ __________________

Tiempo $t =$ ______________

Sustituye los datos en la fórmula y responde a la pregunta planteada.

Respuesta: ____

Ejercicio 2 ¿Cuál fue la tasa de interés que se pagó en una inversión si sabemos que en tres años la inversión se duplicó? Supongamos un interés compuesto mensual.

Solución ¿Qué variable te piden obtener? ____________________

Forma en que se capitaliza el interés ______________________________.

Número de veces que se paga el interés en un año, $n =$ ______________.

Cuál es el valor de:

Saldo inicial $P =$ _________________________

Tiempo $t =$ __________________

Saldo $S =$ ____________________

Sustituye los datos en la fórmula y responde a la pregunta planteada.

Respuesta: _______________________________

Ejercicio 3 Deseamos invertir en un plan educativo a futuro. Supón que en 18 años tendrá un valor de \$50 000 dólares. ¿Cuánto debes invertir ahora si se paga un interés de 9% compuesto trimestral durante todo el periodo del contrato?

Solución ¿Qué variable te piden obtener? ____________________

Forma en que se capitaliza el interés ______________________________.

Número de veces que se paga el interés en un año, $n =$ ______________.

Cuál es el valor de:

Tasa anual en decimal $r =$ ________________________

Tiempo $t =$ ___________________

Saldo $S =$ _______________________

Sustituye los datos en la fórmula y responde a la pregunta planteada.

Respuesta: ____

Rendimiento efectivo anual: REA

Al inicio del tema mencionamos que la tasa de interés que manejan los bancos es anual; si éste se paga una vez al año, la ganancia porcentual será la tasa de interés que se pagó. Si el interés se paga más de una vez al año, la ganancia porcentual ya no corresponde a la tasa de interés sino a un porcentaje un poco mayor que la tasa de interés que se está ofreciendo, esto sucede por el efecto del interés compuesto.

A la tasa que nos dice exactamente cuánto interés pagará la inversión se le llama **rendimiento efectivo anual** y representa el porcentaje que realmente se gana en la inversión, respecto al depósito inicial.

El rendimiento efectivo anual (escrito en porcentaje), que llamaremos el REA, se puede calcular dividiendo el cambio en el saldo después de un año entre el depósito inicial, es decir,

$$\text{REA} = \frac{S - P}{P}.$$

Para deducir la fórmula, supón que deseamos calcular el REA de una cuenta en la cual se hace un depósito inicial P y que paga un interés de $r\%$ compuesto n veces al año.

Si $\text{REA} = \dfrac{S-P}{P}$, al sustituir la fórmula del saldo, obtenemos que

$$\text{REA} = \frac{P\left(1+\frac{r}{n}\right)^n - P}{P}.$$

Al factorizar P en el numerador (factor común) tenemos que,

$$\text{REA} = \frac{P\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1\right]}{P}.$$

Si eliminamos la P del numerador con la del denominador tenemos que,

$$\text{REA} = \left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1\right]\cdot 100.$$

Nota El REA se debe expresar en porcentaje, por lo que al final deberemos multiplicar por 100 para que esto se cumpla.

Ejercicio 4 ¿Cuál es el rendimiento efectivo anual de una inversión que paga diariamente 12% de interés anual compuesto? Supón una inversión inicial de \$20 000 a 365 días.

Solución ¿Qué te piden obtener? __________

Forma en que se capitaliza el interés: __________

____.

Número de veces que se paga el interés en un año, $n =$ ____________________

Tasa anual en decimal $r =$ ____________________

Tiempo $t =$ ____________________

Sustituye los datos en la fórmula y responde a la pregunta planteada.

Respuesta: ______________________________

Observa que en este ejercicio conocemos el depósito inicial, por lo que podríamos calcular la ganancia real obtenida (expresada como una cantidad), al restar saldo menos depósito inicial, es decir,

Ganancia real (cambio en el saldo) = Saldo − Depósito inicial = ____________________

Si queremos obtener el porcentaje de aumento en el saldo, respecto al depósito inicial, lo que tendríamos que hacer es dividir el cambio en el saldo entre el depósito inicial y con eso obtendríamos el REA.

Compruébalo efectuando la operación

$$\text{REA} = \frac{S-P}{P} = \frac{\text{Cambio en el saldo}}{\text{Depósito inicial}} = \underline{\qquad\qquad}$$

Ejercicio 5 ¿Cuál fue la tasa de interés que se pagó en una inversión si se sabe que tuvo un rendimiento efectivo de 9%? Supón que el interés es compuesto cada mes.

Solución ¿Qué te piden obtener? __________

Forma en que se capitaliza el interés ___________.

Número de veces que se paga el interés en un año, $n =$ _____________________

Rendimiento efectivo anual = REA = __________

Tiempo $t =$ _______________

Saldo $S =$ __________________

Sustituye los datos en la fórmula y responde a la pregunta planteada.

Respuesta: _________________________________

Ejercicio 6 ¿Cuál fue la tasa de interés que se pagó en una inversión si se sabe que el saldo se incremento 7% en dos años? Supón que el interés es compuesto cada hora.

Solución ¿Qué te piden obtener? __________

Forma en que se capitaliza el interés ___________.

Número de veces que se paga el interés en un año, $n =$ _______________

Depósito inicial $P =$ _________________________

Tiempo $t =$ _______________

Saldo $S =$ _______________

Sustituye los datos en la fórmula y responde a la pregunta planteada.

Respuesta: _________________________________

Resuelve los siguientes ejercicios.

1. Dadas las siguientes tablas, determina cuál de ellas corresponde a un modelo exponencial.

a)

p	5	10	15	20
q	5.520	6.095	6.730	7.430

b)

p	−3	−1	1	3	5
t	45	6	5	45	125

c)

x	2	2.5	3	3.5
y	168.75	146.142	126.562	109.606

d)

x	−10	0	10	20
y	44	12	−20	−52

2. Cuando contratas un crédito, la mayoría de las veces una parte del pago mensual se destina para el pago del capital financiado y la otra para intereses. La tabla de amortización del capital en el crédito para la compra de un automóvil a un plazo de 24 meses con pagos mensuales fijos de $7 542.55 está dada por:

Mes	0	1	2	3	4
Capital	5 003.26	5 089.57	5 177.37	5 266.68	5 357.53

Mes	5	6	7
Capital	5 449.94	5 543.95	5 639.59

a) Plantea una posible fórmula para la cantidad de dinero asignada a capital en función del tiempo (medido en meses). Toma al menos 5 decimales.

b) Utiliza la ecuación anterior para determinar qué cantidad de dinero se asigna a capital y qué cantidad a intereses, del pago mensual correspondiente al primer año del crédito.

c) ¿Cual es la razón con la que crece el pago a capital?

3. Según datos publicados en el periódico *El Norte*, del 21 de marzo de 2004, el crecimiento de la población en la Ciudad de Monterrey ha sido exponencial en el periodo de 1950 a 2000.

Año	1950	2000
Habitantes	339 282	3 326 604

a) Plantea una fórmula para la población en función del tiempo.

b) De continuar esa tendencia. ¿Cuál será la población en 2010?

4. Los siguientes datos muestran la inversión extranjera en México en millones de dólares en el periodo 1998-2001.

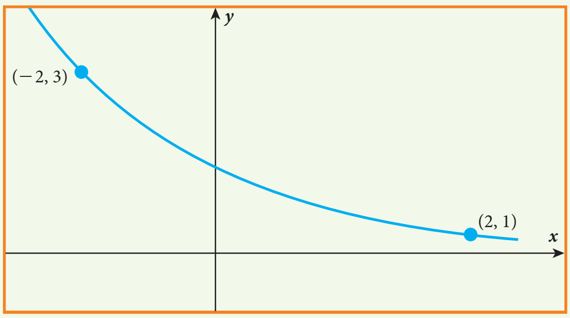
Año	1998	1999	2000	2001
Inversión	12 500	15 956.26	20 368.18	26 000

a) Plantea una fórmula para la inversión en función del tiempo.

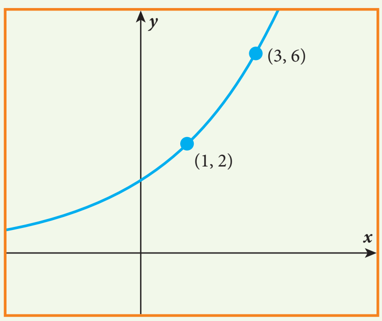
b) Con esa tendencia, estima la inversión que hubo en 2005.

Obtén la fórmula para la función representada en cada una de las siguientes gráficas.

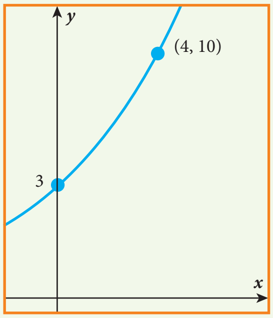
5.



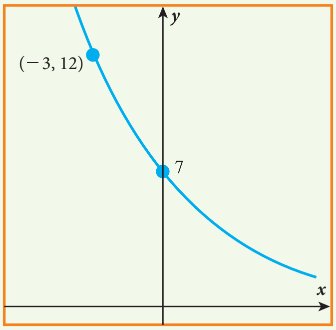
6.



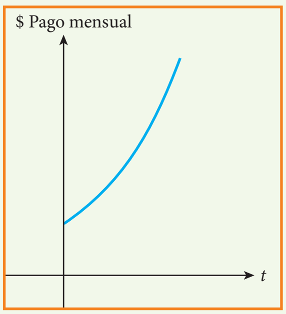
7.



8.



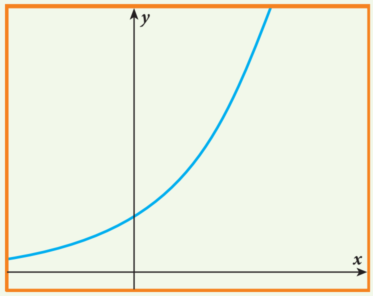
9. Deseas adquirir un préstamo para una casa. Al solicitar informes en una empresa, la empleada te dice que el pago mensual es variable. Para motivar la adquisición del crédito, la primera mensualidad que te dan es muy baja. Te dicen que va a ir aumentando, pero que tu sueldo también, de tal manera que, aunque llega un momento en que la mensualidad es alta, no tendrás problemas para cubrirla. Sin embargo, a la hora de explicarte muestran la siguiente gráfica que representa el pago mensual durante todo el plazo del préstamo.



¿Te conviene adquirir el préstamo con esa empresa? Justifica tu respuesta.

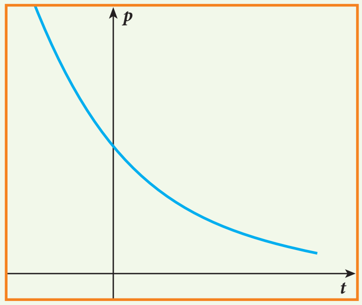
10. Selecciona la opción que representa la ecuación de la siguiente gráfica. Justifica tu respuesta.

a) $y = 3(0.814)^x$ *c*) $y = 5.4(1.032)^x$
b) $y = 6x + 4$ *d*) $y = x^2 + 1$

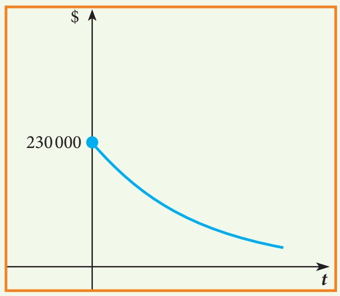


11. Selecciona la opción que representa la ecuación de la siguiente gráfica. Justifica tu respuesta.

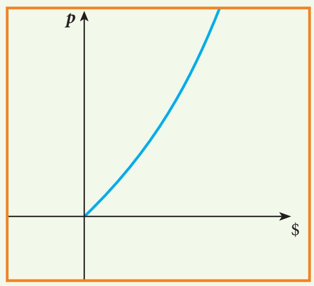
a) $P(t) = 8 - 3.2t$ *c*) $P(t) = (t - 5)^2 + 1$
b) $P(t) = 20\,(0.66)^t$ *d*) $P(t) = 7.5(2.3)^{t/2}$



12. La siguiente gráfica representa el valor de un automóvil en función del tiempo transcurrido a partir de su compra. Interpreta la gráfica.



13. La siguiente gráfica muestra la producción p de una empresa en función del capital invertido. Interpreta la gráfica.



Resuelve los siguientes problemas.

14. La función $P(t) = 2.5(1.038)^{t/2}$ representa la población (en millones) de una ciudad, en el tiempo t (en años). Describe *toda* la información que indica la función respecto a la población de esa ciudad.

15. La función $Q(t) = b\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5730}$ representa la cantidad de carbono 14 (isótopo radiactivo del carbono) de una sustancia en el tiempo t, en años. Describe *toda* la información que indica la función respecto a la sustancia.

16. La función $P(t) = (1.7)^t$ representa el consumo de electricidad en kilowatts de una población en t años. Describe *toda* la información que indica la función respecto al consumo de electricidad.

17. La siguiente ecuación $V(t) = 140\,000(0.15)^t$ representa el valor de un automóvil a los t años. Describe *toda* la información que indica la función respecto al valor del automóvil.

18. El precio de un artículo aumenta exponencialmente a razón de 2% cada 2 años.

    a) Plantea una fórmula para el precio como función del tiempo.
    b) Utiliza la fórmula para determinar cuál fue el aumento en el precio del artículo a los 10 años.

19. Una sustancia radiactiva se desintegra exponencialmente. Si en 3 meses está presente 20% de la que originalmente había, ¿qué cantidad de sustancia habrá al final del año? Plantea la fórmula para la cantidad de sustancia en función del tiempo y úsala para contestar la pregunta.

20. La energía nuclear se puede utilizar para proveer de potencia a vehículos espaciales. Si inicialmente la fuente radiactiva de poder para cierto satélite provee 40 watts y la salida decae exponencialmente a una razón de 0.04% cada día.

    a) Plantea una fórmula para la cantidad de energía en función del tiempo.
    b) Utiliza la fórmula para determinar la cantidad de energía a los 20 días.
    c) ¿En cuántos días la fuente radiactiva reducirá a 35 watts su salida de energía?

21. La población de Pakistán, expresada en millones de habitantes, crece exponencialmente a razón de 2.81% por año. Si en 1994 había 126.4 millones de habitantes,

    a) Plantea una fórmula para la población, como función del tiempo.
    b) Utiliza la fórmula para determinar la población en 11 años.
    c) ¿En qué año la población sería de 200 millones de habitantes?

22. La oferta de videograbadoras crece exponencialmente a una razón de 0.4% por cada peso que aumenta el precio del producto. Actualmente la oferta es de 150 unidades.

    a) Plantea una fórmula para la oferta en función del precio.
    b) ¿Cuál sería la oferta si el precio es de $16?

23. La demanda para un nuevo juguete disminuye exponencialmente a una razón de 4.87% por cada peso que aumenta el precio del juguete.

    a) Plantea una fórmula para la demanda en función del precio.
    b) ¿Cuál sería la demanda si el precio es de $10?

24. Cuando se lanza al mercado un libro nuevo, debido a su publicidad se venden 25 000 ejemplares. Dos meses después las ventas fueron de 10 000 ejemplares. Suponiendo un comportamiento exponencial,

    a) Plantea la fórmula para las ventas en función del tiempo.
    b) ¿Cuántos ejemplares se vendieron medio año después de su lanzamiento al mercado?

25. El valor de una máquina copiadora es de $50 000, después de 5 años su valor fue de $29 700, suponiendo un comportamiento exponencial:

    a) Plantea la fórmula para el valor de la copiadora en función del tiempo.
    b) ¿Cuál fue el valor de la copiadora 12 años después de su compra?

26. Después de fumar un cigarro que contiene 15 mg de nicotina, el organismo la elimina en forma exponencial. Si a las 18 horas quedan 1.825 mg de nicotina en el organismo, ¿cuál es la vida media de esta sustancia?

27. En las primeras etapas de la epidemia del sida se estimaba que había 1.3 millones de personas contagiadas, si la epidemia crecía exponencialmente. Si se sabe que en 15 meses había 10.4 millones de personas contagiadas, ¿cuál es el tiempo de duplicación de la epidemia?

28. Después de haber adquirido un bien inmueble, se sabe que a los 2 años su valor fue de $410 670, y a los 9 años su valor fue de $1 232 520. Suponiendo un comportamiento exponencial, ¿a qué precio se compró el inmueble?

29.  Utiliza una calculadora graficadora para determinar el punto de equilibrio para una compañía si las funciones de costos e ingresos están dadas por $I(x) = 2.5(1.08^x)$ y $C(x) = 3x + 5$. Dibuja en los mismos ejes ambas gráficas.

30.  Utiliza una calculadora graficadora para trazar las gráficas de $f(x) = 6^x$, $g(x) = 7^x$, $h(x) = 8^x$ en el mismo conjunto de ejes, en la pantalla $[0, 5] \times [0, 100]$. Comenta la relación entre la base b y el crecimiento de la función $f(x) = b^x$.

31.  Utiliza una calculadora graficadora para trazar las gráficas de $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$, $g(x)=\left(\frac{1}{6}\right)^x$, $h(x)=\left(\frac{1}{7}\right)^x$, en el mismo conjunto de ejes, en la pantalla $[0, 4]$ x $[0, 1]$. Comenta la relación entre la base b y el decaimiento de la función $f(x) = b^x$.

32. El banco paga intereses de 3.69% anual. Si se deposita \$50 000, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta después de 5 años suponiendo que el interés es compuesto trimestralmente?

33. La caja de ahorro de los telefonistas paga intereses de 5.68% anual. Si se deposita \$7 000, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta después de 8 años? Supón un interés compuesto mensualmente.

34. Una caja popular paga intereses de 5.73% anual compuesto bimestralmente. ¿Qué cantidad se debe depositar si se desea tener \$63 500 dentro de 12 años?

35. Si el banco paga intereses de 2.50% compuesto anualmente, ¿qué cantidad se debe depositar si se desea tener \$423 000 dentro de 15 años?

36. ¿Qué tasa de interés anual tiene un rendimiento efectivo de 5%? Supón que el interés es compuesto semanalmente y que el año tiene 52 semanas.

37. ¿Cuál fue la tasa de interés anual que se pagó en una inversión si se tiene que en 4 años el saldo había aumentado 60% del depósito inicial? Supón que el interés es compuesto bimestralmente.

38. ¿Qué tasa de interés anual triplica el valor de una inversión en 11 años? Supón que el interés es compuesto semestralmente.

39. ¿Qué tasa de interés anual tiene un rendimiento efectivo de 8.2%? Supón que el interés es compuesto diariamente y considera el año de 365 días.

40. ¿Cuál es el rendimiento efectivo anual en una inversión si se sabe que paga un interés de 9% compuesto diariamente? Considera el año de 365 días.

41. ¿Cuál es el rendimiento efectivo anual en una inversión de \$10 000 si se sabe que paga un interés de 12.55% compuesto 30 veces al año?

42. Un monto de dinero es invertido a r% compuesto anualmente. Si la inversión asciende a \$21 632 al final del segundo año y \$22 497.28 al final del tercer año, encuentra la tasa de interés r y la suma invertida.

43. Una cantidad de dinero se invierte a r% compuesto semestralmente; si asciende a \$56 275.44 al final del segundo año y a \$59 702.62 al final del tercer año, determina la tasa nominal de interés r y la cantidad invertida.

1.6 Función exponencial con base *e*

En la sección anterior analizamos cómo invertir un poco de dinero y ganar intereses pagaderos en diferentes formas, por ejemplo una vez al año o muchas veces al año. Además, encontramos que si se deposita una cantidad P a una tasa de interés de r% anual compuesto n veces al año, el saldo S en la cuenta después de t años está dado por

$$S = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Construcción Utiliza la fórmula anterior y supón que inviertes $1 a una tasa anual de 100% compuesta n veces al año.

¿Cómo quedaría la fórmula para calcular el saldo S después de un año?

$S =$ ______________________________

Utiliza la fórmula anterior para calcular el saldo para valores de n cada vez más grandes. Completa la siguiente tabla:

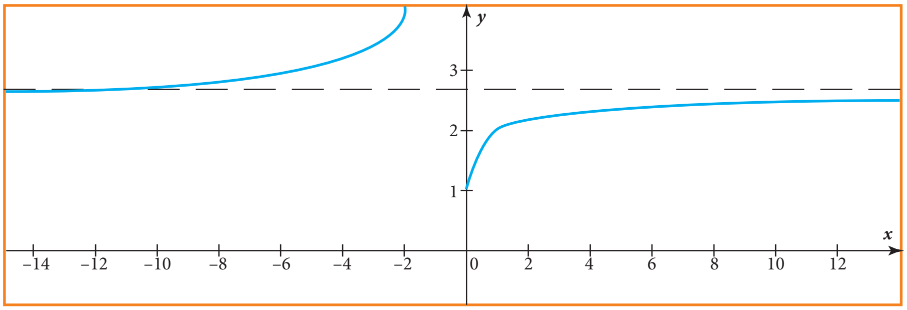
n	*S*
1	
10	
100	
1 000	
1 000 000	
10 000 000	

Observa que para valores grandes de n el valor de la expresión $S = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se aproxima (tiende) al número ______________________________.

Hace muchos años, cuando se estaban estudiando fenómenos de la Naturaleza, este número aparecía con mucha frecuencia como base de una función exponencial. De ahí que se le da un nombre especial y se representa con la letra e.

Un enfoque geométrico

Si dibujamos la gráfica de la función saldo, $S = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ obtenemos:



Nota Observa cómo la gráfica tiende a ser *constante* para valores grandes de n, tanto por la izquierda como por la derecha; en ambos casos, la función se acerca al número 2.7182818…, que es el mismo número al cual tiende S para valores grandes de n.

Podemos concluir que el

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.7182818\ldots = e$$

Si en la expresión anterior tenemos que la tasa de interés es r, el límite es:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = e^r$$

Nota Observa que en la situación anterior el número de veces que se compone el interés aumenta sin límite; podemos interpretarlo como que no hay interrupción en el tiempo. En este caso, se dice que el interés se compone *continuamente*.

En general, si se deposita una cantidad P a una tasa de interés de $r\%$ anual *compuesta continuamente*, el saldo S en la cuenta después de t años está dado por:

$$S = Pe^{rt}$$

El rendimiento efectivo anual para el caso de interés compuesto continuamente está dado por la fórmula

$$\text{REA} = (e^r - 1) \cdot 100$$

Ecuación de la función exponencial base *e*

La función exponencial que aprendimos en la sección anterior $y = b \cdot a^x$ se puede escribir con base *e*, de la siguiente manera: $\boxed{y = be^{rx},}$ donde *r* representa la razón, tasa o ritmo continuo con que crece o decrece la función, y *b* representa el valor inicial (intersección con el eje *y* o el valor de *y* cuando la $x = 0$).

Observa que e^r representa el factor de cambio *a* de la función exponencial, es decir, $e^r = a$.

Si tenemos una función escrita con base *a* se puede cambiar a base *e* y viceversa; para cambiar de base, tenemos que igualar las bases y resolver la ecuación que queda expresada.

Ejemplo 1 Cambiar a base *e* la función $y = 2 \cdot 5^x$.

Solución Queremos que la ecuación esté escrita en la forma $y = b \cdot e^{rx}$; para ello igualamos las bases $e^r = 5$ y obtenemos el valor de *r*.

Recuerda que para obtener el valor de una variable que está en el exponente utilizamos el método de prueba y error, pues no hemos visto cómo despejarla.

Por prueba y error, $r = 1.6094$. Al sustituir este valor de *r*, la ecuación con base *e* queda expresada como $y = 2 \cdot e^{1.6094x}$, que es una ecuación equivalente a $y = 2 \cdot 5^x$.

Ejemplo 2 Cambiar a base *a* la función $y = 2 \cdot e^{-3x}$.

Solución Queremos que la ecuación esté escrita en la forma $y = b \cdot a^x$; para ello igualamos las bases $e^{-3} = a$ y obtenemos el valor de *a*. Lo único que debemos hacer es obtener el valor de e^{-3} con una calculadora científica; el resultado corresponde a la base *a*. Entonces tenemos que $a = 0.049787$ y la ecuación con base *a* queda expresada como $y = 2 \cdot (0.049787)^x$.

Cuándo utilizar base *e*

De acuerdo con lo anterior, podemos concluir que utilizaremos la función base *e* si la función cambia (aumenta o disminuye) exponencialmente con una *razón, tasa* o *ritmo continuo*.

Gráfica de una función exponencial con base *e*

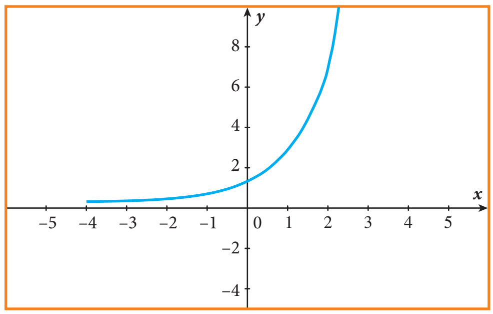
La gráfica de la función $y = b \cdot e^{rx}$, donde $b > 0$, es una curva que puede ser creciente o decreciente; esto depende del signo de *r* en la ecuación.

Nota Observa en el ejemplo 1 que la función exponencial corresponde a una función creciente, ya que la base es $a > 1$, y al cambiar a base *e*, el exponente quedó positivo.

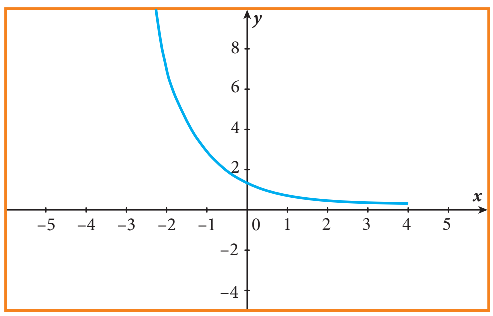
En el ejemplo 2, la función base *e* tiene exponente negativo y al cambiarla a base *a* resultó ser una función decreciente, pues la base es $0 < a < 1$.

Entonces, de acuerdo con lo anterior, podemos concluir que: en una función exponencial de base *e*,

- si $r > 0$, entonces la función es creciente, por ejemplo,



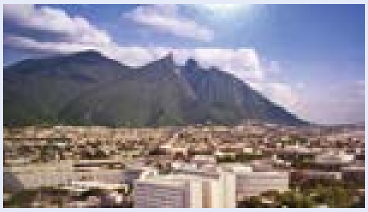
- si $r < 0$, entonces la función es decreciente, por ejemplo,



Nota Al plantear una función exponencial con base *e*, debemos asignar el signo correspondiente a *r*, dependiendo de si la función es creciente o decreciente.

Ejercicio 1 La población de una ciudad es de 6.7 millones de personas y crece exponencialmente a razón continua de 2.3% cada año.

Solución *a*) Para plantear la función que representa a esta población, ¿utilizamos base *a* o base *e*?



Justifica ____

b) Si *P* es la población y *t* es el tiempo la ecuación queda expresada como:

________________________________ .

Al sustituir la población inicial y la razón continua, la ecuación queda como:

________________________________ .

Ejercicio 2 Una sustancia radiactiva se desintegra exponencialmente a razón continua de 3% cada mes. Si la cantidad inicial de sustancia es de 100mg, ¿qué cantidad de sustancia habrá al final de un año?

Solución Si *C* es la cantidad de sustancia y *t* es el tiempo, la ecuación queda expresada como__________.

En esa ecuación, ¿qué representa *b*?____________ ; ¿la conoces?____________ $b =$ ____________.

¿Qué representa *r*? ____________________ ; ¿la conoces?____________ $r =$ ____________.

La ecuación queda planteada como: ____________________________ .

Utiliza la ecuación para contestar la pregunta:

¿Qué cantidad de sustancia habrá al final de un año? ____________________________

Ejercicio 3 El carbono 14 es una sustancia que se utiliza para medir la edad de objetos orgánicos. Si se sabe que la vida media del carbono 14 es de 5 730 años y que disminuye exponencialmente a razón continua, plantea una ecuación para la cantidad *Q* de carbono, en función del tiempo *t* (en años).

Solución ¿Qué fórmula vas a utilizar? ____________________________

En esa ecuación, ¿qué representa *b*? ____________ ; ¿la conoces? ____________ $b =$ ____________.

¿Qué representa *r*? ____________________ ; ¿la conoces? ____________

Nota Si no conoces la cantidad inicial, al plantear la ecuación se deja como *b*; pero si no conoces la razón continua de cambio *r*, la debes obtener, ya que ésta es la que nos indica cómo cambia la función. Para obtener *r* utilizamos la información de la vida media. Observa que en realidad lo que conoces es un punto que, al ser sustituido en la ecuación, te permitirá encontrar el valor de *r*.

¿Cuál es el punto? ____________________________

La ecuación queda planteada como: ____________________________ .

Por prueba y error, encontramos que $r =$ ____________________________ .

La ecuación es: ____________________________ .

Ejercicio 4 Un cráneo descubierto en una excavación arqueológica tiene 12% de la cantidad original de carbono 14. Utiliza la fórmula del ejercicio anterior para determinar su edad.

Solución ¿Qué variable se te pide obtener? ______________________________.

¿Qué variable conoces? ______________________________. Su valor es ____________________________________.

Sustituye los datos en la ecuación para obtener lo que se pide.

Ejercicio 5 Si se depositan \$10 000 en una cuenta bancaria que gana continuamente 8.5% de interés anual compuesto, ¿cuál es el saldo en la cuenta después de 5 años?

Solución ¿Qué fórmula vas a utilizar? ____

¿Qué variable te piden obtener? __________________

Cuál es el valor de:

Depósito inicial $P =$ ________________ Tasa de interés $r =$ _______________ Tiempo $t =$ _________________

Sustituye los datos en la fórmula y calcula el valor indicado.

Ejercicio 6 La siguiente tabla muestra una función que crece exponencialmente a razón continua.

x	0	1	2	3
y	2	40.171073	806.857586	16 206.167855

Solución *a*) Plantea la ecuación de la función.

¿Qué fórmula vas a utilizar? ____

En esa ecuación, ¿qué representa b? ________________, ¿la conoces? _______________ $b =$ __________________

¿Qué representa r? ______________________________, ¿la conoces? _______________

¿Qué debes hacer para obtener r? ____

Obtenemos que $r =$ ____________________.

La ecuación es: ____________________________________.

b) Utiliza la ecuación para obtener el valor de y, cuando $x = 8$.

Ejercicio 7 ¿Cuál es el rendimiento efectivo anual de una inversión que paga 9% de interés anual compuesto continuamente?

Solución ¿Qué te piden obtener? ___________________________

¿Qué fórmula vas a utilizar? _______________________________________

Cuál es el valor de:

$r =$ _____________ $t =$ _____________

Sustituye los datos en la fórmula y calcula el valor indicado.

Conjunto de ejercicios de práctica 1.6

Resuelve los siguientes problemas.

1. La siguiente tabla define una función que crece exponencialmente a razón continua.

x	0	1	2	3
y	3.1	3.980479	5.111036	6.5627

Plantea la ecuación de la función.

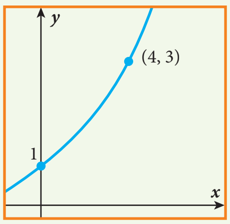
2. La siguiente tabla define una función que decrece exponencialmente a razón continua.

t	0	2	4	6
p	6	2.979512	1.479582	0.7347386

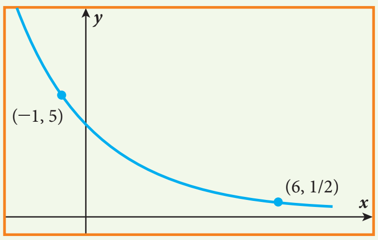
Plantea la ecuación de la función.

En los siguientes problemas, supón que las gráficas corresponden a funciones exponenciales que cambian a razón continua. Plantea una posible ecuación para cada una de ellas.

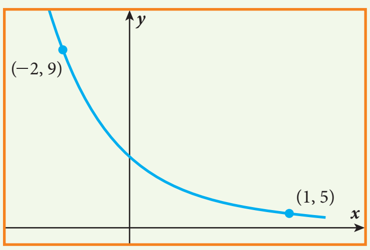
3.



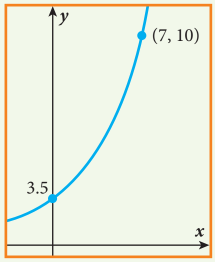
4.



5.

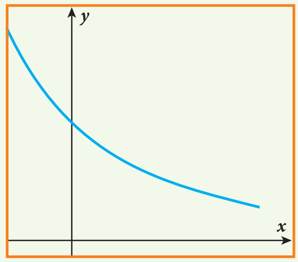


6.



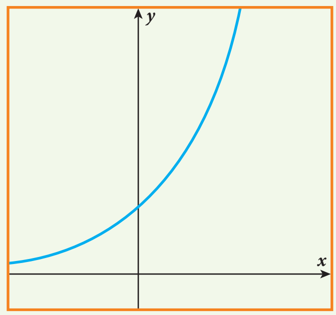
7. Selecciona la opción que representa la ecuación de la siguiente gráfica. Justifica tu respuesta.

a) $y = 4e^{0.12x}$
b) $y = 15 - 3x$
c) $y = 9e^{-1.3x}$
d) $y = (1.048)^x$



8. Selecciona la opción que representa la ecuación de la siguiente gráfica. Justifica tu respuesta.

a) $y = 5x + 3$
b) $y = 4e^{0.7x}$
c) $y = 7(0.98)^x$
d) $y = 12e^{-1.25x}$



9. La función $P(t) = 5.3e^{1.08t}$ representa el precio (en millones de pesos) de un terreno en el tiempo t (en años). Describe toda la información que indica la función respecto al precio del terreno.

10. La función $Q(t) = 2e^{0.36t}$ representa el número de personas contagiadas en una epidemia en t días. Describe toda la información que indica la función respecto al número de personas contagiadas.

11. La función $V(t) = 14.6e^{-0.12t}$ representa el valor de un automóvil (en miles de pesos) en el tiempo t (años). Describe toda la información que indica la función respecto al valor del automóvil.

12. Convierte las siguientes funciones en la forma $P(t) = ba^t$. ¿Cuál representa crecimiento exponencial y cuál decaimiento?

   a) $P(t) = 23e^{0.197t}$ b) $P(t) = 1.24e^{-2.38t}$

13. Convierte las siguientes funciones en la forma $P(t) = ba^t$. ¿Cuál representa crecimiento exponencial y cuál decaimiento?

   a) $P(t) = 0.48e^{2.31t}$ b) $P(t) = 24e^{-0.25t}$

14. Un automóvil de \$184 350 se deprecia exponencialmente a razón continua de 2.5% cada año.

   a) Plantea una fórmula para el valor del automóvil como función del tiempo.
   b) Utiliza la fórmula para calcular el valor del automóvil a los 5 años.

15. Una población de bacterias crece exponencialmente a razón continua cada mes. Si en 3 meses aumentó 18% de la que originalmente había,

   a) Plantea una fórmula para la población en función del tiempo.
   b) Utiliza la fórmula para determinar en qué porcentaje aumentó la población en un año.

16. El gas de invernadero más abundante es el dióxido de carbono. Según el pronóstico de la Organización de las Naciones Unidas, en el "peor escenario" la cantidad de dióxido de carbono en la atmósfera (en partes por millón, en volumen) crece exponencialmente a razón continua de 0.353% al año. Si se sabe que en 1750 había 277 partes por millón,

   a) Plantea una fórmula para la cantidad de dióxido de carbono en la atmósfera en función del tiempo.
   b) Utiliza la fórmula para calcular la cantidad de dióxido de carbono en la atmósfera en 2000.

17. Un medicamento elimina 25% de la cantidad de virus presentes en el organismo de la persona cada 8 horas. Suponiendo que la cantidad de virus cambia exponencialmente a razón continua, ¿cuál es esa razón?

18. La oferta de un producto crece exponencialmente a razón continua de 8% por cada peso que aumenta el precio del producto. Si actualmente se ofrecieron en el mercado 15 000 unidades,

   a) Plantea una fórmula para la oferta en función del precio.
   b) ¿Cuál será la oferta cuando el precio es de 17 pesos?

19. Una institución financiera paga intereses de 7% anual. Si se depositan \$80 340, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta después de 15 años? Supón un interés compuesto continuamente.

20. Una institución financiera paga intereses de 5.4% anual. Si se depositan \$78 525, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta después de 13 años? Supón un interés compuesto continuamente.

21. ¿Cuánto debe depositarse ahora en una cuenta bancaria si se desea tener \$50 000 de saldo dentro de 3 años? La tasa de interés que se paga es de 14% compuesta continuamente.

22. ¿Cuánto se debe depositar ahora en una cuenta bancaria si se desea tener \$120 000 de saldo dentro de 5 años? La tasa de interés que se paga es de 9.2% compuesta continuamente.

23. ¿Cuál es el rendimiento efectivo anual de una inversión si paga un interés de 4.7% compuesto continuamente?

24. ¿Cuál será el rendimiento efectivo anual de una inversión de \$20 000, si paga un interés de 3.25% compuesto continuamente?

25. Una inversión de \$30 000 se compone de manera continua, durante los primeros 2 años con una tasa de 8.3%, y los siguientes 5 años a una tasa de interés de 10.5%. Calcula el valor de la inversión después de 7 años.

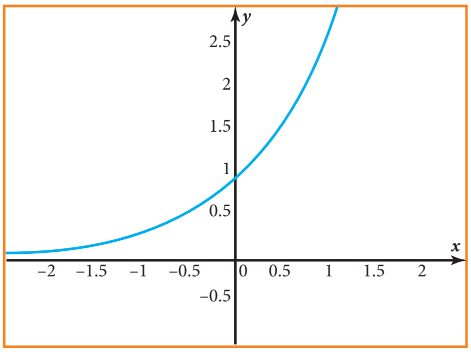
26. Una inversión de \$5 000 se compone continuamente, durante 3 años a una tasa de 4.26%, y a los siguientes 6 años a una tasa de interés de 7.13%. Calcula el valor de la inversión después de 9 años.

27. Utiliza una calculadora graficadora para trazar las gráficas de $f(x) = e^{0.9x}$, $g(x) = e^x$, $h(x) = e^{1.3x}$ en el mismo conjunto de ejes en la pantalla $[-2, 2] \times [0, 4]$. Explica el efecto de la constante k en la gráfica de $f(x) = e^{kx}$.

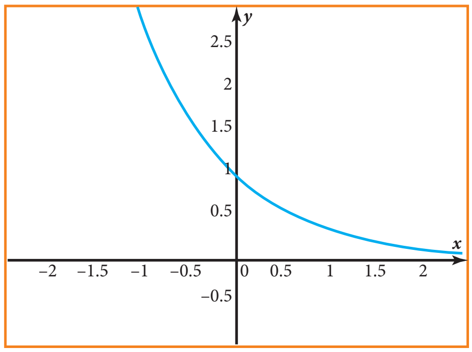
28. Utiliza una calculadora graficadora para trazar las gráficas de $f(x) = e^{-0.9x}$, $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = e^{-1.3x}$ en el mismo conjunto de ejes en la pantalla $[-2, 2] \times [0, 4]$. Explica el efecto de la constante k en la gráfica de $f(x) = e^{kx}$.

1.7 Funciones logarítmicas

Sabemos que la función exponencial $y = a^x$ es creciente si $a > 1$ y es decreciente si $0 < a < 1$; en cualquiera de los dos casos sus gráficas son como las que aparecen en las siguientes figuras:



Función exponencial creciente ($a > 1$)



Función exponencial decreciente ($0 < a < 1$)

Utilizando la prueba de la línea horizontal, podemos concluir que la función exponencial $y = a^x$ (ya sea creciente o decreciente) tiene **inversa** y sabemos también que para encontrarla es necesario despejar la variable independiente x en términos de la variable dependiente y; el problema para despejarla es que se encuentra en el exponente, por lo que ahora veremos una estrategia para despejar variables que se encuentran en exponentes y esto nos conducirá a definir la **función logarítmica**.

Construcción Iniciemos resolviendo la ecuación $8^x = 64$.

Observa que el lado izquierdo de la igualdad es una función exponencial con base 8. Para determinar el valor de x que satisfaga la ecuación basta con responder a la siguiente pregunta:

¿A qué exponente x hay que elevar la base 8 para obtener el número 64? Es obvio que el valor de x debe ser 2, porque $8^2 = 64$.

Este número $x = 2$ recibe el nombre de **logaritmo base** 8 de 64 y se denota por $2 = \log_8 64$.

Si quisiéramos resolver la ecuación $10^y = 1\,000$, lo primero que debemos notar es que la función exponencial, del lado izquierdo de la igualdad tiene base 10, así que para determinar el valor de y que satisfaga la ecuación debemos encontrar el exponente y al que hay que elevar la base 10 para obtener el número 1 000.

La respuesta es $y = 3$, porque $10^3 = 1\,000$.

Este número $y = 3$ recibe el nombre de logaritmo base 10 de 1 000 y se denota por $3 = \log 1\,000$.

Nota Cuando la base que se está utilizando es la base 10, no se acostumbra escribir la base. Así que, siempre que veamos escrito $\log n$, debemos sobreentender que la base corresponde a la base 10.

Ahora ya tenemos una estrategia para encontrar la inversa de la función exponencial $y = a^x$, sabemos que hay que despejar x para hacerlo podemos escribirla como $a^x = y$, que es la forma que tienen las ecuaciones de los ejemplos anteriores. Como x es el exponente al que hay que elevar la base a para obtener el número y, entonces x debe ser el **logaritmo base *a* de *y*** que se denota por $x = \log_a y$; de esta forma tenemos ya despejada la variable que está en el exponente.

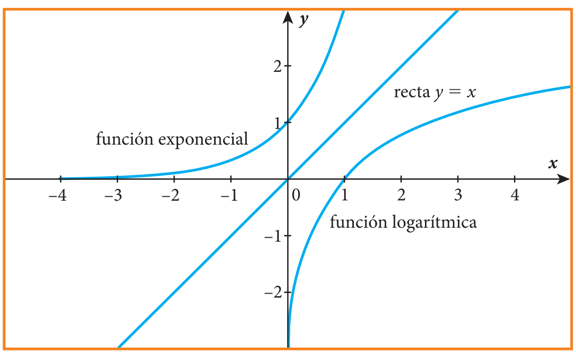
Función logarítmica de base *a*

> **La función logarítmica de base *a* se define como la inversa de la función exponencial de base *a***
>
> **Es decir, $x = \log_a y$ si y sólo si $a^x = y$**
>
> **en donde $x > 0$ y *a* es un número real positivo diferente de uno.**

El dominio de la función $\log_a x$ es el conjunto de valores de x, tal que $x > 0$ y su imagen es el conjunto de todos los números reales.

Gráfica de la función logarítmica

Ya que la función logarítmica de base a es la inversa de la función exponencial base a, podemos dibujar su gráfica reflejando la gráfica de la función exponencial respecto a la línea $y = x$; esto puede observarse en la siguiente figura:



Función logaritmo natural

En la sección anterior encontramos el valor del número $e = 2.71828182846\ldots$ Este número se usa con mucha frecuencia como base de una función exponencial; se utiliza tanto, que recibe el nombre de **base natural**.

Para resolver la ecuación $e^x = y$, debemos encontrar el exponente x al que hay que elevar la *base natural e* para obtener el número y. Si seguimos la lógica de los ejemplos anteriores, diríamos que x debe ser el logaritmo base e de y; sin embargo, cuando en la función exponencial se usa como base la base natural e, el exponente x recibe el nombre de **logaritmo natural** y se denota como $x = \ln y$.

> **La función logaritmo natural se define como la inversa de la función exponencial de base *e* y se denota como "ln"**
>
> **Es decir $x = \ln y$ si y sólo si $e^x = y$**
>
> **en donde $y > 0$.**

El dominio de la función $\ln x$ es el conjunto de valores de x tales que $x > 0$ y la imagen es el conjunto de todos los valores reales.

Ejemplo 1 Resuelve la ecuación $10^t = 5$ y encuentra el valor numérico del exponente t.

Solución Para resolver la ecuación dada debemos despejar t y su valor es el logaritmo base 10 de 5, que en forma logarítmica se escribe como $t = \log 5$; para obtener el valor numérico de log 5, utiliza tu calculadora y tendrás como resultado que $t = 0.\ 698970$.

Ejemplo 2 Supón que se depositaron \$20 000 en una cuenta bancaria y después de un año el saldo en la cuenta es de \$21 940. Si el banco capitalizó el interés continuamente y no se hizo ningún otro depósito ni retiro, ¿cuál fue la tasa nominal que pagó el banco?

Solución Para contestar a la pregunta, primero debemos plantear la ecuación que describa la situación anterior. De acuerdo con los datos del enunciado, sabemos que corresponde a un modelo exponencial con base e y que cumple la siguiente igualdad:

$$\text{Saldo después de un año} = (\text{depósito inicial})e^{tasa}$$

Al sustituir los valores dados quedaría la ecuación 21.940 = 20 000e^r. Para resolverla hay que despejar el exponente r. Primero pasamos dividiendo el 20 000 al lado izquierdo de la igualdad, para obtener la ecuación

$$1.097 = e^r.$$

El valor del exponente r es el logaritmo natural de 1.097, que en forma logarítmica se escribe como $r = \ln 1.097$.

Para encontrar el valor numérico de ln 1.097, utiliza tu calculadora.

¿Qué número obtuviste? r = _______________ .

El valor obtenido representa la tasa nominal que pagó el banco.

Ejemplo 3 Resuelve la ecuación $2 = 3^x$ y encuentra el valor numérico del exponente x.

Solución ¿Qué debemos hacer para resolver la ecuación? ____________________ .

Escribe el exponente x en forma logarítmica, x = ____

____

Lo podrás resolver directamente si en tu calculadora aparece la tecla $\boxed{\log_a x}$.

Para los casos en que la calculadora no tiene la tecla de la función logarítimca base a necesitamos tener otra estrategia para resolver la ecuación; a continuación presentamos una lista de propiedades que te serán útiles para resolver tanto ecuaciones exponenciales como logarítmicas y con las que siempre podrás encontrar el valor numérico del logaritmo.

Propiedades de los logaritmos

Las propiedades de los logaritmos tienen múltiples aplicaciones, por ahora las utilizaremos solamente para resolver ecuaciones exponenciales, es decir, para *despejar variables que se encuentran en un exponente.*

Cuando necesitamos resolver una ecuación exponencial de base 10, se recomienda utilizar el logaritmo base 10, log y para resolver ecuaciones exponenciales de base e, se utiliza el logaritmo natural ln.

Para resolver ecuaciones exponenciales con bases diferentes de la 10 y de la e, se puede utilizar cualquiera de los dos tipos de logaritmos; sin embargo, aquí utilizaremos los logaritmos naturales.

Logaritmo base 10
Propiedades
1. $\text{Log}\,(AB) = \text{Log}\,A + \text{Log}\,B$
2. $\text{Log}\left(\dfrac{A}{B}\right) = \text{Log}\,A - \text{Log}\,B$
3. $\text{Log}\,A^B + B\,\text{Log}\,A$
Identidades
4. $\text{Log}\,(10^A) = A$
5. $10^{\text{Log}\,A} = A$
Valores especiales
6. $\text{Log}\,(10) = 1$
7. $\text{Log}\,(1) = 0$
Logaritmo natural (base e)
Propiedades
1. $\ln\,(AB) = \ln A + \ln B$
2. $\ln\left(\dfrac{A}{B}\right) = \ln A - \ln B$
3. $\ln A^B = B \ln A$
Identidades
4. $\ln(e^A) = A$
5. $e^{\ln A} = A$
Valores especiales
6. $\ln e = 1$
7. $\ln 1 = 0$

Ejemplo 4 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales, utilizando las propiedades de los logaritmos.

a) $2 = 3^x$

b) $1.5 \cdot 2^{3x} = 2e$

Solución

- Observa que la variable que debemos despejar aparece en el exponente, por lo que para despejarla debemos convertirla en una ecuación logarítmica. Aplicamos el logaritmo natural en ambos lados de la ecuación y obtenemos:

$$\ln 2 = \ln 3^x.$$

Si aplicamos la propiedad 3 de los logaritmos naturales, bajamos el exponente, el cual queda multiplicando al logaritmo natural de 3:

$$\ln 2 = x \cdot \ln 3.$$

Como la variable ya no aparece en el exponente, ya es posible despejarla; pasamos el ln 3 dividiendo y obtenemos:

$x = \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$, obtenemos su valor con una calculadora y tenemos que $x = 0.6309297$.

Este valor representa el número al que hay que elevar el 3 para que dé como resultado 2.

- Observa que la variable que debemos despejar aparece en el exponente, por lo que para despejarla debemos convertirla en una ecuación logarítmica. Aplicamos en el logaritmo natural en ambos lados de la ecuación y obtenemos:

$$\ln (1.5 \cdot 2^{3x}) = \ln (2e^x).$$

En ambos lados de la ecuación aparece dentro del paréntesis un producto (multiplicación), por lo que primero debemos utilizar la propiedad 1 para separar los factores. Al hacerlo tenemos que:

$$\ln 1.5 + \ln 2^{3x} = \ln 2 + \ln e^x.$$

En el lado izquierdo utilizamos la propiedad 3 para bajar el exponente y en el lado derecho utilizamos la propiedad 4 que nos indica que el logaritmo natural elimina a la función exponencial base *e* (por ser funciones inversas una de la otra) y como resultado queda solamente el exponente:

$$\ln 1.5 + 3x \cdot \ln 2 = \ln 2 + x.$$

Para despejar la variable, dejamos en una lado de la ecuación los términos que tienen *x* y en el otro lado los que no tienen. Al hacerlo obtenemos:

$$3x \cdot \ln 2 - x = \ln 2 - \ln 1.5$$

En el lado izquierdo sacamos la *x* de factor común y, por último, despejamos:

$$x(3 \ln 2 - 1) = \ln 2 - \ln 1.5, \text{ entonces}$$

$$x = \frac{\ln 2 - \ln 1.5}{3 \ln 2 - 1} = 0.26651009.$$

Ejercicio 1 Resuelve para t la siguiente ecuación:

$$5(4^t) = 7(3^{2t}).$$

Solución Para despejar t, ¿puedes bajarla directamente del exponente? ______________

¿Qué necesita tener la ecuación para poder bajarla? ____

Aplica propiedades y resuelve la ecuación.

Nota En cada uno de los siguientes ejercicios no enfatizaremos el planteamiento de la función, pues es algo que ya hicimos con detalle en las secciones anteriores. Enfatizaremos el uso del logaritmo natural para contestar la pregunta planteada.

Ejercicio 2 La población de una ciudad crece exponencialmente a razón de 2.5% cada dos años.

De seguir creciendo de esta manera, ¿dentro de cuántos años se duplicará la población?

Solución Primero deberás plantear la ecuación para la población como una función del tiempo.

La ecuación es: ____.

Utiliza la ecuación anterior para plantear la ecuación necesaria para encontrar el tiempo de duplicación de la población. ____

¡Reflexiona!

¿En dónde se encuentra la variable que se te pide? ____

¿Qué tienes que hacer para obtener la variable? ____

¡Resuélvelo!

Ejercicio 3

Uno de los principales contaminantes de un accidente nuclear, como el de Chernóbil, es el estroncio 90, que se desintegra exponencialmente a razón continua de 2.47% al año.

¿Cuál es la vida media del estroncio 90?

Solución Primero deberás plantear la ecuación para la cantidad de contaminante como una función del tiempo.

La ecuación es: ____ .

Utiliza la fórmula anterior para plantear la ecuación necesaria para obtener la vida media del estroncio 90.

____

¡Reflexiona!

¿En dónde se encuentra la variable que te pide? ______________________________

¿Qué tienes que hacer para obtener la variable? ______________________________

¡Resuélvelo!

Ejercicio 4 El precio de cierto artículo aumenta exponencialmente a razón continua. Si sabemos que en 3 años aumentó 60% de su valor original, ¿cuál es el tiempo de duplicación para el precio de ese artículo?

Solución Primero debes plantear la ecuación para el precio del artículo como una función del tiempo.

La ecuación es: ____ .

Utiliza la fórmula anterior para plantear la ecuación que te permita encontrar el tiempo de duplicación para el precio del artículo. ______________________________

¡Reflexiona!

¿En dónde se encuentra la variable que te pide? ______________________________

¿Qué tienes que hacer para obtener la variable? ______________________________

¡Resuélvelo!

Ejercicio 5 Una población de bacterias disminuye exponencialmente. Si en 3 días hay 20% de las que originalmente había, ¿cuál es la vida media de esa población?

Solución Primero deberás plantear la ecuación para la población de bacterias como una función del tiempo.

La ecuación es: ______________________________ .

Utiliza la ecuación anterior para plantear la ecuación necesaria para encontrar la vida media de la población de bacterias. ______________________________

¡Reflexiona!

¿En dónde se encuentra la variable que se te pide? ______________________________

¿Qué tienes que hacer para obtener la variable? ______________________________

¡Resuélvelo!

Ejercicio 6 ¿Cuánto tiempo tardará en triplicarse una inversión, si gana un interés de 9% compuesto bimestralmente?

Solución ¿Qué fórmula vas a utilizar? ______________________________

¿Qué variable te piden obtener? ______________________________

Cuál es el valor de:

Saldo $S =$ ____________ Depósito inicial $P =$ ____________ Tasa interés $r =$ ____________

Número de veces al año que se paga el interés $n =$ ______________________________ .

Sustituye los datos en la fórmula y calcula el valor indicado.

¿Qué tienes que utilizar para obtener la variable indicada? ______________________________

¡Resuélvelo!

Ejercicio 7 Una sustancia radiactiva disminuye exponencialmente. Si la vida media de la sustancia es de 25 días y la cantidad inicial es de 1 000 g, ¿cuándo quedará reducida a 20% de la que originalmente había?

Solución Primero deberás plantear la ecuación. La ecuación a utilizar es: ______________________________ .

Con la ecuación contesta la pregunta.

¡Reflexiona!

¿Qué variable conoces? ______________________________ ¿Qué variable te piden obtener? ________________________

¿Qué tienes que hacer para obtener la variable? ____

¡Resuélvelo!

Ejercicio 8 ¿Cuál fue la tasa de interés que se pagó en una inversión, si se tiene que en 3 años la inversión se duplicó? Supongamos un interés compuesto continuamente.

Solución ¿Qué fórmula vas a utilizar? ____

¿Qué variable se te pide obtener? _____________________

Cuál es el valor de:

Saldo $S =$ _____________________ Depósito inicial $P =$ _______________________ Tiempo $t =$ ______________________ .

Sustituye los datos en la fórmula y calcula el valor indicado.

¿Qué tienes que hacer para obtener la variable indicada? ____

¡Resuélvelo!

Conjunto de ejercicios de práctica 1.7

En los ejercicios 1 a 10 resuelve las ecuaciones.

1. $4^t = 2(3^t)$
2. $25^{x+2} = 5^{3x-4}$
3. $5e^t = 3$
4. $2e^x = e^{2x-1}$
5. $4(2^{2t/3}) = 7(6^t)$
6. $2.5(1.3)^y = 0.39(6^{2y})$
7. $\dfrac{P_0}{2} = P_0 e^{-2.1x}$
8. $(e^{4x+1})^3 = e^2$
9. $1.01(2.02^{-5x}) = 3.42(e^{-x/4})$
10. $20e^{t/5} = 100(1.84)^t$

Resuelve los siguientes problemas.

11. La siguiente tabla muestra cómo el precio de cierto artículo afecta las ventas.

p (pesos)	2.5	2.7	2.9	3.1	3.3
V (cientos de unidades)	384.16	274.4	196	140	100

a) Plantea la fórmula para la demanda en función del precio.
b) ¿Cuál fue el precio si se vendieron 50 cientos de unidades?

12. La siguiente tabla muestra la cantidad de sustancia tóxica, en miligramos, existente en el ambiente a las t horas del día 27 de marzo de 2003.

t	0	6	12	18	24
Q	17.8	8.6642	4.2163	2.0528	0.9992

a) Plantea una ecuación, suponiendo que la sustancia decrece exponencialmente a razón continua.
b) Utiliza la ecuación para determinar en cuántas horas la cantidad de la sustancia sería de 2.9423 mg.

13. La siguiente tabla muestra la población en cierta ciudad (en miles de habitantes) en el tiempo t (años) a partir de 1990.

t	0	3	6	9	12
P	520	1 100.84	2 330.48	4 933.62	10 444.48

a) Plantea una ecuación suponiendo que la población crece exponencialmente a una razón continua.
b) Utiliza la ecuación para determinar en qué año la población es de 99 094.48 miles de habitantes.

14. La siguiente tabla muestra las utilidades en miles de pesos, de una empresa durante sus primeros 5 años de operación.

t	1	2	3	4	5
U	129.3715	133.5114	137.7838	142.1929	146.743

a) Plantea la fórmula para la utilidad en función del tiempo.
b) De continuar con la misma tendencia, ¿a los cuántos años la utilidad será de \$177.27 miles de pesos?

15. Debido a un programa de planificación familiar, la población de cierta ciudad disminuye exponencialmente a razón continua de 0.6% cada año. De continuar esta tendencia, ¿cuál será la vida media de esa población?

16. El elemento radiactivo polonio disminuye exponencialmente a una razón continua de 0.71% por día. ¿Cuál es la vida media de esa sustancia?

17. El número de visitantes al famoso parque Disneylandia crece exponencialmente en periodos de vacaciones escolares. Si el número de visitantes en el tercer día de vacaciones fue 12% más respecto al inicio del periodo vacacional, ¿cuántos días tienen que pasar para que se duplique el número de visitantes?

18. La tasa de robos en la Ciudad de Monterrey tiene un comportamiento exponencial y se triplica cada 5 meses. Calcula el tiempo de duplicación.

19. La vida media de una sustancia radiactiva es de 3 meses. Si está disminuyendo exponencialmente a razón continua,

a) ¿cuál es la razón continua con que disminuye la sustancia?
b) ¿en cuántos meses quedará 5% de lo que había originalmente?

20. En un esfuerzo por disminuir costos, una compañía planea reducir su fuerza de trabajo exponencialmente a razón continua. Si actualmente emplea a 500 trabajadores y dentro de 12 meses tendrá 370, ¿cuál es la razón continua con que disminuye el número de trabajadores?

21. Una papelería estima que el valor de una máquina copiadora se deprecia exponencialmente a razón continua. Si el valor de compra fue de \$15 000 y a

los 3 años su valor es de $10 222.08, ¿cuánto tiempo transcurrirá para que su valor sea $3 500?

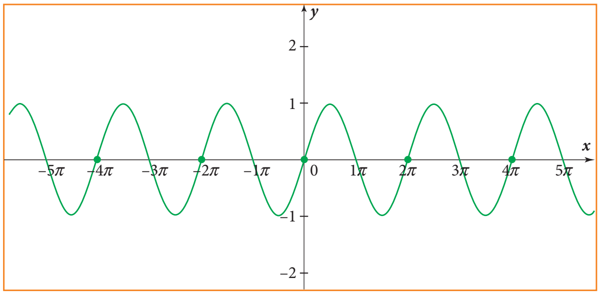
22. En una agencia de automóviles, el precio de contado de los automóviles tipo A crece exponencialmente cada año a una tasa de 8.816%. Si el modelo 2003 se vendió en $152 000, ¿qué modelo costará $213 115?
23. ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse una inversión si gana un interés de 13% compuesto continuamente?
24. ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que el valor de una inversión aumente 70% si se paga un interés de 6.4% compuesto continuamente?
25. Supongamos que inviertes $35 000 en bonos del gobierno japonés. Si el interés es de 7.3% compuesto anualmente, ¿cuántos años debes esperar para que tu inversión valga $80 000?
26. Si inviertes $180 240 en un banco que ofrece un interés es de 8.4% compuesto 13 veces al año, ¿cuántos años tienes que esperar para que tu inversión valga $298 000?
27. Si se depositan $18 500 en un banco y se desean tener $50 000 dentro de 4 años, ¿qué tasa de interés compuesto continuamente debe pagar el banco?
28. ¿Cuál será la tasa de interés de una inversión de $10 000 compuesta continuamente, si después de 3 años incrementa su valor a $18 320?
29. ¿Qué tasa de interés anual tiene un rendimiento efectivo anual de 7.58%, suponiendo un interés compuesto continuamente?
30. ¿Cuál fue la tasa de interés que se pagó en una inversión si se sabe que en 10 años la inversión triplicó su valor? Supón un interés compuesto continuamente.
31. Una inversión se compone continuamente durante 2 años a una tasa nominal de r%, y durante 4 años más a una tasa nominal de $2r$%. Si al término de 6 años se duplicó la inversión, determina el valor de r.
32. Una persona tiene una inversión de $300 000 en un banco que le paga una tasa de interés de 9% compuesta continuamente y desea utilizarla para comprar una propiedad con un valor actual de $528 000. Si ésta se devalúa a 3.8% anual, ¿cuánto tiempo tiene que esperar dicha persona para poder realizar la compra?

1.8 Funciones trigonométricas seno y coseno

Escuchar la radio, el sonido de algún instrumento de cuerda como el violín o el piano, la corriente que circula al encender la computadora o la lámpara del escritorio son eventos que de forma natural se realizan en la vida cotidiana y en los cuales se involucran fenómenos periódicos, es decir, se repite su comportamiento después de cierto intervalo. Otras situaciones donde se observa este tipo de evento son los ciclos comerciales, el movimiento de los planetas, los días y las noches, ciclos biológicos, es decir, todos aquellos fenómenos donde exista una repetición periódica. Este tipo de fenómeno puede ser modelado por medio de funciones trigonométricas, generalmente por las funciones seno y coseno.

Observa cómo la gráfica de la función seno se repite en el intervalo $[0, 2\pi]$ y en el intervalo $[2\pi, 4\pi]$.

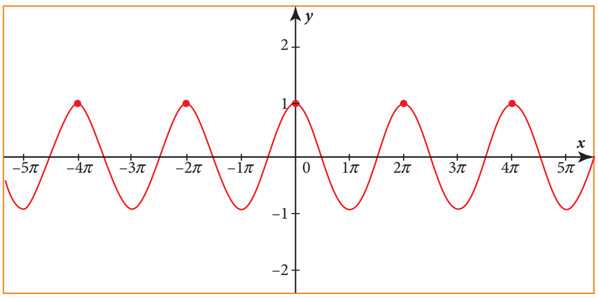
Función coseno



Algo similar ocurre con la función coseno, observa la gráfica.

También la gráfica se repite en el intervalo $[0, 2\pi]$ y en el intervalo $[2\pi, 4\pi]$.

Función coseno



Vemos entonces que las funciones trigonométricas se caracterizan por ser *periódicas*, es decir, se repiten en un mismo ciclo; este tipo de función la utilizaremos cuando identificamos una situación que presenta este comportamiento. Las ondas en las que estas funciones se descomponen reciben el nombre de *armónicas*.

Ecuación de las funciones trigonométricas

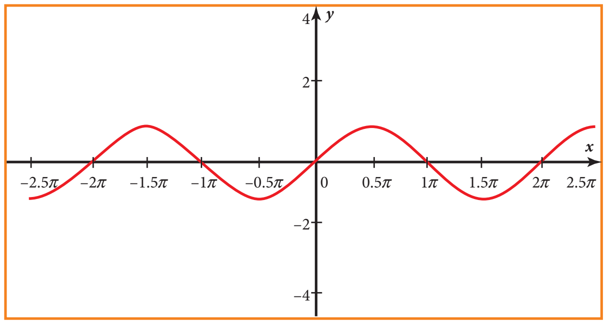
El modelo matemático de las funciones trigonométricas está compuesto por cuatro parámetros A, B, C y D, las ecuaciones generales son de la forma:

$$f(x) = y = A \text{ sen } B(x + C) + D$$

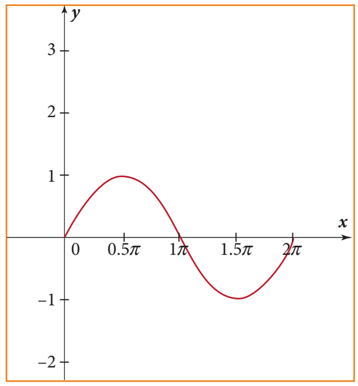
$$f(x) = y = A \cos B(x + C) + D$$

Veamos qué significa cada uno de los parámetros. El **parámetro *A*** determina la amplitud de la onda, es decir, los valores máximos y mínimos de la curva.

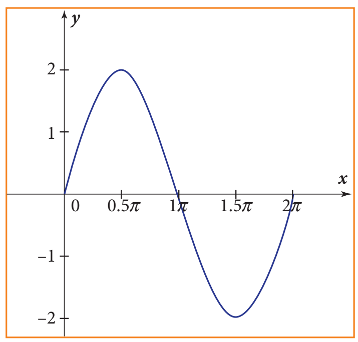
Si tomamos como base la función $f(x) = \text{sen}(x)$ donde el valor de $A = 1$, observemos cómo la onda se extiende de -1 a 1.



Las siguiente gráfica corresponde a un periodo de la función $y = \text{sen } x$.



Observa esta gráfica y responde las preguntas:



De acuerdo con lo anterior:

¿en que difieren ambas gráficas?

____

¿cuál es el valor de A para la segunda gráfica?

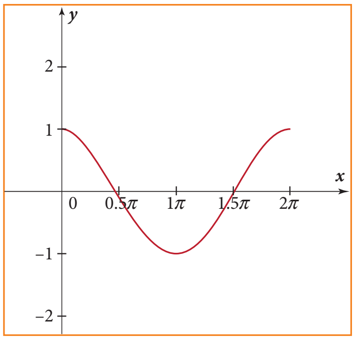
____

y, ¿cuál es su función matemática?

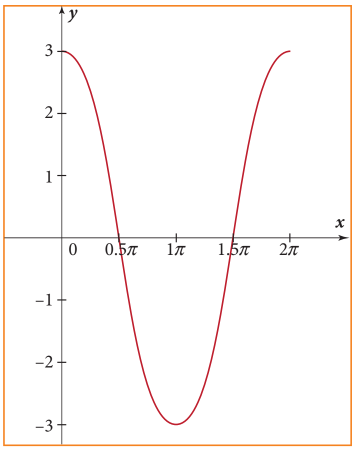
____

Ahora observa las siguientes gráficas de las funciones coseno. Considera como referencia la gráfica $f(x) = \cos(x)$.

Esta corresponde a un periodo de la función $y = \cos x$.



Ahora observa esta gráfica y responde las preguntas:



De acuerdo con lo anterior:

¿en que difieren ambas gráficas?

____

¿cuál es el valor de A para la segunda gráfica?

____

y, ¿cuál es la función matemática?

____

Conclusiones

¿El parámetro A tiene el mismo efecto en la función coseno que en la función seno? __________

Describe el efecto en la gráfica de la función:

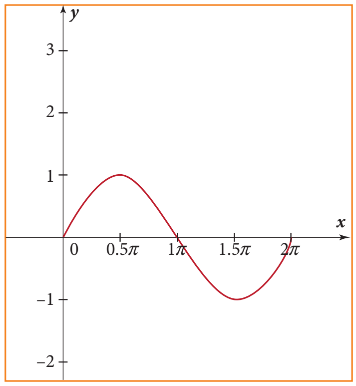
____

____

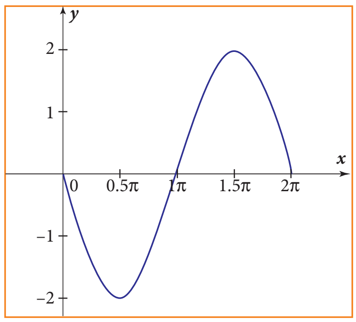
¿Qué sucede cuando el parámetro es negativo?

Observa las siguientes gráficas.

Esta gráfica corresponde a un periodo de la función $y = \text{sen } x$.



La siguiente gráfica corresponde a la función $y = -2 \text{ sen } x$.



¿Qué sucede si el parámetro A es negativo?

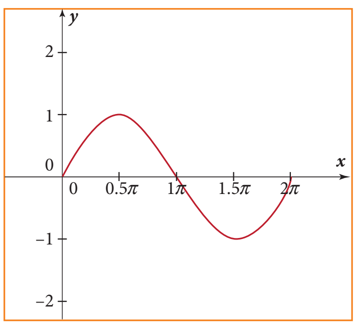
____

Describe las diferencias que observas entre esta gráfica y la gráfica anteriror:

____

____

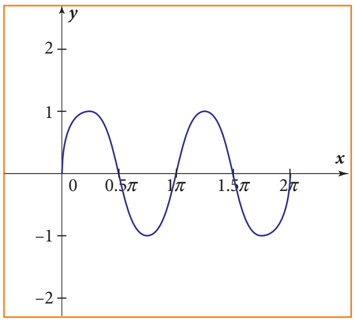
El **parámetro *B*** determina el periodo de una función. Observa las siguientes funciones.



Función seno:
$y = \text{sen } x$

Observa que del origen a 2π, la gráfica seno crece hasta llegar a su punto máximo, decrece, cruzal al eje x, sigue decreciendo hasta llegar a su punto mínimo, empieza a crecer y llega nuevamente al eje x en el valor de 2π. A la duración de este ciclo se le llama *periodo*, por lo que el parámetro B indica cuántos ciclos ocurren en 2π.

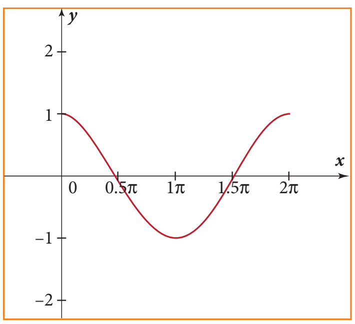
Ahora, observa la siguiente gráfica, correspondiente a la función $y = \text{sen}\ (2x)$



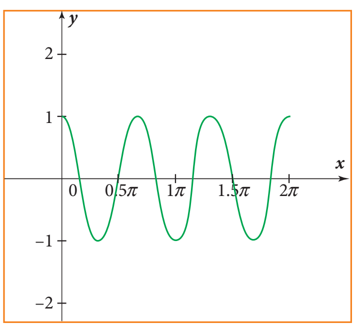
Función seno:
$y = \text{sen}\ (2x)$

Se visualiza que de 0 a 2π hay 2 ciclos de la función $y = \text{sen}\ x$, es por eso que el valor de su parámetro es $B = 2$.

Ahora, observa las siguientes gráficas y responde lo que se te indica.



Función coseno:
$y = \cos\ (x)$



Nueva función

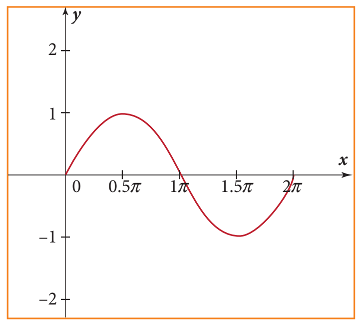
Compara la gráfica de la nueva función con la función de referencia $y = \cos\ (x)$ y determina el parámetro B de la nueva función = _________________.

Justifica tu respuesta. ______________________

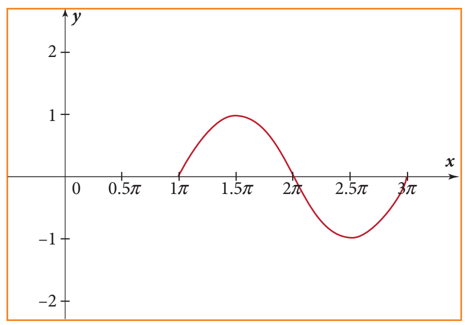
____.

Escribe una ecuación matemática para la nueva función: ___________________________________.

El **parámetro *C*** indica el desplazamiento horizontal o desfase, es decir, a partir del origen donde está comenzando. En la siguiente gráfica la función de referencia $f(x) = \text{sen}\ (x)$ se observa que comienza cortando en el origen y la gráfica que no es de referencia está comenzando en π, es decir, el parámetro $C = -\pi$, por lo tanto, el desfase en la ecuación matemática queda expresado como $f(x) = \text{sen}\ (x - \pi)$. Observa que si la función empieza a la derecha del origen el parámetro será negativo, y viceversa.

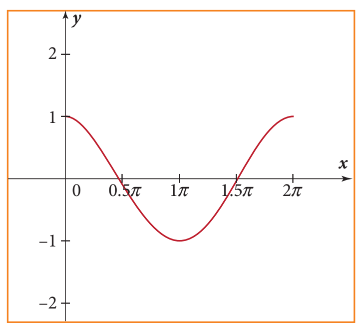


$f(x) = \text{sen}\ (x)$

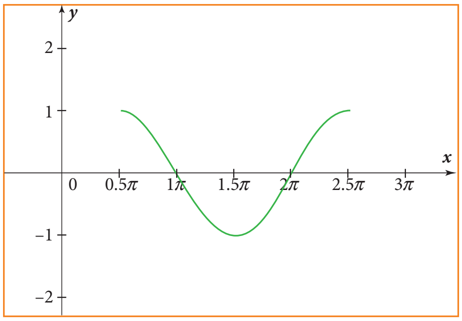


$f(x) = \text{sen}\ (x - \pi)$

Ahora, observa las siguientes gráficas y responde a las preguntas



Función coseno:
$y = \cos\ (x)$



Nueva función

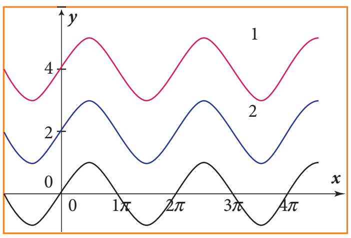
Observa la gráfica de la nueva función, compárala con la función de referencia $y = \cos(x)$ y determina el parámetro C de la nueva función: __________

Justifica tu respuesta. __________________

____

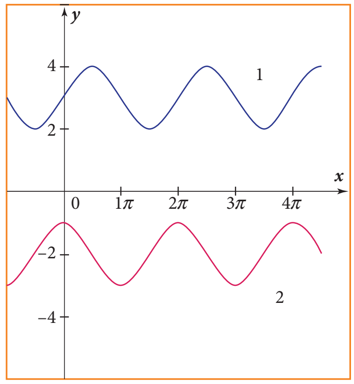
Escribe una ecuación matemática para la nueva función ______________________________.

Finalmente, el **parámetro *D*** indica el desplazamiento vertical, como si el eje de las x se desplazara sobre el eje de las y. Observa las gráficas:



La gráfica de referencia es $f(x) = \text{sen } x$ (gráfica en color negro) , la gráfica 1 tiene desplazamiento 4, entonces $D = 4$ mientras que la 2 tiene desplazamiento 2, entonces $D = 2$. Por lo tanto, la expresión matemática para las gráficas 1 y 2, son $f(x) = \text{sen }(x) + 4$ y $f(x) = \text{sen }(x) + 2$ respectivamente.

Ahora, observa las gráficas, determina el parámetro D y da la expresión matemática que le corresponde.



Gráfica 1

1. $D =$ __________
1. Expresión matemática = ______________

Gráfica 2

2. $D =$ __________
2. Expresión matemática = ______________

Resumiendo los parámetros

$$y = A \text{ sen } B(x + C) + D, \text{ o}$$
$$y = A \cos B(x + C) + D$$

para la función, escribe el efecto de cada parámetro.

$A =$ ______________________________

____

$B =$ ______________________________

____

$C =$ ______________________________

____

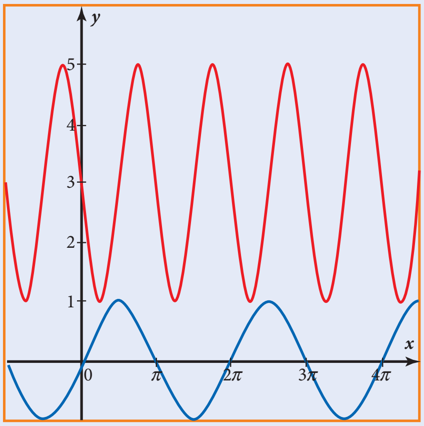
$D =$ ______________________________

____

¡A trabajar!

Observa las gráficas (de referencia y de no referencia); luego determina los parámetros y da la expresión matemática que le corresponde a la gráfica que no es de referencia.

Ejercicio 1



Solución

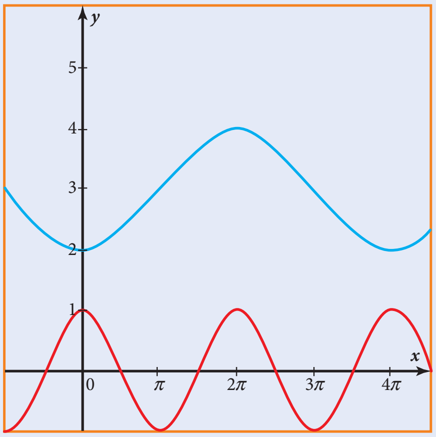
$A =$ ____________________,

$B =$ ____________________,

$C =$ ____________________ y

$D =$ ____________________.

Ecuación matemática ____________________



$A =$ ____________________,

$B =$ ____________________,

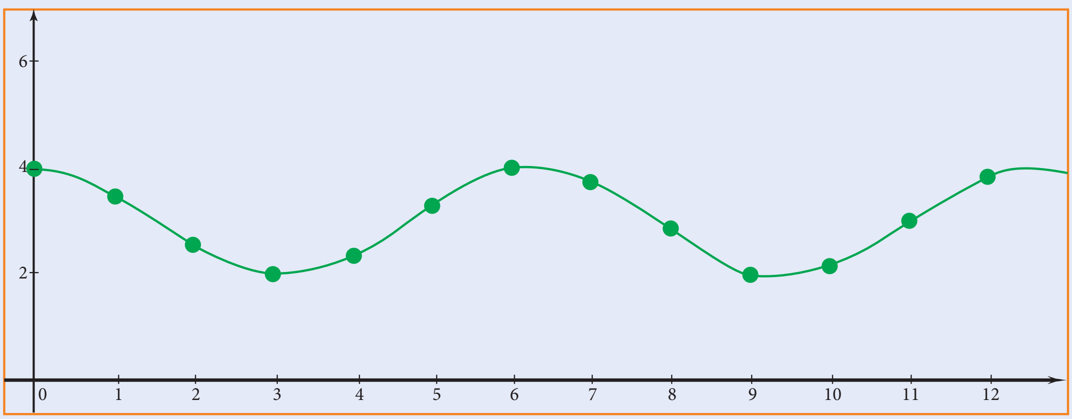
$C =$ ____________________ y

$D =$ ____________________.

Ecuación matemática ____________________

Ejercicio 2

Una de las aplicaciones de las funciones trigonométricas son las fluctuaciones mensuales de las ventas de un almacén en periodos a corto plazo se pueden modelar mediante la siguiente función si las ventas se miden en miles de unidades y el tiempo en meses.



Solución *a*) Plantear las ecuación para la ventas mensuales en función del tiempo.

¿Qué ecuación vas a utilizar? ______________________________ ¿Por qué? ____

Identifica el valor de los parámetros y da la ecuación.

Ejercicio 3 El 19 de septiembre de 1985 se produjo un sismo que causó gran destrucción en México , especialmente en el Distrito Federal. La UNAM ha trabajado intensamente en el estudio de este lamentable fenómeno; según datos de expertos se presentó un movimiento prácticamente armónico de 2 segundos de periodo y una duración aproximada de 2 minutos. Durante este tiempo la magnitud del terremoto estuvo oscilando entre 7.8 y 8.2 grados de la escala de Richter.

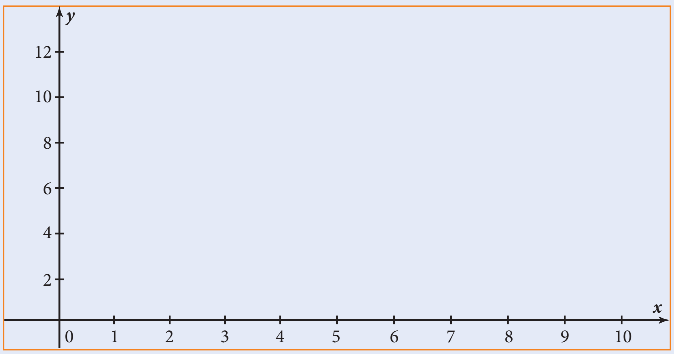
Fuente: http://www.ssn.unam.mx/website/jsp/Sismo85/sismo85_inf.htm, recuperado el 8 de marzo de 2011.

Solución *a*) Plantea la ecuación para el comportamiento del terremoto.

¿Qué ecuación vas a utilizar? ______________________________ ¿Por qué? ____

Plantea la ecuación con base en la información proporcionada:

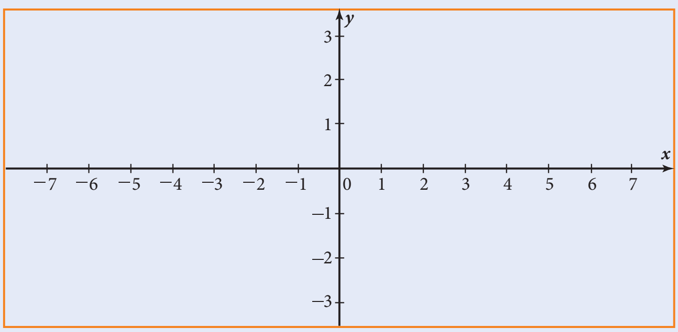
b) Dibuja una gráfica que describa este fenómeno natural. Escribe en cada eje la variable correspondiente.



Ejercicio 4 El oído es capaz de distinguir unos sonidos de otros porque es sensible a las diferencias que puedan existir entre ellos en lo que concierne a alguna de las tres cualidades que caracterizan todo sonido: intensidad, tono y timbre. Aun cuando todas ellas se refieren al sonido fisiológico, están relacionadas con diferentes propiedades de las ondas sonoras. Estas ondas son una aplicación más de las funciones armónicas; veamos un ejemplo.

Considera un sonido emitido por un instrumento de cuerda cuya gráfica se representa por la función $y = 3$ sen $(2x)$.

Solución *a*) Dibuja la gráfica para el sonido, marca en los ejes la variable que estás midiendo.



b) ¿Qué significa el 3 multiplicando a la función y qué efecto tiene en el sonido? ________________

____

____.

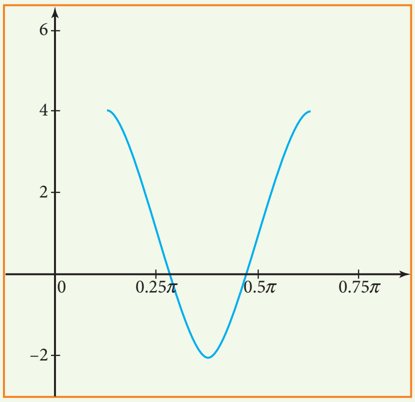
c) ¿Qué significa el 2 multiplicando a la variable *x* y qué efecto tiene en el sonido? ______________

____

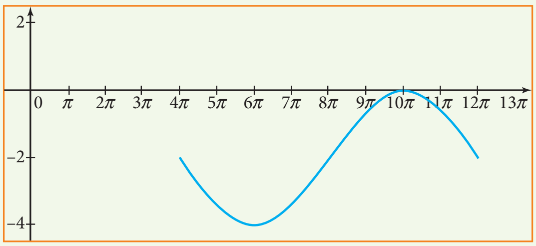
____.

En los ejercicios del 1 al 4, determina la función $y = A \operatorname{sen} B(x + C) + D$ o $y = A \cos B(x + C) + D$, según sea el caso, para la gráfica dada.

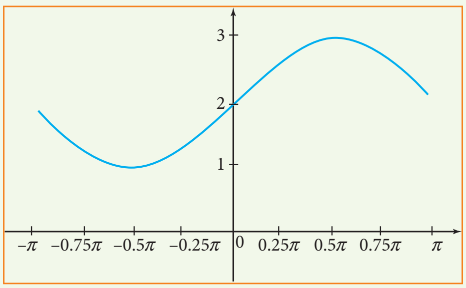
1.



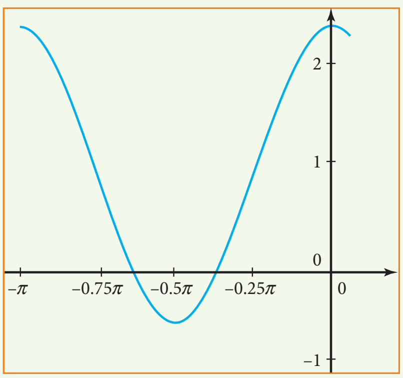
2.



3.



4.



En los ejercicios del 5 al 8, dibuja la gráfica para la función trigonométrica dada, describe el efecto de los parámetros.

5. $y = 2 \operatorname{sen} x + 1$
6. $y = -\cos(2x)$
7. $y = \operatorname{sen}(x + 1) - 1$
8. $y = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

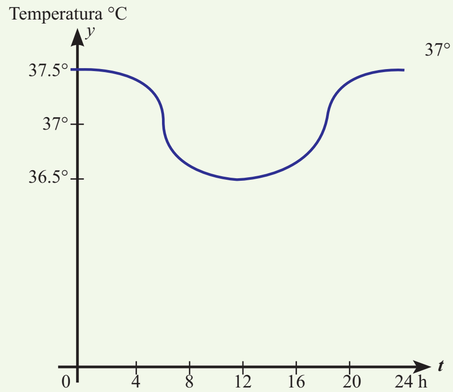
Resuelve los siguientes problemas de aplicaciones.

9. Las ondas senoidales son usadas para modelar diversos fenómenos, como radio, sonido o luz. Una alta frecuencia de radio requiere un número muy grande de ciclos por segundo. Si el eje x representa el tiempo, entonces el periodo de una función seno es el tiempo (eje x) que se requiere para completar un ciclo, y el recíproco de ese número indica el número de ciclos por una unidad de tiempo, a esto se le llama **frecuencia**. Por lo tanto, la frecuencia F está dada por $1/P$.

   Si la onda de sonido del piano está dado por $y = \operatorname{sen}(524\,\pi t)$, determina:

   a) El periodo
   b) La frecuencia (ciclos por segundo)

10. La temperatura promedio del cuerpo humano se encuentra alrededor de los 37 °C. Si la temperatura de una persona estuvo variando en el transcurso del día alrededor de los 37 °C, siendo en promedio las temperaturas normales 37.5 °C como máxima y 36.5° como mínima, como se muestra en la siguiente gráfica, determina los parámetros y da una expresión matemática que modele el fenómeno.



11. La profundidad de agua en un tanque oscila cada 4 horas. Si la profundidad más pequeña es de 0.95 m y la más grande es de 2.05 m, plantea una fórmula para la profundidad en términos del tiempo

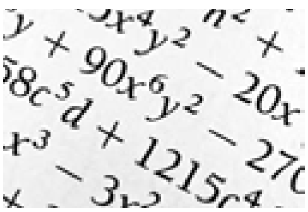
12. Un sistema de masa-resorte oscila una vez cada 1.3 seg entre 0.04 y 0.025 m, determina una función que describa el movimiento.

13. La siguiente tabla muestra las temperaturas registradas durante determinado día en la ciudad de Monterrey, Nuevo León.

    Determina los valores de los parámetros para que la función $T(t) = A \cos(Bt) + C$ modele el comportamiento de la temperatura en función del tiempo. Dibuja la gráfica de la función.

Tiempo (horas)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Temperatura (grados centígrados)	15	18	20	25	20	18	15	18	20	25	20	18	15

1.9 Nuevas funciones



En ocasiones una sola función no es suficiente para modelar el comportamiento de dos variables, por lo que puede requerir de una operación con dos o más funciones como una suma, resta, multiplicación, división, etcétera.

El resultado de estas operaciones es una nueva función. Veamos ahora diferentes formas de combinar las funciones anteriores dando como resultado una nueva función.

Suma, resta, producto y cociente de dos funciones

Para realizar cualquiera de las operaciones básicas entre funciones, simplemente efectúa la operación entre los valores de las funciones y, de ser posible, simplifica la expresión mediante las reglas algebraicas. Por ejemplo:

- Suma de funciones: si $f(x) = x^2 + 5$ y $g(x) = x - 2$, la suma de f y g será $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$$= (x^2 + 5) + (x - 2)$$
$$= x^2 + x + 3$$

- Resta de funciones: para restarlas se debe especificar si se quiere $f - g$ o $g - f$, ya que la resta no es *conmutativa* (es decir, no se obtiene el mismo resultado). Supongamos que se quiere $f - g$,

$$\begin{aligned}(f - g)(x) &= f(x) - g(x)\\ &= (x^2 + 5) - (x - 2)\\ &= x^2 + 5 - x + 2\\ (f - g)(x) &= x^2 - x + 7\end{aligned}$$

- Multiplicación de funciones: el producto de f y g se denota por fg. Esta operación cumple con la conmutatividad, pues da el mismo resultado multiplicar fg que gf, recuerda que el orden de los factores no altera el producto. El resultado de una multiplicación de funciones se obtiene de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= f(x)g(x)\\ &= (x^2 + 5)(x - 2)\\ (fg)(x) &= x^3 - 2x^2 + 5x - 10\end{aligned}$$

- División de funciones: el cociente, al igual que la resta, no es conmutativo. Supongamos que queremos f/g:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2+5}{x-2}$$

No profundizaremos en este tipo de operaciones ya que, como te habrás dado cuenta, es muy sencillo realizarlas.

Función compuesta

Sea $f(x)$ y $g(x)$ un par de funciones.
La **función compuesta**
denotada $f \circ g$ se define como $f \circ g = f(g(x))$

Nota Observa que la composición es equivalente a *evaluar una función en otra función*. Para hacerlo, sustituimos la segunda función en las x de la primera función. El resultado es una nueva función.

La composición tampoco es conmutativa, ya que $f \circ g \neq g \circ f$.

La composición también puede ser $g \circ f$, incluso $f \circ f$ o $g \circ g$. Éstas quedarían definidas como:

$$\begin{aligned}g \circ f &= g(f(x))\\ f \circ f &= f(f(x))\\ g \circ g &= g(g(x))\end{aligned}$$

Ejemplo 1 Si las funciones f y g están definidas como $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$ y $h(x) = \sqrt{x}$,

a) efectúa la composición $g \circ h$.

b) Efectúa la composición $h \circ g$.

Solución *a*) Efectuar la composición de $g \circ h$ es equivalente a escribir la nueva función $g(h(x))$.

Para obtenerla debemos escribir la función $h(x)$ en las x de la función $g(x)$. Al efectuar la composición, obtenemos:

$$g(h(x)) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

b) Efectuar la composición de $h \circ g$ es equivalente a escribir la nueva función $h(g(x))$.

Para obtenerla debemos escribir la función $g(x)$ en las x de la función $h(x)$. Al efectuar la composición, obtenemos:

$$h(g(x)) = \sqrt{\left(\frac{x}{x+1}\right)}$$

Ejercicio 1 Efectúa las composiciones indicadas para las funciones:

$$f(x) = \ln(2x + 1) \quad \text{y} \quad g(x) = e^x.$$

a) $f \circ g$ *b*) $f \circ f$ *c*) $g \circ g$

Solución *a*) Escribe cómo se define la función compuesta: $f \circ g =$ ______________________.

Describe el proceso para efectuar la composición ______________________

______________________.

¡Resuélvelo!

b) Escribe cómo se define la función compuesta: $f \circ f =$ ______________________.

Describe el proceso para efectuar la composición ______________________

______________________.

¡Resuélvelo!

c) Escribe cómo se define la función compuesta: $g \circ g =$ ______________________.

Describe el proceso para efectuar la composición ______________________

______________________.

¡Resuélvelo!

Ejercicio 2 La siguiente función ya está compuesta. Identifica cómo es $f(x)$ y cómo es $g(x)$.

$$h(x) = g \circ f = \sqrt{\ln x + 3}$$

Nota La respuesta no es única. Identifica dos soluciones.

Solución ¿Cuáles funciones identificas en $h(x)$? ______________________________________.

Entonces, $f(x) =$ ________________________ y $g(x) =$ ________________________________.

Comprueba tu respuesta efectuando la composición.

Otra solución es:

¿Qué otra función puedes tomar como $f(x)$? ______________________________

Entonces, ¿$g(x)$? ______________________________

Comprueba tu respuesta efectuando la composición.

Nota Cuando una función compuesta requiere ser descompuesta en dos funciones, la respuesta no es única, sólo comprueba que al efectuar la composición ésta se cumpla.

En los ejercicios 1 al 8, para cada par de funciones obtén las siguientes composiciones.

a) $f \circ g$ *c*) $f \circ f$
b) $g \circ f$ *d*) $g \circ g$

1. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+4}}$ $g(x) = 5^x$
2. $f(x) = 2e^{3x+5}$ $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$
3. $f(x) = \ln(x^2)$ $g(x) = e^x$
4. $f(x)=\sqrt{x^2+3x}$ $g(x) = x + 1$
5. $f(x) = x^3 + x + 1$ $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$
6. $f(x)=\sqrt{x-1}$ $g(x) = \ln(1 - 2x)$
7. $f(x) = e^{x^2}$ $g(x) = e^{x+4}$
8. $f(x)=3^{\sqrt{x}}$ $g(x) = x^5$

Encuentra posibles funciones *f(x)* y *g(x)* que den como resultado las composiciones de los problemas 9 al 16.

9. $g(f(x)) = \sqrt{\ln x}$
10. $g(f(x)) = \ln\sqrt{x}$
11. $f(f(x)) = e^{e^x}$
12. $f(f(x)) = \ln(\ln x)$
13. $f(g(x)) = \sqrt{x^2+5}$
14. $f(g(x)) = (x + 1)^3 - 2$
15. $g(g(x)) = (x^3 + 5) + 5$
16. $g(g(x)) = \sqrt[4]{x}$

Resuelve lo que se indica.

17. La demanda x de cierto artículo está dada por $x(p) = 5\,823 - 20p$, donde p es el precio unitario del artículo. El ingreso mensual I, obtenido de las ventas de este artículo, está dado por $I(p) = 5\,823p - 20p^2$. Expresa el ingreso en función de la demanda.

18. La demanda x de cierto artículo está dada por $x(p) = e^{-p}$, donde p es el precio unitario del artículo. El ingreso mensual I, obtenido de las ventas de este artículo está dado por $I(p) = pe^{-p}$. Expresa el ingreso en función de la demanda.

19. En la industria cervecera, el costo total de fabricar q cajas de cerveza está dado por $C(q) = 8q^2 + 2q + 1\,200$ (en miles de pesos) y la cantidad de cajas de cerveza producidas en las primeras t horas de trabajo está dada por $q(t) = 32t$.

    a) Expresa el costo total de fabricación en función de las horas de trabajo.
    b) Obtén el costo de producción después de 5 horas.

20. Una industria del calzado tiene un costo total de producción de $C(q) = 100 + 5q + q^2$, donde q son pares de zapatos. Si se fabrican $q(t) = 3t$ pares de zapatos en las primeras t horas del proceso de producción,

    a) Expresa el costo total en función de las horas de producción.
    b) Obtén el costo de producción después de 8 horas.

21. Una empresa construye q miles de viviendas por año, donde $q(r) = r^3 + 10$ y r es la tasa de interés hipotecaria. La tasa de interés varía de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$r(t)=8-\frac{2t}{4+t^2} \text{ a los } t \text{ años.}$$

    a) Expresa q en función del tiempo.
    b) Calcula el número de viviendas que construye la empresa a los 3 años.

22. La industria cafetalera colombiana tiene una función de demanda diaria de $q(p) = p^2 - 3p$ kilogramos de café, cuando el precio es de p pesos por kilogramo. Si dentro de t días el precio del café será de $p(t) = 4t^2 + t + 65$ pesos por kilogramo,

    a) expresa la demanda diaria de café en función del tiempo.
    b) ¿Cuántos kilogramos de café se venden en 20 días?

Funciones racionales

Las funciones racionales surgen de *dividir dos polinomios*. Ahora aprenderás a distinguir una función de este tipo y a dibujar su gráfica por medio de un sencillo análisis de su comportamiento.

> Una **función racional** tiene la forma $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

El dominio de $f(x)$ será el conjunto de números reales, a excepción de aquellos valores de x donde el denominador $Q(x)$ sea cero.

Las siguientes funciones son ejemplos de funciones racionales:

$$f(x)=\frac{1}{5x-3}\quad h(x)=\frac{3x^4-2x+1}{x^3-1}\quad g(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

Observa que tanto la función del numerador como la del denominador son funciones polinomiales.

Nota Las funciones racionales en ocasiones tienen **asíntotas horizontales** y **verticales**, veamos lo que representan y cómo obtenerlas.

Asíntotas verticales

Dado que este tipo de funciones tiene denominador, puede suceder que existan valores en los cuales el denominador sea cero; en los puntos donde eso ocurre decimos que la función *no existe*. En ocasiones, al dibujar la gráfica de la función racional podemos observar que la función se corta en ese número y que la gráfica se va al infinito (positivo o negativo); el número en el cual la función se comporta de esta forma se representa con una línea vertical punteada y se llama *asíntota vertical*.

Las asíntotas verticales pueden ser varias, una o ninguna, eso depende de la función racional que se analiza.

Cómo obtenemos las asíntotas verticales

De acuerdo con lo anterior podemos concluir que las asíntotas verticales se obtienen al igualar a cero el denominador y resolver la ecuación algebraica obtenida.

Ejemplo 1 Obtén las asíntotas verticales de la función racional $f(x)=\dfrac{x-1}{5x-3}$.

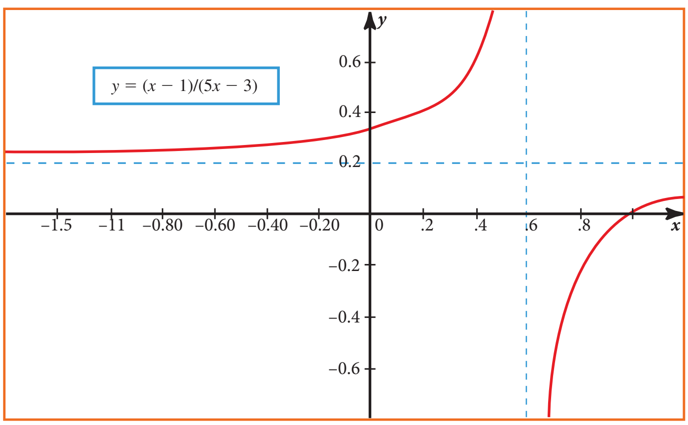
Solución Primero igualamos a cero el denominador, con lo que obtenemos la ecuación $5x - 3 = 0$.

Para resolverla hay que despejar el valor de x, es decir, $x = 3/5$.

En segundo lugar graficamos para ver el comportamiento de la ecuación.

Observa que la función se corta en $x = 3/5$ y que la gráfica se va al infinito (positivo o negativo) en los valores que se encuentran antes y después de ese número; por lo tanto, la función dada tiene una asíntota vertical en $x = 3/5$.

Nota En la función anterior el numerador y denominador no tienen factores comunes; cuando esto sucede se dice que la función racional está *simplificada al máximo*. Veamos qué ocurre en la gráfica de la función racional si esto no se cumple.



Qué sucede si la función racional no se simplifica al máximo

A reflexionar Resolveremos el siguiente ejemplo para descubrir lo que ocurre con las asíntotas verticales cuando la función no se encuentra totalmente simplificada.

Ejemplo 2 Para la función racional $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$ realiza lo que se te pide.

Solución *a*) Iguala el de nominador a cero y resuelve la ecuación.

____

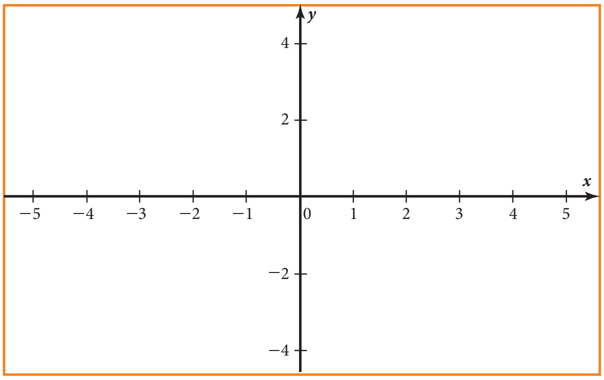
____

____

¿Será una asíntota vertical? ______________

____

b) Utiliza un *software* o una calculadora para dibujar la gráfica de la función dada.



c) ¿Aparece alguna asíntota vertical? ________

d) ¿Qué crees que puede pasar? ¿Cómo justificas este hecho?

____

______________________________________.

Nota Si la función racional no está simplificada (al máximo), el punto donde la función no existe puede ser una asíntota vertical o un hueco en la gráfica de la función.

Cuando simplificamos la función racional, factorizamos y cancelamos factores iguales en el numerador y denominador, obtenemos una nueva función que en ocasiones ya no es racional; es en este caso cuando el número con el cual se hace cero el denominador no es una asíntota vertical. Sin embargo, dado que la función original no estaba definida en ese punto, la gráfica debe interrumpirse ahí. El efecto gráfico ahora es un *hueco* que corta a la gráfica en el punto en el que la función original no existe.

Cómo determinar si es hueco o asíntota vertical

Cuando en una función racional igualamos a cero el denominador y resolvemos la ecuación, obtenemos los valores de x en los que la función *no existe*, sin embargo, en esos valores la gráfica puede tener una asíntota vertical o un hueco:

- Asíntota. Cuando la función racional está simplificada al máximo, los valores donde no existe la función (hacen cero el denominador) son las asíntotas verticales.
- Hueco. Cuando hay factores comunes en el numerador y en el denominador de la función racional y el grado del factor del numerador es mayor o igual al del denominador, la gráfica tiene un hueco. Estos factores se igualan a cero para obtener el valor donde existe el hueco de la gráfica.

Analicemos la siguiente función

$$f(x) = \frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-1)^3(x-3)}.$$

En $x = 1$ y $x = 3$ la gráfica de $f(x)$ tiene una asíntota vertical; ya que se eliminaron sólo 2 factores de $x - 1$ quedando uno en el denominador.

Ejemplo 3 Obtén las asíntotas verticales de la función racional

$$f(x) = \frac{(x-3)(2x-4)}{4x^2-16}.$$

Solución Para encontrar las asíntotas verticales, buscamos los valores donde la función no existe. Entonces, igualamos a cero el denominador y resolvemos la ecuación resultante.

Al resolverla obtenemos $x = 2$ y $x = -2$.

Ahora observamos la función y vemos que no está simplificada, ya que tiene factores comunes en el numerador y denominador; al factorizarla obtenemos $f(x) = \frac{(x-3)\cancel{(2x-4)}}{\cancel{(2x-4)}(2x+4)}$. De esto podemos concluir que la función dada tiene una asíntota vertical en $x = -2$, ya que corresponde al factor del denominador que no se canceló, y que tiene un hueco en $x = 2$, que corresponde al factor que se canceló.

Asíntotas horizontales

Las asíntotas horizontales representan el *comportamiento final* de la función racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, es decir, el valor al cual tiende $f(x)$ en los extremos del eje x, en $x \to -\infty$ y $x \to +\infty$.

Primero veamos, mediante un análisis numérico, el significado de una asíntota horizontal. Resolvamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4 Obtén las asíntotas horizontales de la función racional $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$.

Solución Para encontrar las asíntotas horizontales, evaluaremos la función con valores positivos de x muy grandes ($x \to +\infty$), por ejemplo,

Valor de x	Valor de $f(x)$
10 000	
100 000	
1 000 000	

¿A qué valor se acerca $f(x)$?

Ahora evalúala con los valores negativos muy grandes negativos $x \to -\infty$.

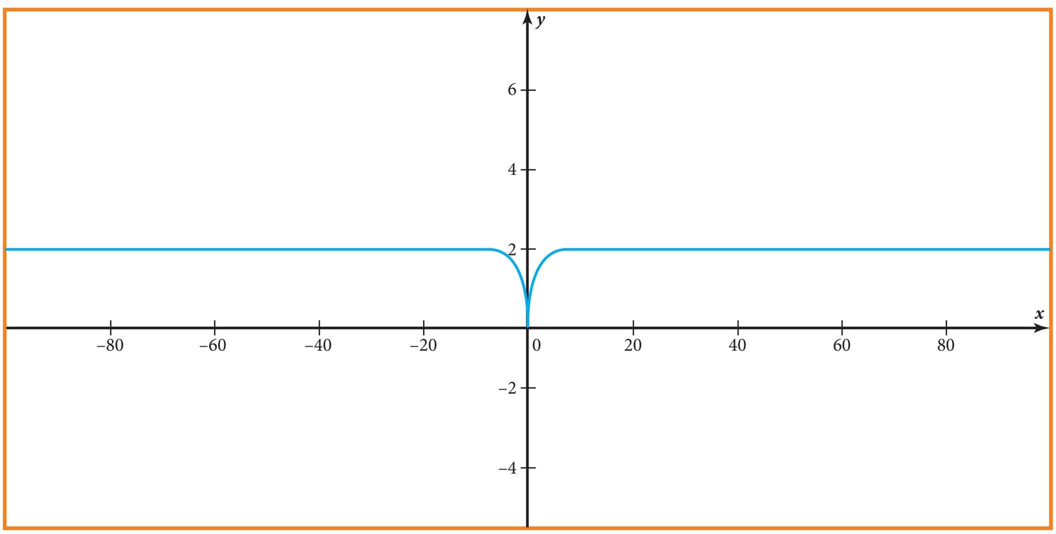
Valor de x	Valor de $f(x)$
−10 000	
−100 000	
−1 000 000	

¿A qué valor se acerca $f(x)$?

El número que obtuvimos en ambas evaluaciones representa la *asíntota horizontal*.

Al dibujar la gráfica de la función racional podemos observar que en los extremos del eje x, tanto por la derecha como por la izquierda, la función se acerca al número que obtuvimos como asíntota horizontal.

El análisis anterior se hizo para darle una interpretación geométrica a la asíntota horizontal. De aquí en adelante utilizaremos las siguientes reglas para obtener las asíntotas horizontales; éstas surgen de un análisis como el anterior, efectuado en diferentes funciones racionales.



En la función racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, si:

a) El grado de $P(x)$ < el grado de $Q(x)$ ⇒ la asíntota horizontal es $y = 0$.

b) El grado de $P(x)$ > el grado de $Q(x)$ ⇒ no existe asíntota horizontal; eso significa que en los extremos la gráfica de la función se va a infinito (positivo o negativo).

c) El grado de $P(x)$ = el grado de $Q(x)$ ⇒ la asíntota horizontal es $y = \dfrac{a}{b}$, donde a es el coeficiente principal del polinomio $P(x)$, y b es el coeficiente principal del polinomio $Q(x)$.

Ejemplo 5 Obtén las asíntotas horizontales de la función racional $f(x) = \dfrac{2x^2 - 10x + 12}{4x^2 - 16}$.

Solución Para obtener las asíntotas horizontales, observamos el grado del polinomio del numerador y del denominador y utilizamos la regla indicada de acuerdo con la situación que se presente, en este caso: el grado de $P(x)$ es 2 y el grado de $Q(x)$ también es 2, dado que el polinomio del numerador y denominador tienen el mismo grado, se utiliza la regla del inciso c) del cuadro anterior. Tenemos que la asíntota horizontal es:

$$y = \frac{\text{coeficiente principal de } P(x)}{\text{coeficiente principal de } Q(x)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Nota Observa que la función del ejemplo anterior no está simplificada al máximo. Comprueba que si la simplificas al máximo, la asíntota horizontal sigue siendo $y = 1/2$.

Ejercicio 1 Obtén las asíntotas horizontales y verticales de la función racional, después utiliza una calculadora con graficador para dibujar la gráfica y comprobar el resultado obtenido.

a) $f(x) = \dfrac{2x+5}{x^2-1}$

Solución

Asíntota vertical

¿Qué ecuación debes resolver para obtener la asíntota vertical? ______________________________.

Al resolverla obtenemos ______________________________

¿Está simplificada al máximo? ____________________

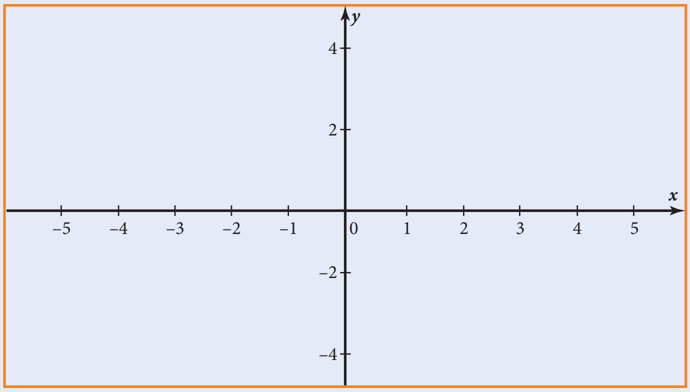
Asíntota(s) vertical(es) ______________________________

Asíntota horizontal

El grado de $P(x)$ es ____________________. El grado de $Q(x)$ es ____________________.

A partir del grado de los polinomios concluimos que la asíntota horizontal es ____________________.

Utiliza un graficador y dibuja la gráfica de la función racional.



b) $f(x) = \dfrac{3x^4-5}{x^2+1}$

Asíntota vertical

¿Qué ecuación debes resolver para obtener la asíntota vertical? ______________________________

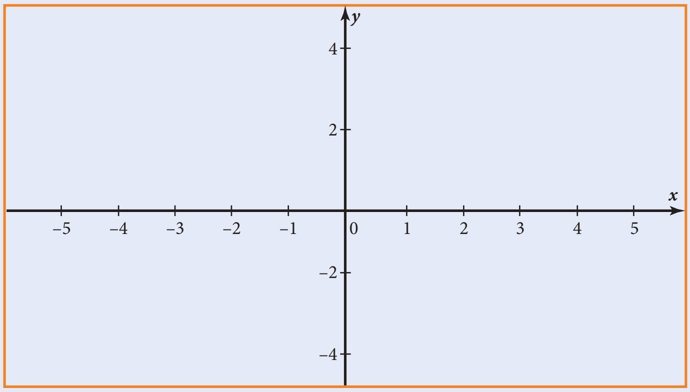
Al resolverla obtenemos como asíntota vertical ______________________________

Asíntota horizontal

El grado de $P(x)$ es ____________________. El grado de $Q(x)$ es ____________________.

A partir del grado de los polinomios concluimos que la asíntota horizontal es ____________________.

Utiliza un graficador y dibuja la gráfica de la función racional.



c) $f(x) = \dfrac{5x - 24x^3}{8x^3 + 1}$

Asíntota vertical

¿Qué ecuación debes resolver para obtener la asíntota vertical? ______________________________.

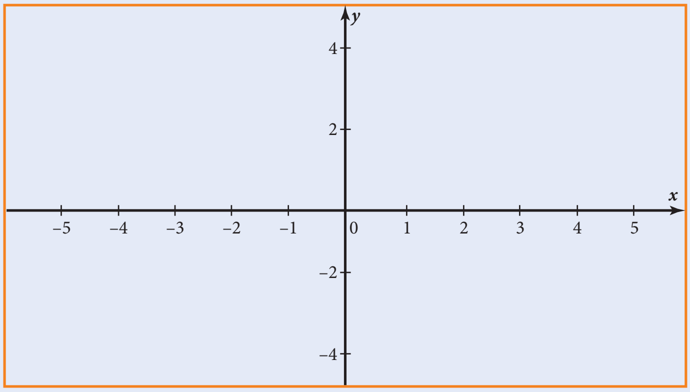
Al resolverla obtenemos como asíntota vertical ______________________________.

Asíntota horizontal

El grado de $P(x)$ es ____________________. El grado de $Q(x)$ es ____________________.

A partir del grado de los polinomios concluimos que la asíntota horizontal es ____________________.

Utiliza un graficador y dibuja la gráfica de la función racional.



Ejercicio 2 Obtén las asíntotas de la función y dibuja su gráfica. En las verticales, especifica si se trata de una asíntota o de un hueco y márcalo en la gráfica.

a) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$

Solución

Asíntota vertical

¿Qué ecuación debes resolver para obtener la asíntota vertical? ______________________________

Al resolverla obtienes ______________________________.

¿Está simplificada al máximo? ____________

Asíntota vertical en ____ .

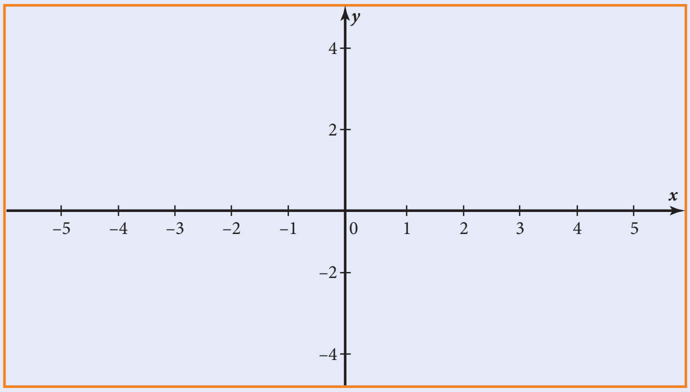
Hueco en _____________ .

Asíntota horizontal

El grado de $P(x)$ es ______________________________. El grado de $Q(x)$ es ___________________________.

A partir del grado de los polinomios concluimos que la asíntota horizontal es ____________________________.

Utiliza un graficador y dibuja la gráfica de la función racional.



b) $f(x)=\dfrac{2x^2-5x-3}{2x+1}$

Asíntota vertical

¿Qué ecuación debes resolver para obtener la asíntota vertical? ____

Al resolverla obtienes ____ .

¿Está simplificada al máximo? ____________________

Asíntota vertical en _____________________________________ .

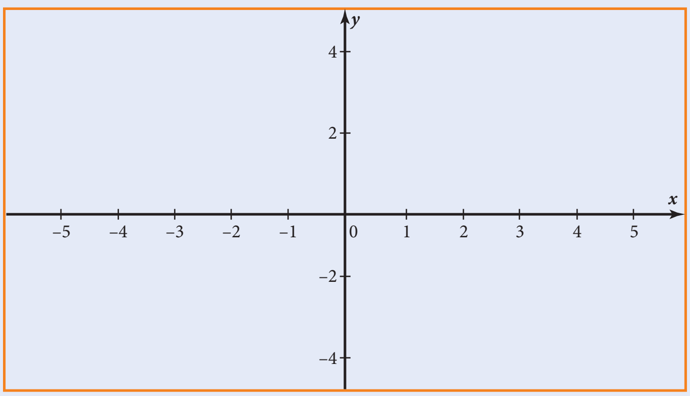
Hueco en ________________________.

Asíntota horizontal

El grado de $P(x)$ es ______________________________. El grado de $Q(x)$ es ___________________________.

A partir del grado de los polinomios concluimos que la asíntota horizontal es ____________________________.

Utiliza un graficador y dibuja la gráfica de la función racional.



Conjunto de ejercicios de práctica 1.9

En los siguientes ejercicios obtén las asíntotas de las funciones y dibuja su gráfica. Especifica si es asíntota o hueco y márcalo en la gráfica.

1. $f(x)=\dfrac{2x-x^2}{4-x^2}$
2. $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2-9x+20}$
3. $f(x)=\dfrac{5}{x^3+64}$
4. $f(x)=\dfrac{7x+6}{x^2-x}$
5. $f(x)=\dfrac{-2x-3+x^2}{x+1}$
6. $f(x)=\dfrac{x(x-3)^2(x-2)}{x^2-5x+6}$
7. $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2+16}$
8. $f(x)=\dfrac{x}{2x+7}$
9. $f(x)=\dfrac{1+x^3}{x}$
10. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+25}$

Otras funciones trigonométricas

La combinación de las funciones seno y coseno también dan como resultado nuevas funciones trigonométricas, al dividir dichas funciones se obtienen las funciones trigonométricas: tangente, cotangente, secante y cosecante, éstas se definen como:

1. $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$
2. $\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$
3. $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$
4. $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.

Entre las aplicaciones de estas funciones podemos mencionar: En topografía se puede determinar la altura de un edificio, teniendo la base y el ángulo. Por ejemplo, la Torre de Pisa fue construida sobre una base de arena poco consistente; debido a ello ésta se aparta cada vez más de su vertical. Originalmente tenía una altura de 54.6 m, aproximadamente. En 1990 un observador situado a 46 m del centro de la base de la torre, determinó un ángulo de elevación de 54º a la punta de la torre, el observador para determinar el desplazamiento (el hundimiento en el suelo es muy pequeño, comparado con la altura de la torre) aplicó la ley del seno para determinar el ángulo de inclinación y la ley del coseno para determinar el desplazamiento de la torre.

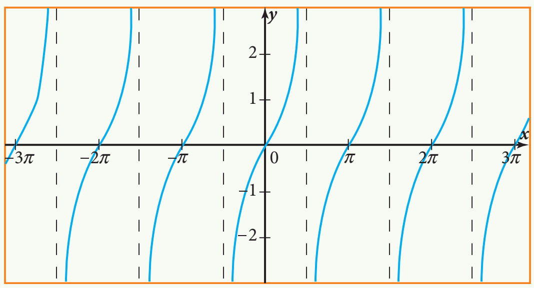
En óptica, en las dispersiones en prisma o cuando un rayo de luz atraviesa una placa de cierto material.

En la aviación, si dos aviones parten de una base aérea a la misma velocidad formando un ángulo y siguiendo en trayectorias rectas, se puede determinar la distancia que se encuentran entre los mismos.

El capitán de un barco puede determinar el rumbo equivocado del barco, siempre en línea recta, ordenando modificar el rumbo en grado para dirigirse directamente al punto destino correcto.

Cabe mencionar que para dar solución a este tipo de problemas también se utilizan identidades trigonométricas, el triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras, y como ya se mencionó, las leyes de seno y coseno.

La gráficas de estas nuevas funciones son:

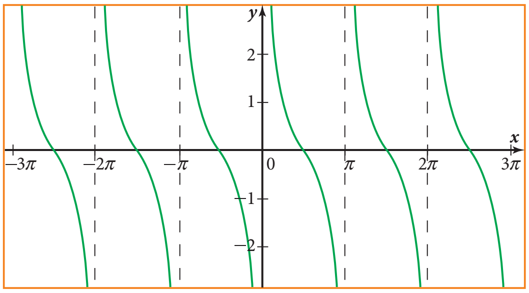


$y = \tan(x)$

Dominio = Reales − {$n\pi + \pi/2$, donde n es un número entero

Rango = Reales

Periodo = π

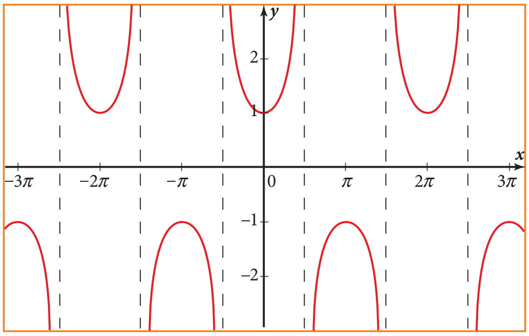


$y = \cot(x)$

Dominio = Reales − $\{n\pi\}$, donde n es un número entero

Rango = Reales

Periodo = π

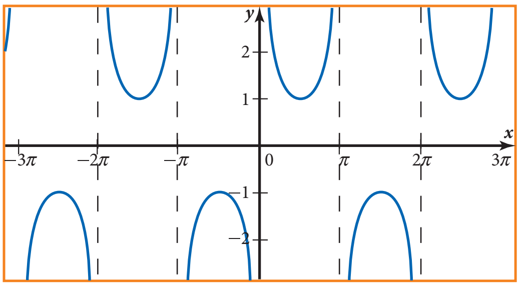


$y = \sec(x)$

Dominio = Reales − $\{n\pi + \pi/2\}$, donde n es un número entero

Rango = $(-\infty, -1\,] \cup [1, +\infty)$

Periodo = 2π



$y = \csc(x)$

Dominio = Reales − $\{n\pi\}$, donde n es un número entero

Rango = $(-\infty, -1\,] \cup [1, +\infty)$

Periodo = 2π

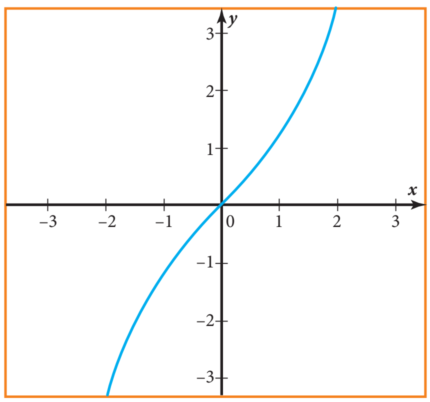
Funciones hiperbólicas

La función exponencial $y = e^x$ permite definir otras funciones muy importantes en matemáticas llamadas funciones hiperbólicas.

Las **funciones hiperbólicas** son semejantes a las funciones trigonométricas ordinarias, ya que se relacionan entre sí mediante reglas muy parecidas a las reglas que corresponden a las funciones $y = \text{sen}(x)$ y $y = \cos(x)$ (identidades trigonométricas).

Así como el coseno y el seno pueden identificarse con el punto (x, y) en el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$, las funciones coseno hiperbólico y seno hiperbólico pueden identificarse con las coordenadas de un punto (x, y) sobre la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$, es por eso que reciben el nombre de "hiperbólicas".

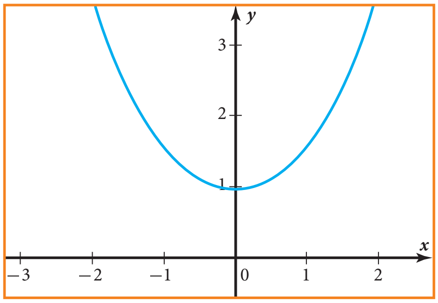
Estas funciones se definen como una combinación de funciones exponenciales de base "e", a continuación se muestra la definición y la gráfica para cada una de las funciones hiperbólicas.



$$\text{sen h}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Dominio = Reales

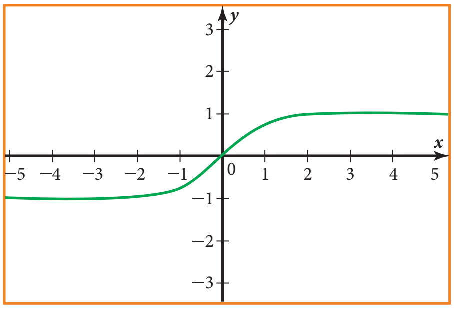
Rango = Reales



$$\cos h(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

Dominio = Reales

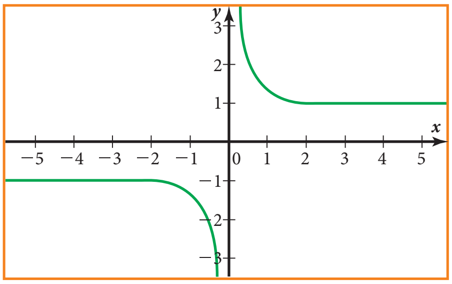
Rango = $[1, +\infty)$



$$\tan h(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

Dominio = Reales

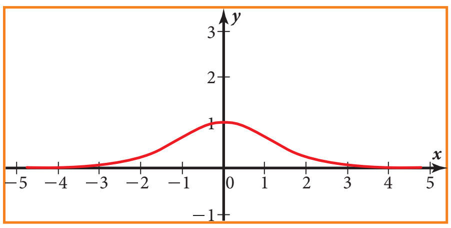
Rango = $(-1, 1)$



$$\cot h(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

Dominio = Reales − $\{0\}$

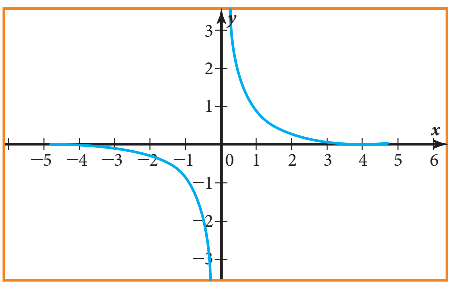
Rango = $(-\infty, -1\ ) \cup (1, +\infty)$



$$\sec h(x) = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}}$$

Dominio = Reales

Rango = $(0, 1]$



$$\csc h(x) = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}}$$

Dominio = Reales − $\{0\}$

Rango = Reales − $\{0\}$

Curva catenaria

En matemáticas, es un arco creado por una curva llamada **catenaria**.

Su fórmula matemática es: $y = a\cos h\left(\dfrac{x}{a}\right)$

La catenaria es la representación gráfica de una función hiperbólica, específicamente el coseno hiperbólico, aunque el término *catenaria* se emplea la mayoría de las veces para referirse a los cables del tendido eléctrico de los ferrocarriles o un cable colgante sujeto por sus dos extremos, como los que emplean las compañías eléctricas para llevar la corriente de alta tensión entre las centrales eléctricas y los centros de consumo. En matemáticas y arquitectura se emplea la palabra *catenaria* para designar la curva cuyo trazado sigue la forma que adquiere una cadena o cuerda de densidad uniforme y perfectamente flexible sujeta por sus dos extremos y que se encuentra sometida únicamente a las fuerzas de la gravedad.

Uno de los grandes arquitectos de todos los tiempos, el catalán Antonio Gaudí, es probablemente el primero en investigar y hacer uso en su obra de la catenaria.

En la siguiente foto se muestra una de las muchas obras de Gaudí, observa cómo la forma de los arcos corresponden a un coseno hiperbólico invertido.

A lo largo de la Historia, los matemáticos se mostraron fascinados por la forma que adoptaba una cuerda o cadena que se colgaba bajo su propio peso e intentaron descubrir cuál era la curva que la describía, hubo quienes suponía que la cadena tomaba la forma de una parábola.

Arcos catenarios

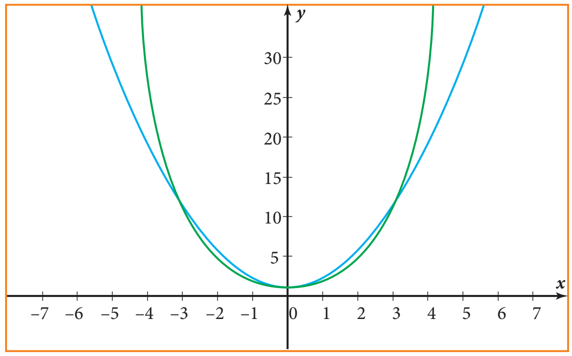
Sin embargo, hoy sabemos que, aunque el trazado de la parábola se asemeja mucho al trazado de la catenaria, las curvas son diferentes.

Matemáticamente, se observa la diferencia al analizar el comportamiento en los extremos de ambas curvas.

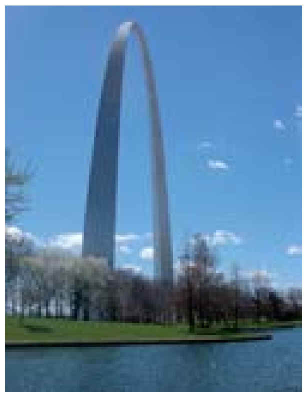
En la parábola los extremos de la gráfica se van abriendo cada vez más, mientras que en la catenaria tienden a ser verticales.

Según los expertos esto hace que el nivel de estabilidad de los arcos catenarios sea mucho más estable al no tender sus costados a infinito, sino a un punto concreto, como se observa en las gráficas siguientes:

La gráfica verde es la catenaria y la azul es la parábola.



Otro ejemplo de la curva catenaria en la arquitectura:



**Gateway Arch de San Luis (Missouri): Ejemplo de la curva catenaria en la arquitectura*

La ecuación que aproxima su curva es:

$$y = 693.8507 - 68.7672\left(\frac{e^{0.0100333x} + e^{-0.0100333x}}{2}\right)$$

**Fuente*: http://www2.caminos.upm.es/departamentos/matematicas/Fdistancia/PIE/Chipgeometrico/Catenaria.pdf, recuperado el 25 de marzo de 2011.

Límites y continuidad

Temas

Uno de los temas de matemáticas que más rechazo causa a algunos estudiantes es el tema de *límites*, quizá por el rigor matemático con el que se trabaja o quizá por su misma complejidad. Sin embargo, te sorprenderá saber cómo lo has vivido en lo cotidiano. Por ejemplo, en el verano es común meter al refrigerador nuestra bebida favorita para luego disfrutarla, y seguramente quisiéramos que su frescura durara permanentemente una vez fuera del refrigerador, pero sucederá que la bebida tenderá a estar a la temperatura del ambiente, esto es, a largo plazo la temperatura de la bebida será la misma que la temperatura del ambiente. En matemáticas diríamos que cuando el tiempo tiende a infinito el límite de la temperatura tiende a ser la temperatura del ambiente. Otra situación cotidiana se presenta cuando nos encontramos viendo una película de suspenso y de pronto aparece una escena donde nos sobresaltamos, lo que provoca que el ritmo cardiaco aumente y sentimos que el corazón se nos va a salir, pero al cabo de unos segundos vuelve a latir normalmente, al menos hasta la siguiente escena emocionante. En matemáticas diríamos que después de recibir un susto la tendencia del ritmo cardiaco suele estabilizarse al cabo de cierto tiempo.

Este fenómeno está presente a nuestro alrededor tanto en la simpleza de lo cotidiano como en situaciones más complejas, por ejemplo en el área de finanzas cuando se habla de la tendencia del mercado de valores o del tipo de cambio de cierta moneda. De igual manera ocurre cuando se estudian las tendencias inflacionarias o las tendencias de la oferta y de la demanda, o la tendencia de alguna epidemia o la de la cantidad de alcohol en un proceso de fermentación, etcétera.

Sin lugar a dudas, el estudio de los límites resulta útil e interesante porque permite predecir la tendencia de un fenómeno a partir de su variable independiente y de la estructura de la función que lo rige. En esta unidad estudiaremos el tema, primero, desde una perspectiva formal, pues esto también es parte de tu formación académica, para después pasar a sus aplicaciones.

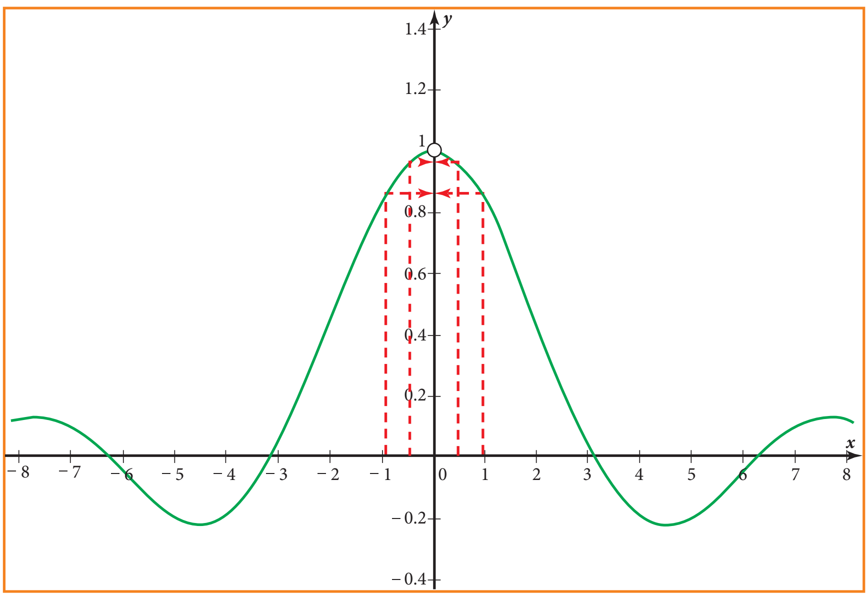
2.1 Límites

Es fácil darnos cuenta de que en la sociedad en que vivimos existe una serie de reglas que debemos cumplir para que haya una buena convivencia entre las personas, dichas reglas son expresadas a menudo como límites, por ejemplo: el límite de velocidad, los límites de una propiedad, el límite de una línea de crédito, la hora límite para llegar al trabajo o escuela, la fecha límite para entregar algún proyecto, el primero o el último día de clases, y podríamos mencionar muchos más. Sin embargo, es importante mencionar que dichos límites "modelan nuestro comportamiento" ya que evitamos transgredir los límites establecidos: no podemos construir más allá del límite de nuestra propiedad, no podemos iniciar clases antes del día marcado en el calendario ni finalizar los cursos después de la fecha establecida, etcétera.

En Matemáticas, los límites se utilizan para describir o analizar el comportamiento de una función, particularmente, analizar lo que ocurre con la altura de la variable dependiente, cuando la variable independiente se acerca a un valor específico.

Ejemplo Analiza el comportamiento de la función $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{x}$ cerca de $x = 0$.

Solución Es obvio que el valor de la función no lo podemos obtener evaluándola en $x = 0$, ya que la función no existe para ese valor de x, es decir, en $x = 0$ la función no tiene asignado un valor, pues no tiene sentido dividir entre cero. Sin embargo, podemos utilizar la gráfica de la función para analizar su comportamiento.



Puedes observar que la gráfica tiene un hueco en $x = 0$. Sin embargo, a pesar de que en ese valor de x no hay gráfica, se cumple que para valores de x cada vez más cercanos a cero el valor de la función está cada vez más cercano a 1, lo cual sería equivalente a decir: "cuando x tiende a cero, el valor de la función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ tiende a 1".

Si se sustituye la frase "tiende a" por una flecha de la forma $\rightarrow$, la afirmación anterior podría escribirse como sigue: cuando $x \rightarrow 0$, el valor de la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \rightarrow 1$.

El valor al que tiende la función recibe el nombre de **límite de la función**, por lo tanto, en este caso el límite de la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es 1 cuando $x \rightarrow 0$. La notación para el límite de la función quedaría como sigue: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

El valor del límite también se puede obtener construyendo una tabla de valores; utiliza tu calculadora para completar los valores de la siguiente tabla.

Sugerencia: completa la tabla para los valores de x a la izquierda y derecha del cero.

	Valores a la izquierda del cero			
x	−1	−0.5	−0.25	−0.001
$\frac{\operatorname{sen} x}{x}$	0.8415			
	Valores a la derecha del cero			
0	0.001	0.25	0.5	1
No existe				0.8415

Una vez que hayas completado la tabla podrás observar que cuando los valores de x están muy cercanos al cero, tanto por su izquierda como por su derecha, los valores de la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ están cada vez más cercanos a 1, aunque en $x = 0$ la función no existe.

Sea $y = f(x)$ una función definida en todo punto de algún intervalo abierto I, excepto posiblemente en algún valor $x = a$, que pertenece al intervalo I, y sea L un número real.

Se dice que la función $y = f(x)$ tiene límite L en $x = a$ y se denota por $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si al evaluar la función en valores de x cada vez más cercanos al número a ocurre que los valores de la función se acercan al número L.

Comentarios:

1. La expresión $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ se lee: "límite de $f(x)$ cuando x se aproxima al número a es L".
2. Si la función *no* se acerca a algún valor específico L, entonces se dice que el límite *no existe*.
3. Para determinar el valor de L hay que analizar la altura de la función tanto por valores a la izquierda como por valores a la derecha del punto $x = a$.

A este tipo de límite se le conoce con el nombre de **límite bilateral**, porque se analiza la izquierda y la derecha del número $x = a$.

Proceso sugerido para obtener límites a partir de una gráfica

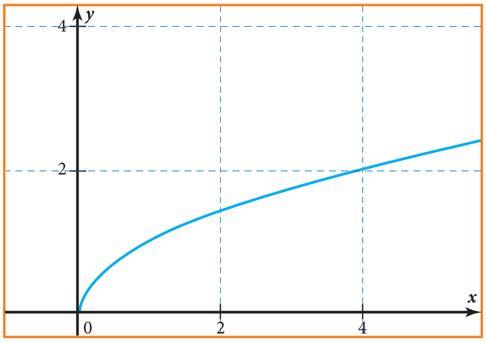
Para encontrar el valor del $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ observa la altura de la gráfica muy cerca del punto $x = a$, tanto por la izquierda como por la derecha de $x = a$ y responde a la pregunta: ¿a qué valor de y se acerca la gráfica de la función $f(x)$?, la respuesta a la pregunta será el valor del límite.

Ejercicio Si $f(x)$ es la gráfica de la función que aparece a continuación, determina el valor de los siguientes límites, si existen.

a) $\lim\limits_{x \to 4} f(x) =$

b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) =$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) =$



Solución *a*) Observa la altura de la función para valores muy cercanos a $x = 4$, tanto por la izquierda como por la derecha y responde: ¿a qué valor de y se acerca la función?

____

Por lo tanto, se puede asegurar que este número es el valor buscado, es decir: $\lim\limits_{x\to 4} f(x) =$ ____________.

b) Nuevamente, localiza el valor $x = 1$. Observa la altura de la función por la izquierda y la derecha de este punto y responde: ¿a qué valor de y se acerca la función?

____

Por lo tanto, se puede asegurar que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$ ____________.

c) Para obtener el valor del límite de la función cuando x tiende a cero, tenemos un problema, ya que por la izquierda de $x = 0$ ni siquiera hay gráfica, esto significa que sólo podremos calcular el límite *por la derecha* de $x = 0$; ¿a qué valor de y se acerca la función?

______________________________,

por lo tanto, en este caso para informar que el límite sólo existe por la derecha de cero, se escribe un pequeño signo "+" en la parte superior derecha del cero, es decir, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$. Sin embargo, en el enunciado se pedía encontrar el límite bilateral, por lo tanto, se concluye que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe.

El análisis anterior nos lleva a clasificar los límites de la siguiente manera:

Límite bilateral		
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$	Cuando el límite se obtiene analizando tanto el lado izquierdo, como el lado derecho de $x = a$.	
Límites unilaterales		
Límite por la derecha	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$	Cuando el límite se obtiene analizando sólo el lado derecho de $x = a$. Significa que analizaremos el comportamiento de la función para valores muy cercanos a $x = a$, pero que sean *mayores* que a.
Límite por la izquierda	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$	Cuando el límite se obtiene analizando sólo el lado izquierdo de $x = a$. Significa que analizaremos el comportamiento de la función para valores muy cercanos a $x = a$, pero que sean *menores* que a.

También es importante mencionar que el límite bilateral existe si y sólo si los límites unilaterales *existen y son iguales*, en símbolos se expresa como:

Teorema 1

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

si y sólo si

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L = \lim_{x\to a^-} f(x).$$

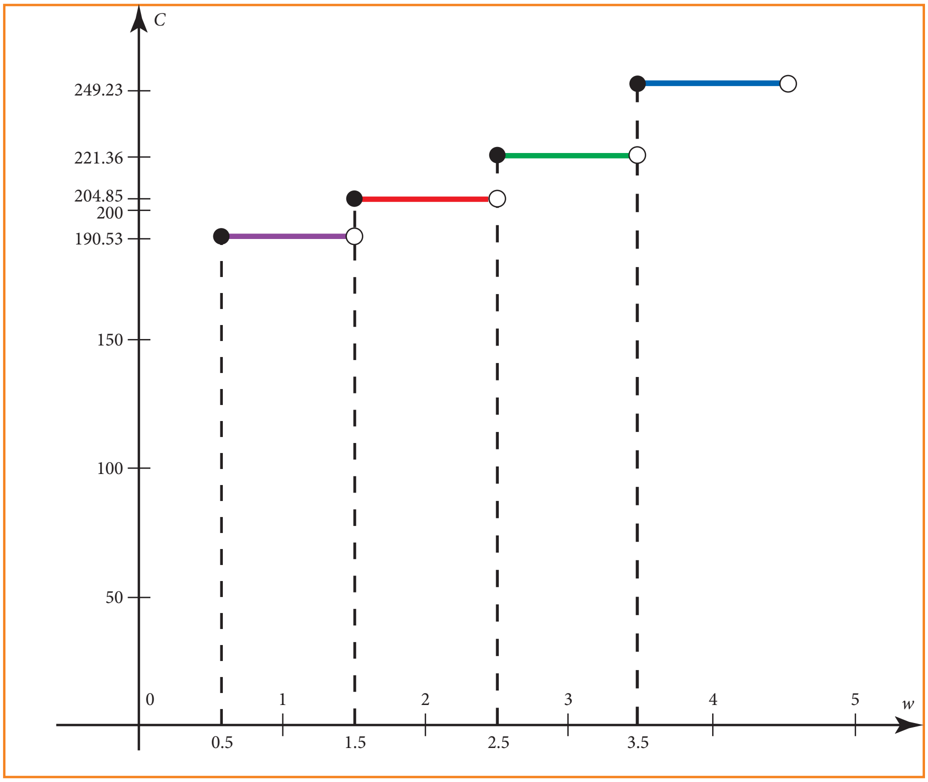
Ejemplo La siguiente tabla muestra el costo de enviar por mensajería un documento que pesa w kilogramos.

Peso del documento $= w$	Costo del envío en pesos $= C$
$0.5 \leq w < 1.5$	190.53
$0.5 \leq w < 1.5$	190.53
$0.5 \leq w < 1.5$	190.53
$0.5 \leq w < 1.5$	190.53

Si quisiéramos encontrar el límite de la función en $w = 1.5$, es decir, $\lim_{w \to 1.5} C(w)$ tendríamos que tomar los primeros dos valores de la tabla, ya que en ambos aparece el valor de $w = 1.5$.

Observa que el costo para un peso menor a 1.5 es de \$190.53 y para un valor mayor o igual a 1.5 el costo es de \$204.85; esto significa que $\lim_{w \to 1.5^-} C(w) = 190.53$ y $\lim_{w \to 1.5^+} C(w) = 204.85$, por lo tanto, como los límites unilaterales son diferentes, entonces concluimos que el $\lim_{w \to 1.5} C(w)$ no existe.

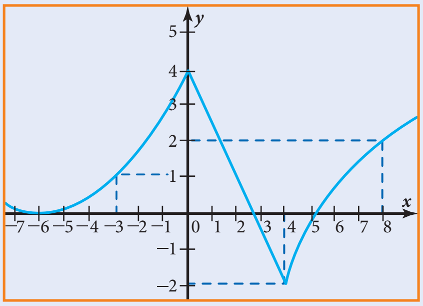
La información de la tabla se puede representar en la siguiente gráfica:



Observa que hay valores del peso (w) en donde las alturas correspondientes (C) tienen un "salto"; es evidente que en esos valores el límite bilateral no existe. Esto ocurre debido a que por la izquierda y por la derecha de cada uno de esos valores w, hay diferentes alturas C.

¡A trabajar!

Ejercicio 1 Determina los límites que se piden, tomando como base la gráfica de la función dada.



a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ ____________

b) $\lim\limits_{x\to -6} f(x)$ ____________

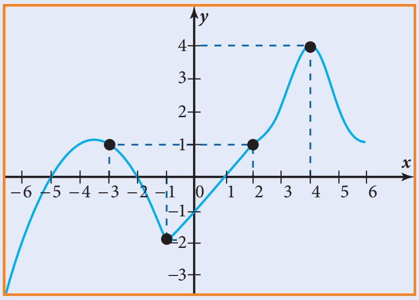
c) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ ____________

d) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) =$ ____________

e) $\lim\limits_{x\to 8} f(x)$ ____________

f) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ ____________

Ejercicio 2 Determina los límites que se piden, tomando como base la gráfica de la función dada.



a) $\lim\limits_{x\to -3} g(x) =$ ____________

b) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) =$ ____________

c) $\lim\limits_{x\to 2} g(x) =$ ____________

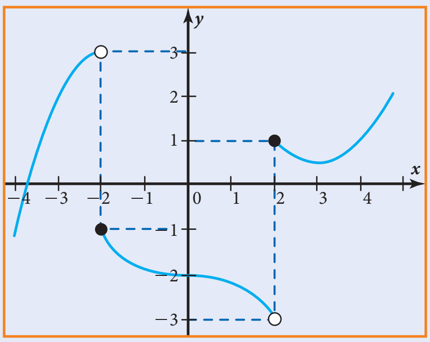
d) $\lim\limits_{x\to -2} g(x) =$ ____________

e) $\lim\limits_{x\to 4} g(x) =$ ____________

f) $\lim\limits_{x\to -1} g(x) =$ ____________

g) $\lim\limits_{x\to 1} g(x) =$ ____________

Ejercicio 3 Determina los siguientes límites de la función $y = h(x)$, cuya gráfica aparece abajo.



a) $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) =$ ____________

b) $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) =$ ____________

c) $\lim\limits_{x\to 2} h(x) =$ ____________

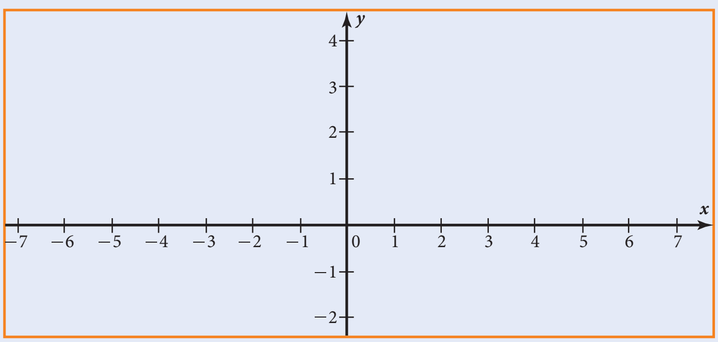
d) $\lim\limits_{x\to -2^+} h(x) =$ ____________

e) $\lim\limits_{x\to -2^-} h(x) =$ ____________

f) $\lim\limits_{x\to -2} h(x) =$ ____________

Ejercicio 4 Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ -x^2-1 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$ determina si existe el límite en el punto $x = 1$.

Solución Dibuja la gráfica de la función:



Puedes recurrir a la sección "Conocimientos previos" para recordar cómo se dibuja la gráfica de esta función seccionada.

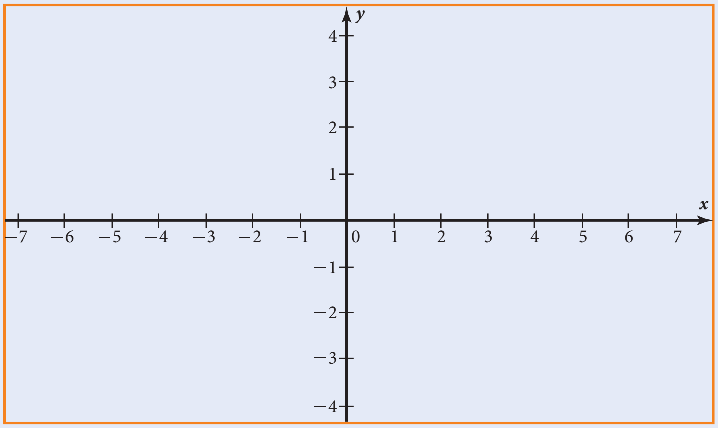
Ahora encuentra los límites unilaterales $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$ ____________________ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$ ____________________

¿Los límites unilaterales son iguales? ____________________, entonces el $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$ ____________________

Ejercicio 5 Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si} \quad x < 2 \\ x & \text{si} \quad 2 < x < 4 \\ 4 - x & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$ determina si existe el límite en los puntos $x = 2$ y $x = 4$.

Solución Dibuja la gráfica de la función.

Puedes recurrir a la sección "Conocimientos previos" para recordar cómo se dibuja la gráfica de esta función seccionada:



a) Analiza lo que ocurre en el punto $x = 2$.

Determina los límites unilaterales $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$ ____________________ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$ ____________________

¿Los límites unilaterales son iguales? ____________________, entonces el $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$ ____________________

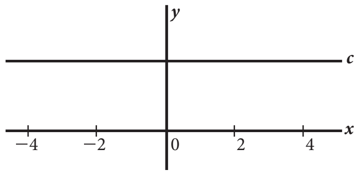
b) Analiza lo que ocurre en el punto $x = 4$.

Determina los límites unilaterales $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) =$ ____________________ $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) =$ ____________________

¿Los límites unilaterales son iguales? ____________________, entonces el $\lim\limits_{x\to 4} f(x) =$ ____________________

Propiedades de los límites

Además de trazar la gráfica de una función o elaborar una tabla de valores, para determinar el límite de una función existe una serie de propiedades que podemos utilizar.



La gráfica de la función constante $f(x) = c$ es una línea horizontal, significa que para todo valor de la variable x la altura siempre es c, por lo tanto, si calculamos el límite de la función en cualquier punto $x = a$, se tiene que los límites unilaterales son iguales; en símbolos puede escribirse como sigue:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = c \text{ y } \lim_{x \to a^+} f(x) = c, \text{ entonces } \lim_{x \to a} f(x) = c$$

Propiedad 1: límite de una función constante

Si $f(x) = c$ es la función constante, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c$.

Es decir, cuando la función es constante, el valor del límite es igual al valor de la función para cualquier punto en el dominio.

Las funciones que son constantes pueden reconocerse fácilmente porque son expresiones numéricas que no contienen variables.

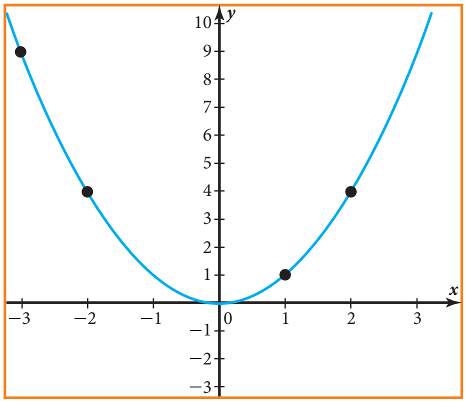
Ejemplo 1

$$\lim_{x \to 2} 3 = 3$$

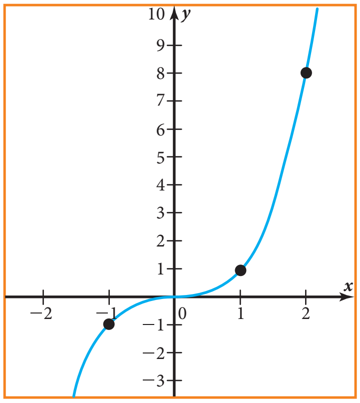
$$\lim_{x \to 5} e^4 = e^4$$

$$\lim_{x \to -1} \sqrt{6} = \sqrt{6}$$

Analicemos lo que ocurre con algunas funciones potencia con exponentes enteros positivos. Consideremos particularmente los casos de las funciones que se muestran en las gráficas siguientes.



$y = x^2$



$y = x^3$

Es fácil observar que el límite en cualquiera de sus puntos coincide con el valor de la función en ese punto, por lo tanto, podemos concluir que la siguiente propiedad se cumple.

Propiedad 2: límite de una función potencia

Si $f(x) = x^n$ es una función potencia, donde n es un entero positivo, entonces el límite en cualquier punto se obtiene sustituyendo el valor del punto, es decir, $\lim_{x \to a} x^n = a^n$.

Esta propiedad establece que para obtener el límite de una función potencia, cuando nos aproximamos a un valor cualquiera del dominio, basta con evaluar la función en el punto que se está analizando.

Ejemplo 2

$$\lim_{x\to -3} x^3 = (-3)^3 = -27$$

$$\lim_{x\to -1} x^4 = (-1)^4 = 1$$

$$\lim_{x\to -\sqrt{2}} x^2 = \left(-\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

A continuación se enlista una serie de propiedades adicionales útiles para obtener límites sin necesidad de graficar o tabular.

Para que estas propiedades sean válidas es necesario que los límites de cada una de las funciones involucradas existan, es decir,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = M$$

Propiedad 3: límite de una suma o resta de funciones

$$\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L \pm M$$

Esto significa que para obtener el límite de una suma o resta de funciones se pueden obtener por separado los límites de cada una de las funciones y, posteriormente, sumar o restar los resultados.

Propiedad 4: límite de una multiplicación de funciones

$$\lim_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L\cdot M$$

Esto significa que para obtener el límite de una multiplicación de funciones, se pueden obtener por separado los límites de cada una de las funciones y, posteriormente, multiplicar los resultados.

Propiedad 5: límite de la multiplicación de una constante "c" por una función

$$\lim_{x\to a} [c\cdot f(x)] = \lim_{x\to a} c \cdot \lim_{x\to a} f(x) = c\cdot L$$

Esto significa que para obtener el límite de una multiplicación de una constante por una función, se pueden obtener por separado los límites y, posteriormente, multiplicar los resultados.

Propiedad 6: límite de una división de funciones

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L}{M} \qquad \text{si} \qquad M \neq 0$$

Esto significa que para obtener el límite de una división de funciones se pueden obtener por separado los límites de cada una de las funciones y, posteriormente, dividir los resultados, esto es válido si el límite del denominador es diferente de cero.

Propiedad 7: límite de una función potencia, compuesta

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$$

donde n es entero positivo

Esto significa que para obtener el límite de una función elevada a una potencia "n" se puede obtener por separado el límite de la función y, posteriormente, elevar el límite a la potencia "n".

Propiedad 8: límite de una función compuesta con potencia racional

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

Esto significa que para obtener el límite de la raíz n-ésima de una función, se puede obtener por separado el límite de la función y, posteriormente, obtener la raíz n-ésima de dicho límite.

Nota: si n es par, el número L debe ser positivo.

Ejemplo 3 Utiliza las propiedades anteriores para obtener el valor de $\lim_{x\to -2} \left(4x^3 + 7x^2 - 5x - 2\right)$.

Solución Observa que la función es un polinomio que está formado por sumas y restas de funciones, cabe aclarar que: la propiedad 3 *es válida si se tiene un número finito de sumas o restas*, por lo tanto, se aplicará esta propiedad y las demás se irán indicando a la derecha de cada paso.

$$\lim_{x\to -2}(4x^3+7x^2-5x-2)=\lim_{x\to -2}4x^3+\lim_{x\to -2}7x^2-\lim_{x\to -2}5x-\lim_{x\to -2}2 \qquad \text{propiedad 3}$$

$$=4\cdot\lim_{x\to -2}x^3+7\cdot\lim_{x\to -2}x^2-5\cdot\lim_{x\to -2}x-\lim_{x\to -2}2 \qquad \text{propiedad 5}$$

$$=4\cdot(-2)^3+7\cdot(-2)^2-5\cdot(-2)-2 \qquad \text{propiedades 1 y 2}$$

$$=4\cdot(-8)+7(4)-5(-2)-2$$

$$=-32+28+10-2$$

$$=4$$

El resultado del ejemplo anterior puede generalizarse.

Sea $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$ una función polinomial y supongamos que se desea obtener el $\lim\limits_{x\to b} f(x)$. Si se utiliza un proceso similar al del ejemplo anterior, se tiene:

$$\lim_{x\to b} f(x)=\lim_{x\to b}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0)$$

Al aplicar las propiedades 3 y 5 se obtiene:

$$\lim_{x\to b} f(x)=a_n\lim_{x\to b}x^n+a_{n-1}\lim_{x\to b}x^{n-1}+a_{n-2}\lim_{x\to b}x^{n-2}+\cdots+a_1\lim_{x\to b}x+\lim_{x\to b}a_0$$

Al utilizar las propiedades 1 y 2, la expresión anterior queda como sigue:

$$\lim_{x\to b} f(x)=a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}+a_{n-2}b^{n-2}+\cdots+a_1b+a_0$$

Es fácil observar que el lado derecho de la igualdad anterior corresponde a la función polinomial evaluada en $x = b$, por lo tanto, se cumple la siguiente propiedad:

$$\lim_{x\to b} f(x)=a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}+a_{n-2}b^{n-2}+\cdots+a_1b+a_0=f(b)$$

Propiedad 9: límite de una función polinomial

Si $f(x)$ es una función polinomial $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$, entonces

$$\lim_{x\to b} f(x)=a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}+a_{n-2}b^{n-2}+\cdots+a_1b+a_0=f(b)$$

Esto significa que para obtener el límite de una función polinomial basta con evaluar la función en $x = b$.

Ejemplo 4 Utiliza las propiedades de los límites para obtener el valor de $\lim\limits_{x\to 3}[(5x-1)(x+4)x]$.

Solución Observa que la función está formada por la multiplicación de tres funciones, aun así se puede utilizar la propiedad 4, ya que *sigue siendo válida aunque la función contenga más de dos factores.*

$$\lim_{x\to 3}[(5x-4)(x+4)x]=\lim_{x\to 3}(5x-1)\cdot\lim_{x\to 3}(x+4)\cdot\lim_{x\to 3}x \qquad \text{propiedad 4}$$

$$=(5\cdot 3-1)\cdot(3+4)\cdot 3 \qquad \text{propiedades 9 y 1}$$

$$=(14)(7)(3)$$

$$=294$$

Ejemplo 5 Utiliza las propiedades de los límites para obtener el valor de

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{3x^3-1}{x^2+1}\right]^2.$$

Solución Para obtener este límite utilizamos primero la propiedad 7,

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{3x^3-1}{x^2+1}\right]^2=\left[\lim_{x\to 3}\left(\frac{3x^3-1}{x^2+1}\right)\right]^2.$$

Ahora aplicamos la propiedad 6, cabe recordar que para que esta propiedad sea válida es necesario que el límite de la función del denominador no sea cero al evaluarla en $x = 3$. Como la función del denominador es una suma de cuadrados, sabemos que no se vuelve cero para ningún valor de x; por lo tanto, es válido utilizar la propiedad 6. Además las funciones del numerador y del denominador son polinomios, por lo que el límite se puede obtener por sustitución directa del número 3 en las x:

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{3x^3-1}{x^2+1}\right]^2=\left[\frac{3(3)^3-1}{(3)^2+1}\right]^2=\left(\frac{80}{10}\right)^2=64.$$

Ejemplo 6 Utiliza las propiedades de los límites para obtener el valor de:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{3x^3+2x-1}{x^2-5}}.$$

Solución Para obtener este límite utilizamos primero la propiedad 8:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{3x^3+2x-1}{x^2-5}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 2}\left[\frac{3x^3+2x-1}{x^2-5}\right]}.$$

Dentro del radical, tanto la función del numerador como la del denominador son funciones polinomiales, por lo tanto, por las propiedades 6 y 9, dichos límites se obtienen sustituyendo el número 2 en las x:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{3x^3+2x-1}{x^2-5}}=\sqrt[3]{\frac{3(2)^3+2(2)-1}{(2)^2-5}}=\sqrt[3]{\frac{27}{-1}}=-3.$$

En los ejemplos anteriores podemos observar que la propiedad 9 simplifica mucho el proceso de obtención del límite en un punto, ya que se reduce a una simple evaluación de la función en el número "a". Sin embargo, es importante aclarar que esta regla es válida sólo cuando se cumplen las condiciones establecidas en las propiedades. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7 Utiliza las propiedades de los límites para obtener el valor de

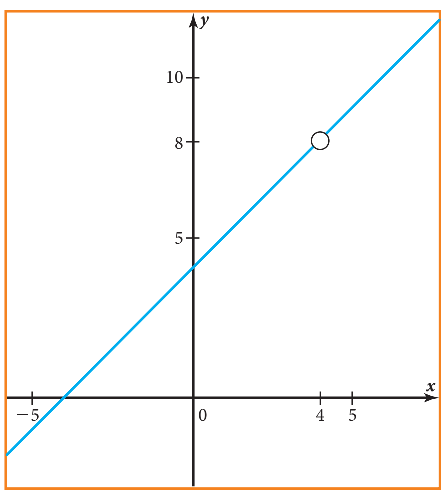
$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}.$$

Solución En este ejemplo, tanto la función del numerador como la del denominador son funciones polinomiales, pero si evaluamos directamente la función en 4, se obtiene como respuesta una expresión de la forma 0/0; por lo tanto, no es válido evaluar directamente en el numerador y en el denominador, pues se sabe que no está permitido dividir entre cero.

Cuando esto ocurre podemos recurrir a cualquiera de las siguientes estrategias: dibujar la gráfica de la función, hacer una tabla de valores cercanos al valor de x que estamos analizando o a una simplificación algebraica. Veamos las tres alternativas.

- Alternativa 1: analizar la gráfica de la función

A continuación se da la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}$. Observa la gráfica y responde las preguntas planteadas.



a) ¿Está definida la función en $x = 4$? _______

b) ¿Existe el límite de la función en $x = 4$?____ _________________ por lo tanto, el valor del

$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} =$ ___________________________

- Alternativa 2: utilizar una tabla de valores para encontrar el límite

Completa las tablas de valores y verifica que efectivamente el límite de la función es 8 cuando los valores de la variable x están muy cercanos a 4.

x	$\frac{x^2 - 16}{x - 4}$
3.99	
3.999	
3.9999	

x	$\frac{x^2 - 16}{x - 4}$
4.01	
4.001	
4.0001	

- Alternativa 3: utilizar una simplificación algebraica

En este ejemplo la simplificación consistirá en factorizar la expresión del numerador.

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{x-4}}$$

Los factores $x - 4$ se pueden cancelar, ya que nunca valen cero pues la x tiende a 4, pero nunca es 4. Por lo tanto, al simplificar la función el límite puede obtenerse por evaluación directa.

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \to 4} (x + 4) = 8$$

Utiliza las propiedades de los límites para encontrar el límite de las funciones dadas, en el punto indicado.

Ejercicio 1 $\lim_{x \to -4} (\sqrt{15})$

Solución La función dada, ¿contiene a la variable x? ________ Entonces, ¿qué tipo de función es? ________

¿Qué propiedad se debe utilizar para obtener el límite? ________________________

$$\lim_{x \to -4} (\sqrt{15}) = \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}.$$

Ejercicio 2 $\lim_{t \to 2} (t^3 - 1)$

Solución ¿Qué tipo de función es? ________________ Entonces, ¿qué propiedad se debe utilizar para obtener el límite? ________________________

Entonces $\lim_{t \to 2} (t^3 - 1) =$ ________________________

Ejercicio 3 $\lim_{y \to -1} \dfrac{3y+5}{y+2}$

Solución ¿Qué tipo de función es? ________________ Entonces, ¿qué propiedad se debe utilizar para obtener el límite? ________________ ¿Se puede aplicar directamente la propiedad? Justifica tu respuesta. ________________________

____

Aplicando la propiedad: $\lim_{y \to -1} \dfrac{3y+5}{y+2} =$ ____________ .

Ejercicio 4 $\lim_{t \to 2} \sqrt{\dfrac{t^3+2t+3}{t^2+5}}$

Solución ¿El valor del límite puede obtenerse sustituyendo el valor de $t = 2$ en la función? __________

¿Por qué es válido hacerlo? ________________________

¿Qué propiedad o propiedades se deben utilizar para obtener el límite? ________________

Aplicando las propiedades: $\lim_{t \to 2} \sqrt{\dfrac{t^3+2t+3}{t^2+5}} =$ __________ .

Ejercicio 5 $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^3-27}$

Solución ¿Qué tipo de función es? ____________ Entonces, ¿qué propiedad se debe utilizar para obtener el límite? ____________ ¿Se puede aplicar directamente la propiedad? Justifica tu respuesta. ____________

____

¿Qué alternativas tienes para resolver el límite? ____________

¡Resuélvelo!

¿Requieres de algún conocimiento de álgebra? Ve a la sección "Conocimientos previos".

Ejercicio 6 $\lim_{x \to 4} \frac{3x^2-8x-16}{2x^2-9x+4}$

Solución ¿Qué tipo de función es? ____________ Entonces, ¿qué propiedad se debe utilizar para obtener el límite? ____________ ¿Se puede aplicar directamente la propiedad? Justifica tu respuesta. ____________

____

¿Qué alternativas tienes para resolver el límite? ____________

¡Resuélvelo!

¿Requieres de algún conocimiento de álgebra? Ve a la sección "Conocimientos previos".

Límites infinitos

Anteriormente comentamos que cuando en la gráfica de la función ocurre un "salto", entonces en ese punto el límite bilateral no existe.

También se dice que el límite en $x = a$ *no existe* si ocurre que la altura de la función $f(x)$ *no* se acerca a algún valor específico, sino que su altura se vuelve cada vez más grande.

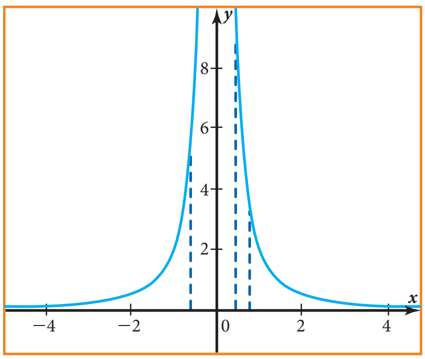
Veamos unos ejemplos.

Ejemplo 1 Dada la función $f(x)=\dfrac{2}{x^2}$ determina si la función tiene límite en el punto $x = 0$.

Solución Para calcular el límite conviene trazar primero la gráfica de la función.

Podemos observar en la gráfica que si nos acercamos a $x = 0$, tanto por la izquierda como por la derecha, la altura de la función es cada vez mayor, por lo tanto, concluimos que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x^2}$ *no existe*.

Sin embargo, en estos casos se acostumbra describir el comportamiento de la función de la siguiente forma:



a) **Si cerca de *x* = *a* la función toma valores cada vez más grandes, se dice que la función tiende a más infinito y se denota por $+\infty$.**
b) **Si cerca de *x* = *a* la función toma valores cada vez más pequeños, se dice que la función tiende a menos infinito y se denota por $-\infty$.**
c) **Si por un lado de *x* = *a* la función tiende a $+\infty$, y por el otro lado de *x* = *a* la función tiende a $-\infty$, entonces se dice que en *x* = *a* la función tiende a ∞.**

Del comentario anterior podemos concluir que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x^2}=+\infty$.

Nota La respuesta anterior, no significa que el límite exista, sino que describe lo que le ocurre a la función cerca de $x = 0$; la mejor manera de interpretar este resultado es: "La altura de la función crece sin límite".

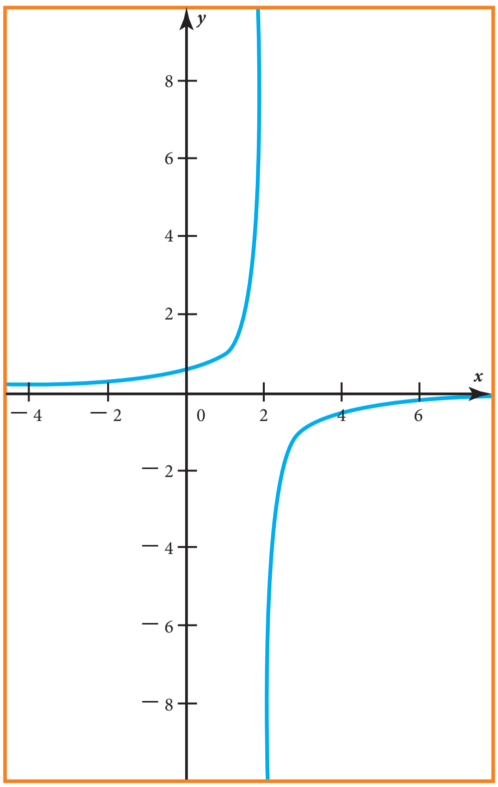
Ejemplo 2 Para la función dada en la siguiente gráfica determina el valor de

$$\lim_{x\to 2} f(x).$$

Solución Al observar la gráfica vemos que por la izquierda de $x = 2$ la función crece sin límite y se denota por $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$; mientras que por la derecha de $x = 2$ la función decrece sin límite y se denota por $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$.

Por lo tanto, concluimos que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\infty$.

Nuevamente insistimos que *el límite no existe*, la respuesta sólo describe el comportamiento de la función en $x = 2$.



El siguiente teorema resulta muy útil cuando no contamos con alguna herramienta tecnológica para trazar la gráfica de la función.

Teorema 2: límite infinito

Si el $\lim_{x\to a} f(x) = c$, donde c es un número real, con $c \neq 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, entonces:

1. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ si se tiene que $c > 0$ y $g(x) \to 0$ por valores positivos.
2. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ si se tiene que $c > 0$ y $g(x) \to 0$ por valores negativos.
3. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ si se tiene que $c < 0$ y $g(x) \to 0$ por valores positivos.
4. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ si se tiene que $c < 0$ y $g(x) \to 0$ por valores negativos.

El teorema anterior se aplica cuando al sustituir directamente el valor $x = a$ en la división de funciones $f(x)/g(x)$, el resultado que se obtiene es de la forma $C/0$. Cuando esto ocurre, sabemos que el límite *no existe*, pero si se analiza la función del denominador, puede decidirse si la altura de la función $f(x)/g(x)$ crece o decrece sin límite.

El proceso que se utiliza es determinar el signo que tiene la función del denominador para valores muy cercanos al número $x = a$; dependiendo de este signo y del signo de la constante C, se aplica la regla de los signos de la división para decidir si la función tiende a infinito positivo $(+\infty)$ o a infinito negativo $(-\infty)$. El siguiente ejemplo ayudará a comprender este proceso.

Ejemplo 3 Utiliza el teorema anterior para hallar el valor de $\lim_{x\to 4^+} \dfrac{2x+1}{x-4}$.

Solución Si se sustituye directamente el valor $x = 4$ en la función $\dfrac{2x+1}{x-4}$, se obtiene la expresión $\dfrac{9}{0}$.

Esto significa que en $x = 4$ la función del denominador vale cero, es decir, $g(4) = 0$, pero en realidad lo que se está buscando es el límite unilateral, específicamente por la derecha de 4. Por lo tanto, si se evalúa la función del denominador en un valor mayor a 4, pero muy cercano a 4, por ejemplo, en $x = 4.01$, se obtiene que $g(4.01) = 4.01 - 4 = 0.01$, que es un valor positivo, esto implica que $g(x) \to 0$ por valores positivos, y como el numerador es positivo, entonces de acuerdo con la regla de los signos para la división se tiene que el $\lim_{x\to 4^+} \dfrac{2x+1}{x-4} = +\infty$.

Ejercicio 1 Halla el valor del $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{1-2x}{x+3}$.

Solución Al sustituir el valor $x = -3$ en la función $\dfrac{1-2x}{x+3}$ el resultado tiene la forma ____________________

____.

¿Cuál es el resultado del límite? ______________________ ¿Con signo positivo o negativo? __________

Describe el procedimiento para determinar el signo: ____

____

____

____

____

____.

Utiliza la regla de los signos para la división para dar el resultado final del límite $\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{1-2x}{x+3} =$ ______________.

Ejercicio 2 Halla el valor del $\lim\limits_{x\to 6^+} \dfrac{3-5x}{x-6}$.

Solución Al sustituir el valor $x = 6$ en la función $\dfrac{3-5x}{x-6}$, el resultado tiene la forma ____________________

____.

¿Cuál es el resultado del límite? ______________________ ¿Con signo positivo o negativo? __________.

Describe el procedimiento para determinar el signo: ____

____

____

____

____

____.

Utiliza la regla de los signos para la división para dar el resultado final del límite $\lim\limits_{x\to 6^+} \dfrac{3-5x}{x-6} =$ ______________.

Límites al infinito

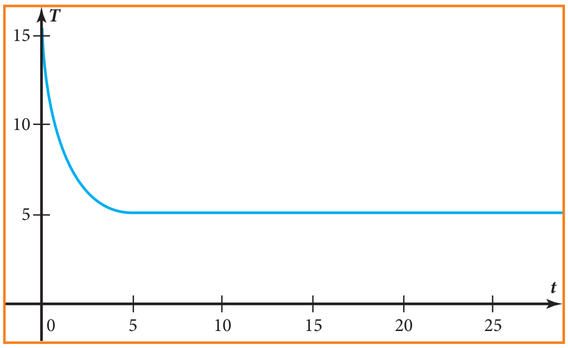
Supongamos que la temperatura T (en grados centígrados) de una lata de refresco que se pone a enfriar en un refrigerador está dada por la función $T(t) = 5 + 10e^{-t}$ °C, donde t (en horas) representa el tiempo transcurrido desde que la lata fue colocada en el refrigerador. A medida que pasa el tiempo, ¿qué ocurre con la temperatura de la lata?

En la situación descrita anteriormente llama la atención la expresión "a medida que pasa el tiempo", podemos interpretar esta frase como "cuando aumenta el tiempo", o bien, "después de mucho tiempo", ¿qué ocurre con la temperatura de la lata? Este tipo de enunciados lo podemos expresar en símbolos de la siguiente forma:

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = \lim_{t\to+\infty} (5+10e^{-t}).$$

Para calcular el valor de este límite, tenemos la alternativa de trazar la gráfica de la función o construir una tabla de valores. Analizaremos cada una de estas alternativas.

- Alternativa 1: trazar la gráfica de la función



Para encontrar $\lim_{t\to+\infty} (5+10e^{-t})$ *observa el lado derecho de la gráfica (lo más a la derecha posible*) y responde a la pregunta: ¿a qué altura se acerca la gráfica de la función? Si la función se acerca a algún valor de T, ese será el valor del límite, pero si no se acerca a algún valor entonces se dirá que el límite no existe.

En este caso la altura de la función se "acerca a 5", por lo tanto, el valor de $\lim_{t\to+\infty} (5+10e^{-t}) = 5$.

En este tipo de límite es importante comprender la interpretación del resultado, en este caso significa que por más tiempo que dejemos la lata en el refrigerador, la temperatura de ésta nunca estará por debajo de los 5 °C.

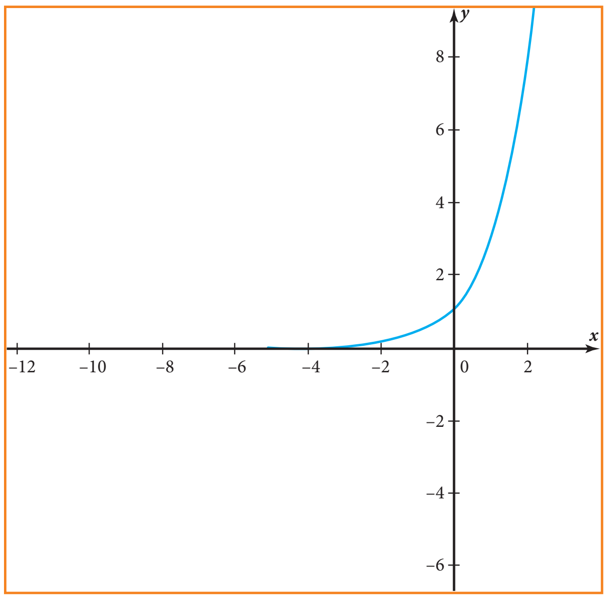
- Alternativa 2: construir una tabla de valores

Para determinar el valor de este tipo de límites, debes evaluar la función en valores de t cada vez más grandes. Completa la tabla siguiente y comprueba que el límite es 5.

t	5	50	500	50 000
$T(t) = 5 + 10e^{-t}$	5.06783			

De manera similar, para obtener el valor de $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ *observa el lado izquierdo de la gráfica (lo más a la izquierda posible)* y hazte la misma pregunta: ¿a qué altura se acerca la gráfica de la función? Si la función se acerca a algún valor específico de y, ese será el valor del límite, pero si la función no se acerca a algún valor, entonces se dirá que el límite no existe.

Ejemplo 1 Dada la siguiente gráfica, encuentra el valor de $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y de $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, si existen.



Solución Al observar la función para valores de x cada vez más pequeños, se ve que la altura de la función se acerca a cero, por lo tanto, se concluye que cuando x tiende a $-\infty$, el límite de la función existe y es cero, es decir, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

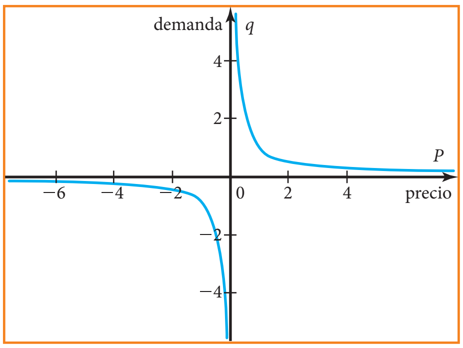
Al observar la función para valores de x cada vez más grandes, se ve que la altura de la función no se acerca a algún valor en específico, sino que la altura de la función es cada vez más alta, por lo tanto, se concluye que cuando x tiende a $+\infty$ el límite de la función *no existe*, es decir, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Límites al infinito de funciones racionales

En el capítulo anterior se definió la función demanda como la cantidad de artículos que los consumidores están dispuestos a comprar a un determinado precio.

Suponiendo que la cantidad demandada q de un cierto producto es inversamente proporcional al precio de venta p, las variables cantidad demandada y precio están relacionadas mediante la función $q=f(p)=\dfrac{k}{p}$. Se sabe que la demanda disminuye a medida que el precio aumenta, esto se puede comprobar si se traza la gráfica de esta función. Suponiendo $k = 1$, la función de demanda quedaría como $q=f(p)=\dfrac{1}{p}$.

La gráfica de la función $q=\dfrac{1}{p}$, desde el punto de vista matemático, corresponde a la figura que aparece abajo; sin embargo, cabe aclarar que desde el punto de vista de la economía, la función de demanda está representada sólo por la rama derecha de dicha gráfica pues no tiene sentido hablar de precios negativos.



A partir de la gráfica es fácil comprobar lo que se dijo anteriormente, "a medida que el precio aumenta la cantidad, demandada se hace cada vez más pequeña"; es decir, cuando $p\to\infty^{+}$ la demanda $\dfrac{1}{p}\to 0$, de donde se concluye que $\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{1}{p}=0$.

Para saber lo que ocurre con $\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{k}{p}$, se puede utilizar la propiedad 5 de los límites y el resultado anterior, de donde se obtiene:

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{k}{p}=k\cdot\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{p}=k\cdot 0.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{k}{p}=0$.

El siguiente teorema es la generalización del resultado anterior.

Teorema 3: límite al infinito

Si r es cualquier entero positivo y k un número real diferente de cero, entonces

1. $\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{k}{p^r}=0$
2. $\lim\limits_{p\to-\infty}\dfrac{k}{p^r}=0.$

Observa que si se pudiera evaluar directamente, los límites anteriores tendrían la forma *constante*/∞, por lo que se puede decir que la expresión:

$$\boxed{\frac{constante}{\infty}\to 0}$$

Ejemplo 2 Encuentra el valor del límite $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+5}{4x^3-1}$.

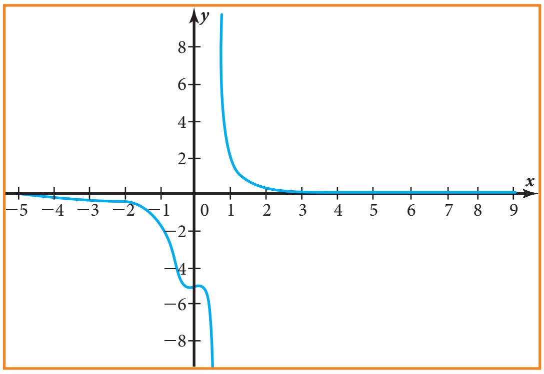
Solución Observa que la función que aparece en el límite es una función *racional*.

Si se intentara evaluar directamente el límite anterior, se obtendría la forma ∞/∞; recuerda que cuando esto ocurre se tienen las alternativas de graficar la función o construir una tabla de valores para encontrar el límite; sin embargo, en este caso existe una tercera alternativa, que es transformar cada término a la forma $\dfrac{k}{p^r}$ para aplicar el teorema anterior. A continuación se analizan las tres alternativas.

- Alternativa 1: trazar la gráfica para encontrar el límite

La figura de abajo corresponde a la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{2x^2-x+5}{4x^3-1}$, en donde se ve claramente que a medida que $x \to \infty$ la altura de la función tiende a cero, esto significa que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x+5}{4x^3-1}=0.$$



- Alternativa 2: construir una tabla de valores

Recuerda que para determinar el valor de este tipo de límites debes evaluar la función en valores de x cada vez más grandes. Completa la tabla siguiente y comprueba que el límite es 0.

x	2	100	1 000	10 000
$f(x)=\dfrac{2x^2-x+5}{4x^3-1}$	0.3548			

- Alternativa 3: transformar cada término a la forma $\dfrac{k}{p^r}$

Para lograr que cada término tenga esta forma, habrá que dividir cada uno de los términos tanto del numerador como del denominador, por la variable elevada a la potencia más alta que aparezca en el denominador, y enseguida aplicar el teorema del límite al infinito. A continuación se ejemplifica el procedimiento.

Se desea encontrar el valor de: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-x+5}{4x^3-1}$.

Paso 1: se determina la variable de mayor potencia en el denominador.

En este caso es: x^3.

Paso 2: se divide cada término del numerador y del denominador entre la variable de mayor potencia.

En este caso se obtiene: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{2x^2}{x^3}-\dfrac{x}{x^3}+\dfrac{5}{x^3}}{\dfrac{4x^3}{x^3}-\dfrac{1}{x^3}}$.

Paso 3: se simplifica cada término.

Al simplificar se tiene: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}}{4-\dfrac{1}{x^3}}$.

Paso 4: evaluar directamente para determinar si los términos tienen la forma *constante*/∞ y aplicar el teorema.

Al hacerlo se tiene: $\dfrac{\dfrac{2}{\infty}-\dfrac{1}{\infty}+\dfrac{5}{\infty}}{4-\dfrac{1}{\infty}}=\dfrac{0}{4}=0.$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-x+5}{4x^3-1}=0.$

Ejercicio 1 Encuentra el valor de $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3 - x^2 + 1}{4x^3 - 2x + 1}$.

Solución ¿Puedes evaluar directamente el límite?______________ ¿Por qué? ______________________

____

Efectúa los pasos para utilizar el Teorema del límite al infinito para funciones racionales.

Paso 1: ¿cuál es la variable de mayor potencia en el denominador? ______________

Paso 2: divide cada término del numerador y del denominador entre la variable de mayor potencia.

Paso 3: simplifica cada término.

Paso 4: evalúa directamente para determinar si los términos tienen la forma *constante*/∞ y aplicar el teorema.

La respuesta es: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3 - x^2 + 1}{4x^3 - 2x + 1} =$ ________________.

Ejercicio 2 Encuentra el valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - x + 1}{3x + 5}$.

Solución ¿Puedes evaluar directamente el límite?______________ ¿Por qué? ______________________

____

Efectúa los pasos para utilizar el Teorema del límite al infinito para funciones racionales.

Paso 1: ¿cuál es la variable de mayor potencia en el denominador? ______________

Paso 2: divide cada término del numerador y del denominador entre la variable de mayor potencia.

Paso 3: simplifica cada término.

Paso 4: evalúa directamente para determinar si los términos tienen la forma *constante*/∞ y aplicar el teorema.

La respuesta es: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - x + 1}{3x + 5} =$ ________________.

Ejercicio 3 Encuentra el valor de $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^2 + 6x + 1}{x^3 - x^2 + 3x}$.

Solución ¿Puedes evaluar directamente el límite?_____________ ¿Por qué?________________________.

____

Efectúa los pasos para utilizar el Teorema del límite al infinito para funciones racionales.

Paso 1: ¿cuál es la variable de mayor potencia en el denominador? _____________

Paso 2: divide cada término del numerador y del denominador entre la variable de mayor potencia.

Paso 3: simplifica cada término.

Paso 4: evalúa directamente para determinar si los términos tienen la forma *constante*/∞ y aplicar el teorema.

La respuesta es: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^2 + 6x + 1}{x^3 - x^2 + 3x} =$ ________________

Conjunto de ejercicios de práctica 2.1

Para cada uno de los ejercicios 1 a 4, completa la tabla de valores para la función $f(x)$ en cada uno de los valores dados de x. Utiliza esta información para estimar el valor del límite que se indica.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$

	Valores a la izquierda de x			Valores a la derecha de x		
x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

2. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \tan(x)$

	Valores a la izquierda de x			Valores a la derecha de x		
x	$\pi/4$	$3\pi/8$	$7\pi/16$	$9\pi/16$	$5\pi/8$	$3\pi/4$
$f(x)$						

3. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$

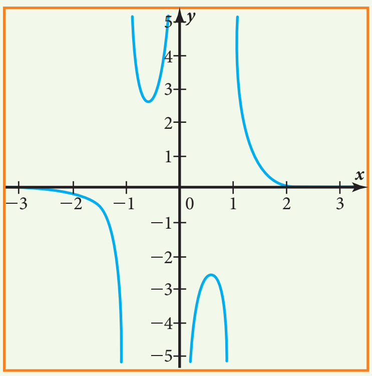
	Valores a la izquierda de x			Valores a la derecha de x		
x	$\pi/4$	$3\pi/8$	$7\pi/16$	$9\pi/16$	$5\pi/8$	$3\pi/4$
$f(x)$						

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4+4}{x^2-2}$

	Valores a la izquierda de x			Valores a la derecha de x		
x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$						

Para cada uno de los ejercicios 5 a 7, utiliza la gráfica dada para determinar los límites indicados, si existen. Si el límite no existe, informa si el comportamiento de la función es $+\infty$ o $-\infty$.

5.



a) $\lim\limits_{x\to 1.5} f(x)$

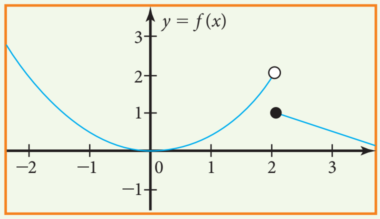
b) $\lim\limits_{x\to 0.5} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

6.



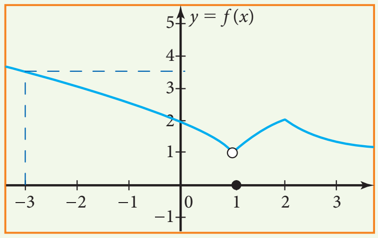
a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

7.



a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

8. Traza la gráfica de la función $h(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x<0 \\ x+1 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ y determina si existe el $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$

9. Traza la gráfica de la función $g(x)=\begin{cases} 1-x & \text{si} \quad x<1 \\ 2 & \text{si} \quad x=1 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ y determina si existe el $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

10. Considera la representación gráfica de la función g definida por

$$g(x)=\begin{cases} \sqrt{-x-1} & \text{si} \quad x\le -2 \\ x+3 & \text{si} \quad -2<x<1 \\ -1 & \text{si} \quad 1\le x\le 3 \\ (x-4)^2 & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$$

Determina si existen cada uno de los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to -2} g(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$ e) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

En los ejercicios 11 a 20 encuentra el valor del límite indicado.

11. $\lim\limits_{x\to 1}(4x^3+5x-8)$

12. $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{3x^2}{5}+\dfrac{x}{5}-6\right)$

13. $\lim\limits_{x\to -1/2}(-x^3-2x^4)$

14. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{9-x}{81+x^2}$

15. $\lim\limits_{x\to 1} e^4$

16. $\lim\limits_{x\to 0}(\ln 5)$

17. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{6-x}{4-5x+3x^3}\right)$

18. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x-2}{15-5x}$

19. $\lim\limits_{x\to \pi}\operatorname{sen}(x)$

20. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\csc(x)$

En los ejercicios 21 a 26, determina el límite que se pide, si se sabe que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 5$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -3$ y $\lim\limits_{x \to a} h(x) = 9$.

21. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x) + h(x)]$

22. $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{3f(x) - 5g(x)}{h(x)} \right]$

23. $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{\sqrt{h(x)}}{g(x)} \right]^3$

24. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{[f(x)]^2 - h(x)}}{g(x)}$

25. $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)}{h(x) - f(x) - g(h)} \right]$

26. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{g(x)}$

En los ejercicios 27 a 46 encuentra el límite de la función dada en el punto indicado.

27. $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x^2 - 81}{x - 9}$

28. $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{25 - x^2}{x + 5}$

29. $\lim\limits_{x \to -6} \dfrac{6x^2 + 36x}{x + 6}$

30. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + 2x - 8}$

31. $\lim\limits_{x \to 3/2} \dfrac{2x^2 - 3x}{6x^2 + x - 15}$

32. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$

33. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^3 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$

34. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x}{x - 4}$

35. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x^2 + 9)^{1/2}}{x + 9}$

36. $\lim\limits_{s \to -\infty} \dfrac{s^2 + 3}{2s^2 - 1}$

37. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x - 3}{x^2 + 25}$

38. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x}{(x^2 + 1)^{1/2}}$

39. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{8 + x^2}{8x(x + 1)} \right]^{1/3}$

40. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(8 + x^2)^{1/2}}{x}$

41. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 - x + 3}{x^3 + 1}$

42. $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{2y^3 + 4}{12y - 3}$

43. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(16 - x^2)^{1/2}}{x - 4}$

44. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{5x + 1}{x^2}$

45. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 3x} \right)$

46. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x + 1} - 1}{x}$

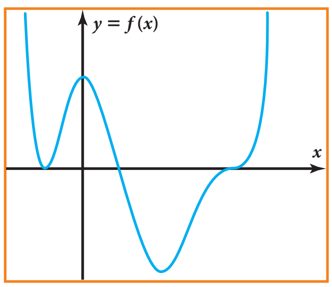
2.2 Continuidad

Cuando estás hablando por teléfono y repentinamente “se corta la llamada”, o bien, estás viendo tu programa favorito o respondiendo un examen en línea y momentáneamente “se va la señal” o “se pierde la conexión”, se dice que el servicio, la señal, o la línea no están funcionando de forma *continua*.

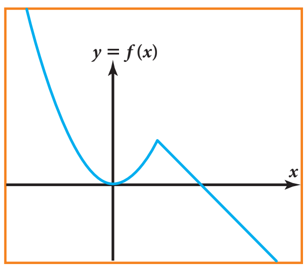
En Matemáticas la continuidad es una propiedad que poseen muchas de las funciones y que es importante analizar, ya que sirve de referencia para estudiar conceptos clave del cálculo diferencial e integral.

La idea intuitiva de función continua puede comprenderse fácilmente al observar su gráfica; si ésta puede dibujarse sin levantar o despegar el lápiz del papel, entonces se dice que la función es **continua**. Si al trazar la gráfica, ésta muestra una "interrupción", "salto" o "hueco" que nos haga levantar o despegar el lápiz del papel, diremos que la función es **discontinua**.

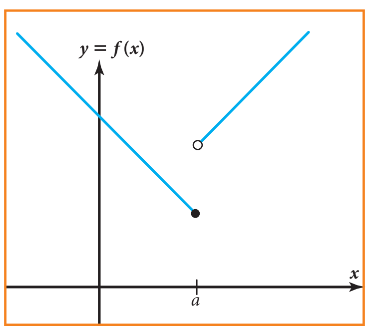
En la siguiente figura se presentan ejemplos de gráficas de funciones continuas y discontinuas.



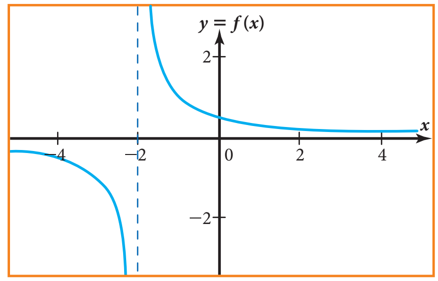
a) Continua



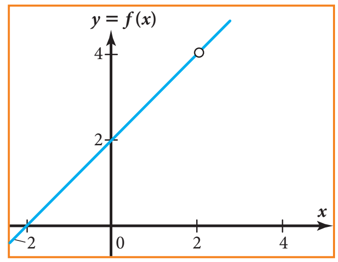
b) Continua



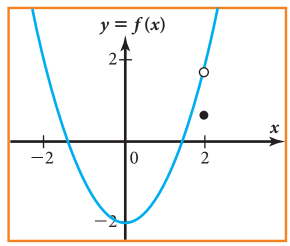
c) Discontinua; la gráfica tiene un salto en $x = a$



d) Discontinua; la gráfica se interrumpe en $x = -2$



e) Discontinua; la gráfica tiene un hueco en $x = 2$



f) Discontinua; la gráfica tiene un hueco y un punto aislado en $x = 2$

Una definición más formal para la continuidad es la siguiente:

Se dice que una función $f(x)$ es *continua* en $x = a$ si y sólo si cumple las tres condiciones siguientes:

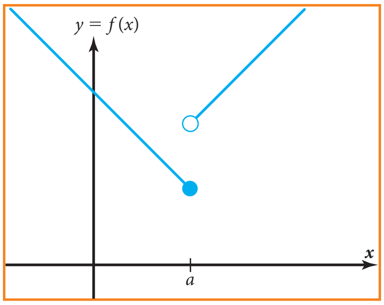
1) Que la función en $x = a$ tenga asignado un valor, es decir, que $f(a)$ exista.

2) Que exista el límite bilateral de la función en $x = a$, es decir, que $\lim_{x\to a} f(x)$ exista.

3) Que el valor de la función en $x = a$ coincida con el límite de la función en ese punto, es decir, que se cumpla la igualdad $\lim_{x\to a} f(x)$.

Si una función f *no cumple* con alguna(s) de las condiciones de la definición, se dice que la función es discontinua en $x = a$; la causa de la discontinuidad será la primera condición que falle.

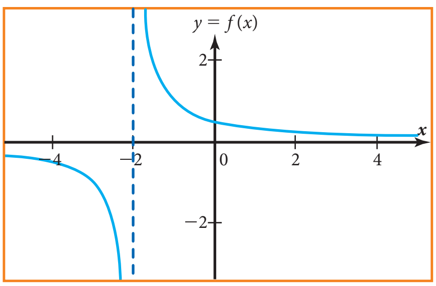
Las funciones que aparecen en la siguiente figura son discontinuas, completa los espacios en blanco y determina la causa por la que son discontinuas, es decir, cuál de las tres condiciones no se cumple.



1. La función ¿tiene un valor asignado en $x = a$? ____________
2. ¿Existe el límite en $x = a$? ____________
3. ¿El valor de la función y el límite son iguales en $x = a$? ____________

La función es discontinua en $x = a$ porque:

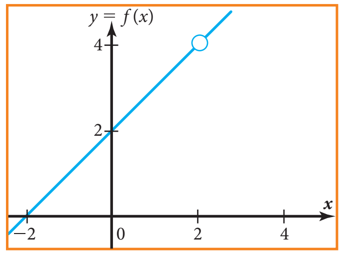
____



1. La función ¿tiene un valor asignado en $x = -2$? ____________
2. ¿Existe el límite en $x = -2$? ____________
3. ¿El valor de la función y el límite son iguales en $x = -2$? ____________

La función es discontinua en $x = -2$ porque:

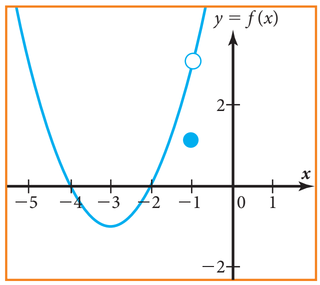
____



1. La función ¿tiene un valor asignado en $x = 2$? ____________
2. ¿Existe el límite en $x = 2$? ____________
3. ¿El valor de la función y el límite son iguales en $x = 2$? ____________

La función es discontinua en $x = 2$ porque:

____



1. La función, ¿tiene un valor asignado en $x = -1$? ____________
2. ¿Existe el límite en $x = -1$? ____________
3. ¿El valor de la función y el límite son iguales en $x = -1$? ____________

La función es discontinua en $x = -1$ porque:

____

Cabe aclarar que las funciones anteriores *sólo son discontinuas en el punto en donde se observa la "interrupción", el "hueco" o el "salto"*; en todos los demás puntos de su dominio las funciones son *continuas*.

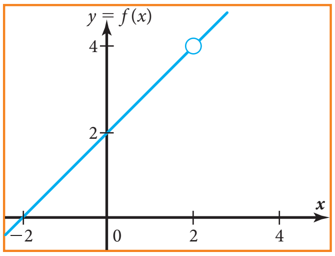
Clasificación de las discontinuidades

Las discontinuidades se pueden clasificar como eliminables (también llamadas removibles) o esenciales, a continuación se explica lo que estos nombres significan.

Discontinuidad eliminable (o removible)

Una función tiene una discontinuidad **eliminable** en $x = a$ siempre que $\lim_{x \to a} f(x)$ *exista*, esto se debe a que la función puede hacerse continua si se redefine el valor de la función en $x = a$, de tal forma que se cumple la tercera condición de continuidad $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

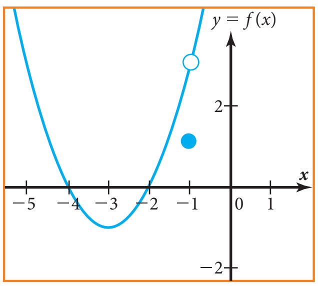
Una discontinuidad puede eliminarse en los puntos donde la gráfica tiene un hueco. Veamos los siguientes ejemplos.



La función cuya gráfica aparece arriba, no está definida en $x = 2$, es decir, $f(2)$ *no existe*, así que es discontinua en $x = 2$.

Sin embargo, al observar la gráfica se tiene que $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$, esto significa que el límite *existe.*

Por lo tanto, la discontinuidad es *eliminable* y se elimina al hacer que la altura de la función sea 4 en el punto $x = 2$, que es equivalente a decir: si $f(2) = 4$ *la función se vuelve continua*.



La función cuya gráfica aparece arriba, ¿tiene una discontinuidad en $x = -1$? ________________

¿La discontinuidad es eliminable? ______________

Justifica tu respuesta. ________________________

____

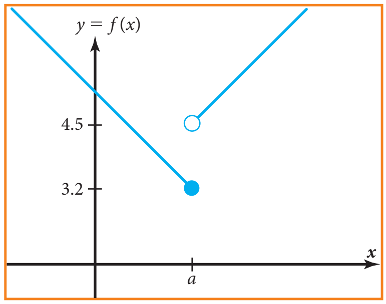
¿Cómo definirías la función para que se vuelva continua? ______________________________________

____

Discontinuidad esencial

Una función tiene una discontinuidad **esencial** en $x = a$ cuando $\lim_{x \to a} f(x)$ *no existe*, esto significa que la discontinuidad no se puede eliminar, es decir, no se puede hacer que la función sea continua.

Una discontinuidad *no* puede eliminarse en los puntos en donde la gráfica tiene un salto, o bien, crece o decrece sin límite. Veamos los siguientes ejemplos.



La función, cuya gráfica aparece arriba, está definida en $x = a$, ya que su altura en $x = a$ es

$f(a) =$ ______________________________________

se cumple la primera condición de continuidad.

El límite por la izquierda de a es:

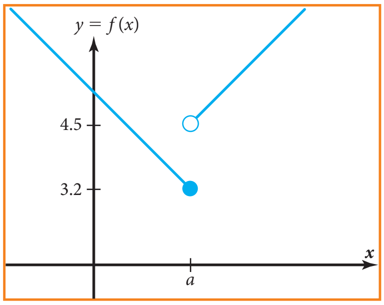
$\lim_{x \to a^-} f(x) =$ ______________________________

y el límite por la derecha de a es:

$\lim_{x \to a^+} f(x) =$ ______________________________

Como los límites unilaterales son diferentes, entonces el límite bilateral $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe, por lo tanto, falla la segunda condición para la continuidad, así que la función es discontinua en $x = a$.

La discontinuidad es *esencial*, ya que no hay forma de hacer coincidir el valor de la función y el límite, pues *no puede igualarse algo que existe con algo que no existe.*



La función cuya gráfica aparece arriba ¿está definida en $x = -2$? __________________________.

¿La función es continua en $x = -2$? __________.

El límite por la izquierda de -2 es:

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) =$ ____________________________________.

y el límite por la derecha de -2 es:

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) =$ ______________________, entonces el límite bilateral $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \infty$, que es equivalente a decir que no existe.

En este caso la discontinuidad también es *esencial* ya que no hay forma de hacer coincidir el valor de la función y el límite, *pues no pueden igualarse dos cantidades que no existen.*

Teoremas de continuidad

Los siguientes teoremas son de mucha utilidad para determinar con facilidad la continuidad de funciones polinomiales, racionales y con radicales.

Teorema 1

La función polinomial $y = P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ es continua en todo número.

Teorema 2

La función racional $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es continua en todo número de su dominio, es decir, es continua en todo número x donde $Q(x) \neq 0$.

Teorema 3

a) Si $f(x) = \sqrt[n]{x}$ y n es un número entero impar positivo, entonces f es continua en todo número.

b) Si $f(x) = \sqrt[n]{x}$ y n es un número entero par positivo, entonces f es continua para todo número positivo x.

Ejemplo 1 Determina los valores de x en los que cada una de las siguientes funciones sea continua.

a) $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x - 9$

b) $h(x) = \dfrac{4x^2 - x + 3}{x^2 - 5x + 6}$

c) $g(x) = \sqrt[3]{5x - 2}$

Solución *a)* La función $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x - 9$ es una función polinomial, así que es continua para todo valor de x.

b) La función $h(x) = \dfrac{4x^2 - x + 3}{x^2 - 5x + 6}$ es el cociente de dos polinomios, es decir, una función racional. Por lo tanto, se sabe que es discontinua cuando el denominador $x^2 - 5x + 6 = 0$. Al resolver esta ecuación mediante factorización se tiene $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2) = 0$, entonces en $x = 3$ y en $x = 2$ la función $h(x)$ es discontinua. En consecuencia se concluye que dicha función es *continua* en todo punto, excepto en $x = 3$ y en $x = 2$.

c) La función $g(x) = \sqrt[3]{5x - 2}$ corresponde a una raíz cúbica, es decir, $n = 3$ es un entero impar positivo, por lo tanto, la función es continua en todo punto.

Ejemplo 2 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ x & \text{si} \quad 1 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

determina el valor (o valores) de la variable independiente en los que la función sea discontinua, describe qué condición de la definición de continuidad no se cumple y clasifica la discontinuidad como esencial o eliminable. Comprueba con la gráfica de la función tus resultados.

Solución La función está definida por secciones, para valores menores a 1 la función es continua ya que es una parábola. Para valores mayores o iguales a 1, pero menores a 3, la gráfica es un segmento de recta; por lo tanto, también es continua y, para valores mayores o iguales a 3 la función es constante y, por lo tanto, continua.

De este razonamiento se concluye que los únicos puntos donde la función puede ser discontinua son: $x = 1$ y $x = 3$, ya que en esos puntos es donde la función cambia de comportamiento.

Se aplicará la definición de continuidad para verificar si la función es continua en $x = 1$.

a) $f(1) = 1$ existe, por lo tanto, la condición 1 se cumple.

b) Para verificar si se cumple la condición 2 hay que obtener los límites unilaterales $\lim_{x\to 1^-}(2 - x^2) = 1$ y $\lim_{x\to 1^+}(x) = 1$. Entonces $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ existe y, por lo tanto, se cumple, esta condición.

c) La condición 3 también se cumple ya que $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = 1$.

Como todas las condiciones se cumplen, se concluye que la función es continua en $x = 1$.

Ahora se aplicará la definición de continuidad para verificar si la función es continua en $x = 3$.

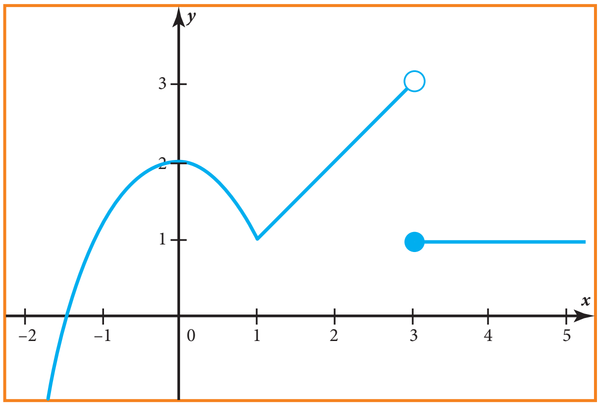
a) $f(3) = 1$ existe, por lo tanto, la condición 1 se cumple.

b) Para verificar si se cumple la condición 2 hay que obtener los límites unilaterales $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 3$ y $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3$, entonces $\lim_{x\to 3} f(x)$ no existe.

Como esta condición no se cumple, se concluye que la función es discontinua en $x = 3$.

Además, como el límite no existe, la discontinuidad es de tipo esencial.

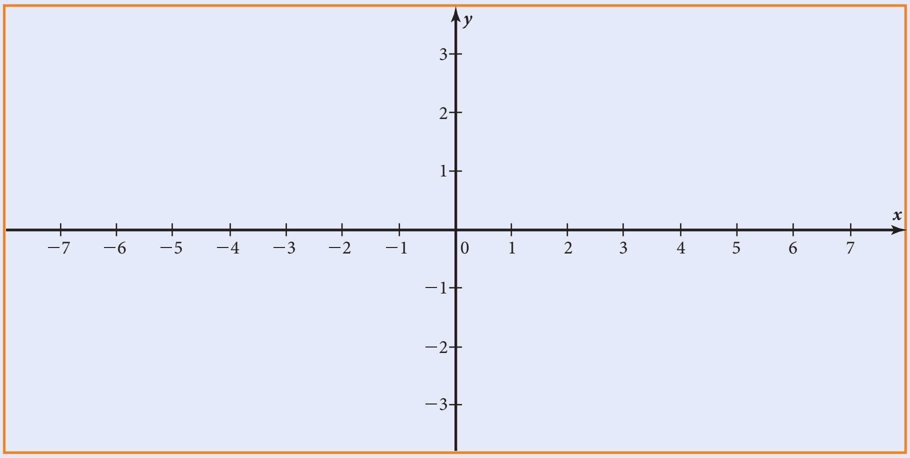
La figura siguiente corresponde a la gráfica de la función $f(x)$, en ella se pueden comprobar los resultados anteriores. Observa que hay un salto en $x = 3$, por eso la discontinuidad es esencial.



Ejercicio 1 Traza la gráfica de la función; observa dónde hay saltos en la grafica para determinar los valores de la variable independiente en los que la función es discontinua, muestra cuál condición de la definición de continuidad no se cumple y clasifica la discontinuidad como eliminable o esencial.

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \text{si} \quad x<0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad 0<x \end{cases}$$

Solución Traza la gráfica de la función.



¿La gráfica de la función tiene un salto? ______________________ ¿En qué valor? $x =$ ________________________

¿Cuál es el valor de la función en ese punto? __________________

Encuentra el límite de la función en ese punto.

¿El valor de la función y el límite son iguales? ________________

¿La función es continua o discontinua en el punto? ________________

Si es discontinua, ¿qué tipo de discontinuidad tiene? ________________

Justifica tu respuesta. ____

____

____

____

____

____.

Ejercicio 2 Aplicando la definición de continuidad, muestra que la función $f(x)=\dfrac{9x^2-4}{3x-2}$ es discontinua en el número $x=\dfrac{2}{3}$; determina si la discontinuidad es eliminable o esencial. Si es eliminable, define $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$ de manera que la discontinuidad desaparezca.

Solución ¿Cuál es el valor de la función en ese punto? ____________________

Encuentra el límite de la función en ese punto, si es que existe.

¿El valor de la función y el límite son iguales? ___________________

¿Qué tipo de discontinuidad tiene? ____________________________ Justifica tu respuesta. ____________________

____

____

____.

Si la discontinuidad es eliminable, redefine de tal forma que la función se vuelva continua.

Ejercicio 3 Aplicando la definición de continuidad muestra que la función $f(t)=\begin{cases} 9-t^2 & \text{si} \quad t\le 2 \\ 3t+2 & \text{si} \quad t>2 \end{cases}$ es discontinua en el número $t = 2$ y determina si la discontinuidad es eliminable o esencial. Si es eliminable, define $f(2)$ de manera que la discontinuidad desaparezca.

Solución ¿Cuál es el valor de la función en ese punto? ____________________

Encuentra el límite de la función en ese punto, si es que existe.

¿El valor de la función y el límite son iguales? _____________________

¿Qué tipo de discontinuidad tiene? ______________________ Justifica tu respuesta. ________________

____

____

____

Si la discontinuidad es eliminable, redefine de tal forma que la función se vuelva continua.

Ejercicio 4 Determina los valores de x en los que la función $f(x) = x^2 (x + 3)^2$ es continua. Realiza el procedimiento necesario para justificar tu respuesta.

Ejercicio 5 Determina los valores de x en los que la función $g(x) = \dfrac{x}{x-3}$ es continua. Realiza el procedimiento necesario para justificar tu respuesta.

Ejercicio 6 Determina los valores de x en los que la función $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si} \quad x < 2 \\ 4 - x^2 & \text{si} \quad 2 \leq x \end{cases}$ es continua. Realiza el procedimiento necesario para justificar tu respuesta.

Para cada uno de los ejercicios del 1 al 4 traza la gráfica de la función; determina los valores de la variable independiente en los que la función es discontinua y qué condición de la definición de continuidad no se cumple.

1. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x} & \text{si} \quad x<0\\ \sqrt[3]{x+1} & \text{si} \quad 0\leq x\end{cases}$ en $x = 0$

2. $h(x)=\begin{cases}3-(x+2)^2 & \text{si} \quad x<-2\\ 2 & \text{si} \quad x=-2\\ 1-x & \text{si} \quad x>-2\end{cases}$

3. $g(x)=\dfrac{|x-3|}{x+3}$ analiza los valores $x = 3$ y $x = -3$

4. $g(x)=\dfrac{x-36}{\sqrt{x}-6}$ en $x = 36$

En los siguientes ejercicios aplica la definición de continuidad para demostrar que la función es discontinua en el número indicado y determina si la discontinuidad es eliminable o esencial. Si es eliminable, define *f*(*a*) de manera que la discontinuidad desaparezca.

5. $h(x)=\dfrac{2x^2-5x+2}{x^2+2x-8}$ en $x = 2$

6. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$ en $x = 0$

7. $g(x)=\begin{cases}x+5 & \text{si} \quad x<0\\ 7 & \text{si} \quad x=0\\ 5-x^2 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases}5 & \text{si} \quad x\leq -1\\ 6x-4 & \text{si} \quad x>-1\end{cases}$

En los siguientes ejercicios determina los números en los cuales es continua la función dada.

9. $g(x)=\dfrac{4x-3}{x^2+25}$

10. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2} & \text{si} \quad x\leq 1\\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad 1<x\end{cases}$

11. $h(x) = \cos(x)$

12. $g(x) = 7x^4 + 4x^3 - 5' + 6$

13. $f(x)=\dfrac{3x^2-8x+5}{x^2+3x}$

14. $h(x)=\begin{cases}\sqrt{-x+2} & \text{si} \quad x\leq 2\\ x-2 & \text{si} \quad 2<x\end{cases}$

Derivada

Temas

En nuestra vida diaria encontramos situaciones de cambio en todo momento. En Economía, por ejemplo, conocer la rapidez con la que cambia la inflación, las tasas de interés, etcétera, son útiles para tomar decisiones; conocer la rapidez con la que crece una población, los índices de criminalidad, etc., son datos importantes en un gobierno para hacer planes y definir acciones; en Medicina, la rapidez con la que crece un tumor es un dato importante para emitir un diagnóstico. Así como éstos, podemos encontrar muchos ejemplos más en los cuales identificamos situaciones de cambio.

El Cálculo Diferencial es la parte de la Matemática que estudia el cambio, y su concepto central es la derivada.

En esta unidad abordaremos el concepto de derivada desde dos puntos de vista:

- Física: basado en los intentos de Kepler (1571-1630), Galileo (1564-1642), Newton (1642-1727) y otros para describir la velocidad de un cuerpo en movimiento: *el problema de la velocidad instantánea*.
- Geometría: basado en un problema más antiguo que se remonta a la época de Arquímedes (287-212 a. C.): *el problema de la pendiente de la recta tangente*.

Ambos problemas, apoyados en el concepto de límite, nos proporcionan una estrategia para comprender y definir el concepto de derivada.

Algunas de las aplicaciones de este concepto lo podemos encontrar en el área de Economía, específicamente al hablar de costo marginal e ingreso marginal.

3.1 La derivada como razón de cambio

En la Unidad 1 aprendimos cómo se mide el cambio de una función dentro de un intervalo, también analizamos cómo obtener el cambio promedio en un intervalo. Ahora estamos interesados en obtener la razón de cambio de una función f en un instante $x = a$, llamada también razón instantánea de cambio y que en matemáticas se le conoce con el nombre de **derivada de f en $x = a$** y se denota como $f'(x)$. Entonces *la* **derivada** es el nombre que le daremos a la razón instantánea de cambio o cambio de la función en un instante en particular. Utilizaremos el concepto de cambio promedio para construir la definición de derivada.

El problema que tenemos para calcular la razón instantánea de cambio es que cuando centramos nuestra atención en un instante ocurre que la cantidad que estaba variando deja de hacerlo. Para comprender mejor este hecho analicemos el siguiente enunciado: "La mejor marca en el Mundial de Atletismo en París 2003 que la atleta mexicana Ana Gabriela Guevara obtuvo en la prueba de los 400 metros planos fue de 48.89 segundos".

De los datos anteriores podemos concluir que la velocidad promedio de Ana Gabriela durante la prueba fue de 8.18 metros por segundo; sin embargo, es lógico pensar que hubo momentos en los que pudo haber ido ligeramente más rápido o más lento. Si tuviéramos una fotografía de Ana Gabriela en el preciso instante de cruzar la meta, ¿podríamos utilizarla para calcular la velocidad a la que cruzó la meta? Evidentemente la respuesta es no, porque al fijarnos en un instante la acción se detiene.

Veamos cómo responder la pregunta:

Nota La estrategia para calcular la razón de cambio en un instante es obtener el cambio promedio en intervalos cada vez más cercanos al instante que nos interesa.

Desafortunadamente para el caso de la atleta mexicana, no tenemos más datos acerca de la distancia recorrida, por ejemplo, un segundo antes y un segundo después de cruzar la meta, por lo que no hay forma de obtener la velocidad en el instante en que cruzó la meta.

El siguiente ejemplo nos ayudará a comprender la estrategia para calcular la razón instantánea de cambio (también llamada *derivada*).

Construcción Considera la razón de cambio del valor del dólar (variable discreta).

La siguiente tabla muestra el valor del dólar del día 1 de agosto de cada año durante el periodo comprendido entre 1999 y 2003.

t (años)	1999	2000	2001	2002	2003
V (pesos por dólar)	9.3565	9.3667	9.1408	9.7861	10.5243

Fuente: http://www.sat.gob.mx/nuevo.html

Queremos calcular qué tan rápido cambió el valor del dólar en un instante en particular.

Supongamos que nos interesa conocer la **razón de cambio** del valor del dólar del 1 de agosto de

2002, que denotaremos por $V'_{01/08/02}$. Para lograrlo obtendremos el cambio promedio del valor del dólar un año antes y un año después del 1 de agosto de 2002.

En el intervalo de 2001 a 2002, el cambio promedio del valor del dólar lo denotaremos por $V_{(2001, 2002)}$ y lo calculamos dividiendo el cambio en V entre el cambio en t, es decir:

$$V_{(2001,\,2002)} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\begin{matrix}\text{valor}\\ \text{del dólar}\\ \text{en 2002}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{valor}\\ \text{del dólar}\\ \text{en 2001}\end{matrix}}{2002 - 2001} =$$

$$\frac{9.7861 - 9.1408}{2002 - 2001} = 0.6453 \text{ pesos por año.}$$

Esto significa que un año antes de 2002 el valor del dólar aumentó aproximadamente a razón de 65 centavos por año.

De manera similar, el cambio promedio del valor del dólar en el intervalo de 2002 a 2003 es

$$V_{(2002,\,2003)} = \frac{\begin{matrix}\text{valor del dólar}\\ \text{en 2003}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{valor del dólar}\\ \text{en 2002}\end{matrix}}{2003 - 2002} =$$

$$\frac{10.5243 - 9.7861}{2003 - 2002} = 0.7382 \text{ pesos por año.}$$

La interpretación del resultado anterior es que después de 2002 el valor del dólar aumentó aproximadamente a razón de 74 centavos por año. Es importante aclarar que ninguno de estos dos valores corresponde a la razón de cambio del valor del dólar del día 1 de agosto de 2002, lo que sí podemos asegurar es que dicha razón de cambio está entre estos dos valores, es decir,

$$0.6453 \text{ pesos por año} < V'_{01/08/02} < 0.7382 \text{ pesos por año.}$$

Por otro lado, si promediamos los dos valores obtenidos [(0.6453 + 0.7382)/2] podríamos decir que una estimación para la razón de cambio del valor del dólar de dicha fecha es $V'_{01/08/02} \approx 0.69175$ pesos por año. Sin embargo, este valor tampoco sería una buena aproximación, ya que el intervalo de tiempo que utilizamos es de un año antes y un año después del 1 de agosto de 2002.

Si queremos obtener una mejor estimación, debemos fijarnos en intervalos más pequeños. Afortunadamente podemos conocer la cotización del dólar por mes.

La siguiente tabla muestra el valor del dólar el día primero de cada mes en el periodo comprendido de junio a octubre de 2002.

t (meses)	*V* (pesos por dólar)
Junio	9.7148
Julio	9.9568
Agosto	9.7861
Septiembre	9.9193
Octubre	10.2299

Fuente: http//www.sat.gob.mx/nuevo.html

Los intervalos son ahora de un mes (1 mes = 1/12 de año). Repetiremos la estrategia de calcular el cambio promedio un mes antes y un mes después de la fecha señalada.

El cambio promedio un mes antes del 1 de agosto de 2002 es:

$V_{(\text{jul, ago})}$ = ________________.

¿Cuál es el significado del signo? ____________

El cambio promedio un mes después del 1 de agosto de 2002 es:

$V_{(\text{ago, sep})}$ = ________________.

Por lo tanto, se cumple que

____________ $< V'_{01/08/02} <$ ________________.

Una estimación para la razón de cambio del día 1 de agosto es:

$V'_{01/08/02}$ = ________________.

¿Consideras que aún podemos obtener una mejor estimación?

¿Es posible obtener una tabla con la cotización diaria del valor del dólar?

Entonces vamos a mejorar más la estimación, tomando la información por día.

La siguiente tabla muestra el valor del dólar en el periodo comprendido del 30 de julio al 3 de agosto de 2002.

t (días)	V (pesos por dólar)
30 de julio	9.6944
31 de julio	9.7148
1 de agosto	9.7861
2 de agosto	9.8769
3 de agosto	9.8769

Fuente: http//www.sat.gob.mx/nuevo.html

Observa cómo ahora los intervalos son de un día; más pequeños aún que en la tabla anterior (1 día = 1/360 de año).

Nota Estamos considerando años fiscales; éstos se consideran de 360 días.

Repetiremos la estrategia de calcular el cambio promedio un día antes y un día después del 1 de agosto de 2002.

El cambio promedio un día antes del 1 de agosto de 2002 es:

$V_{(31\text{ jul, } 1\text{ ago})} =$ ________________

El cambio promedio un día después del 1 de agosto de 2002 es:

$V_{(1\text{ ago, } 2\text{ ago})} =$ ________________.

Por lo tanto, se cumple que

____________ $< V'_{01/08/02} <$ ________________.

Una estimación para la razón de cambio el día 1 de agosto de 2002 es:

$V'_{01/08/02} =$ ________________.

Para obtener una mejor estimación, sería necesario contar con una tabla de cotización del valor del dólar, por ejemplo, para cada hora o para cada minuto, pero dichas tablas no están a nuestro alcance, por lo que consideraremos que el valor diario es la mejor estimación que podemos hacer.

Para obtener el cambio promedio hemos considerando como punto inicial el valor del dólar en el instante que nos interesa (1 de agosto de 2002) y como punto final el valor del dólar a diferentes tiempos, antes y después de dicho instante.

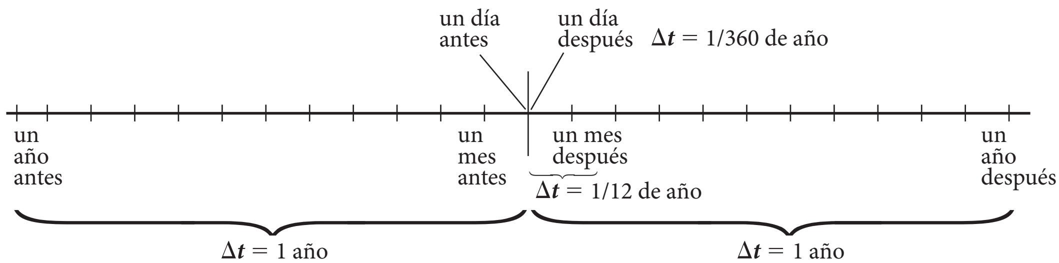
Denotemos con Δt a la longitud de los intervalos, es decir, a la distancia que hay entre el punto inicial y el punto final; recuerda que dicha distancia siempre debe medirse haciendo referencia a la misma unidad, por eso, en el ejemplo que se muestra al final de la página los meses y días los convertimos a años.

Observamos que cuando Δt es de 1 día = 1/360 de año, el resultado del cambio promedio antes y después del 1 de agosto es muy parecido, por lo que la diferencia es muy pequeña (poco menos de dos centésimos), lo que significa que la estimación para el cambio promedio que calculamos con la cotización diaria es muy buena.

En general, cuando una función está dada como una tabla de valores, no es posible encontrar el cambio promedio en intervalos cada vez más pequeños, por lo que en esos casos sólo podemos obtener un valor aproximado para la razón instantánea de cambio.

Ejemplo 1 La siguiente tabla muestra el Índice Nacional de Confianza del Consumidor (INCC) que mide el nivel de optimismo o pesimismo de los consumidores mexicanos respecto a la evolución futura de la economía y sus propias finanzas personales.

Arriba de 50 puntos se considera que hay optimismo; debajo de 50 puntos se considera pesimismo.



t (en meses)	INCC (en puntos)
mar 3	47.59
may 3	50.81
jul 3	50.59
oct 3	47.84
dic 3	48.72
mar 4	49.25

Fuente: *El Norte,* 30 de marzo de 2004, sección Negocios, página 5A.

Estima la razón de cambio del INCC en octubre de 2003.

Solución En la tabla anterior los valores para la variable independiente (tiempo) no están igualmente espaciados, es decir, de julio a octubre hay tres meses de diferencia, mientras que entre octubre y diciembre solamente hay dos meses. Recuerda que cuanto más cercanos estén los datos, mejor será la aproximación para la razón de cambio, así que en este caso utilizaremos los valores de octubre y diciembre.

$$\begin{matrix}\text{Razón}\\ \text{de cambio}\\ \text{del } \mathit{INCC}\\ \text{en oct. 03}\end{matrix} \approx \frac{\Delta\ \mathit{INCC}}{\Delta\ t} = \frac{48.72 - 47.84}{2} = 0.44 \text{ puntos/mes}$$

Ésta es la mejor aproximación que podemos hacer, pues no tenemos datos más cercanos. El significado de esta cantidad es que para noviembre de 2003 se esperaba que el INCC estuviera aproximadamente 0.44 puntos más arriba de los 47.84 puntos de octubre, es decir, aún no habría optimismo en los consumidores mexicanos.

Ejemplo 2 Razón de cambio de la población de México. (*Variable continua.*) De acuerdo con los datos del INEGI, en 2000 la población de México era de 97.4 millones de habitantes y crecía a una tasa de 1.6% anual (*Fuente: Atlas de geografía universal*, educación primaria, SEP, 2000). Si la tasa de crecimiento sigue la misma tendencia, la población de México está dada por $P(t) = 97.4\,(1.016)^t$ donde t se mide en años a partir de 2000. Supongamos que nos interesa conocer la rapidez a la que crece la población en 2003 (es decir, cuando $t = 3$).

Nota La rapidez de cambio en un instante, la razón instantánea de cambio y la razón de cambio en un instante son conceptos equivalentes.

Solución Del ejemplo anterior sabemos que para obtener una buena estimación para la razón de cambio en el instante $t = 3$, hay que obtener el cambio promedio antes y después de $t = 3$, y que entre más pequeña sea la longitud "t" del intervalo, mejor será la estimación.

En este ejemplo tenemos la ventaja de conocer la fórmula para obtener la población en cualquier instante, así que podemos escoger como longitud del intervalo una distancia $\Delta t = 0.01$ antes y después de $t = 3$. Luego, si evaluamos la función de población en $t = 2.99$, en $t = 3$ y en $t = 3.01$, obtenemos $P(2.99) = 102.134189$, $P(3) = 102.150402$ y $P(3.01) = 102.166618$. Con los valores anteriores construimos la siguiente tabla:

$\Delta t = 0.01$ $\Delta t = 0.01$

t	2.99	3	3.01
P(*t*)	102.134189	102.150402	102.166618

El cambio promedio de la población en el intervalo [2.99, 3] es

$$P_{(2.99,\,3)} = \frac{102.150402 - 102.134189}{3 - 2.99} = \frac{0.016213}{0.01} =$$

1.6213 millones de habitantes por año.

El cambio promedio de la población en el intervalo [3, 3.01] es

$$P_{(3,\,3.01)} = \frac{102.166618 - 102.150402}{3.01 - 3} = \frac{0.016216}{0.01} =$$

1.6216 millones de habitantes por año.

Del análisis anterior podemos asegurar que la razón de cambio de la población de México en el 2003, denotada por $P'_{t=3}$, está entre los dos valores anteriores, es decir:

$$1.6213 < P'_{t=3} < 1.6216.$$

Vemos que los cambios promedios antes y después de $t = 3$ son muy aproximados. Si las restamos $1.6216 - 1.6213 = 0.0003$, vemos que difieren en tres diezmilésimos; por lo que podríamos decir que una buena estimación para la razón de cambio de la población de México en 2003 es el promedio de ambas, es decir, 1.62145 millones de habitantes por año.

Sin embargo, en este caso tenemos manera de acercarnos más al instante $t = 3$, por lo que repetiremos el proceso, pero considerando $\Delta t = 0.001$ como longitud del intervalo. De nuevo evaluamos la función de población en 2.999 y en 3.001, obteniendo la siguiente tabla:

	$\Delta t = 0.001$		$\Delta t = 0.001$
t	2.99	3	3.01
$P(t)$	102.148780	102.150402	102.152024*

El cambio promedio de la población en el intervalo [2.999, 3] es:

$P_{(2.99,\ 3)} =$ ____________________

millones de habitantes por año.

El cambio promedio de la población en el intervalo [3, 3.001] es

$P_{(3,\ 3.01)} =$ ____________________

millones de habitantes por año.

¿Cuál es la diferencia entre estos dos valores?

____

____

____

¿Qué podemos concluir acerca de la razón de cambio de la población de México en 2003?

____

____

Nota Cuando la diferencia entre las razones promedio antes y después del instante que analizamos, es casi cero, o cero, como en este caso, significa que hemos obtenido una buena estimación para la razón instantánea de cambio.

* En esta tabla los valores de la población fueron redondeados a seis decimales.

Si la diferencia entre las razones promedio es muy grande, *debemos tomar intervalos más y más pequeños*, hasta que la diferencia sea casi cero o cero.

Recuerda que a los acercamientos que hacemos alrededor de un punto se les llama *límites*, así que para obtener una mejor estimación de la razón instantánea de cambio, tuvimos que calcular el límite en el instante $t = 3$.

Entonces podemos concluir que:

La razón instantánea de cambio es el límite del cambio promedio cuando la longitud del intervalo Δt es muy pequeña (casi cero), es decir,
Razón de cambio en el instante
$t = a =$ es $\lim\limits_{t \to 0}$ (cambio promedio)

En general para cualquier función $y = f(x)$:

Razon de cambio en el instante $x = a$ $= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \right)$ dado que

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_{\text{final}} - y_{\text{inicial}}}{x_{\text{final}} - x_{\text{inicial}}}$, entonces la expresión

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{(x+\Delta x) - x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Al sustituir esta última fórmula para el cambio promedio de una función $f(x)$ en la expresión que acompaña al límite, obtenemos:

Razón de cambio en el instante $x = a$
es
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Como mencionamos al inicio de esta sección, en matemáticas a la razón instantánea de cambio se le llama *derivada*. Entonces, podemos establecer la siguiente definición de la derivada de una función:

La derivada de una función $f(x)$, denotada como $f'(x)$, está dada por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

si este límite existe.

Nota La expresión f' se lee como "f prima".

La derivada como cociente de diferenciales: cuando el cambio de una variable Δx toma un valor muy pequeño, tan pequeño que casi es cero, se dice que es infinitamente pequeño y se llama diferencial, se denota como "dx". Dado que en la definición de derivada tanto Δx como Δy son números muy pequeños podemos expresar la derivada como un cociente de diferenciales, es decir, una notación alternativa para la derivada es $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

Ejemplo 3 Encuentra la derivada de la función $f(x) = (x + 1)^x$ en el punto $x = 2$, utilizando la definición de derivada.

Solución Paso 1: en la definición de derivada, sustituimos el valor de x en el que se pide encontrar la derivada.

En este caso, se sustituye el valor de 2 en la variable x y obtenemos

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}.$$

Paso 2: para obtener el límite, sustituimos en la expresión anterior un valor de Δx que sea muy cercano a cero.

En este caso, podemos tomar por ejemplo $\Delta x = 0.001$. Desde un principio debemos escoger un valor muy pequeño para Δx, esto evita estar probando con muchos valores.

$$f'(2) \approx \frac{f(2+0.001) - f(2)}{0.001} = \frac{f(2.001) - f(2)}{0.001}$$

Nota Observa que ya no escribimos la palabra *límite*. Esto se debe a que al sustituir el valor de Δx ya estamos obteniendo el límite (es decir, tomando un valor de x muy cercano a 2).

Paso 3: evaluamos la función en los valores que quedaron indicados en el numerador.

En este caso, sustituimos con los valores 2.001 y 2 en la función $f(x) = (x + 1)^x$:

$f(2.001) = (2.001 + 1)^{2.001}$ $\quad f(2) = (2 + 1)^2$.

Al sustituir las expresiones en la definición de la derivada obtenemos que

$$f'(2) \approx \frac{(2.001+1)^{2.001} - (2+1)^2}{0.001} = \frac{(3.001)^{2.001} - 3^2}{0.001}.$$

Paso 4: obtenemos el valor de la expresión anterior, utilizando la calculadora.

$$f'(2) \approx \frac{9.01590354505 - 9}{0.001} = \frac{0.01590354505}{0.001} = 15.90354505$$

Respuesta: $f'(2) \approx 15.90354505$

Así hemos obtenido la derivada de la función $f(x) = (x + 1)^x$, en el instante $x = 2$.

Ejemplo 4 Encuentra la derivada de la función $f(x) = \text{sen}\,(x) + \cos\,(x)$ en el punto $x = \pi$, utilizando la definición de derivada.

Solución Paso 1: en la definición de derivada, sustituimos el valor de x en el que se pide encontrar la derivada.

En este caso, se sustituye el número π en la variable x, obtenemos

$$f'(\pi) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\pi+\Delta x) - f(\pi)}{\Delta x}.$$

Paso 2: para obtener el límite, sustituimos en la expresión anterior un valor de Δx que sea muy cercano a cero.

En este caso, podemos tomar por ejemplo $\Delta x = 0.001$. Desde un principio debemos escoger un valor muy pequeño para Δx, esto evita estar probando con muchos valores.

$$f'(\pi) = \frac{f(\pi+0.001) - f(\pi)}{0.001}$$

Nota Observa que ya no escribimos la palabra *límite*. Esto se debe a que al sustituir el valor de Δx ya nos aproximamos al número en el cual nos pide obtener la derivada (es decir, tomando un valor de x muy cercano a π).

Paso 3: evaluamos la función en los valores que quedaron indicados en el numerador.

En este caso, los valores $+0.001$ y π, se sustituyen en la función $f(x) = \text{sen}\,(x) + \cos\,(x)$:

$$f(\pi + 0.001) = \text{sen}\,(\pi + 0.001) + \cos\,(\pi + 0.001)$$
$$f(\pi) = \text{sen}\,(\pi + \cos\,(\pi).$$

Al sustituir las expresiones en la definición de la derivada obtenemos que

$$f'(\pi) \approx \frac{\text{sen}\,(\pi + 0.001) + \cos\,(\pi + 0.001) - (\text{sen}(\pi) + \cos\,(\pi))}{0.001}$$

Recuerda colocar en modo de radianes tu calculadora.

Paso 4: obtenemos el valor de la expresión anterior, utilizando la calculadora.

$$f'(\pi) \approx \frac{(-1.0009995) - (-1)}{0.001} = \frac{-0.0009995}{0.001} = -0.9995$$

Respuesta: $f'(\pi) = -1$.

Así hemos obtenido la derivada de la función $f(x) = \text{sen}\,(x) + \cos\,(x)$, en el instante $x = \pi$.

Ejercicio 1 Utiliza la definición para obtener la derivada de la función $f(x) = (x - 1)^x$ en el punto $x = 3$.

Solución Definición de derivada:

$f'(x) =$ ____.

Paso 1: sustituye en la definición anterior el valor de x en el cual se pide obtener la derivada.

Paso 2: para obtener el límite, sustituye en la expresión anterior un valor de Δx que sea muy cercano a cero.

Paso 3: evalúa la función en los números que quedaron indicados.

Paso 4: encuentra el valor de la expresión anterior, utilizando la calculadora.

Respuesta $f'(3) =$ ____________________.

Ejercicio 2 Utiliza la definición para obtener la derivada de la función $f(x) = e^x - x$ en el punto $x = -1$.

Definición de derivada:

$f'(x) =$ ________________________________.

Solución Paso 1: sustituye, en la definición anterior, el valor de x en el cual se pide obtener la derivada.

Paso 2: para obtener el límite, sustituye en la expresión anterior un valor de Δx que sea muy cercano a cero.

Paso 3: evalúa la función en los números que quedaron indicados.

Paso 4: encuentra el valor de la expresión anterior, utilizando la calculadora.

Respuesta $f'(-1) =$ ____________________________.

Ejercicio 3 Utiliza la definición de derivada para obtener la derivada de la función $f(x) = \cos(x) - e^x$ en el punto $x = 0$.

Definición de derivada:

$f'(x) =$ ____.

Solución

1. Sustituye, en la definición anterior, el valor de x en el cual se pide obtener la derivada.

2. Para obtener el límite sustituye, en la expresión anterior, un valor de Δx que sea muy cercano a cero.

3. Evalúa la función en los números que quedaron indicados.

4. Encuentra el valor de la expresión anterior, utilizando la calculadora.

Respuesta: $f'(0) =$ ____.

En los siguientes ejercicios realiza lo que se te pide.

1. La siguiente tabla muestra el número de alumnos graduados del ITESM durante el periodo enero-mayo durante los años 2001 a 2003.

Semestre	enero-mayo 2001	enero-mayo 2002	enero-mayo 2003
Núm. alumnos	832	984	1 052

¿Cuál fue la rapidez con la que cambió la población de alumnos graduados en el semestre de enero a mayo de 2002?

2. La siguiente tabla muestra el monto (en pesos) de las mensualidades del financiamiento de una casa durante los primeros dos años.

Mes	1	7	13	19	25
Mensualidad	4 347.20	4 479.26	4 615.33	4 755.53	4 875.61

¿Cuál fue la rapidez con la que cambió la mensualidad en el mes 13?

3. La siguiente tabla muestra los porcentajes de defunción de niños entre 1 y 4 años, a causa de tumores malignos, durante el periodo de 1990 a 2001.

Año	1990	1992	1994	1996	1998	2001
% defunción	2.2	3.8	3.8	4.6	4.9	6.8

Fuente: http://www.inegi.gob.mx

¿Cuál fue la rapidez con la que cambió el porcentaje de defunción por tumores malignos en 1996?

4. La siguiente tabla muestra la esperanza de vida de la población de Aguascalientes durante el periodo de 1993 a 2002.

Año	1993	1996	1999	2002
Esperanza de vida	72.3	74	75	76

Fuente: http://www.inegi.gob.mx

¿Cuál fue la rapidez con la que cambió la esperanza de vida en 1999?

5. La siguiente tabla muestra la población de personas divorciadas en México durante el periodo de 1950 a 2000.

Año	1950	1960	1970	1990	2000
Personas divorciadas	67 810	119 045	135 762	406 777	687 444

Fuente: http://www.inegi.gob.mx

¿Cuál fue la rapidez con la que cambió el número de personas divorciadas en 1960?

6. La siguiente tabla muestra las ventas de petróleo crudo de México a Estados Unidos en los primeros cinco meses del año, durante el periodo de 2000 a 2004.

Año	2000	2001	2002	2003	2004
Ventas (Millones de dólares)	4 624	3 971	4 235	6 027	6 826

Fuente: El Norte, 14 de julio de 2004, Departamento de Comercio de Estados Unidos.

¿Cuál fue la rapidez con la que cambiaron las ventas de petróleo crudo en 2003?

7. La siguiente tabla muestra los ingresos que recibió México (en millones de dólares), debidos al turismo europeo durante el periodo de 2001 a 2003.

Año	2001	2002	2003
Ingresos	302	447	429

Fuente: El Norte, 14 de julio de 2004, Sectur.

¿Cuál fue la rapidez con la que cambiaron los ingresos en 2002?

8. La siguiente tabla muestra el precio diario del níquel (en miles de dólares por tonelada) durante los primeros seis meses de 2004.

Mes	Enero	Febrero	Marzo
Precio diario	18	16	14
Mes	**Abril**	**Mayo**	**Junio**
Precio diario	15	10.5	12.3

Fuente: El Norte, 14 de julio de 2004, Bolsa de metales de Londres; Global COAL.

¿Cuál fue la rapidez con la que cambió el precio diario del níquel en el mes de abril?

9. La siguiente tabla muestra el Producto Interno Bruto (PIB) de un país (en millones de dólares) durante el periodo de 1984 a 1996.

Año	1984	1988	1992	1996
PIB	600	856	1 112	600

¿Cuál es la rapidez con la que cambia el PIB en 1988?

10. La siguiente tabla muestra la producción de bicicletas de la empresa Bicicletas de México, S. A., en miles de unidades durante los meses de mayo a agosto del 2000.

Mes	Mayo	Junio	Julio	Agosto
Producción	1.48	2.53	2.5	2.712

¿Cuál fue la rapidez con la que cambió la producción de bicicletas en el mes de julio de 2000?

11. La depreciación de un automóvil se rige de acuerdo con la función $V(t) = 180(0.65)^t$, donde V es el valor del automóvil, en miles de pesos, y t es el tiempo, en años, a partir de su compra. ¿Con qué rapidez cambia el valor del automóvil 6 años después de haberse comprado?

12. El costo total de producción, en miles de pesos, de una empresa está dado por la función:

$$C(x) = 250 + \frac{3x^2}{x+7}$$

donde x se mide en miles de unidades.

¿Cuál es la rapidez con la que cambia el costo total cuando se fabrican 3 000 unidades?

13. A un empleado de intendencia de la empresa Cristales en Edificios, accidentalmente se le cae una cubeta desde una altura de 70 metros. Después de t segundos, la cubeta ha caído una distancia de $S(t) = 5t^2$. Estima la velocidad de la cubeta a los 2.5 segundos.

14. Un globo con aire caliente se eleva verticalmente desde el suelo, de modo que su altura después de t segundos es $h(t) = 2t^2 + t$ pies $(0 \le t \le 60)$. Estima la velocidad del globo a los 45 segundos.

15. La demanda de un producto está dada por:

$$q(t) = \frac{100}{3 + \frac{1}{2}e^{-0.3t}}$$

donde q son las unidades vendidas (en miles), t meses después de su lanzamiento al mercado. Estima la rapidez con la que cambia la demanda a los 5 meses.

16. Un empleado invierte 10 000 pesos en una cuenta bancaria que paga un interés de 3% compuesto anualmente. Estima la rapidez con la que cambia el saldo a los 5 años.

17. El ingreso, en miles de pesos, de una compañía de seguros de vida está dado por la siguiente función:

$$I(x) = x\sqrt{1 + x^2}$$

donde x es el número de pólizas vendidas.

Estima la rapidez con la que cambia el ingreso si se han vendido 100 pólizas.

18. El tamaño de la población de cierto cultivo de bacterias en t días está dado por:

$$P(t) = 700e^{0.18t}$$

Estima la rapidez con la que crece la población de bacterias en la primera semana.

19. Una empresa determina que la utilidad total, en pesos, por la producción y venta de x cientos de unidades está dada por:

$$U(x) = \frac{1500}{0.25x^2 - 3x + 10}$$

Estima la rapidez con la que está cambiando la utilidad cuando se han producido y vendido 900 unidades.

20. Para una empresa que se dedica a fabricar marcos para títulos universitarios, sus costos mensuales, en miles de pesos, están dados por:

$$C(x) = -0.125x^2 + 2x + 10$$

donde x es la cantidad, en cientos de marcos.

Estima la rapidez con la que cambia el costo mensual cuando se fabrican 500 marcos.

Utiliza la definición para obtener la derivada de las siguientes funciones en el valor indicado.

21. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$ en $x = -2$
22. $f(x) = ln(8^x)$ en $x = 7$
23. $f(x) = x^{2x} + x^2$ en $x = 1$
24. $f(x) = ln(x^x)$ en $x = 1$

25. $f(x)=x^{\sqrt{x}}$ en $x=4$

26. $f(x)=e^{x^x}$ en $x=1/2$

27. $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{8x-1}}$ en $x=2$

28. $f(x)=3^{5x-2x^2}$ en $x=0$

29. $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ en $x=5$

30. $f(x)=\dfrac{2x}{x^x}$ en $x=2$

31. $f(x)=\operatorname{sen}(x)+x^2+x$ en $x=\pi$

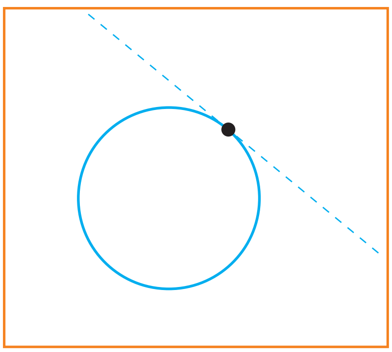
32. $f(x)=\operatorname{sen}(x)+\cos(x)+\operatorname{sen}(2x)$ en $x=\pi/2$

33. $f(x)=\cos(2x)-x$ en $x=0$

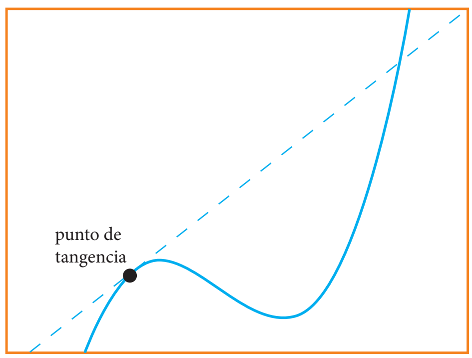
3.2 La derivada como pendiente

Para obtener la expresión que define a la derivada, también podemos partir de argumentos geométricos.

El problema de la pendiente de la recta tangente es muy antiguo; esto se remonta a la época del científico griego Arquímedes (287-212 a. C.), quien creció con la noción de Euclides (365-300 a. C.) de una recta tangente como una recta que toca a una curva en un solo punto. Esta idea de tangencia es totalmente correcta para círculos, pero completamente insatisfactoria para otras curvas.



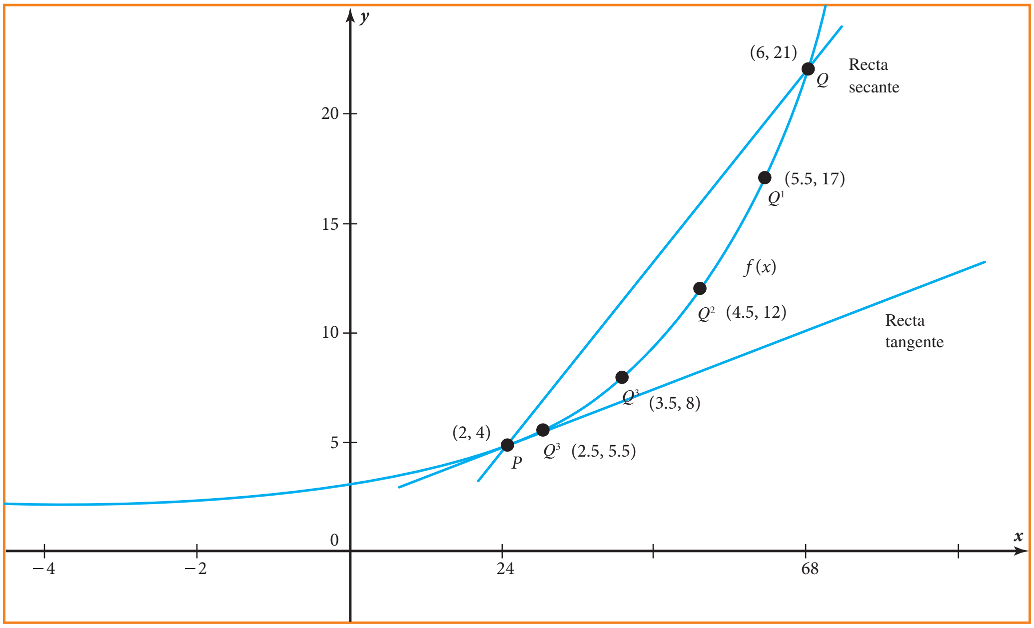
Recta tangente de acuerdo con Euclides



Ejemplo de curva que no cumple con la visión de tangencia de Euclides

Arquímedes descubrió que cuando se centra la atención en un punto de una curva ocurre que en dicho punto la curva se comporta como una recta. Por esta razón definió a la **recta tangente** a una curva en un punto P como la recta que mejor se aproxima a la curva en ese punto. Para entender mejor esta idea, aplicaremos el concepto de límite.

Construcción Consideremos la siguiente gráfica. Deseamos obtener la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto P.



Observa que la pendiente de la recta tangente, no se puede obtener mediante la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, ya que no conocemos dos puntos de la recta.

Lo que haremos es partir de la pendiente de una recta secante (es decir, una recta que corte a la gráfica en dos puntos) para obtener un valor aproximado de la pendiente de la recta tangente.

La pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(2, 4)$ y $Q(6, 21)$ está dada por

$$m_{\text{secante}} = \frac{21-4}{6-2} = \frac{17}{4},$$

Si observamos la figura anterior, vemos que la pendiente de la recta secante que pasa por P y Q es muy diferente de la pendiente de la recta tangente en el punto P.

Nota Para aproximar la pendiente de la recta secante a la pendiente de la recta tangente, utilizaremos puntos sobre la curva $y = f(x)$ que se encuentren cada vez más cercanos al punto P.

Llamemos Q_1 al nuevo punto y tracemos la recta secante que pasa por P y Q_1.

Calcula la pendiente de la nueva recta P-Q_1:

$m =$ ______________________________.

Observa que la nueva recta secante se aproximó a la recta tangente.

Realicemos nuevamente el proceso anterior. Llamemos ahora Q_2 al nuevo punto y traza la recta secante con P y Q_2.

Calcula la pendiente de la nueva recta P-Q_2:

$m =$ ______________________________.

La recta secante se aproximó todavía más a la recta tangente.

Ahora, llamemos Q_3 al nuevo punto y traza la recta secante con P y Q_3.

Calcula la pendiente de la nueva recta P-Q_3:

$m =$ ______________________________.

La recta secante se aproximó todavía más a la recta tangente; esto significa que sus pendientes son aún más parecidas.

Si continuamos con el mismo proceso, vemos que la recta secante quedará *casi empalmada* con la recta tangente.

Repitamos el proceso una vez más. Traza la recta que pasa por P y Q_4. Calcula su pendiente:

$m =$ ______________________________.

Observa que la recta secante quedó dibujada *casi encima* de la recta tangente. Cuando eso ocurre, podemos decir que sus pendientes son muy aproximadas; eso sucede solamente si Q se encuentra muy cerca de P, es decir, si tomamos el *límite*.

Si llamamos Δx a la distancia que hay entre P y los puntos Q_i, donde $i = 1, 2, 3$ y 4,

- ¿cuál es el valor de Δx entre los puntos P y Q?

____

- ¿Cuál es el valor de Δx entre los puntos P y Q_1?

____

- ¿Cuál es el valor de Δx entre los puntos P y Q_2?

____

- ¿Cuál es el valor de Δx entre los puntos P y Q_3?

____

- ¿ Cuál es el valor de Δx entre los puntos P y Q_4?

____

¿Qué sucede con la distancia Δx, a medida que tomamos puntos Q más cercanos al punto P?

____

Conclusión A medida que el punto Q está más cerca del punto P, la distancia Δx se hace más pequeña; es decir, tiende a cero.

Podemos entonces concluir que:

$$\boxed{m_{\text{tangente}} = \lim_{\Delta x \to 0}(m_{\text{secante}})}$$

En general, si conocemos los puntos $(x, f(x))$ y $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ de una recta secante, su pendiente quedaría dada como:

$$m = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x - x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Al sustituir la pendiente de la recta secante en la conclusión del recuadro anterior obtenemos:

$$\boxed{m_{\text{tangente}} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right) = f'(x)}$$

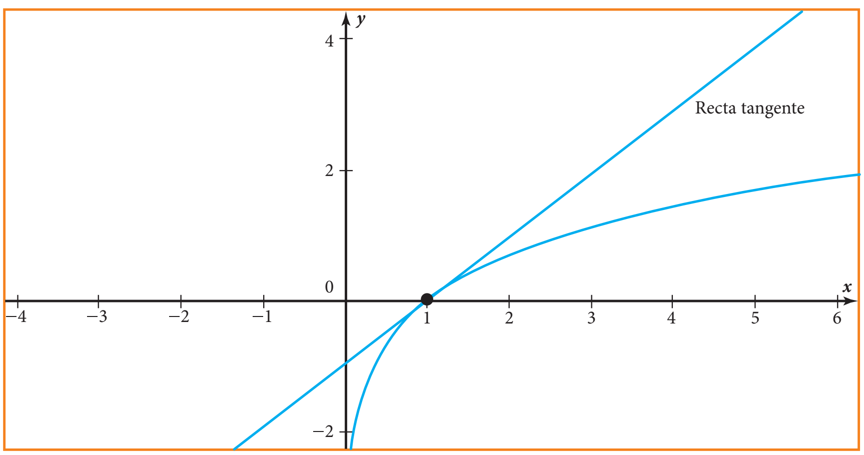
Observa que es la misma expresión la que define a la derivada de una función. Por lo tanto, podemos decir entonces que *la derivada representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función f(x) en el punto P.*

Con base en las conclusiones obtenidas en las secciones 1 y 2, podemos resumir que la derivada de la función $f(x)$, evaluada en el punto en donde $x = a$, representa:

- **La razón de cambio de la función en el instante en donde $x = a$.**
- **La pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto en donde $x = a$.**

Ejemplo 1 Obtén la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \ln x$ en el punto donde $x = 1$.

Solución Dibujemos la gráfica de la función y marquemos la recta tangente, para entender qué estamos buscando.



Sabemos que la pendiente de una recta tangente está dada por la derivada de la función, así que en este caso debemos encontrar la derivada de la función en el punto $x = 1$ (que es donde ocurre la tangencia); en la sección anterior vimos cómo obtener la derivada de una función en un valor específico, utilizando la definición de derivada. Para obtener la pendiente, utilizaremos ese proceso.

La definición es:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Como deseamos obtener la derivada en el punto en donde $x = 1$, y sabemos que el valor de Δx debe ser muy pequeño (acercarse a cero) para obtener una buena estimación de la derivada, tomemos, por ejemplo, $\Delta x = 0.0001$. Sustituimos el valor de x y de Δx en la definición y obtenemos:

$$f'(1) \approx \frac{f(1+0.0001) - f(1)}{0.0001} \qquad \text{es decir,}$$

$$f'(1) \approx \frac{f(0.0001) - f(1)}{0.0001}.$$

Nota

Observa que ya no utilizamos la palabra *límite*; esto se debe a que al sustituir el valor de Δx ya estamos obteniendo el límite (es decir, tomando un valor de x muy cercano al número 1).

Si evaluamos la función en los números que quedaron indicados, obtenemos:

$$f'(1) = \frac{\ln(1.0001) - \ln(1)}{0.0001}.$$

Con una calculadora obtenemos el valor de esta expresión y llegamos a

$$f'(1) \approx 0.99995, \text{ es decir,}$$

$$f'(1) \approx 1; \quad \text{es decir;} \quad m_{\text{tangente}} \approx 1.$$

En las siguientes funciones obtén la pendiente de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado.

1. $f(x) = \sqrt{x^3}$ en $x = 3$

2. $f(x) = e^{2x^4}$ en $x = \dfrac{1}{2}$

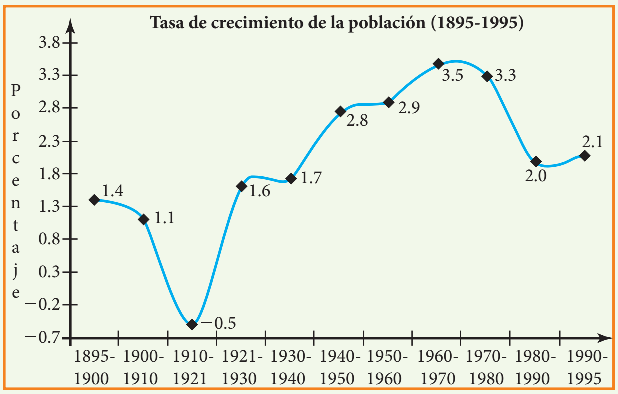
3. $f(x) = 3^{\ln x}$ en $x = 1$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$ en $x = 0$

5. $f(x) = \ln(5x)$ en $x = 2$

6. $f(x) = \cos(x^x)$, en $x = \dfrac{\pi}{4}$

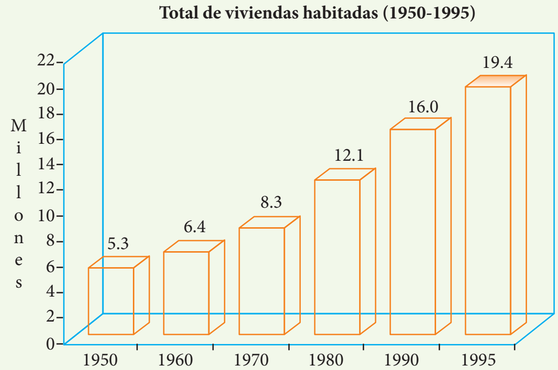
7. La siguiente gráfica muestra la tasa de crecimiento de la población de México en el periodo de 1895 a 1995.



Fuente: http://www.inegi.gob.mx

   a) Estima la pendiente de la recta tangente en el periodo de 1970 a 1980.
   b) Estima la pendiente de la recta tangente en el periodo de 1940 a 1950.

8. La gráfica de la siguiente columna muestra el total de viviendas habitadas en México en el periodo de 1950 a 1995.

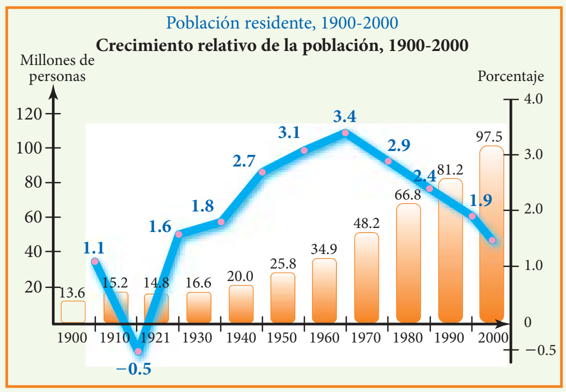


A partir de 1950, en los censos se empieza a captar información respecto a las viviendas habitadas por medio de la boleta censal.

Fuente: http://www.inegi.gob.mx

   a) Estima la pendiente de la recta tangente en el año 1980.
   b) ¿Qué información proporciona el resultado del inciso anterior respecto al total de viviendas habitadas en México en 1980?

9. La siguiente gráfica muestra la población residente en México y el crecimiento relativo de la población en el periodo de 1900 a 2000.



Fuente: http://www.inegi.gob.mx

   a) Estima la pendiente de la recta tangente, en el año 1950, del crecimiento relativo de la población.
   b) ¿Qué información proporciona el resultado del inciso anterior respecto al crecimiento relativo de la población en 1950?

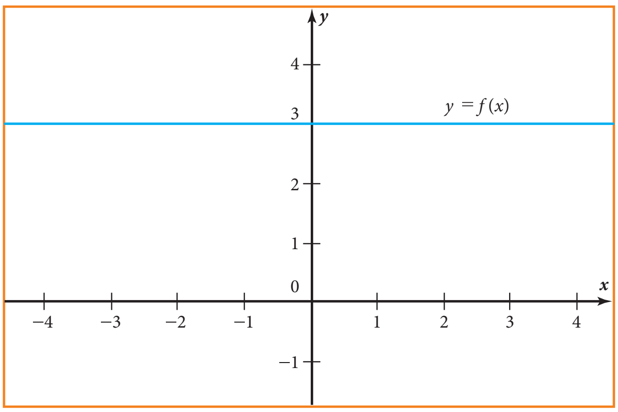
3.3 Cómo derivar una función por medio de su gráfica

En la sección anterior aprendiste que la derivada de la función en un punto representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto; este hecho nos será de gran utilidad en esta sección.

Ahora aprenderás a obtener la gráfica de la derivada de una función. Conociendo la gráfica de la función original, analizaremos su comportamiento para deducir las características que debe tener la gráfica de la derivada.

Iniciaremos con un ejemplo muy sencillo.

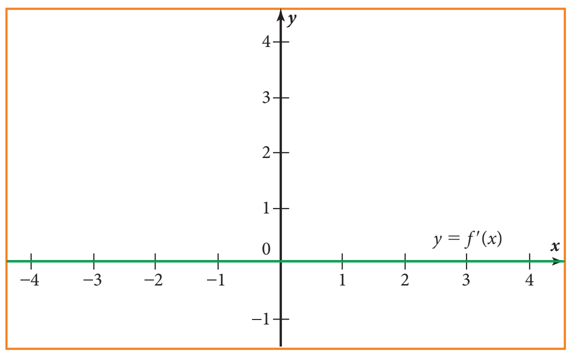
Ejemplo 1 Traza la gráfica de la derivada de la función que aparece a continuación.



Solución Recuerda que la derivada de una función en un punto está dada por la pendiente de la recta tangente en ese punto, por lo que primero debemos encontrar el valor de la pendiente en cada punto de la gráfica de la función dada. En este caso, como la *función es constante* es obvio que la pendiente de la recta tangente en cualquier punto es cero, por lo que podemos concluir que la derivada de la función dada es cero en todo punto.

Para trazar la gráfica de la derivada, en cada valor de x marcaremos como altura el valor de la pendiente, que en este ejemplo siempre será cero.

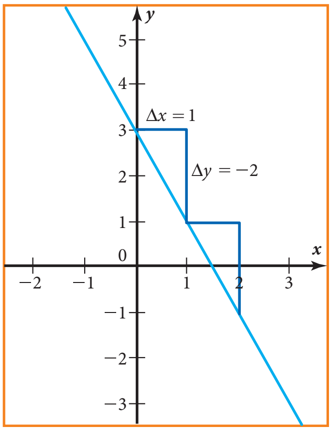
Entonces, la gráfica de la derivada quedaría como sigue:



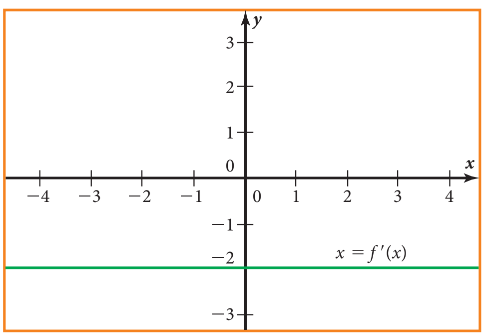
> **Nota** En general, podemos decir que la derivada de cualquier función constante siempre es cero.

Ejemplo 2 Traza la gráfica de la derivada de la función que se muestra a continuación.

$$y = f(x)$$



Solución Nuevamente, para obtener la derivada en un punto tenemos que encontrar la pendiente de la recta tangente en ese punto. Como en este caso la función dada es una recta, sabemos que una de las características de las rectas es que en todo punto su pendiente es la misma. Observa que cuando la variable x aumenta una unidad, la altura de la función disminuye dos unidades, es decir la pendiente de la recta en cualquier punto es $m(x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-2}{1} = -2$, por lo que podemos concluir que la derivada de la función dada en cualquier punto es -2. Para trazar la gráfica de la derivada, en cada valor de x marcaremos como altura el valor de la pendiente, que en este ejemplo siempre será -2 y la gráfica sería como sigue:

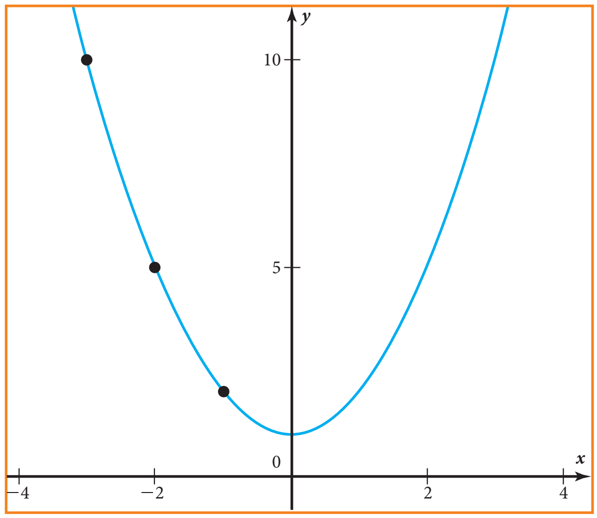


En los ejemplos anteriores, la derivada tiene el mismo valor en todo punto debido a que las funciones dadas eran rectas; sin embargo, esto no se cumple con todas las funciones. En general, la derivada tiene valores diferentes en cada punto.

¿Qué sucede cuando la función no es una recta?

Cuando la función no es una recta, la pendiente de la recta tangente es diferente en cada uno de sus puntos, por lo que es más conveniente observar geométricamente el comportamiento de las pendientes, en lugar de encontrar su valor en cada punto de la gráfica.

Construcción Tomando como base la gráfica de la siguiente función, contesta lo que se pide.



a) Dibuja una recta tangente a la gráfica de la función en cada uno de los puntos marcados.

Geométricamente, podemos observar la pendiente en la inclinación de la recta. En cada uno de los puntos, ¿la pendiente tiene el mismo valor? ____________________.

¿Cómo es la función en el lado izquierdo del eje y: creciente o decreciente? ____________________.

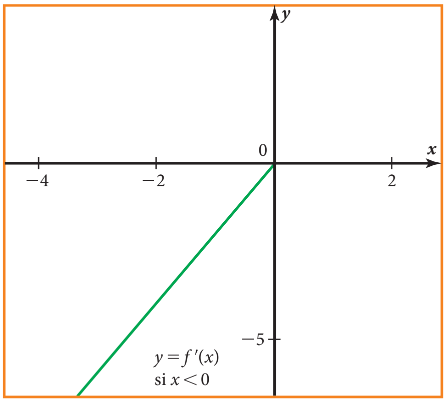
¿Las pendientes de las rectas que dibujaste son positivas o negativas? ____________________.

Conclusión Si consideramos que la derivada es la pendiente de la recta tangente, podemos concluir que:

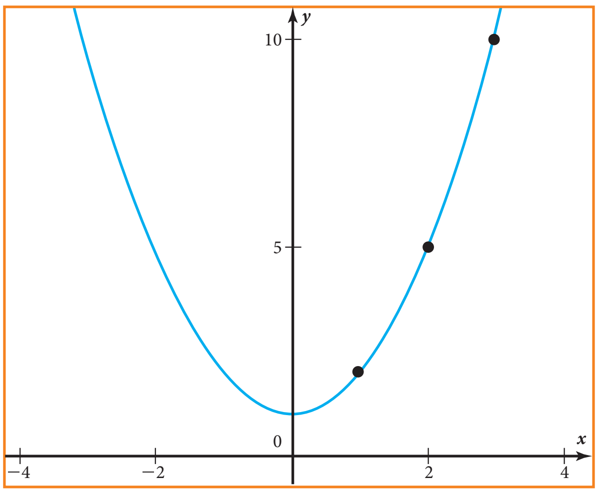
Cuando la función es decreciente, la derivada es ____________________, y viceversa.

Dibujemos la gráfica de la derivada

La expresión "la derivada es negativa" significa que su gráfica debe estar dibujada por debajo del eje x. Observa que, conforme la x va disminuyendo ($x \to -\infty$) la pendiente (inclinación de la recta tangente) se hace cada vez más pequeña; además, en $x = 0$ la pendiente es cero, así que hasta este momento la gráfica de la derivada quedaría como sigue:



b) Dibuja una recta tangente a la gráfica de la función, en cada uno de los puntos marcados.



Observa las pendientes en cada uno de los puntos, ¿tienen el mismo valor? ____________________.

¿Cómo es la función en el lado derecho del eje y, creciente o decreciente? ____________________.

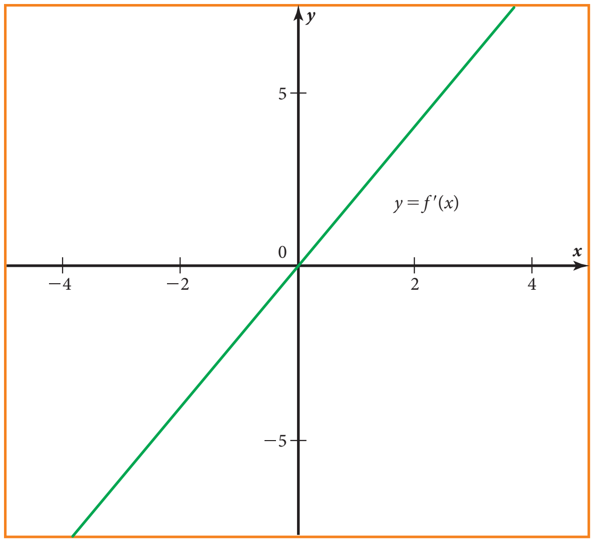
¿Las pendientes de las rectas que dibujaste son positivas o negativas? ____________________.

Conclusión Si consideramos que la derivada es la pendiente de la recta tangente, podemos concluir que:

Cuando la función es creciente, la derivada es ____________________, y viceversa.

Dibujemos la gráfica de la derivada.

La expresión "la derivada es positiva" significa que su gráfica debe estar dibujada por arriba del eje x. Observa que conforme x está aumentando ($x \to +\infty$) la pendiente (inclinación de la recta tangente) también se hace cada vez más grande. Por lo tanto, finalmente la gráfica de la derivada quedaría como sigue:



Segunda derivada

En cada punto de una función sólo puede haber una pendiente, esto implica que en cada punto de una función sólo puede existir una derivada; por lo tanto, podemos decir que la derivada de una función es también una función.

Como $f'(x)$ es una función, entonces es posible obtener su derivada $[f'(x)]'$ y a ésta la llamaremos **segunda derivada** de f. En forma similar, es posible obtener la tercera derivada, cuarta derivada, etcétera.

La segunda derivada de la función $f(x)$ se denota como $f''(x)$ y se obtiene derivando $f'(x)$.

Observa que en el ejemplo anterior relacionamos el concepto de derivada con el comportamiento de la función: creciente o decreciente. Con la segunda derivada podemos determinar si la concavidad de la función f es hacia arriba o hacia abajo. Conocer la concavidad es importante, pues nos indica cómo cambia la función, si lo hace rápido o lentamente; esto es de gran utilidad sobre todo cuando la función representa alguna situación de la vida real, por ejemplo: una población, la demanda de un artículo, etc. En la unidad siguiente conocerás aplicaciones de concavidad.

Para deducir la concavidad de una curva por medio de la segunda derivada, resolveremos el siguiente ejemplo. Esto lo haremos con base en una función polinomial, ya que en el capítulo 1 vimos cómo graficar polinomios de cualquier grado; sin embargo, podemos generalizar los resultados para cualquier función.

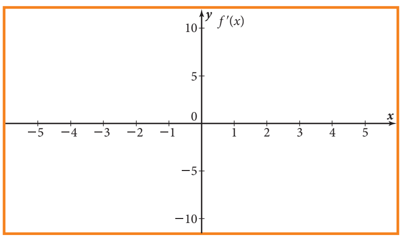
Primero veamos la información que nos proporciona la siguiente nota, pues nos será de mucha utilidad al dibujar la gráfica de la derivada de un polinomio.

En el ejemplo anterior, la gráfica de la función $f(x)$ representaba una parábola, es decir; un polinomio de grado 2, y al dibujar la gráfica de la derivada de esta función obtuvimos una función lineal (ya que quedó una recta), es decir, un polinomio de grado 1. Es posible generalizar este resultado para un polinomio de cualquier grado, por lo que decimos que si $f(x)$ es un polinomio de grado n, entonces $f'(x)$ también es un polinomio, pero de grado $n-1$; $f''(x)$ también es un polinomio, pero de grado $n-2$, y así sucesivamente. También observamos que el signo del coeficiente principal del polinomio se conservó en la derivada; este resultado también es generalizable.

En los puntos donde el polinomio tenga un máximo o un mínimo, la derivada será cero, ya que al dibujar una recta tangente en ese punto, obtenemos que es una recta horizontal (cuya pendiente es cero).

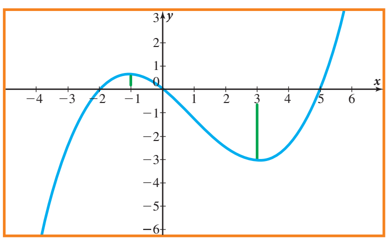
Construcción Dibuja la gráfica de la primera y segunda derivada del polinomio dado en la siguiente gráfica.

Primera derivada



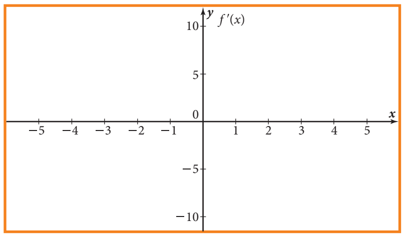
$f'(x)$ es un polinomio de grado ________________
con coeficiente principal de signo ______________.

Función polinomial



$f(x)$ es un polinomio de grado ________________
con coeficiente principal de signo ______________.

Segunda derivada



$f''(x)$ es un polinomio de grado ________________
con coeficiente principal de signo ______________.

Contesta lo siguiente:

a) Observa la gráfica de $f''(x)$ para valores de x antes del 1; ¿es positiva o negativa? ________

____

b) Observa la gráfica de $f'(x)$ para valores de x antes del 1; ¿es creciente o decreciente?____

____

c) Observa la gráfica de $f(x)$ para valores de x antes del 1; ¿qué concavidad tiene (hacia arriba o hacia abajo)? ________________

____

Conclusión Cuando la segunda derivada es negativa, la primer derivada es ________________

y la función es ________________________.

d) Observa la gráfica de $f''(x)$ para valores de x después del 1, ¿es positiva o negativa? _____

________________________________.

e) Observa la función en la gráfica de $f'(x)$ para valores de x después del 1, ¿es creciente o decreciente? ________________

____

f) Observa la función en la gráfica de $f(x)$ para valores de x después del 1, ¿qué concavidad tiene (hacia arriba o hacia abajo)? _________

________________________________.

Conclusión Cuando la segunda derivada es negativa,

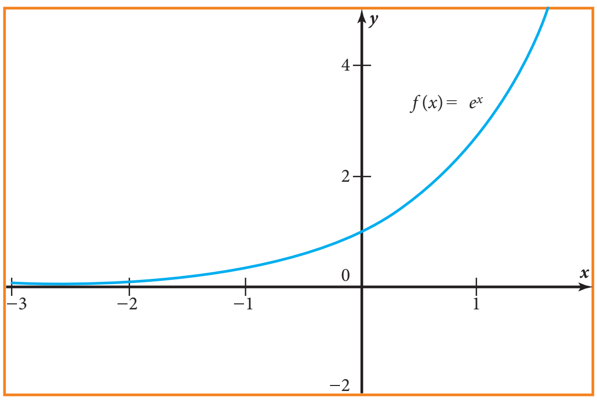
la primer derivada es ________________

y la función es ________________________.

Resumen de lo aprendido

$f(x)$ función	$f'(x)$ primera derivada	$f''(x)$ segunda derivada
Creciente	Positiva	
Decreciente	Negativa	
Cóncava hacia arriba	Creciente	Positiva
Cóncava hacia abajo	Decreciente	Negativa
Tiene punto máximo  Cuando la función cambia de creciente a decreciente	Cambia de positiva a negativa	
Tiene punto mínimo  Cuando la función cambia de decreciente a creciente	Cambia de negativa a positiva	

Ejemplo 3 Utilicemos el resumen anterior para obtener la gráfica de la derivada de la siguiente función exponencial



Solución Para dibujar la gráfica de la derivada tenemos que deducir las características que ésta debe tener. Para ello nos fijamos en las características de la función original. Si observas la tabla Resumen, la columna “función” nos indica si es creciente o decreciente y si es cóncava hacia arriba o hacia abajo. En esto debemos fijarnos.

Observa que la gráfica anterior tiene las siguientes características:

- Es una función creciente.
- Es cóncava hacia arriba.

Ahora debemos deducir las características de la derivada, basándonos en la información anterior de la función.

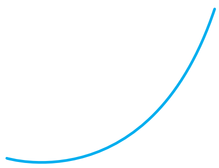
1. Como la función es creciente, entonces la *derivada debe ser positiva* (según la segunda columna de la tabla resumen), recuerda que ser positiva significa que la gráfica debe estar dibujada por arriba del eje de las *x*.

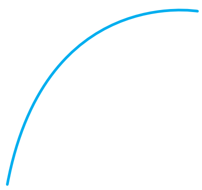
2. Como la función es cóncava hacia arriba, entonces *la derivada debe ser creciente* (según la segunda columna de la tabla resumen).

Nota De acuerdo con las características que debe tener la derivada, siempre existirán dos gráficas que cumplen con dichas características: una cóncava hacia arriba y otra cóncava hacia abajo. Solamente una de ellas es la correcta y ésta será la gráfica que no altere las características que debe tener la derivada (en este caso, positiva y creciente).

¿Cuál de las dos debemos seleccionar?

- Cóncava hacia arriba y creciente.





- Cóncava hacia abajo y creciente.

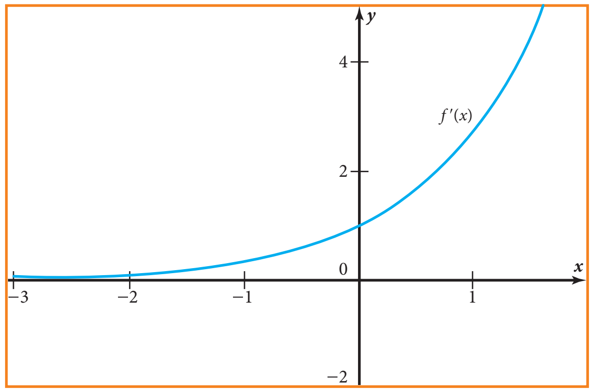
Recuerda que la derivada debe ser positiva, esto significa que la gráfica debe estar dibujada por arriba del eje x.

¿Cuál de las dos gráficas anteriores no va a afectar el hecho de que la derivada deba ser positiva?

Concluimos entonces que la gráfica de la derivada tiene como características:

1. Positiva
2. Creciente
3. Cóncava hacia arriba

Su gráfica es:



Observa que es exactamente igual que la función original.

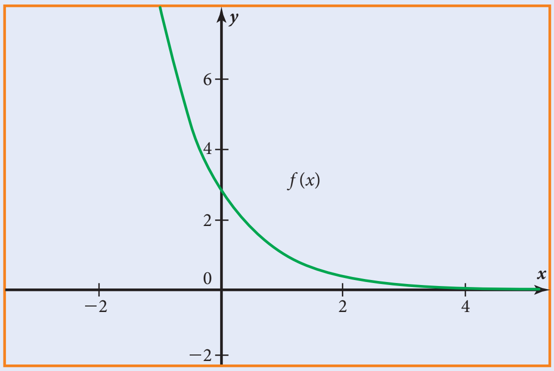
Nota Al obtener la gráfica de la derivada de una función es importante deducir cuál debe ser la concavidad de la curva; en este caso lo determinamos intuitivamente. Siempre existen sólo dos posibilidades: que sea cóncava hacia arriba o hacia abajo. En lo que debemos poner especial atención es en que no se alteren las características que determinamos y que debe tener la gráfica de la función derivada.

¡A trabajar!

Ejercicio 1 Con base en la gráfica de la función, dibuja la gráfica de la derivada.

Solución

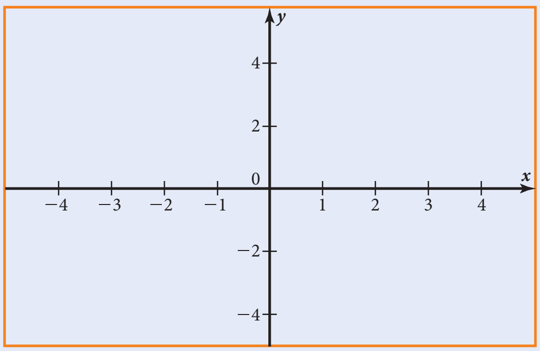
Gráfica de f(x)



Características de $f(x)$, selecciona las correctas:

- ❑ Es creciente
- ❑ Es decreciente
- ❑ Es cóncava hacia arriba
- ❑ Es cóncava hacia abajo

Gráfica de f ′(x)



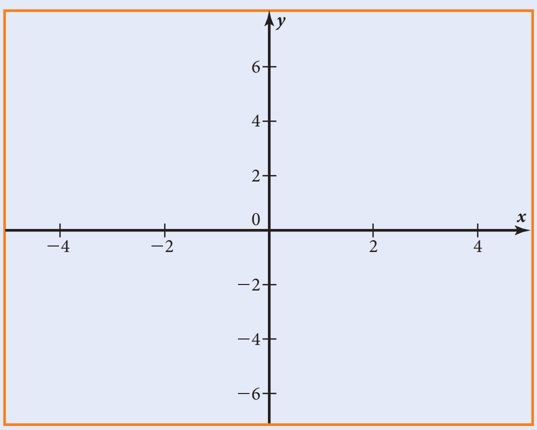
Características de $f'(x)$, selecciona las correctas:

- ❑ Es positiva
- ❑ Es negativa
- ❑ Es creciente
- ❑ Es decreciente
- ❑ Es cóncava hacia arriba
- ❑ Es cóncava hacia abajo

Ejercicio 2 Utiliza un graficador para dibujar la gráfica de la función y, con base en ella, obtener la gráfica de su derivada.

$$f(x)=\frac{1}{(x-1)}$$

Gráfica de f(x)



Características de $f(x)$, selecciona las correctas:

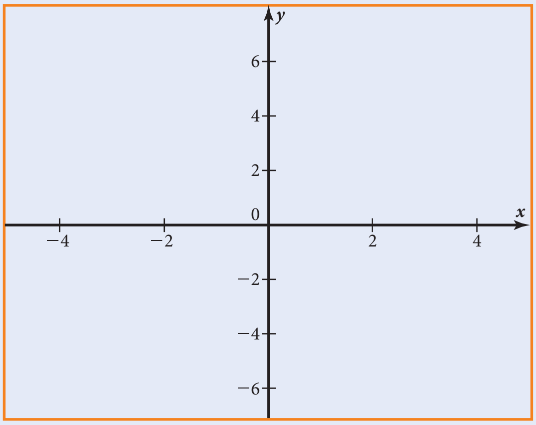
$f(x)$ para valores de x antes de 1

- ❑ Es creciente
- ❑ Es decreciente
- ❑ Es cóncava hacia arriba
- ❑ Es cóncava hacia abajo

$f(x)$ para valores de x después de 1

- ❑ Es creciente
- ❑ Es decreciente
- ❑ Es cóncava hacia arriba
- ❑ Es cóncava hacia abajo

Gráfica de $f'(x)$



Características de $f'(x)$, selecciona las correctas:

$f'(x)$ para valores de x antes de 1

❑ Es positiva

❑ Es negativa

❑ Es creciente

❑ Es decreciente

❑ Es cóncava hacia arriba

❑ Es cóncava hacia abajo

$f'(x)$ para valores de x después de 1

❑ Es positiva

❑ Es negativa

❑ Es creciente

❑ Es decreciente

❑ Es cóncava hacia arriba

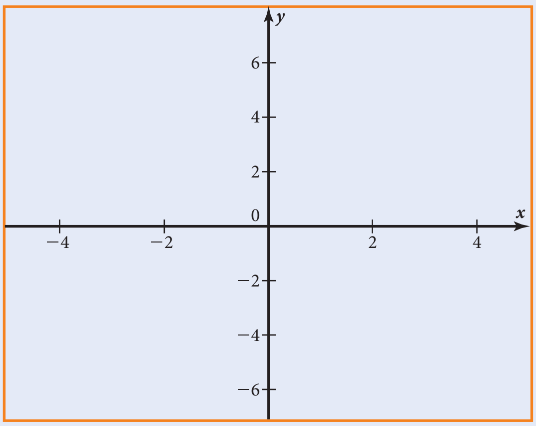
❑ Es cóncava hacia abajo

Ejercicio 3 Utiliza un graficador para dibujar la gráfica de la función y, con base en ella, obtener la gráfica de su derivada.

$$f(x)=\frac{1}{x^2}$$

Solución

Gráfica de $f(x)$



Características de $f(x)$, selecciona las correctas:

$f(x)$ para valores de x antes de 0

❑ Es creciente

❑ Es decreciente

❑ Es cóncava hacia arriba

❑ Es cóncava hacia abajo

$f(x)$ para valores de x después de 0

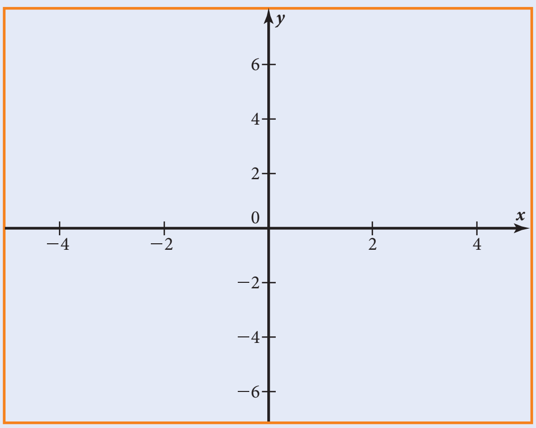
❑ Es creciente

❑ Es decreciente

❑ Es cóncava hacia arriba

❑ Es cóncava hacia abajo

Gráfica de $f'(x)$



Características de $f'(x)$, selecciona las correctas:

$f'(x)$ para valores de x antes de 0

❑ Es positiva

❑ Es negativa

❑ Es creciente

❑ Es decreciente

❑ Es cóncava hacia arriba

❑ Es cóncava hacia abajo

$f'(x)$ para valores de x después de 0

❑ Es positiva

❑ Es negativa

❑ Es creciente

❑ Es decreciente

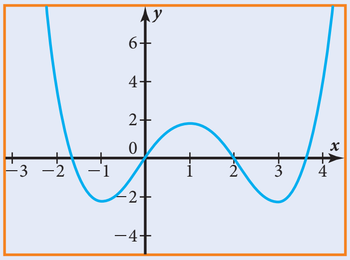
❑ Es cóncava hacia arriba

❑ Es cóncava hacia abajo

Ejercicio 4 Dibuja la gráfica de $f'(x)$ y $f''(x)$ para la función dada. Contesta en las líneas lo que se pide.

Solución

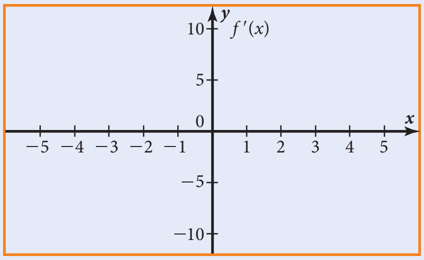
Función



$f(x)$ es un polinomio de grado ________________,

con coeficiente principal de signo ______________________.

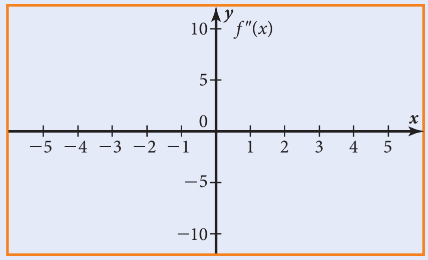
Primera derivada



$f'(x)$ es un polinomio de grado ________________,

con coeficiente principal de signo ______________________.

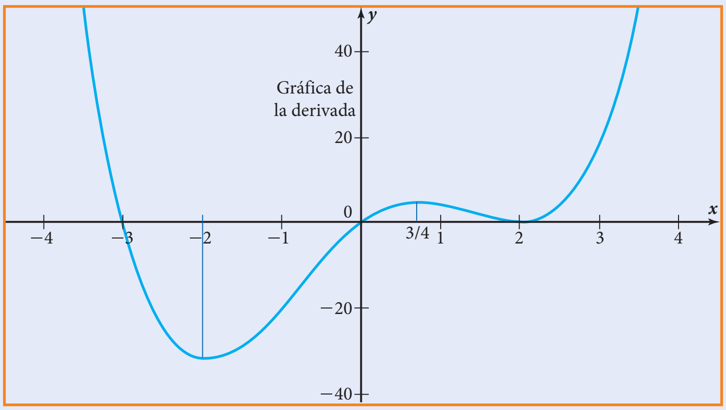
Segunda derivada



$f''(x)$ es un polinomio de grado ________________,

con coeficiente principal de signo ______________________.

Ejercicio 5 Dada la gráfica de la derivada contesta lo que se indica respecto a la función original.



Solución

a) ¿En qué intervalos $f(x)$ es creciente? ______________________________

b) ¿En qué intervalos $f(x)$ es decreciente? ______________________________

c) ¿En qué intervalos $f(x)$ es cóncava hacia arriba? ______________________________

d) ¿En qué intervalos $f(x)$ es cóncava hacia abajo? ______________________________

e) ¿En qué valor(es) de x se cumple que $f(x)$ es máximo? ______________________________

f) ¿En qué valor(es) de x se cumple que $f(x)$ es mínimo? ______________________________

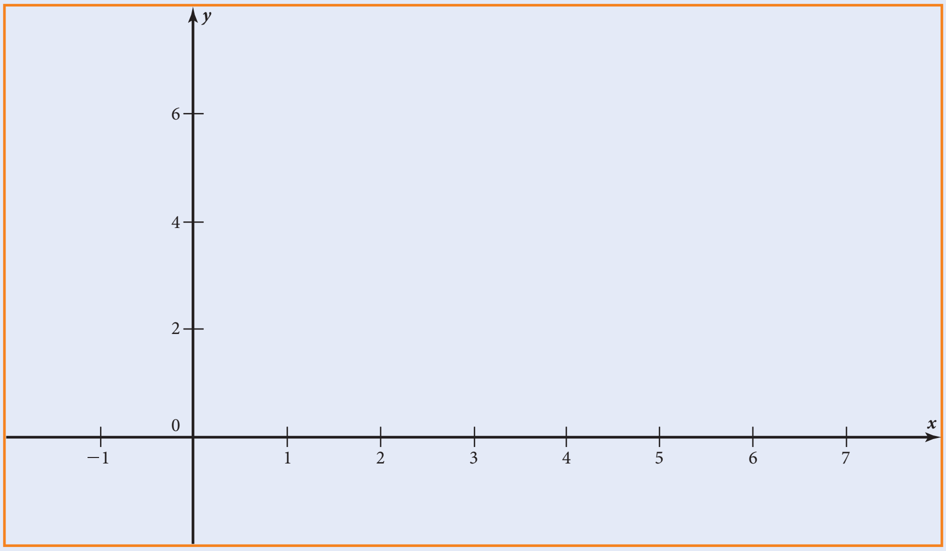
g) En el valor de $x = 2$ hay un máximo o mínimo de $f(x)$ ________________ ¿Por qué? ______________________

____

Ejercicio 6 Dibuja la gráfica de una función que cumpla con la siguiente situación:

Un estudio efectuado por el INEGI indica que la población de una ciudad presenta una primera derivada positiva y una segunda derivada negativa.

Solución Dibuja la gráfica de la población en función del tiempo y describe lo que estos resultados significan.



¿Qué información nos da la gráfica respecto a la población? ____

____

____

____

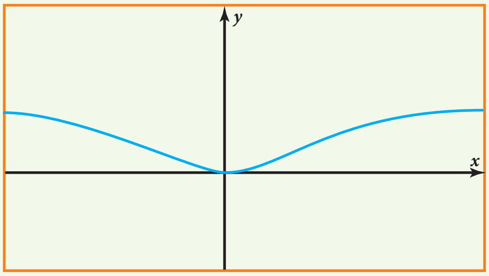
____

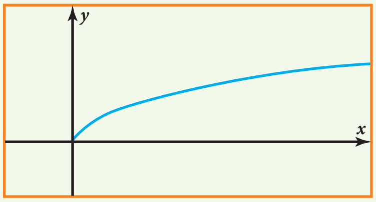
____

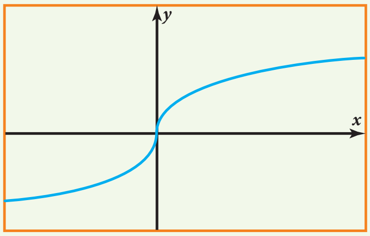
____

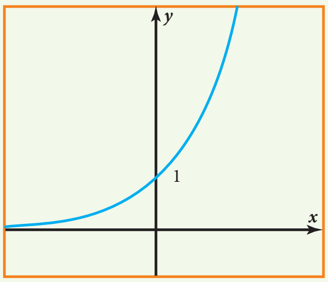
Conjunto de ejercicios de práctica 3.3

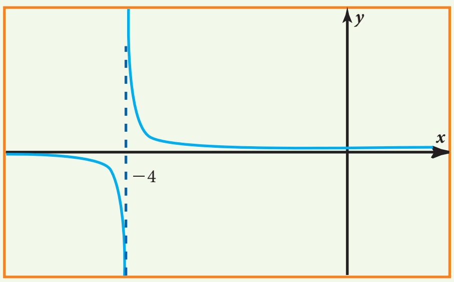
En los ejercicios 1 al 7 utiliza la gráfica de la función para dibujar la gráfica de la derivada.

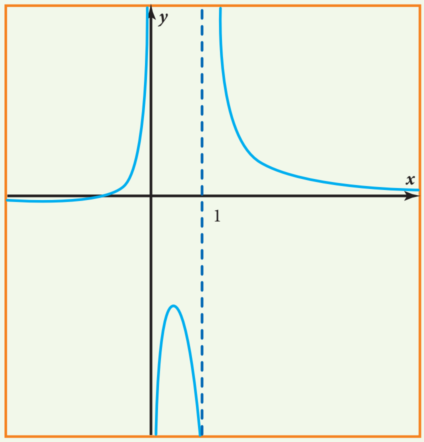
1. 

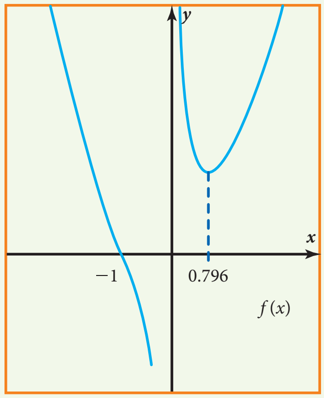
2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

7. 

Utiliza un graficador para dibujar la gráfica de la función y, con base en ella, obtener la gráfica de la derivada.

8. $y = x^{-5/3}e^{x}$

9. $y = (1.6)^{x} \ln x$

10. $y = x \ln x$

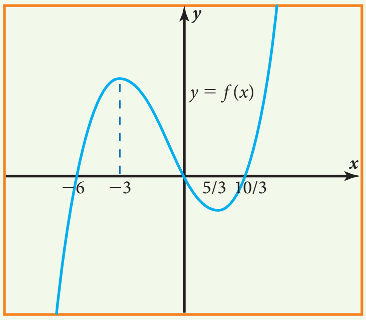
11. $y = \dfrac{x-1}{x^2+2}$

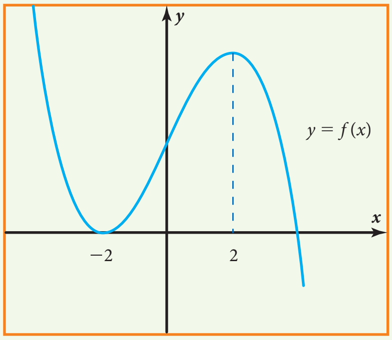
12. $y = \dfrac{x}{x-3}$

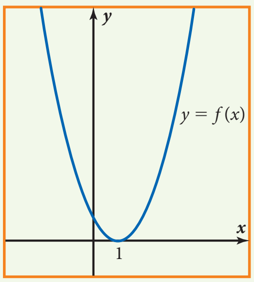
13. $y = e^{x^2}$

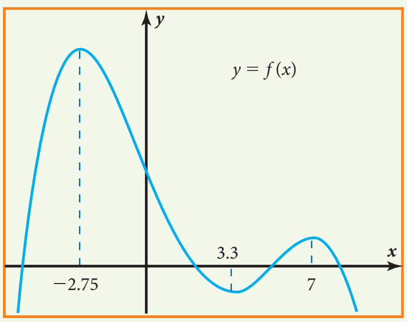
14. $y = \dfrac{\ln x}{x}$

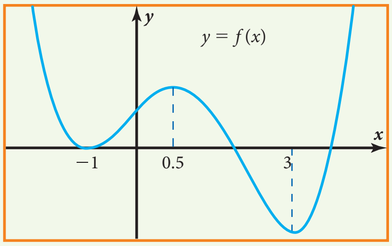
Dibuja la gráfica de la primera y segunda derivadas de las siguientes funciones polinomiales.

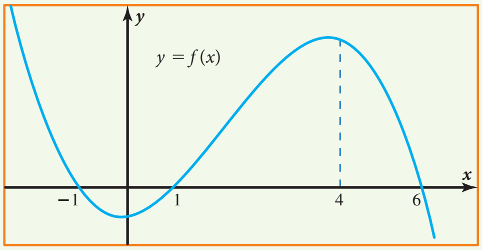
15.


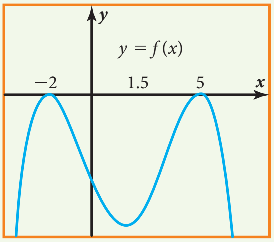
16.


17.


18.


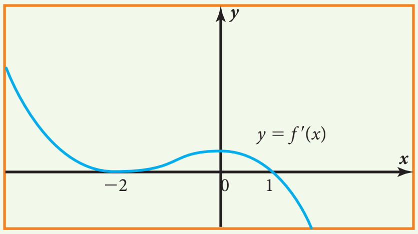
19.


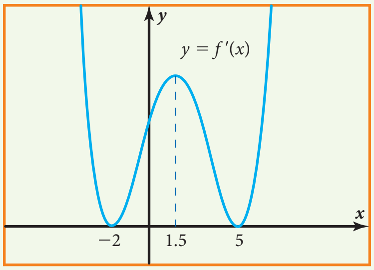
20.


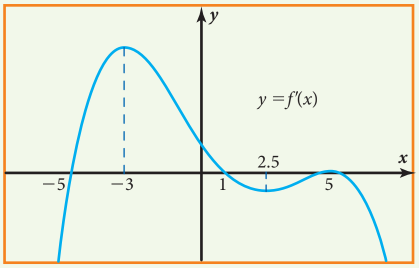
21.


En los problemas 22 al 26, dada la gráfica de la derivada obtén la siguiente información de la función original:

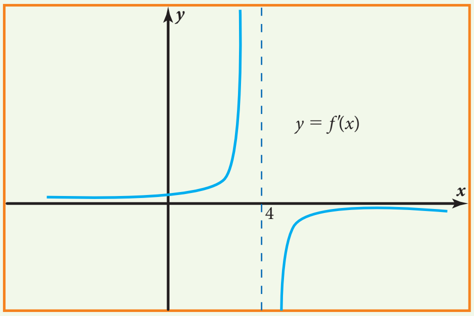
a) Intervalos donde *f* crece
b) Intervalos donde *f* decrece
c) Intervalos donde *f* es cóncava hacia arriba
d) Intervalos donde *f* es cóncava hacia abajo
e) Máximos y mínimos de *f*

22.


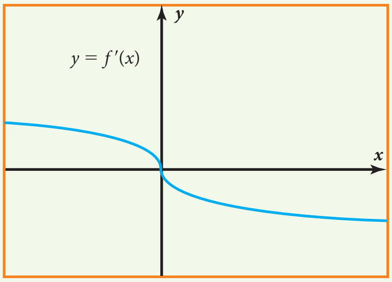
23.


24.


25.



26.



Realiza lo que se te pide.

27. Dibuja la gráfica de una función que cumpla con la siguiente situación: Por consejo de una empresa que ofrece servicios de asesoría, una compañía decidió invertir en publicidad para promover su negocio. Después de varios meses de estar invirtiendo cada vez un poco más de dinero en publicidad, los resultados reportados al seguimiento de esta decisión indicaron que la primera derivada era positiva y que la segunda derivada también lo era.

a) ¿Qué significa este resultado?
b) Dibuja la gráfica de las ventas en función de los gastos en publicidad.

28. En cierta ciudad se descubrió un brote de sarampión en la población infantil. La Secretaría de Salud determinó que el número de enfermos contagiados se fue incrementando con el transcurso de los días de tal manera que se muestra que la primera derivada es positiva y que la segunda derivada es negativa.

a) ¿Qué significa este resultado?
b) Dibuja la gráfica del número de contagiados en función del tiempo.

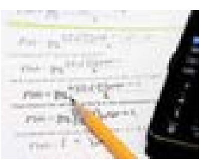
29. Un estudio de mercado realizado por cierta compañía muestra que la demanda de su producto está relacionada con el precio, de tal manera que se observa que la primera derivada es negativa y que la segunda derivada es positiva.

a) ¿Qué significa este resultado?
b) Dibuja la gráfica de la cantidad demandada en función del precio del producto.

30. La empresa Rodríguez y Asociados contrató una agencia para hacer un estudio del comportamiento de sus utilidades en función del número de trabajadores. Los resultados reportados por la agencia muestran que la primera derivada es decreciente.

a) ¿Qué significa este resultado?
b) Dibuja la gráfica de las utilidades en función del número de trabajadores.

3.4 Derivada por fórmulas y propiedades



Ahora aprenderás una estrategia más rápida y exacta para obtener la derivada de una función: fórmulas y propiedades. Desafortunadamente, no todas las funciones se pueden derivar así, por eso es necesario aprender otras formas para obtener la derivada de una función.

Es importante que sepas distinguir entre una función básica y una compuesta, pues la forma de derivarlas es diferente. En este tema aprenderás a derivar funciones básicas.

Nota Llamaremos **básica** a una función si su argumento es solamente x. El argumento es la variable independiente que la función tiene; por lo general se acostumbra utilizar la letra x como la variable independiente de una función; sin embargo, se puede utilizar cualquier otra letra. De la misma forma, para denotar a una función se puede utilizar cualquiera otra letra, no solamente la f.

Ejemplos de funciones básicas

- $f(x) = e^x$
- $g(t) = t^{1/3}$
- $h(y) = \ln y$
- $y(s) = 2^s$
- $y(\theta) = \cos(\theta)$

Observa cómo en las funciones básicas aparece la variable independiente sola. En la primera función el número e está elevado solamente a x; en la segunda función aparece solamente la variable t elevada al exponente 1/3; en la tercera función aparece solamente la variable y como argumento de la función logaritmo natural. En la cuarta función aparece solamente la variable s como exponente de la función exponencial de base $a = 2$, y en la quinta función aparece solamente la variable θ como argumento de la función trigonométrica coseno.

Cómo derivar funciones básicas

En esta parte veremos cómo derivar los diferentes tipos de funciones que aprendimos en la unidad 1. Plantearemos una estrategia de razonamiento para obtener la derivada y la acompañaremos con algunos ejemplos.

Fórmula 1: derivada de una función constante

$$\boxed{\text{Si} \quad f(x) = C, \quad \text{entonces} \quad f'(x) = 0}$$

Argumento de la función

No aparece la variable x

Una forma para reconocer que una función es constante es que en el lado derecho de la igualdad no aparece la variable que está en el argumento de la función.

Ejemplo 1 Contesta en los espacios en blanco de acuerdo con las dos primeras muestras que aparecen en la siguiente tabla.

Función	Análisis	Derivada
$g(x) = \ln 2$	La variable del argumento es x. En la expresión ln 2 no aparece x, por lo tanto es una constante.	$g'(x) = 0$
$y = 8^{1/3}$	Cuando no se especifica la variable del argumento se supone que es x. En la expresión $8^{1/3}$ no aparece x, por lo tanto es una constante.	$y' = 0$
$h(t) = e^3$	La variable del argumento es ________ . ¿Aparece en e^3? _______ , por lo tanto e^3 es ______ .	$h'(t) =$
$F(z) = -5$	$F(z)$ ¿es constante? _____ . ¿Por qué? ____________ .	$F'(z) =$

Nota Es importante saber distinguir una variable de una constante arbitraria.

La variable es la que aparece en el argumento de la función. Por ejemplo, si $y = f(x)$, la variable del argumento es x; si $y = f(t)$, la variable del argumento es t, y así sucesivamente.

Las constantes arbitrarias se representan a menudo también con letras (a, b, c, k, n, etc.), pero se debe tener cuidado de que sean diferentes a la letra utilizada para denotar la variable del argumento. En algunas ocasiones, en el enunciado se especifica la letra que es constante y a veces se da el conjunto de valores que puede tomar.

- Por ejemplo, si nos pidieran la derivada de la función $y = \ln k$, donde k es una constante positiva, diríamos que la derivada es cero, ya que nos mencionan que *k es una constante.*
- Por otro lado, si nos pidieran la derivada de la función $f(t) = e^k$, la variable del argumento es t, así que, e^k es una constante y, por lo tanto, su derivada sería cero.
- De la misma forma, las derivadas de las funciones $y = a^k$, $y = k^n$, etc., serían cero si a, k, y n fueran constantes.

Ejercicios Utiliza fórmulas para obtener la derivada de la función.

1. $y = 3 \quad \Rightarrow \quad y' =$ ____________________
2. $f(x) = -\dfrac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$ ____________________
3. $h(s) = \ln 5 \quad \Rightarrow \quad h'(s) =$ ____________________
4. $y = \pi \quad \Rightarrow \quad y' =$ ____________________
5. $g(t) = e^4 \quad \Rightarrow \quad g'(t) =$ ____________________
6. $f(r) = (\ln 3)^e \quad \Rightarrow \quad f'(r) =$ ____________________

Fórmula 2: derivada de una función potencia

Si $f'(x) = x^n$, entonces $f'(x) = n\,x^{n-1}$, donde n es una constante.

Recuerda que las funciones potencia se reconocen porque la variable del argumento se encuentra en la base, y el exponente es una constante.

Ejemplo 1 *a*) La función $f(x) = x^2$ es una función potencia con $n = 2$; entonces

$$f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$$

b) La función $g(t) = t^{-3}$ es una función potencia con $n = -3$; entonces

$$g'(t) = -3t^{-3-1} = -3t^{-4}.$$

Para no dejar exponentes negativos podemos expresar la derivada como $g'(t) = \dfrac{-3}{t^4}$.

Nota En algunas ocasiones, la función está expresada con radicales. En este caso debemos expresarlas como funciones potencia, de acuerdo con la regla algebraica $\sqrt[q]{a^p} = a^{p/q}$, ya que no tenemos fórmula para derivar funciones radicales.

c) La función $h(z) = \sqrt[5]{z^3}$ se puede escribir como $h(z) = z^{3/5}$, que es una función potencia con exponente $n = 3/5$; entonces su derivada es:

$$h'(z) = \frac{3}{5}z^{(3/5)-1} = \frac{3}{5}z^{(3/5)-(5/5)} = \frac{3}{5}z^{-2/5}.$$

Para no dejar exponentes negativos podemos expresar la derivada como $h'(z) = \dfrac{3}{5z^{2/5}}$.

Nota También puede suceder que la función potencia se encuentre en el denominador. En este caso podemos escribirla en el numerador de acuerdo con la siguiente regla algebraica $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$. Observa que sólo la potencia cambia de signo.

d) $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{t^4}}$, que es igual a $g(t) = \dfrac{1}{t^{4/3}}$, se puede escribir como $g(t) = t^{-4/3}$, con lo que obtenemos una función potencia con exponente $n = -4/3$, por lo que su derivada será $g'(t) = \dfrac{-4}{3}t^{(-4/3)-1} = \dfrac{-4}{3}t^{(-4/3)-(3/3)} = \dfrac{-4}{3}t^{-7/3}$.

Para no dejar exponentes negativos, podemos expresar la derivada como $g'(t)=\dfrac{-4}{3t^{7/3}}$.

Fórmula 3: derivada de la función identidad

$$\boxed{\text{Si} \quad f(x) = x, \quad \text{entonces} \quad f'(x) = 1.}$$

La función de la fórmula 3 se puede escribir como $y = x$; es por eso que esta función es llamada **identidad**, ya que la variable dependiente y toma los mismos valores que la variable independiente x.

Observa que la función $f(x) = x$ es una función potencia con exponente $n = 1$. Al utilizar la fórmula 2 para derivar funciones potencia obtenemos que $f'(x) = 1$.

Practica lo aprendido de los ejemplos anteriores

Obtén la derivada de las siguientes funciones. Contesta en la línea lo que se te indica.

Función	Análisis	Derivada
$f(x) = x^5$	¿Es una función potencia? ________________ Valor de n = ________________	
$g(t) = t^{-8}$	¿Es una función potencia? ________________ Valor de n = ________________	
$h(z)=\sqrt[4]{z^5}$	¿Es una función potencia? ________________ Valor de n = ________________	
$g(t)=\dfrac{1}{\sqrt[9]{t^5}}$	¿Es una función potencia? ________________ Valor de n = ________________	
$y(w) = w$	¿Es una función potencia? ________________ Valor de n = ________________	

Ejercicios Utiliza fórmulas para obtener la derivada de la función.

1. $y = x^2 \quad \Rightarrow \quad y' =$ ____________________
2. $f(x) = x^{1/5} \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$ ____________________ sin exponentes negativos $f'(x) =$ ____________
3. $f(t) = f(t) = t^{-5} \quad \Rightarrow \quad f'(t) =$ ____________________ sin exponentes negativos $f'(t) =$ ____________

Nota Recuerda que en ocasiones es necesario transformar la función para que esté expresada como una función potencia.

4. $f(x)=\sqrt{x}$ la expresamos como $f(x) =$ ____________ $\Rightarrow \quad f'(x) =$ ____________________
5. $y = 1/x^2$ la expresamos como $y =$ ____________ $\Rightarrow \quad y' =$ ____________________
6. $g(h)=\dfrac{1}{\sqrt[7]{h^3}}$ la expresamos como $g(h) =$ ____________ $\Rightarrow \quad g'(h) =$ ____________________

Fórmula 4: derivada de la función logaritmo natural

$$\text{Si} \quad f(x) = \ln x, \quad \text{entonces} \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Para esta función no hay variedad de ejemplos, lo único que se puede presentar es que la variable argumento de la función sea diferente de x.

Ejemplo 2 Obtén la derivada de las siguientes funciones. Contesta en la línea lo que se te indica.

Función	Análisis	Derivada
$f(t) = \ln t$	¿Cuál es la variable del argumento? ______________	$f'(t) =$
$g(y) = \ln y$	¿Cuál es la variable del argumento? ______________	$g'(y) =$
$h(z) = \ln z$	¿Cuál es la variable del argumento? ______________	$h'(z) =$

Ejercicios Utiliza fórmulas para obtener la derivada de las siguientes funciones.

1. $y(w) = \ln w \quad \Rightarrow \quad y'(w) =$ ____________________________
2. $f(b) = \ln b \quad \Rightarrow \quad y'(b) =$ ____________________________

Fórmula 5: derivada de la función exponencial de base *e*

$$\text{Si} \quad f(x) = e^x, \quad \text{entonces} \quad f'(x) = e^x$$

La función exponencial de base e se reconoce porque la variable está en el exponente y su base obviamente es el número e.

Para esta función tampoco hay variedad de ejemplos, lo único que puede cambiar es cuando la variable argumento del exponente sea diferente de x.

Ejemplo 3 Obtengamos la derivada de las siguientes funciones. Contesta en las líneas lo que se te pide, basándote en la muestra que aparece en la siguiente tabla.

Función	Análisis	Derivada
$f(z) = e^z$	La variable z está en el exponente y la base es el número e.	$f'(z) = e^z$
$h(t) = e^t$	La variable es ______________ ¿Está en el exponente? ______________ ¿Cuál es la base? ______________	$h'(t) =$ ______________
$g(y) = e^y$	La variable es ______________ ¿Está en el exponente? ______________ ¿Cuál es la base? ______________	$g'(y) =$ ______________

Ejercicios Utiliza fórmulas para obtener la derivada de las siguientes funciones.

1. $y(q) = e^q \quad \Rightarrow \quad y'(q) =$ ______________
2. $f(m) = e^m \quad \Rightarrow \quad f'(m) =$ ______________

Fórmula 6: derivada de la función exponencial de base *a*

$$\text{Si} \quad f(x) = a^x, \quad \text{entonces} \quad f'(x) = a^x \ln a$$

Recuerda que la función exponencial de base *a* se reconoce porque la variable está en el exponente y su base es un número positivo diferente de 1.

Ejemplo 4 Obtén la derivada de las siguientes funciones. Contesta en las líneas lo que se te pide, basándote en las muestras que aparecen en la siguiente tabla.

Función	Análisis	Derivada
a) $f(x) = 3^x$	En esta función la variable x aparece en el exponente y la base es una constante positiva diferente de 1, por lo que se trata de una función exponencial de base a, en este caso $a = 3$.	*a*) $f'(x) = 3^x \ln 3$
b) $h(t) = 2^t$	En esta función la variable t aparece en el exponente y la base es una constante positiva diferente de 1, por lo que se trata de una función exponencial de base a, en este caso $a = 2$.	*b*) $h'(t) = 2^t \ln 2$
c) $P(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$	¿La función dada es exponencial de base a? ______________ ¿Cuál es la base? $a =$ ______________	*c*) $P'(t) =$ __________
d) $G(y) = (1.025)^y$	¿La función dada es exponencial de base a? ______________ ¿Cuál es la base? $a =$ ______________	*d*) $G'(y) =$ __________

Ejercicios Utiliza fórmulas para obtener la derivada de las siguientes funciones.

1. $y = 5^x \quad \Rightarrow \quad y' =$ ____
2. $f(x) = (1.7)^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) =$ ____
3. $g(t) = \pi^t \quad \Rightarrow \quad g'(t) =$ ____
4. $h(y) = (\ln 8)^y \quad \Rightarrow \quad h'(y) =$ ____
5. $y = \left(\sqrt{3}\right)^x \quad \Rightarrow \quad y' =$ ____

Fórmula 7: derivada de la función trigonométrica seno

$$\text{Si} \quad f(x) = \text{sen}\,(x), \quad \text{entonces} \quad f'(x) = \cos\,(x)$$

Para esta función no hay variedad de ejemplos, lo único que se puede presentar es que la variable argumento de la función sea diferente de *x*.

Ejemplo 5 Obtén la derivada de las siguientes funciones. Contesta en la línea lo que se te indica.

Función	Análisis	Derivada
$f(t) = \text{sen}\,(t)$	La variable t está en el argumento de la función trigonométrica seno.	$f'(t) = \cos\,(t)$
$g(y) = \text{sen}\,(y)$	¿Cuál es la variable? ______________ ¿Está en el argumento de la función trigonométrica? ____________	$g'(y) =$ ______________
$h(z) = \text{sen}\,(z)$	¿Cuál es la variable? ______________ ¿Está en el argumento de la función trigonométrica? ____________	$h'(z) =$ ______________

Ejercicios Utiliza fórmulas para obtener la derivada de las siguientes funciones.

1. $y(w) = \text{sen}\,(w) \quad \Rightarrow \quad y'(w) =$ ________________________________
2. $f(b) = \text{sen}\,(b) \quad \Rightarrow \quad f'(b) =$ ________________________________

Fórmula 8: derivada de la función trigonométrica coseno

$$\boxed{\text{Si} \quad f(x) = \cos\,(x), \quad \text{entonces} \quad f'(x) = -\text{sen}\,(x)}$$

Para esta función no hay variedad de ejemplos, lo único que se puede presentar es que la variable argumento de la función sea diferente de x.

Ejemplo 6 Obtén la derivada de las siguientes funciones. Escribe en la línea lo que se te indica.

Función	Análisis	Derivada
$f(t) = \cos\,(t)$	La variable t está en el argumento de la función trigonométrica coseno.	$f'(t) = -\text{sen}\,(t)$
$g(y) = \cos\,(y)$	¿Cuál es la variable? ______________ ¿Está en el argumento de la función trigonométrica? ____________	$g'(y) =$ ______________
$h(z) = \cos\,(z)$	¿Cuál es la variable? ______________ ¿Está en el argumento de la función trigonométrica? ____________	$h'(z) =$ ______________

Ejercicios Utiliza fórmulas para obtener la derivada de las siguientes funciones.

1. $y(r) = \cos\,(r) \quad \Rightarrow \quad y'(r) =$ ________________________________
2. $f(b) = \cos\,(b) \quad \Rightarrow \quad f'(b) =$ ________________________________

Propiedades de la derivada

En ocasiones la función que se pide derivar está expresada como una combinación de funciones: suma, resta, multiplicación o división; las siguientes propiedades indican cómo derivar la función cuando se presenta una o más de estas combinaciones.

P1. Si $H(x) = f(x) \pm g(x)$, entonces $y' = f'(x) \pm g'(x)$.

P2. Si $y = f(x) \cdot g(x)$, entonces $y' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$.

P3. Si $y = C \cdot f(x)$, entonces $y' = C \cdot f'(x)$ donde C es una constante.

P4. Si $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, entonces $y' = \dfrac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Veamos qué nos indica cada una de ellas y cómo se utilizan.

Propiedad 1: derivada de la suma o resta de dos o más funciones

La siguiente regla se establece para la suma o resta de dos funciones; sin embargo, es válida cuando se suman o restan más funciones.

Si $H(x) = f(x) \pm g(x)$, entonces $H'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

Lo que la propiedad anterior indica es que cuando se quiere obtener la derivada de una suma o resta de funciones, lo que se hace es sumar o restar la derivada de cada función.

Ejemplo 1 Obtén la derivada de la función $H(x) = e^x - x^4 + \ln x$.

Solución La función $H(x)$ contiene tres términos que se están sumando o restando, así que para obtener su derivada tendremos que derivar cada uno de ellos, es decir,

$$H'(x) = (e^x)' - (x^4)' + (\ln x)'$$

Al derivar cada término, de acuerdo con el tipo de función correspondiente, obtenemos

$$H'(x) = e^x - 4x^3 + \frac{1}{x}$$

Ejemplo 2 Obtén la derivada de la función $H(t) = 3^t + \sqrt[3]{t^2} - e^6$.

Solución Para obtener la derivada de esta función, primero hay que convertir en una potencia al radical que aparece en el segundo término. Al hacerlo, tenemos que quedaría como: $H(t) = 3^t + t^{2/3} - e^6$.

Para obtener la derivada de la función $H(t)$, tenemos que derivar cada uno de sus términos, es decir,

$$H'(t) = c(3^t)' + (t)' - (e^6)'$$

Al derivar cada término, de acuerdo con el tipo de función correspondiente, obtenemos

$$H'(t) = 3^t \ln 3 + \frac{2}{3}t^{-1/3} - 0.$$

Dejamos la respuesta sin exponentes negativos. Finalmente, la derivada queda como

$$H'(t) = 3^t \ln 3 + \frac{2}{3t^{1/3}}$$

Propiedad 2: derivada del producto de dos funciones

A diferencia de la suma de funciones, la derivada de un producto no se obtiene derivando cada factor, sino por medio de la siguiente regla.

Si $H(x) = f(x) \cdot g(x)$,

entonces

$H'(x) = f(x)\, g'(x) + g(x)\, f'(x)$.

Es decir:

La derivada de un producto de funciones es igual a la primera función multiplicada por la derivada de la segunda, más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera.

Estrategia propuesta para derivar una función de este tipo

En algunas ocasiones, derivar un producto de funciones es complicado, por lo que es recomendable identificar cada función por separado, llamarle a la primera función $f(x)$, a la segunda función $g(x)$ y luego derivarlas (por separado) con la fórmula correspondiente. Por último, es necesario utilizar la propiedad 2 para obtener la derivada de la función producto originalmente dada. Una vez que desarrolles la habilidad para identificar los tipos de funciones, así como aplicar la fórmula y propiedad correspondientes, entonces podrás derivar directamente la función producto.

La habilidad para derivar se obtiene con mucha práctica y dedicación.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1 Obtén la derivada de la función $H(x) = x^5 \cdot e^x$.

Solución Observa que la función que se indica derivar está expresada como un producto de funciones. Para derivarla llamaremos $f(x)$ a la primera función y $g(x)$ a la segunda función; es decir,

$$f(x) = x^5 \quad \text{y} \quad g(x) = e^x.$$

Ahora obtenemos la derivada de cada función con la fórmula correspondiente:

$$f'(x) = 5x^4 \quad \text{y} \quad g'(x) = e^x.$$

Por último, aplicamos la propiedad 2 con todos los datos obtenidos. La propiedad indica que:

$$H'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Al sustituir datos obtenemos que: $H'(x) = x^5e^x + e^x\,5x^4$.

Podemos simplificar si tomamos x^4e^x como factor común; al hacerlo nos quedaría como.

$$H'(x) = x^4\,e^x(x + 5)$$

Ejemplo 2 Obtén la derivada de la función $F(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$.

Solución Observa que la función que piden derivar está expresada como un producto de funciones. Para derivarla llamaremos $f(x)$ a la primera función y $g(x)$ a la segunda función; recuerda que la función con radical debe ser expresada como potencia. Al sustituir, tenemos que:

$$f(x) = x^{1/2} \quad \text{y} \quad g(x) = \ln x.$$

Obtenemos la derivada de cada función con la fórmula correspondiente,

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} \quad \text{y} \quad g'(x) = \frac{1}{x}.$$

Por último, aplicamos la propiedad 2 con todos los datos obtenidos.

La propiedad indica que:

$$H'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Al sustituir los datos obtenemos:

$$F'(x) = x^{1/2}\frac{1}{x} + \ln x\frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{x^{1/2}}{x} + \frac{\ln x}{2x^{1/2}}.$$

Simplificando el primer término de la derivada, utilizando las leyes de los exponentes obtenemos que:

$$F'(x) = \frac{1}{x^{1/2}} + \frac{\ln x}{2x^{1/2}}.$$

Tomamos $\frac{1}{x^{1/2}}$ como factor común y la respuesta queda como: $F'(x) = \frac{1}{x^{1/2}}\left(1 + \frac{\ln x}{2}\right)$.

Propiedad 3: derivada del producto de una constante por una función

La regla es:

Si $H(x) = Cf(x)$, entonces $H'(x) = Cf'(x)$.

La propiedad nos indica que la derivada del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la derivada de la función; es decir, la constante se queda igual y la función se deriva.

Nota La derivada de esta función puede obtenerse utilizando la propiedad anterior; sin embargo, dado que una de las funciones es constante, su derivada es cero y esto cancela el segundo término de la propiedad 2.

Comprobemos la propiedad. Si tenemos la función $H(x) = Cf(x)$ y la derivamos como un producto de funciones, por la propiedad 2 tenemos que:

$$H'(x) = (\text{La 1a. función}) \cdot$$
$$(\text{La derivada de la 2a. función}) + (\text{La 2a. función}) \cdot$$
$$(\text{La derivada de la 1a. función})$$

Si C es la primera función y $f(x)$ es la segunda función, tenemos que:

$$H'(x) = C \cdot f'(x) + \cancel{f(x) \cdot 0^{=0}},$$
entonces tenemos que $H'(x) = C \cdot f'(x)$.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1 Obtén la derivada de la función $G(x) = 2 \cdot 5^x$.

Solución Observa que la función $G(x)$ está definida como el producto de la constante 2 por la función 5^x. Para derivarla utilizaremos la propiedad 3, es decir, la constante se queda igual y la función se deriva; como en este caso la función es una exponencial de base a, aplicamos la fórmula 6 para derivar la función. La derivada de $G(x)$ quedaría como: $G'(x) = 2 \cdot 5^x \cdot \ln 5$.

Propiedad 4: derivada del cociente (división) de dos funciones

A diferencia de la suma o resta de funciones, la derivada de una división no se obtiene derivando numerador y denominador y dividiéndolos, sino de acuerdo con la siguiente regla.

$$\text{Si } H(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$
entonces
$$H'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Es decir:

La derivada de un cociente de funciones es igual a la función del denominador por la derivada de la función del numerador, menos la función del numerador por la derivada de la función del denominador, entre la función del denominador elevada al cuadrado.

Estrategia propuesta para derivar una función de este tipo

Al igual que en el producto de funciones, en algunas ocasiones derivar un cociente o división de funciones puede ser complicado, por lo que es recomendable identificar cada función por separado, llamarle $f(x)$ a la función del numerador y $g(x)$ a la función del denominador, derivarlas por separado con la fórmula correspondiente de acuerdo con el tipo de función y, por último, utilizar la propiedad 4 para obtener la derivada de la función cociente originalmente dada.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2 Obtén la derivada de la función
$$H(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

Solución Observa que la función $H(x)$ está definida como el cociente de dos funciones. Para derivarla seguiremos con la estrategia sugerida. Hagamos la sustitución:

$$f(x) = \ln x \quad \text{y} \quad g(x) = x^2.$$

Derivamos cada función con la fórmula correspondiente de acuerdo con el tipo de función que es y obtenemos:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad g'(x) = 2x.$$

Aplicamos la propiedad 4 con todos los datos obtenidos.

La propiedad indica que:

$$H'(x) = \frac{g(x)\, f'(x) - f(x)\, g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Al sustituir datos obtenemos que

$$H'(x) = \frac{x^2 \cdot \frac{1}{x} - \ln x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{\frac{x^2}{x} - 2x \ln x}{x^4}.$$

Al simplificar el primer término del numerador por medio de las leyes de los exponentes obtenemos

$$H'(x) = \frac{x - 2x \ln x}{x^4}.$$

Al tomar x como factor común en el numerador, la respuesta queda como

$$H'(x) = \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4}.$$

Por último, cancelamos la x del factor común con una x del denominador y obtenemos:

$$H'(x) = \frac{(1 - 2 \ln x)}{x^3}.$$

Nota Algunas funciones pueden derivarse de formas diferentes; éste es el caso de la función anterior, $H(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Para derivarla utilizamos la propiedad de división; sin embargo, también se puede derivar con la propiedad del producto de funciones si subimos la función del denominador. Si hacemos esto, la función queda expresada como $H(x) = x^{-2} \cdot \ln x$. Observa cómo la función que deseamos derivar ahora es un producto de funciones. La respuesta final será la misma, independientemente de la forma que se elija.

Ejemplo 3 Obtén la derivada de la función

$$W'(y) = \frac{y^4}{4^y}.$$

Solución Observa que la función $W(y)$ está definida como el cociente de dos funciones. Seguiremos con la estrategia sugerida. Hagamos la sustitución.

$$f(y) = y^4 \quad \text{y} \quad g(y) = 4^y$$

Derivamos cada función con la fórmula correspondiente de acuerdo con el tipo de función y obtenemos:

$$f'(y) = 4y^3 \quad \text{y} \quad g'(y) = 4^y \ln 4ç$$

Aplicamos la propiedad 4 con todos los datos obtenidos.

La propiedad indica que:

$$H'(x) = \frac{g(x)\, f'(x) - f(x)\, g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Al sustituir datos obtenemos:

$$W'(y) = \frac{4^y \cdot 4y^3 - y^4 \cdot 4^y \ln 4}{(4^y)^2}.$$

Al simplificar el denominador por medio de las leyes de exponentes obtenemos:

$$W'(y) = \frac{4^y \cdot 4y^3 - y^4 \cdot 4^y \ln 4}{4^{2y}}.$$

Ejemplo 4 Obtén la derivada de la función

$$T(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}.$$

Solución Observa que la función $T(x)$ está definida como el cociente de dos funciones. Para derivarla seguiremos con la estrategia sugerida. Hagamos la sustitución:

$$f(x) = \cos(x) \quad \text{y} \quad g(x) = x^2$$

Derivamos cada función con la fórmula correspondiente de acuerdo con el tipo de función que es y obtenemos:

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(x) \quad \text{y} \quad g'(x) = 2x.$$

Aplicamos la propiedad 4 con todos los datos obtenidos.

La propiedad indica que:

$$H'(x)=\frac{g(x)\,f'(x)-f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$$

Al sustituir datos obtenemos que:

$$H'(x)=\frac{x^2\cdot(-\text{sen}\,(x))-\cos\,(x)\cdot 2x}{(x^2)^2}$$

$$=\frac{-x^2\ \text{sen}\,(x)-2x\cos\,(x)}{x^4}$$

Al tomar x como factor común x en el numerador, la respuesta queda como:

$$H'(x)=\frac{x\left(-x\ \text{sen}\,(x)-2\cos\,(x)\right)}{x^4}$$

Por último, cancelamos la x del factor común con una x del denominador y obtenemos

$$H'(x)=\frac{-x\cos\,(x)-2\cos\,(x)}{x^3}.$$

Utiliza fórmulas y propiedades para obtener la derivada de la función.

Ejercicio 1 $y = x^3 \cdot \ln x$

Solución *a*) ¿Qué propiedad se utiliza? ______________________________

b) Hacemos la sustitución $f(x) =$ ____________ y $g(x) =$ ____________.

Derivamos $f'(x) =$ ____________ y $g'(x) =$ ____________.

c) Utilizamos la propiedad, y la derivada queda como $y' =$ ______________________.

Ejercicio 2 $H(x) = \dfrac{3e^x}{\sqrt[4]{x^3}}$

Solución *a*) ¿Qué propiedad se utiliza? ____________

b) Hacemos la sustitución $f(x) =$ ____________ y $g(x) =$ ____________.

Derivamos $f'(x) =$ ____________ y $g'(x) =$ ____________.

c) Utilizamos la propiedad, y la derivada queda como $H'(x) =$ ______________________.

Otra forma de resolver el ejercicio 2

Podemos expresar la función como $H(x) = 3e^x \cdot x^{-3/4}$

De esta manera, la función queda expresada con una multiplicación, y para derivar se utiliza la propiedad 2. La respuesta final simplificada al máximo será la misma, independientemente del camino que sigamos.

¡Resuélvelo!

Ejercicio 3 $H(x) = x \cdot \cos(x)$

Solución *a*) ¿Qué propiedad se utiliza? ______________________________

b) Hacemos la sustitución $f(x) =$ ____________ y $g(x) =$ ____________.

Derivamos $f'(x) =$ ____________ y $g'(x) =$ ____________.

c) Utilizamos la propiedad, y la derivada queda como $H'(x) =$ ____.

Ejercicio 4 $G(y) = \dfrac{y^2}{\text{sen}(y)}$

Solución a) ¿Qué propiedad se utiliza? ____

b) Hacemos la sustitución $f(y) =$ __________________________ y $g(y) =$ __________________________.

Derivamos $f'(y) =$ __________________________ y $g'(y) =$ __________________________.

c) Utilizamos la propiedad, y la derivada queda como $G'(y) =$ ____.

Ejercicio 5 $F(t) = \dfrac{e^t + 5^t}{\ln t - 7t^3}$

Solución a) ¿Qué propiedad se utiliza? ____

b) Hacemos la sustitución $f(t) =$ __________________________ y $g(t) =$ __________________________.

Derivamos $f'(t) =$ __________________________ y $g'(t) =$ __________________________.

c) Utilizamos la propiedad, y la derivada queda como $F'(t) =$ ____.

Conjunto de ejercicios de práctica 3.4

En los ejercicios 1 al 24 determina la derivada de las funciones dadas.

1. $y = 7$
2. $y = x^5$
3. $f(t) = t$
4. $f(t) = \ln t$
5. $f(t) = e^t$
6. $y = 3^x$
7. $y = x^{-2}$
8. $h(z) = z$
9. $h(w) = \ln w$
10. $g(z) = e^z$
11. $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$
12. $y = e^2$
13. $f(r) = r$
14. $g(y) = \ln y$
15. $h(w) = e^w$
16. $f(x) = (1.6)^x$
17. $g(z) = \sqrt{\pi}$
18. $h(r) = r^{3/2}$
19. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$
20. $f(x) = \sqrt[3]{x}$
21. $g(y) = \pi^{3\ln 4}$
22. $h(t) = t^0$
23. $h(s) = [\ln (4.1)]^s$
24. $h(z) = \left(\sqrt{3.7}\right)^z$

En los ejercicios 25 al 40, determina la derivada de las funciones. Utiliza fórmulas y propiedades.

25. $f(x) = \dfrac{2}{x} - \sqrt[3]{x^5} + 3^2$
26. $h(x) = x^2 \cdot 3^x$
27. $y = 5e^x$
28. $y = \dfrac{x}{\ln x}$
29. $y = \dfrac{x^{-4}}{e^x}$
30. $h(x) = e^3 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \pi^x$
31. $f(x) = x^{1/2} \ln x$
32. $y = \dfrac{1}{2} \ln x$
33. $w = \dfrac{3}{x^{1/5}}$
34. $z = \dfrac{\sqrt{x}}{2^x}$
35. $f(x) = \ln x + x^{-2}$
36. $h(x) = x^{-5/3} e^x$
37. $y = (1.6)^x \ln x$
38. $f(t) = 6.8(2.3)^t$
39. $f(x) = \dfrac{(1.8)^x}{\ln (1.8)}$
40. $g(y) = e^y - y^{3/8} + 6$

En los ejercicios 41 al 60 determina la derivada de las funciones utilizando fórmulas y propiedades. Simplifica el resultado.

41. $f(t) = \dfrac{3^t + 2}{e^t}$
42. $g(y) = (2y - 1)(\ln y)$
43. $f(x) = xe^x - \dfrac{x}{x+1}$
44. $y = \dfrac{5 \ln x + e^x}{\sqrt{x}}$
45. $y = 2^x \ln 3 + 4x$
46. $y = \dfrac{x^5}{x^3 + 1}$
47. $y = \left(\dfrac{x^{3.1}}{7} + \dfrac{5}{x^{3.1}}\right)(5x^{-4})$

48. $f(x)=\left(\sqrt{x}+4\right)\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)$

49. $f(t) = (t^3 + 4t^2 - 1)(3t^3 - t)$

50. $y=\dfrac{3}{e^x+\ln x}$

51. $h(x)=\dfrac{e^x}{x2^x}$

52. $g(x)=\left(-\dfrac{5}{3}x^9+\dfrac{7}{6}x^6\right)\ln x$

53. $r(x) = \ln x + 5x^5 e^x$

54. $w(x)=\dfrac{\pi^2 \ln x}{3^x}$

55. $p=125(2.3)^x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

56. $y=\dfrac{x+3}{(3x-4)(x-9)}$

57. $y=\dfrac{1}{x \ln x}$

58. $y=\pi\left(3x^{-1/2}+\dfrac{8}{\sqrt{x}}\right)$

59. $f(x) = x(1.28)^x + e^x \ln x$

60. $g(x) = e^2 \ln x - x^5 \ln 2$

61. $y=\dfrac{x}{\cos(x)}$

62. $f(x) = e^x \cos(x)$

63. $f(t) = \ln(t)\,\mathrm{sen}\,(t)$

64. $y = x^{1/2} - \mathrm{sen}\,(x)\cos(x)$

65. $f(t)=\dfrac{\ln(t)}{\cos(t)-\mathrm{sen}\,(t)}$

3.5 Cómo derivar funciones compuestas

Al método para derivar una función compuesta se le conoce como *regla de la cadena*.

Es importante que sepas distinguir entre una función básica y una compuesta, pues la forma de derivarlas es diferente.

Recuerda que llamamos básica a una función si su argumento es solamente x; diremos que la función es **compuesta** si en el argumento aparece otra función, es decir, algo más que x.

Cómo distinguir una función básica y una compuesta

Función básica	Funciones compuestas
1. $f(x) = e^x$	$f(x) = e^{2x}, f(x) = e^{x+5},\ f(x) = e^{x^2},\ f(x) = e^{-x}$
2. $g(t) = t^{1/3}$	$g(t) = (t - 5)^{1/3},\ g(t) = (4t)^{1/3},\ g(t) = (-t)^{1/3}$
3. $h(y) = \ln y$	$h(y) = \ln(2y + 3),\ h(y) = \ln(y^3)$
4. $r(s) = 2^s$	$r(s) = 2^{2s-1},\ r(s) = 2^{s^2},\ r(s) = 2^{-s}$
5. $f(w) = \cos(w)$	$f(w) = \cos(2w + 5),\ f(w) = \cos(w^2),\ f(w) = \cos(-w)$

Observa que, a diferencia de las funciones básicas, en las funciones compuestas el argumento es otra función, es decir, hay dos funciones implícitas, y cuando derivamos lo hacemos con las dos funciones.

El siguiente cuadro contiene las fórmulas para derivar funciones compuestas.

Fórmulas para derivar funciones compuestas

Sea $f(x)$ una función derivable de x:

1. Si $y = [f(x)]^n$, entonces $y' = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$, donde n es un número real.
2. Si $y = \ln[f(x)]$, entonces $y' = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$.
3. Si $y = e^{f(x)}$, entonces $y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$.
4. Si $y = a^{f(x)}$, entonces $y' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$, donde a es una constante positiva diferente de 1.
5. Si $y = \operatorname{sen}(f(x))$, entonces $y' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$.
6. Si $y = \cos(f(x))$, entonces $y' = -\operatorname{sen}(f(x)) \cdot f'(x)$.

Nota Observa que las fórmulas son muy similares a las de las funciones básicas; la diferencia es que ahora se multiplica al final por la derivada de la función argumento $f(x)$. La función $f(x)$ puede ser cualquiera de las que vimos en la sección anterior: potencia, logaritmo natural, exponencial de base e o base a, trigonométricas, y puede encontrarse definida en forma básica, compuesta o como combinación de funciones que se están sumando, restando, multiplicando o dividiendo.

Estrategia para derivar funciones compuestas

En ocasiones, derivar directamente una función compuesta es complicado, por lo que es conveniente que mientras desarrollas la habilidad necesaria para derivar de manera directa, realices el siguiente proceso:

Paso 1: identifica qué fórmula vas a utilizar para derivar la función compuesta. Tenemos cinco *tipos de funciones*: potencia, logaritmo natural, exponencial de base e, exponencial de base a y trigonométricas; la fórmula que vas a utilizar depende de la forma general que tiene la función que se te indica derivar.

Paso 2: identifica la función argumento $f(x)$, la fórmula que seleccionaste en el paso anterior te ayuda en este proceso. Por ejemplo, en la fórmula 2, $f(x)$ es la función que acompaña al logaritmo natural; en la fórmula 4, $f(x)$ es la función que aparece como exponente, y así sucesivamente.

Deriva $f(x)$ con la fórmula correspondiente.

Paso 3: por último, utiliza la fórmula que identificaste en el primer paso y escribe la derivada de la función compuesta.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1 Obtén la derivada de la función $y = \ln(e^x + x - 3)$.

Forma general: ln(función)

Solución Paso 1: la función es un logaritmo natural, por lo que para derivar la función **y** utilizaremos la fórmula 2.

Paso 2: llamaremos $f(x)$ a la función argumento, es decir, $f(x) = e^x + x - 3$ y la derivaremos utilizando las propiedades y fórmulas correspondientes en cada término; al hacerlo obtenemos que, $f'(x) = e^x + 1$

Paso 3: aplicamos la fórmula 2:

Si $y = \ln[f(x)]$, entonces $y' = \dfrac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$.

Al sustituir $f(x)$ y $f'(x)$, la derivada quedaría como: $y' = \dfrac{1}{(e^x + x - 3)} \cdot (e^x + 1)$.

Al efectuar la multiplicación, la derivada queda como $y' = \dfrac{e^x + 1}{(e^x + x - 3)}$.

Ejemplo 2 Obtén la derivada de la función $y = 6^{\frac{x}{\ln x}}$.

Forma general: número$^{(\text{función})}$

Solución Paso 1: la función es una función exponencial de base a, ya que las variables están en el exponente y la base es un número positivo diferente de 1, por lo que para derivar la función utilizaremos la fórmula 4.

Paso 2: llamaremos $f(x)$ al exponente, es decir, $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, y la derivaremos utilizando las propiedades y fórmulas correspondientes en la función del numerador y del denominador,

$$f'(x) = \frac{\ln x \cdot 1 - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

Al simplificar tenemos que $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

Paso 3: aplicamos la fórmula 4:

> Si $y = a^{f(x)}$, entonces $y' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$, donde a es una constante positiva diferente de 1.

Al sustituir el número $a = 6$, $f(x)$ y $f'(x)$ la derivada queda como $y' = 6^{\frac{x}{\ln n}} \cdot \ln 6 \cdot \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$.

Ejemplo 3 Obtén la derivada de la función $y = \sqrt[3]{(3x^2 - \ln x)^2}$.

Solución *Recuerda que cuando tenemos funciones radicales debemos cambiar a potencia, pues no tenemos fórmula para derivar radicales, al hacerlo la función quedaría expresada como*

$$y = (3x^2 - \ln x)^{2/3}.$$

Forma general: (función)$^{\text{número}}$

Paso 1: la función es una función potencia, ya que las variables están en la base y el exponente es una constante por lo que para derivar la función y utilizaremos la fórmula 1.

Paso 2: llamaremos $f(x)$ a la función argumento, es decir, $f(x) = 3x^2 - \ln x$, y la derivaremos utilizando las propiedades y fórmulas correspondientes en cada término; al hacerlo nos queda

$$f'(x) = 6x - \frac{1}{x}.$$

Paso 3: aplicamos la fórmula 1:

> Si $y = [f(x)]^n$, entonces $y' = n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$, donde n es un número real.

Al sustituir el número $n = \dfrac{2}{3}$, $f(x)$ y $f'(x)$, la derivada quedaría como

$$y' = \frac{2}{3} \cdot \left[3x^2 - \ln x\right]^{\frac{2}{3}-1} \cdot \left(6x - \frac{1}{x}\right)$$

que es igual a $y' = \dfrac{2}{3} \cdot \left[3x^2 - \ln x\right]^{\frac{-1}{3}} \cdot \left(6x - \dfrac{1}{x}\right)$.

Dejamos la respuesta sin exponentes negativos y entonces la derivada queda como:

$$y' = \frac{2\left(6x - \frac{1}{2}\right)}{3(3x^2 - \ln x)^{1/3}}$$

Ejemplo 4 Obtén la derivada de la función $y = e^{3x^4+2}$.

Forma general: $e^{(\text{función})}$

Solución Paso 1: la función es una función exponencial de base e, por lo que para derivar la función y utilizaremos la fórmula 3.

Paso 2: llamaremos $f(x)$ a la función del exponente, es decir, $f(x) = 3x^4 + 2$ y la derivaremos utilizando las propiedades y fórmulas correspondientes en cada término; al hacerlo nos queda:

$$f'(x) = 12x^3$$

Paso 3: aplicamos la fórmula 3:

> Si $y = e^{f(x)}$, entonces $y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$.

Al sustituir $f(x)$ y $f'(x)$, la derivada quedaría como

$$y' = e^{3x^4+2} \cdot 12x^3.$$

Intercambiamos el orden de los factores para que primero esté el coeficiente y obtenemos

$$y' = 12x^3 \cdot e^{3x^4+2}.$$

Ejemplo 5 Obtén la derivada de la función $y = \text{sen}\,(\ln(x) - 2)$.

Forma general: sen (función)

Solución Paso 1: la función es una función trigonométrica, por lo que para derivar la función y utilizaremos la fórmula 5.

Paso 2: llamaremos a $f(x)$ la función argumento, es decir, $f(x) = \ln(x) - 2$ y la derivaremos utilizando las propiedades y fórmulas correspondientes en cada término; al hacerlo obtenemos:

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Paso 3: aplicamos la fórmula 5:

Si $y = \text{sen}(f(x))$, entonces $y' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$.

Al sustituir $f(x)$ y $f'(x)$, la derivada quedaría como

$$y' = \cos(\ln(x) - 2)\left(\frac{1}{x}\right).$$

Intercambiamos el orden de los factores para que primero esté el coeficiente y obtenemos

$$y' = \frac{\cos(\ln(x) - 2)}{x}.$$

Utiliza fórmulas para obtener la derivada de la función.

Ejercicio 1 $y = (x^2 - 3)^{1/2}$

Forma general: ______________________

Paso 1: ¿qué fórmula vas a utilizar? ______________________

Paso 2: ¿cuál es $f(x)$? $f(x) =$ ______________________.

Al derivar, obtenemos que $f'(x) =$ ______________________

Paso 3: al utilizar la fórmula, la derivada queda expresada como

$y' =$ ______________________.

Ejercicio 2 $y = \ln(3x^2 + 5)$

Forma general: ______________________

Paso 1: ¿qué fórmula vas a utilizar? ______________________

Paso 2: ¿cuál es $f(x)$? $f(x) =$ ______________________

Al derivar, obtenemos que $f'(x) =$ ______________________.

Paso 3: al utilizar la fórmula, la derivada queda expresada como

$y' =$ ______________________.

Ejercicio 3 $y = \pi^{\ln(x^4 + 1)}$

Forma general: ______________________

Paso 1: ¿qué fórmula vas a utilizar? ______________________

Paso 2: ¿cuál es $f(x)$? $f(x) =$ ______________________

Al derivar, obtenemos que $f'(x) =$ ______________________.

Paso 3: al utilizar la fórmula, la derivada queda expresada como

$y' =$ ______________________.

Ejercicio 4 $y = \cos(x^4 + 2x)$

Forma general: ______________________________

Paso 1: ¿qué fórmula vas a utilizar? ____________________

Paso 2: ¿cuál es $f(x)$? $f(x) =$ ________________________

Al derivar, obtenemos que $f'(x) =$ ______________________________________.

Paso 3: al utilizar la fórmula, la derivada queda expresada como

$y' =$ ______________________________________.

Ejercicio 5 $y = e^{x^3 + x}$

Forma general: ______________________________

Paso 1: ¿qué fórmula vas a utilizar? ____________________

Paso 2: ¿cuál es $f(x)$? $f(x) =$ ________________________

Al derivar, obtenemos que $f'(x) =$ ______________________________________.

Paso 3: al utilizar la fórmula, la derivada queda expresada como

$y' =$ ______________________________________.

Ejercicio 6 $y = \dfrac{2}{\sqrt{\ln x + 4}}$

Nota Recuerda que una función con radicales debemos cambiar a potencia.

Al hacer esto la función queda expresada como: ___________________________________.

Ahora sí… ¡a resolverlo!

Forma general: ______________________________

Paso 1: ¿qué fórmula vas a utilizar? ____________________

Paso 2: ¿cuál es $f(x)$? $f(x) =$ ________________________

Al derivar, obtenemos que $f'(x) =$ ______________________________________.

Paso 3: al utilizar la fórmula, la derivada queda expresada como

$y' =$ ______________________________________.

Ejercicio 7 $y = \ln(6^x + \ln x)$

Forma general: ____________________

Paso 1: ¿qué fórmula vas a utilizar? ____________________

Paso 2: ¿cuál es $f(x)$? $f(x) =$ ____________________

Al derivar, obtenemos que $f'(x) =$ ____________________.

Paso 3: al utilizar la fórmula, la derivada queda expresada como

$y' =$ ____________________.

Ejercicio 8 $y = 8^{e^{2x}}$

Forma general: ____________________

Paso 1: ¿qué fórmula vas a utilizar? ____________________

Paso 2: ¿cuál es $f(x)$? $f(x) =$ ____________________

Al derivar, obtenemos que $f'(x) =$ ____________________.

Paso 3: al utilizar la fórmula, la derivada queda expresada como

$y' =$ ____________________.

Ejercicio 9 $y = \operatorname{sen}(x \cdot e^x)$

Forma general: ____________________

Paso 1: ¿qué fórmula vas a utilizar? ____________________

Paso 2: ¿cuál es $f(x)$? $f(x) =$ ____________________

Al derivar, obtenemos que $f'(x) =$ ____________________.

Paso 3: al utilizar la fórmula, la derivada queda expresada como

$y' =$ ____________________.

Ejercicio 10 $y = e^{x^3} \cdot \ln x$

Forma general: ____________________

Paso 1: ¿hay alguna propiedad que debes aplicar? Escríbela ______________________

Paso 2: ¿cuál es $f(x)$? $f(x) =$ ____________________________________

Al derivar, obtenemos que $f'(x) =$ ____.

¿Cuál es $g(x)$? $g(x) =$ ____

Al derivar, obtenemos que $g'(x) =$ ____.

Paso 3: al utilizar la fórmula, la derivada queda expresada como

$y' =$ ____.

Ejercicio 11 $y = \cos(e^{-x}) \cdot \ln(x^3)$

Forma general: ____

Paso 1: ¿hay alguna propiedad que debes aplicar? Escríbela ______________________

Paso 2: ¿cuál es $f(x)$? $f(x) =$ ____________________________________

Al derivar, obtenemos que $f'(x) =$ ____.

¿Cuál es $g(x)$? $g(x) =$ ____

Al derivar, obtenemos que $g'(x) =$ ____.

Paso 3: al utilizar la fórmula, la derivada queda expresada como

$y' =$ ____.

Ejercicio 12 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{\sqrt{2x+10}}$

Forma general: ____

Paso 1: ¿hay alguna propiedad que debes aplicar? Escríbela ______________________

Paso 2: ¿cuál es $f(x)$? $f(x) =$ ____________________________________

Al derivar, obtenemos que $f'(x) =$ ____.

¿Cuál es $g(x)$? $g(x) =$ ____

Al derivar, obtenemos que $g'(x) =$ ____.

Paso 3: al utilizar la fórmula, la derivada queda expresada como

$y' =$ ____

Ejercicio 13 $y = \cos x \cdot \sqrt[3]{x^2+1}$

Forma general: ____

Paso 1: ¿hay alguna propiedad que debes aplicar? Escríbela ____________________.

Paso 2: ¿cuál es $f(x)$? $f(x) =$ ______________________________

Al derivar, obtenemos que $f'(x) =$ ______________________________________.

¿Cuál es $g(x)$? $g(x) =$ ______________________________

Al derivar, obtenemos que $g'(x) =$ ______________________________________.

Paso 3: al utilizar la fórmula, la derivada queda expresada como

$y' =$ ____.

Ejercicio 14 $y = e^{\sqrt{2x+1}} \cdot (5)^{\ln x}$

Forma general: ____

Paso 1: ¿hay alguna propiedad que debes aplicar? Escríbela ____________________.

Paso 2: ¿cuál es $f(x)$? $f(x) =$ ______________________________

Al derivar, obtenemos que $f'(x) =$ ______________________________________.

¿Cuál es $g(x)$? $g(x) =$ ______________________________

Al derivar, obtenemos que $g'(x) =$ ______________________________________.

Paso 3: al utilizar la fórmula, la derivada queda expresada como

$y' =$ ____.

Derivadas de orden superior

Cuando la derivada de una función $f(x)$ se vuelve a derivar, se obtiene la segunda derivada de f, que se denota por $f''(x)$. Si ésta a su vez se vuelve a derivar, se obtiene la tercera derivada de f y se denota por $f'''(x)$. Al derivar nuevamente esta última función, se obtiene la cuarta derivada de f y se denota por $f^{(4)}(x)$. Después de la cuarta derivada se mantiene esta notación para las demás derivadas; en general la derivada de orden n de f se denota $f^{(n)}(x)$.

Obtén $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$ para la función dada.

Ejercicio 1 $f(x) = x \cdot \ln x$

Solución $f'(x) =$ ____________________

$f''(x) =$ ____________________

$f'''(x) =$ ____________________

Ejercicio 2 $f(x) = (e^x + 1)^2$

Solución $f'(x) =$ ____________________

$f''(x) =$ ____________________

$f'''(x) =$ ____________________

La diferenciación implícita es una estrategia para derivar cuando la variable dependiente no se puede despejar.

Hasta este momento, hemos encontrado derivadas de funciones cuya ecuación se encuentra escrita en forma **explícita** como $y = f(x)$, es decir, la variable y está escrita explícitamente como una función de x, sin embargo, si quisiéramos encontrar la $\frac{dy}{dx}$ de la ecuación $x \ln y + y = 2x^3$, sería imposible despejar la variable y como función implícita de la variable x. Las siguientes ecuaciones son ejemplos de funciones implícitas.

a) $xy = 3$ *b*) $x^2 + y^2 = 9xy^{1/3}$

c) $x \ln y + y = 2x^3$ *d*) $e^{x+y} = 5x$

Muchas veces una función implícita se puede convertir en explícita despejando la variable independiente (como ocurre en los incisos *a*) y *d*), sin embargo, la mayoría de las veces no es muy práctico (véase inciso *c*)).

Para encontrar $\frac{dy}{dx}$ de una función implícita, sería lógico pensar en despejar la variable y para convertirla en una función explícita y después derivar utilizando las técnicas que se conocen, pero, ¿qué hacer cuando la variable dependiente no se puede despejar? Afortunadamente existe un método (basado en la regla de la cadena) llamado **diferenciación implícita** que sirve para obtener $\frac{dy}{dx}$ (o y') sin tener que despejar la variable y. Se explicará el método utilizando algunos ejemplos.

Ejemplo 1 Si $x^2 + y^2 = 9$, encuentra $\frac{dy}{dx}$.

Solución La ecuación $x^2 + y^2 = 9$ está escrita en forma implícita, ya que si despejamos la variable y, la respuesta no sería una función, entonces podemos concluir que no se conoce la relación directa de y como función de x, así que se supondrá que $y = f(x)$ es esa relación desconocida. Ahora al sustituir la variable y de la ecuación $x^2 + y^2 = 9$ por la función desconocida $f(x)$, se obtiene la siguiente ecuación $x^2 + (f(x))^2 = 9$; en ella ya no aparece la variable y. Ahora se pueden derivar ambos lados de esta ecuación respecto a la variable x. En el lado izquierdo de la igualdad utilizaremos la propiedad de la derivada de una suma, quedando como sigue:

$$\frac{d(x^2)}{dx}+\frac{d\left([f(x)]^2\right)}{dx}=\frac{d(9)}{dx}.$$

En el primer término del lado izquierdo utilizamos la fórmula de la derivada de x^n; en el segundo término, la fórmula para derivar la función compuesta $[f(x)]^n$, y en el lado derecho de la igualdad, la fórmula de derivada de una constante. Al hacerlo obtenemos

$$2x + 2[f(x)]\,f'(x) = 0.$$

Ahora, como $y = f(x)$ se cumple también que $y' = f'(x)$, así que si reemplazamos la expresión $f(x)$ por la variable y, y $f'(x)$ por y', la ecuación anterior nos queda como sigue:

$$2x + 2yy' = 0.$$

Por último, debemos despejar y'

$y'=\dfrac{-2x}{2y}$ y al simplificar obtenemos que $y'=\dfrac{-x}{y}$

Ejemplo 2 Si $x \ln y + y = 2x^3$, encuentra $\dfrac{dy}{dx}$.

Solución Vemos que $x \ln y + y = 2x^3$ es una función implícita, ya que la variable y no se puede despejar, entonces no se conoce la relación directa de y como función de x, así que se supondrá que $y = f(x)$ es esa relación desconocida.

Ahora al sustituir las y de la función implícita por la función desconocida $f(x)$ se obtiene la ecuación $x \ln (f(x)) + f(x) = 2x^3$.

Esta ecuación ya no contiene a la variable y, por lo que se puede derivar ambos lados respecto a x. En el primer término en el lado izquierdo de la igualdad debemos aplicar la regla de la derivada de un producto quedando como sigue:

$$x\left(\frac{1}{f(x)}\right)f'(x)+\ln[f(x)](1)+f'(x)=6x^2.$$

Ahora al reemplazar $f(x)$ por y y $f'(x)$ por y' en la ecuación anterior, se obtiene:

$$x\left(\frac{1}{x}\right)y'+\ln y+y'=6x^2$$

Luego, para despejar y' se dejan en el lado izquierdo de la igualdad todos los términos que contengan y'

$$x\left(\frac{1}{y}\right)y'+y'=6x^2-\ln y$$

Nuevamente, en el lado izquierdo de la igualdad anterior, se extrae como factor común a y'

$$y'\left[\left(\frac{x}{y}\right)+1\right]=6x^2-\ln y$$

Por último, al despejar y' se obtiene:

$$y'=\frac{6x^2-\ln y}{\left[\left(\frac{x}{y}\right)+1\right]}$$

Proceso para derivar implícitamente

1. Determinar si la ecuación por derivar está dada en forma implícita (es decir, si no se puede despejar la variable y como función de x).
2. Se deberá suponer que $y = f(x)$ es esa relación desconocida y se deberán sustituir las y de la ecuación implícita por la función desconocida $f(x)$.
3. Derivar ambos lados de la ecuación respecto a x (la variable independiente).
4. Reemplazar $f(x)$ por y, y $f'(x)$ por y'.
5. Despejar y'.

Ejercicio 1 Encuentra $\frac{dy}{dx}$ de la ecuación $x^2 + 2xy = 3y^2$.

Solución Paso 1: ¿la ecuación está en forma implícita? _______________

Paso 2: sustituye la función desconocida en la ecuación dada.

Paso 3: deriva ambos lados de la ecuación respecto a x.

Paso 4: reemplaza $f(x)$ por y, y $f'(x)$ por y'.

Paso 5: despeja y'.

Ejercicio 2 Encuentra $\frac{dp}{dx}$ de la ecuación $e^{2p} - 3\ln p^2 + 2x = \frac{5}{p}$.

Solución Paso 1: ¿la ecuación está en forma implícita? _______________

Paso 2: sustituye la función desconocida en la ecuación dada.

Paso 3: deriva ambos lados de la ecuación respecto a x.

Paso 4: reemplaza $f(x)$ por y y $f'(x)$ por y'.

Paso 5: despeja y'.

Determina la derivada de las siguientes funciones utilizando las fórmulas y propiedades para funciones compuestas.

1. $h(t)=\sqrt[3]{3t^4+5}$
2. $f(x)=\ln(\ln x)$
3. $g(x)=\ln^3 x$
4. $g(x)=e^{x^2+x+1}$
5. $h(x)=2^{\ln x}$
6. $y=\left(5x^3+8x-3\right)^{3/2}$
7. $y=e^{-5x+3}$
8. $y=\ln\left(5^x\right)$
9. $y=(1.253)^{0.5x^2}$
10. $y=\ln\sqrt{3x^5+2}$
11. $f(x)=e^{\sqrt[3]{x}}$
12. $f(x)=\left(e^x-e^{-2x}\right)^{1/5}$
13. $f(x)=4^{\sqrt{x+8}}$
14. $g(x)=\dfrac{5}{\sqrt{e^x+x}}$
15. $g(x)=\ln\left(\dfrac{x^3+7}{x^2}\right)$
16. $y=3^{x/\ln x}$
17. $y=e^{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}$
18. $y=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$
19. $y=(0.032)^{\sqrt{x-5}}$
20. $y=e^{x\ln x}$
21. $y=2x^3\ln(x+3)$
22. $g(y)=2e^{\sqrt{4y^3}}$
23. $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{3e^x-5}$
24. $y=\sqrt{x^2+1}-\ln\left(x^2+3\right)$
25. $y(x)=5e^{x^3}$
26. $h(x)=e^{x^2}\cdot 6^{-x}$
27. $f(x)=\dfrac{\ln\left(20x^3\right)}{x^{3/2}}$
28. $h(x)=3^{\sqrt{x}}\cdot\sqrt[4]{8x^2-e}$
29. $g(x)=\dfrac{2}{3}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$
30. $R(x)=\dfrac{\left(x^{1/2}+2x^3\right)^2}{\ln\left(x^{1/2}+2x^3\right)}$
31. $y=x^2e^{x^2}$
32. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+5}}+\sqrt{x^7-8x}$
33. $y=24.38(1.76)^{x^2-x}$
34. $h(x)=\dfrac{52x^2}{\ln 52}$
35. $r(x)=\dfrac{3^x}{3^x+1}$
36. $f(x)=\left(2x+9x^2\right)^{2/3}\left(x^3-2x\right)^3$
37. $g(x)=\dfrac{\ln\left(4x^2+3\right)}{e^{x^3}}$
38. $h(x)=8^{x^3}\cdot 3^{x/2}$
39. $h(x)=\dfrac{e^{6x^5-x^3}}{\sqrt{x^3-1}}$
40. $f(x)=8^{e^x}+\ln\sqrt{x}$
41. $y=\left(8\cdot 2^{9x}\right)^e$
42. $h(t)=\sqrt{\ln\left(3t^2+1\right)}$
43. $f(x)=7^{-x}\ln\left(\sqrt{2x-4}\right)$
44. $h(x)=\sqrt[3]{x^2}e^x-\ln(6x+8)$
45. $f(y)=\dfrac{2^{\left(y^3+y\right)^2}}{y^3+y}$
46. $f(x)=\dfrac{1}{4}e^{x^2}+5\ln\left(1-2x^3\right)$
47. $g(x)=\sqrt[3]{6x^2+\sqrt{x^3+8}}$
48. $h(x)=x\left(\ln\sqrt{7x^3-x}\right)^{1/3}$

49. $g(x)=28^{x^2e^{-x}}$

50. $h(x)=\ln\left(\dfrac{9x^4+1}{x^5-0.5}\right)$

51. $y=\left(\dfrac{24-4x^2}{x^3+8}\right)^{-1/3}\left(x^3+8\right)^2$

52. $y=\sqrt[4]{\left(3x^6-2x\right)^5+2x^3}$

53. $y=\pi^{\left(\frac{x^2}{x+1}\right)}\cdot 3^{\sqrt{\ln x}}$

54. $y=\ln\left[\sqrt[4]{2x+1}\right]\left(x^4+6\right)^4$

55. $y=(0.523)^{\sqrt{x^3-x}}\,e^{-2x}$

56. $y=\left(\ln(7x)-6^{2x}\right)^{4/7}$

57. $y=\left(e^{\sqrt[3]{x-1}}+\ln\sqrt{x-1}\right)^{-1/4}$

58. $y=\left(e^{2.43}+\ln 2.43\right)^{-8x}+\left(\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\right)^4$

59. $y=-16x^{1/2}e^{-4\ln x^3}$

60. $y=\dfrac{\left(x^2+2\right)^5\left(x^5+2x\right)^6}{\left(x^2-1\right)^2}$

61. $y=7\left(\sqrt[5]{x^2+9x}\right)\left(x^4-10x\right)^{5/4}$

62. $y=\left(1+3x^2\right)^{1/2}\left(4x^{3/8}-e\right)^{-27}$

63. $y=\cos(\sqrt{\ln x+1})$

64. $y=\cos^3(x\cdot e^x)$

65. $y=\dfrac{x}{\cos(x)}$

66. $y=\ln(\operatorname{sen}(x))$

67. $y=5^{\operatorname{sen}(x^2)}$

En los problemas 68 al 74 usa diferenciación implícita para obtener $\dfrac{dy}{dx}$ de las siguientes ecuaciones.

68. $x^2y-5\ln y=y^2$

69. $e^y+e^x=4$

70. $3^x-y^2=5^y$

71. $\dfrac{x}{y}=2^y+\ln x$

72. $\pi^y-x^2+y^2=4^x$

73. $y\cdot\cos(x)+x\cdot\operatorname{sen}(y)=25$

74. $\cos(x^2+y^2)+x=y$

En los ejercicios 75 al 80 obtén la segunda y tercera derivadas de las funciones dadas.

75. $y=x5^x+\pi^5$

76. $y=x^2\ln x$

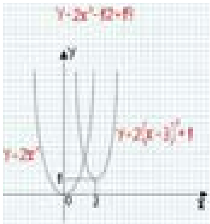
77. $y=\pi^x-x^\pi$

78. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$

79. $y=x^2e^x+e^2x^3$

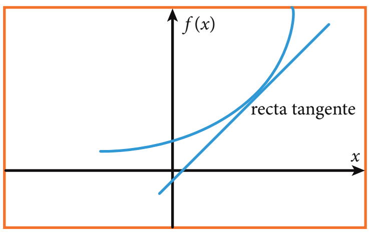
80. $y=x\cos(x)$

3.6 Recta tangente y razón de cambio



A lo largo de esta unidad hemos aprendido que desde un punto de vista geométrico, la derivada $f'(x)$ representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = a$. Utilizaremos este hecho y las propiedades y fórmulas para derivar, para obtener la ecuación de una recta tangente a la gráfica de una curva en un punto dado.

Gráficamente lo representamos así:



$f'(x)$ evaluada en $x = a$ es la pendiente de la recta tangente, es decir, $f'(a) = m_{\tan g}$

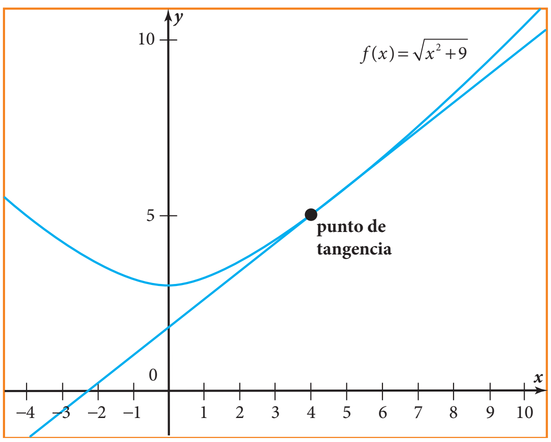
Cabe recordar que para obtener la ecuación de cualquier recta es necesario conocer la pendiente y un punto de la recta.

Una vez que tenemos la pendiente utilizaremos la forma punto-pendiente, $y - y_1 = m(x - x_1)$, para obtener la ecuación de la recta.

También podemos utilizar la forma $y = mx + b$, para obtener la ecuación de la recta.

Ejemplo 1 Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$, en el punto (4, 5).

Solución Para entender mejor lo que nos piden, podemos apoyarnos en un dibujo. Graficamos la función y marcamos sobre la gráfica el punto (4, 5), ya que ahí es donde nos piden la recta tangente.



Sin embargo, lo que debemos encontrar es la ecuación de dicha recta, así que necesitamos las coordenadas de un punto (x_1, y_1) que esté sobre la recta y su pendiente.

En este ejemplo ya nos dieron el punto, por lo que $x_1 = 4$ y $y_1 = 5$, sólo falta encontrar la pendiente de la recta.

Como la recta es tangente a la curva $f(x) = \sqrt{x^2+9}$, podemos obtener su pendiente derivando la función y evaluándola en $x = 4$, es decir, $m_{\text{tangente } g} = f'(4)$.

Por medio de las propiedades y las fórmulas para derivar obtenemos,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2+9\right)^{-1/2}(2x),$$

Al simplificar la expresión anterior obtenemos $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

Sustituimos el valor de $x = 4$ en la derivada y nos queda $f'(4) = \dfrac{4}{\sqrt{16+9}} = \dfrac{4}{5}$.

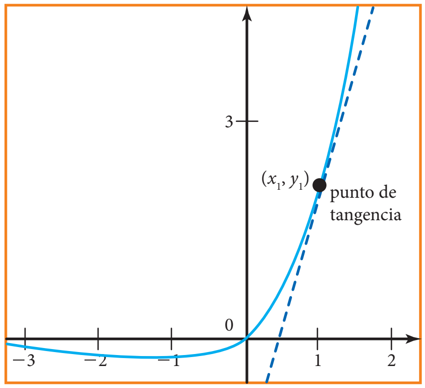
Por último, para obtener la ecuación de la recta, sustituimos el punto (4, 5) y la pendiente $m_{\text{tangente } g} = 4/5$ en la forma punto-pendiente

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

con lo que llegamos a $y - 5 = \dfrac{4}{5}(x-4)$; al despejar la variable y de la ecuación anterior obtenemos $y = \dfrac{4}{5}x + \dfrac{9}{5}$.

Ejemplo 2 Obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2x\,e^{x-1}$ en el punto donde $x = 1$.

Solución Recuerda que para encontrar la ecuación de cualquier recta, necesitamos las coordenadas de un punto (x_1, y_1) que esté sobre la recta, así como su pendiente.



Paso 1: veamos si tenemos las coordenadas del punto de tangencia: x_1 y y_1.

En este ejemplo sólo se dio el valor de $x_1 = 1$, falta encontrar el valor de y_1. Como en el punto de tangencia de la recta y la curva son iguales, el valor de y_1 lo obtenemos sustituyendo en la función $f(x) = 2x\,e^{x-1}$ el valor $x = 1$, es decir,

$$y = f(1) = 2(1)\,e^{1-1} = 2.$$

Ahora ya tenemos el punto de tangencia (1, 2).

Paso 2: para encontrar la pendiente de la tangente en $x = 1$, ¿qué debes hacer?

__________________________________.

Utiliza las propiedades y fórmulas para obtenerla:

$f'(x) =$ __________________________.

Evalúa la derivada anterior en $x = 1$

$f'(1) =$ __________________________.

Por lo tanto, la pendiente de la tangente es

$m_{\text{tangente } g} =$ ________________________.

Paso 3: sustituye los valores obtenidos en la forma punto-pendiente $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

Paso 4: despeja la variable y de la ecuación anterior.

Ejercicio 1 Obtén la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \frac{1}{\sqrt{8 - x^2}}$ en el punto (2, _).

Solución Paso 1: ¿cuentas con las coordenadas del punto de tangencia? ______: x_1 = ________ y_1 = ________

Paso 2: para encontrar la pendiente de la tangente, ¿qué debes hacer? ______________________________________

____

Utiliza las propiedades y fórmulas para obtener la derivada de la función dada.

$f'(x)$ = ____

Evalúa la derivada anterior en el valor de $x = 2$.

$f'(2)$ = ____

Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente es $m_{\text{tangente } g}$ = ____.

Paso 3: sustituye los valores obtenidos en la forma punto-pendiente $y - y_1 = m\,(x - x_1)$.

Paso 4: despeja la variable y de la ecuación anterior.

La ecuación de la recta tangente es: ____.

Ejercicio 2 Obtén la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x \ln x$ en el punto donde $x = 1$.

Solución Paso 1: ¿cuentas con las dos coordenadas del punto de tangencia?________________

¿Qué debes hacer para encontrar la coordenada que falta?____.

¡Encuéntrala!

El punto de tangencia es $x_1 =$ ____________, $y_1 =$ ____________.

Paso 4: ¿cómo se puede obtener la pendiente de la tangente? ____

Utiliza las propiedades y fórmulas para obtener la derivada de la función.

$f'(x) =$ ____

Evalúa la derivada anterior en el valor de $x = 1$.

$f'(1) =$ _______________________________________

Por lo tanto, la pendiente de la tangente es $m_{\text{tangente } g} =$ ______________________________.

Paso 3: sustituye los valores obtenidos en la forma punto-pendiente $y - y_1 = m\,(x - x_1)$.

Paso 4: despeja la variable y de la ecuación anterior.

La ecuación de la recta tangente es: _____________________________.

Cómo obtener la razón de cambio de una función

Cuando comenzamos a estudiar las derivadas también aprendimos que desde un punto de vista físico la derivada representa la razón instantánea de cambio de una función, también conocida como velocidad, rapidez, ritmo o razón de cambio en un valor específico.

Ahora utilizaremos este hecho y las propiedades y fórmulas para derivar, a fin de obtener la rapidez, razón o velocidad con la que cambia una función en un instante en particular.

Ejemplo 1 De acuerdo con los datos del INEGI, en 2000 la población de México era

de 97.4 millones de habitantes y crecía a una tasa de 1.6% anual (*Fuente: Atlas de geografía universal,* educación primaria, SEP, 2000). Si la tasa de crecimiento no ha cambiado, la población de México puede representarse con $P(x) = 97.4(1.016)^x$, donde x se mide en años a partir de 2000. ¿Con qué rapidez creció la población en 2003?

Solución En la sección 3.1 resolvimos este mismo ejemplo utilizado la definición de derivada, sin embargo ahora lo haremos usando fórmulas y propiedades para derivar funciones.

Recuerda que *rapidez es equivalente a la derivada,* así que para obtener la rapidez con la que crecerá la población en 2003, primero debemos encontrar la derivada de la función $P(x) = 97.4(1.016)^x$ y después se evalúa en $x = 3$ ya que la variable $\boldsymbol{x}$ se mide en años a partir del 2000.

La derivada de la población es $P'(x) = 97.4\,(1.016)^x \ln(1.016)$

Evaluando la derivada en $x = 3$ se tiene $P'(3) = 97.4\,(1.016)^3 \ln(1.016) = 1.6214689$.

Concluimos que la rapidez con la que creció la población de México en 2003 fue de 1.6214689 millones de personas por año.

Nota Cuando nos piden encontrar la velocidad, rapidez o razón instantánea de una función, es importante recordar que, para obtenerla, primero debemos derivar la función y después evaluar dicha derivada en el instante que nos piden.

Ejercicio 1 La población de México, en millones de personas, durante la década de 1980 estaba dada por $P(t) = 68.4(1.026)^t$, con t medido en años a partir de 1980.

¿Con qué rapidez crece la población en 1986?

Solución ¿Qué debes hacer para contestar la pregunta? ______________________

¿En qué instante (valor de t) te piden calcular la rapidez? ______________

¡Encuéntrala!

Ejercicio 2 El número de personas que escucha un rumor en un cierto poblado está dado por $N(t) = \sqrt{t^2 + 1}$, donde t son los días a partir de que el rumor inició y N se mide en cientos de personas.

¿Con qué rapidez aumenta el número de personas que escucha el rumor, una semana después de que éste se inició?

Solución ¿Qué debes hacer para contestar la pregunta? ______________________

¿En qué instante (valor de t) te piden calcular la rapidez? ______________

¡Encuéntrala!

Conjunto de ejercicios de práctica 3.6

En los problemas 1 al 6, encuentra la ecuación de la recta tangente de la función dada en el punto indicado. Dibuja la gráfica de la función y de la recta tangente en los mismos ejes.

1. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ en $x = -2$
2. $f(x) = e^{2x} \ln (x + 1)$ en $(0, 0)$
3. $f(x) = 2^{\ln x}$ en $(1, 1)$
4. $g(x) = x^{-5/3} e^x$ en $(1, e)$
5. $g(x)=\dfrac{1}{x \ln x}$ en $x = 2$
6. $h(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $x = 3$

En los problemas 7 al 15 encuentra la ecuación de la recta tangente a la función dada en el punto indicado.

7. $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ en el punto (3, __)
8. $f(x) = e^{-x+8}$ en el punto $(0, e^8)$
9. $f(t)=\dfrac{3^t+2}{e^t}$ en $(0, 3)$
10. $g(y)=\sqrt[3]{2y^4+8}$ en $y = 0$
11. $n(x) = x^3e^{-x}$ en el punto $\left(1,\dfrac{1}{e}\right)$
12. $g(x)=\dfrac{e^x}{x(2^x)}$ en $x = 3$
13. $h(x) = (5x^3 + 8x + 8)^{1/2}$ en $x = 2$
14. $g(x) = (1.024)^{3x}$ en $(0,1)$
15. $g(x) = 16^{x^2}$ en $x = \dfrac{1}{2}$

En los ejercicios 16 al 30 realiza lo que se te pide.

16. Si q es la cantidad producida de cierto artículo, la función de costos está dada por $C(q) = 1\,000 + 3e^{0.05q}$, todo en dólares. ¿Con qué rapidez aumenta el costo cuando $q = 100$?
17. La función de costos total, en pesos, de una fábrica de zapatos está dada por $C(q) = 20\,000 + 5(2)^{0.025q}$ en donde q es la cantidad de pares de zapatos producidos. Encuentra el costo marginal cuando se han producido 500 pares de zapatos.
18. El saldo en una cuenta bancaria aumenta exponencialmente de acuerdo con la función $S(t) = 1\,000\,(1.000219)^t$ dólares, donde t son los días desde que se abrió la cuenta el 1 de agosto de 2002. ¿Cuál es la rapidez con la que aumentará el saldo en la cuenta al final del segundo mes?
19. El saldo de una cuenta bancaria aumenta exponencialmente de acuerdo con la función $S(t) = 12\,000\ e^{0.075t}$ dólares, donde t son los años desde que se abrió la cuenta en 2004. ¿Cuál es la rapidez con la que aumentará el saldo en 2007?
20. La función de demanda para ciertas computadoras portátiles está dada por $P(x) = -0.3x^2 - 2x + 70$, donde P es el precio unitario en dólares y x son las unidades demandadas. ¿Cuál es la razón de cambio del precio unitario si la cantidad demandada son 3 000 computadoras?
21. La función de demanda para una fábrica de llantas está dada por $D(t)=\dfrac{50\,000}{3t+10}$, donde D es la cantidad de llantas demandadas a los t meses. ¿Cuál es la razón de cambio de la demanda en el primer año?
22. La población de China, en miles de millones de personas, a partir de 2003 está dada por $P(t) = 1.287(1.00595)^t$, con t medido en años. ¿Cuál es la rapidez a la que crecerá la población en 2007?
23. La población de Alemania, en millones de personas, a partir de 2004 está dada por $P(t) = 83.537(1.0067)^t$, con t medido en años. ¿Con qué rapidez crecerá la población en 2010?
24. La utilidad en pesos de una empresa que se dedica a la venta de libros de matemáticas está dada por $U(x) = 0.9x^2 + 2x^{3/2} - 12$, donde x es el número de libros vendidos. ¿Cuál es la utilidad marginal si se venden 150 libros?
25. La utilidad en miles de pesos de una empresa acerera está dada por $U(x) = 5x^3 + 2x^{1/2} - 20$, donde x es el número de toneladas de acero vendidas. ¿Con qué rapidez cambia la utilidad si se venden 20 toneladas?
26. La productividad mensual P de un empleado de una maquiladora de ropa (en unidades producidas) está en función del número de años de servicio t. La función de productividad está dada por $P(t) = 225 + 40t - t^2$. ¿Cuál es la productividad marginal a los 15 años de servicio?

27. Se estima que la producción semanal, en kilogramos, de una tortillería está dada por

$$P(n) = -n^2 + 2\,100n,$$

donde n es el número de trabajadores. ¿Cuál es la producción marginal si emplea a 12 trabajadores?

28. Los ingresos diarios en miles de pesos de una empresa citrícola están dados por

$$I(q) = 12.5q - 0.125q^2,$$

donde q representa los litros de jugo de naranja vendidos. ¿Cuál es el ingreso marginal si se vendieron 40 litros?

29. Los ingresos mensuales en dólares de una empresa están dados por $I(q) = 45q + q\sqrt{q^2+4}$, donde q son las unidades vendidas. ¿Cuál es la razón de cambio del ingreso en relación con el número de unidades vendidas cuando $q = 20$?

30. Estudios médicos determinaron que el peso en miligramos de un tumor canceroso está dado por $w(t) = 3^{t+1} - 2^{t+1} + t^2$, donde t está medido en meses. Determina con qué rapidez crece el tumor a los 6 meses de haberse detectado.

3.7 Interpretación de la derivada en términos prácticos

Cuando nos dicen que la derivada nos da información acerca de la rapidez, razón o velocidad instantánea de cambio, a menudo no nos queda muy claro lo que eso significa; nuestro propósito en esta sección es ayudarte a interpretar el resultado de una derivada, es decir, explicar lo que significa en términos prácticos el resultado obtenido.

Analicemos la siguiente situación.

¡A reflexionar! La función $C = f(q)$ representa el costo C (en pesos) de producir q calculadoras. Supongamos que cuando se producen 100 calculadoras, el costo de producción es de 8 000 pesos, lo que en notación funcional puede expresarse como $C(100) = 8\,000$.

¿Qué esperarías que sucediera con el costo, si se produce una calculadora más?, ¿permanece igual?, ¿aumenta o disminuye?

Es obvio que aumenta, ¿verdad? Precisamente esa información es la que nos da la derivada. El resultado obtenido al derivar la función de costo y sustituir el numero 100, representa el aumento en el costo por producir una calculadora más.

Si tenemos que $C'(100) = 70$, esto significa que el costo de producción *aumenta* en 70 pesos si se produce una calculadora más, después de producir 100.

Con los datos anteriores podemos encontrar el costo de producir 101 calculadoras:

$$\begin{array}{c} \text{Costo de producción} \\ \text{101 calculadoras} \end{array} \approx \begin{array}{c} \text{Costo de producción} \\ \text{100 calculadoras} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Aumento en el costo por producir} \\ \text{producir una calculadora más} \\ \text{después de 100} \end{array}$$

En símbolos quedaría como: $C(101) \approx C(100) + C'(100)$.

Entonces, ¿cuál es el costo de producir 101 calculadoras? ____________

Nota En Economía a esta derivada se le llama **costo marginal**.

En general, *la derivada evaluada en un punto $f'(a)$ nos dice cuánto cambia la función* (es decir, cuánto aumenta o disminuye), *cuando la variable independiente se incrementa una unidad a partir del valor indicado a.*

Cuando el signo de la derivada es positivo, significa que la función aumenta; si es negativo, significa que la función disminuye.

La notación alternativa de la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ nos ayuda a determinar las unidades en que ella se mide; dichas unidades se obtienen dividiendo las unidades de la función (variable dependiente) entre las unidades de la variable independiente, tal y como la notación lo indica.

Identificar correctamente las variables dependiente e independiente y conocer las unidades en que éstas se miden nos ayuda a interpretar el significado de la derivada en términos prácticos, es decir, a *explicar su significado en términos de lo que la función y la variable independiente representan.*

Ejemplo 1 En México, todos los habitantes que poseen un automóvil deben pagar cada año un impuesto llamado *tenencia*. El impuesto I (en miles de pesos) que se paga por un automóvil es una función del tiempo t (en años) que ha transcurrido desde que éste se compró. ¿Cuál es la interpretación práctica de $I'(3) = -0.83$?

Solución Lo primero que debemos hacer es identificar tanto la variable independiente como la dependiente y las unidades en que se mide cada una de ellas.

En este ejemplo, el impuesto depende del tiempo, así que la variable independiente es el tiempo t y se mide en años, mientras que la variable dependiente es el impuesto I que se paga por el automóvil y se mide en miles de pesos.

Ahora podemos encontrar las unidades en que se mide la derivada.

Utilizando la notación alternativa para la derivada se tiene que $I'(t) = \dfrac{dI}{dt}$, por lo tanto, las unidades de la derivada son $\dfrac{\text{miles de pesos}}{\text{años}}$.

Por último, para dar la interpretación práctica de $I'(3) = -0.83$ hay que tomar en cuenta que el número 3 corresponde al tiempo y que el -0.83 corresponde al cambio en el impuesto. Además, como se trata de un número negativo, entonces nos indica una disminución.

Cuando el tiempo que ha transcurrido desde que se compró un automóvil se incrementa de 3 a 4 años, el impuesto que se paga disminuirá en 0.83 miles de pesos aproximadamente.

Podemos mejorar la redacción anterior si convertimos en pesos la expresión “0.83 miles de pesos”:

$$0.83 \text{ miles de pesos} = 0.83 \times 1\,000 = 830 \text{ pesos.}$$

Además, debemos estar conscientes de que estos 830 pesos no representan el impuesto ni del tercero ni del cuarto año, sino lo que se espera que el impuesto cambie entre el tercero y cuarto año posteriores a la compra del automóvil.

Por lo tanto, la interpretación práctica para la expresión $I'(3) = -0.83$ podríamos describirla como sigue.

La tenencia que se pagará 4 años después de haberse comprado un automóvil, será aproximadamente de 830 pesos menos de lo que se pagó el tercer año. Por ejemplo si el tercer año se pagaran \$2 000 de tenencia, en el cuarto año se pagarán \$1 170 aproximadamente.

El siguiente esquema te ayudará a identificar, en la expresión $f'(a) = b$, los valores que corresponden a las variables dependiente-independiente, así como el cambio que ocurre en cada una de ellas.

$$f'(a) = b$$

Variable independiente cambia de “a” a “$a + 1$” unidades	Variable dependiente cambia “b” unidades aproximadamente

Ejercicio 1 Supón que el peso W de una persona (en kilogramos y medido cada mes) está en función del tiempo t de ejercicio, en horas, que realiza diariamente. Es decir, $W = f(t)$.

Completa los espacios en blanco.

a) ¿Cuál es la variable independiente? ____________________

¿En qué unidades se mide? ____________________

b) ¿Cuál es la variable dependiente? ____________________

¿En qué unidades se mide? ____________________

c) ¿Cuáles son las unidades de la derivada $f'(t)$? ____________________

d) ¿Cómo esperas que sea el signo de $f'(t)$? Justifica tu respuesta. ____________________

e) Escribe la interpretación en términos prácticos de $f'(1) = -4$. ____________________

Ejercicio 2 Los ingresos I de una empresa por la venta de automóviles, medidos en miles de dólares, está en función de sus gastos de publicidad g, medidos en cientos de dólares. Es decir, $I = f(g)$.

a) ¿Cuál es la variable independiente? ____________________

¿En qué unidades se mide? ____________________

b) ¿Cuál es la variable dependiente? ____________________

¿En qué unidades se mide? ____________________

c) ¿Cuáles son las unidades de la derivada $f'(g)$? ____________________

d) ¿Cómo esperas que sea el signo de $f'(g)$? Justifica tu respuesta. ____________________

e) Escribe el significado práctico de $f'(9) = 20$ ____________________

En Economía, a esta derivada se le llama **ingreso marginal**. Investiga este concepto y escribe tu interpretación.

____

____

f) ¿Qué significa la expresión $f(9) = 150$? ____________________

____

____

c) ¿Cuál es el ingreso obtenido si se gastan 1 000 dólares en publicidad? Explica cómo lo obtuviste. ____________________

____

____

Conjunto de ejercicios de práctica 3.7

En los siguientes ejercicios realiza lo que se indica.

1. La temperatura T, en grados centígrados, de un refresco de lata que se pone a enfriar está en función del tiempo t, en minutos, que permanece en el refrigerador; es decir, $T = f(t)$.

   Determina:
   a) Unidades de $f'(t)$
   b) Signo de $f'(t)$
   c) La interpretación práctica de $f'(t)$

2. La temperatura T, en grados Farenheit, de un pavo que se pone a hornear está en función del tiempo t, en minutos, que permanece en el horno; es decir, $T = f(t)$.

   Determina:
   a) Unidades de $f'(t)$
   b) Signo de $f'(t)$
   c) La interpretación práctica de $f'(30) = 7$

3. Imaginemos que el peso corporal de una persona (tomado cada mes) está en función únicamente de la cantidad de calorías que consume diariamente en su alimentación. Si W es el peso, dado en kilogramos, y c son las calorías, dadas en miles de calorías, la función se representa como $W = f(c)$.

   Determina:
   a) Unidades de $f'(c)$
   b) Signo de $f'(c)$
   c) La interpretación práctica de $f'(2) = 3$

4. El peso en miligramos de un tumor canceroso está en función del tiempo t, medido en meses; es decir $W = f(t)$.

   Determina:
   a) Unidades de $f'(t)$
   b) Signo de $f'(t)$
   c) La interpretación práctica de $W'(2) = 2.3$

5. En cierta compañía, el ingreso obtenido depende de la cantidad de artículos vendidos. Si el ingreso I, se mide en miles de pesos y la cantidad de artículos vendidos q se mide en cientos de unidades, podemos expresar la función como $I = f(q)$.

   Determina:
   a) Unidades de $f'(q)$
   b) Signo de $f'(q)$
   c) La interpretación práctica de $f'(20) = 50$

6. Los ingresos diarios, en miles de pesos, de una empresa avícola están en función de cientos de docenas de huevos vendidos; es decir, $I = f(h)$.

   Determina:
   a) Unidades de $f'(h)$
   b) Signo de $f'(h)$
   c) La interpretación práctica de $f'(200) = 0.80$

7. Las utilidades mensuales de una embotelladora de agua purificada, medida en miles de pesos, depende del número de garrafones vendidos, medido en cientos de unidades; es decir $U = f(g)$.

   Determina:
   a) Unidades de $f'(g)$
   b) Signo de $f'(g)$
   c) La interpretación práctica de $f'(135) = 1.2$

8. Las utilidades, en miles de pesos, de una empresa acerera están en función de las toneladas de acero que vende; es decir $U = f(a)$.

   Determina:
   a) Unidades de $f'(a)$
   b) Signo de $f'(a)$
   c) La interpretación práctica de $f'(20) = 6$

9. La función de costos mensuales en dólares, de un fabricante de reproductores de CD, depende de la cantidad de aparatos fabricados; es decir, $C = f(r)$.

   Determina:
   a) Unidades de $f'(r)$
   b) Signo de $f'(r)$
   c) La interpretación práctica de $f'(350) = 50$

10. Los costos anuales, en millones de pesos, de un agricultor están en función de las toneladas de maíz producidas; es decir, $C = f(m)$.

    Determina:
    a) Unidades de $f'(m)$
    b) Signo de $f'(m)$
    c) La interpretación práctica de $f'(47) = 1/2$

11. La población, en miles, del oso blanco en el Polo Norte está cambiando en función de los años t, de acuerdo con la función $P(t) = 80(0.96)^t$. Obtén $P'(12)$ y su interpretación práctica.

12. La población en miles de cucarachas de cierta ciudad depende de las toneladas de basura que se generan, la cual puede determinarse por la siguiente función: $P(b) = 2e^{0.3b}$. Obtén $P'(4)$ y su interpretación práctica.

13. El saldo de una cuenta bancaria, en miles de pesos, está dado por la siguiente función: $S(t) = 25e^{0.07t}$, donde t son los años que dura la inversión. Obtén $S'(5)$ y su interpretación práctica.

14. El saldo de una cuenta bancaria, en millones de pesos, está dado por la siguiente función: $S(t) = 15(1.0824)^t$, donde t son los años que dura la inversión. Obtén $S'(3)$ y su interpretación práctica.

15. El valor en cientos de pesos de una camioneta está dado por $V(t) = 240(0.65)^t + 8$, donde t es el tiempo en años transcurridos desde su compra. Obtén $V'(2)$ y su interpretación práctica.

16. La masa en gramos de una sustancia radiactiva está dada por la siguiente función: $M(t) = 730e^{-0.028t}$, donde t es el tiempo, medido en días. Obtén $M'(30)$ y su interpretación práctica.

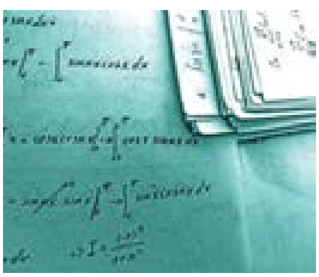
17. Los ingresos semanales de un fabricante de salas están dados por $I(q) = 4\,800q + q^2$ pesos, donde q son las unidades producidas. Actualmente el fabricante produce 100 unidades semanales y planea aumentar la producción semanal en una unidad. Estima el ingreso adicional que generará este aumento en la producción.

18. En cierta fábrica, la producción diaria en cientos de unidades está dada por la siguiente función: $P(k) = 6k^{1/2}$, donde k representa la inversión de capital, medido en miles de dólares. La inversión actual es de 400 000 dólares. Estima el efecto que una inversión adicional de 1 000 dólares tendrá en la producción diaria.

19. Cierto teatro tiene una capacidad de 1 000 butacas y cada boleto se vende en 50 pesos. Actualmente se tienen vendidos 680 boletos y la experiencia ha demostrado que por cada disminución de 5 pesos en el costo del boleto, el número de lugares vendidos aumenta en 10.
   a) Expresa el ingreso en función del precio del boleto.
   b) Obtén $I'(38)$ y su interpretación práctica.

20. Los costos, en pesos, de una empresa están dados por $C(x) = 0.05x^2 - 8x + 4\,000$, donde x representa cientos de unidades producidas. Si se sabe que cada unidad se vende en 530 pesos,
   a) encuentra la utilidad en función del número de unidades vendidas.
   b) obtén $U'(400)$ y su interpretación práctica.

3.8 La derivada como estrategia para obtener límites de funciones



En la unidad anterior aprendiste que una de las estrategias más comunes para obtener el valor límite de una función es sustituir, en la función, el valor de x que se está analizando. Sin embargo, al hacer esto, es común obtener como resultado algunas formas llamadas indeterminadas, como: $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$;; para eliminar dichas indeterminaciones se utilizaban algunas estrategias algebraicas como factorizar o dividir la expresión entre la variable de mayor potencia que aparecía en el denominador, para posteriormente decidir si el límite existía o no.

En esta sección se presenta una poderosa herramienta, llamada **regla de L'Hôpital**, mediante la cual puede obtenerse el valor límite de una función utilizando el concepto de derivada.

A continuación se enuncia dicha regla para evaluar límites que dan como resultado la forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Regla de L'Hôpital

Sean f y g funciones cuya derivada existe en un intervalo abierto I que contiene al punto $x = a$ y que además se cumple que $f(a) = 0$, $g(a) = 0$ y $g'(a) \neq 0$.

Entonces se tiene que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

ya sea que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ exista o no exista.

Cabe aclarar que esta regla también puede aplicarse en los siguientes casos:

- Para evaluar el límite de una función cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ que dé como resultado cualquiera de las siguientes formas indeterminadas

$$\frac{+\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}.$$

- Para evaluar el límite de una función cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ cuando $x \to a$, $x \to a^+$, $x \to a^-$ en donde a puede ser cualquier número real, o bien, cuando $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

Lo que esta regla establece es que si al evaluar el límite de una función cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ se obtienen cualquiera de las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ el valor del límite se puede calcular derivando *por separado* las funciones del numerador y del denominador $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ y evaluando el límite de esta nueva función. Los siguientes ejemplos servirán para ilustrar la forma en que se utiliza esta regla.

Ejemplo 1 Calcula el valor de $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Solución En la unidad anterior se analizó este límite tanto en forma gráfica como por medio de una tabla de valores y se obtuvo el número 1 como valor de dicho límite. Ahora, se obtendrá el valor de este límite mediante la regla de L'Hôpital.

Paso 1: verificar si el límite dado cumple con las condiciones para aplicar la regla de L'Hôpital.

Al evaluar directamente la función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ en $x = 0$ se obtiene $\frac{\operatorname{sen} 0}{0}$, que corresponde a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, por lo tanto, es válido aplicar la regla de L'Hôpital.

Paso 2: derivar *por separado* la función del numerador y la función del denominador.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Derivada del numerador}} \\ \xrightarrow{\text{Derivada del denominador}} \end{array} \quad \frac{\cos x}{1}$$

Paso 3: evaluar el límite de la función resultante.

Al evaluar el $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1}$ se obtiene $\frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

Ejemplo 2 Calcula el valor de $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos t}{[t-(\pi/2)]^2}$

Solución Paso 1: verificar si el límite dado cumple con las condiciones para aplicar la regla de L'Hôpital.

Si se evalúa la función $\frac{\cos t}{[t-(\pi/2)]^2}$ en $x = \pi/2$ se obtiene $\frac{\cos(\pi/2)}{[(\pi/2)-(\pi/2)]^2}$; al simplificar esta expresión da como resultado la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, por lo tanto, es válido aplicar la regla de L'Hôpital.

Paso 2: derivar *por separado* la función del numerador y la función del denominador.

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos t}{[t-(\pi/2)]^2}\ \xrightarrow[\text{Derivada del denominador}]{\text{Derivada del numerador}}\ \frac{-\operatorname{sen} t}{2[t-(\pi/2)]}$$

Paso 3: evaluar el límite de la función resultante.

Al evaluar el $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{-\operatorname{sen}(t)}{2[(t)-(\pi/2)]}$ se obtiene $\dfrac{-\operatorname{sen}(\pi/2)}{2[(\pi/2)-(\pi/2)]}=\dfrac{-1}{0}$.

Este resultado tiene la forma $\dfrac{\text{constante}}{0}$ que sabemos tiende a ∞.

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos t}{[t-(\pi/2)]^2}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\operatorname{sen} t}{2[t-(\pi/2)]}=\infty.$$

Ejemplo 3 Calcular el valor de $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{(\ln x)^2}{x}\right]$.

Solución Paso 1: verificar si el límite dado cumple con las condiciones para aplicar la regla de L'Hôpital.

Si se analiza *por separado* el comportamiento de la función del numerador y la del denominador, cuando $x\to\infty$ se obtiene la forma indeterminada $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, por lo tanto, es válido aplicar la regla de L'Hôpital.

Paso 2: derivar *por separado* la función del numerador y la función del denominador.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(\ln x)^2}{x}\right]\ \xrightarrow[\text{Derivada del denominador}]{\text{Derivada del numerador}}\ \frac{2(\ln x)(1/x)}{1};$$

al simplificar esta expresión se obtiene $\dfrac{2\,(\ln x)}{x}$.

Paso 3: evaluar el límite de la función resultante.

Al evaluar el $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2(\ln x)}{x}\right]$ sucede que vuelve a dar como resultado la forma indeterminada $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

Nota Cuando al evaluar la expresión $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ vuelve a obtenerse una forma indederminada del tipo $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, se puede aplicar nuevamente la regla de L'Hôpital, es decir, se deriva *por separado* el numerador, el denominador y se evalúa el límite en la expresión resultante, esto se hace *tantas veces como sea necesario,* hasta que la forma indeterminada desaparezca.

Por lo tanto, en este ejemplo se deberá derivar nuevamente el numerador y el denominador.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2\,(\ln x)}{x}\right]\ \xrightarrow[\text{Derivada del denominador}]{\text{Derivada del numerador}}\ \frac{2(1/x)}{1}$$

que al simplificarla queda como $\dfrac{2}{x}$, como el numerador es el número 2, puede decirse que ha desaparecido la forma indeterminada.

Al obtener el límite en esta última expresión se tiene que:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}$ da como resultado la forma $\dfrac{\text{constante}}{+\infty}$ que sabemos tiende a cero. Por lo tanto, el proceso anterior puede resumirse como sigue:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(\ln x)^2}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2\,(\ln x)}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0.$$

Ejercicio 1 Calcula el valor de $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\text{sen } x}$.

Paso 1: verifica si el límite dado cumple con las condiciones para aplicar la regla de L'Hôpital.

¿Qué debe suceder para aplicar la regla de L´Hôpital? ______________________________

Comprueba si esto sucede:

De acuerdo con el resultado obtenido, ¿es válido aplicar la regla de L'Hôpital?______________

Pasos 2 y 3: utiliza la regla y obtén el valor del límite.

¿Cuál es la derivada de la función del numerador? ______________________________

¿Cuál es la derivada de la función del denominador? ______________________________

Aplica la regla de L´Hôpital:

Resultado final: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\text{sen } x} =$ ______________________.

Ejercicio 2 Calcula el valor de $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x - \text{sen } x}$.

Paso 1: verifica si el límite dado cumple con las condiciones para aplicar la regla de L'Hôpital.

¿Qué debe suceder para aplicar la regla de L´Hôpital? ______________________________

Comprueba si esto sucede:

De acuerdo con el resultado obtenido, ¿es válido aplicar la regla de L´Hôpital? ______________

Pasos 2 y 3: utiliza la regla y obtén el valor del límite.

¿Cuál es la derivada de la función del numerador? ______________________________

¿Cuál es la derivada de la función del denominador? ______________________________

Aplica la regla de L´Hôpital:

Resultado final: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \operatorname{sen} x} =$ ____.

Ejercicio 3 Calcula el $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{e^y - 1 - y}{y^2}$.

Paso 1: verifica si el límite dado cumple con las condiciones para aplicar la regla de L'Hôpital.

¿Qué debe suceder para aplicar la regla de L´Hôpital? ____

Comprueba si esto sucede:

De acuerdo con el resultado obtenido, ¿es válido aplicar la regla de L'Hôpital? ________________

Pasos 2 y 3: utiliza la regla y obtén el valor del límite.

¿Cuál es la derivada de la función del numerador? ____

¿Cuál es la derivada de la función del denominador? ____

Aplica L´Hôpital:

Resultado final: $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{e^y - 1 - y}{y^2} =$ ______________________.

Ejercicio 4 Calcula el $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{(\ln x)^3 + 2x}$.

Paso 1: verifica si el límite dado cumple con las condiciones para aplicar la regla de L'Hôpital.

¿Qué debe suceder para aplicar la regla de L´Hôpital? ____

Comprueba si esto sucede:

De acuerdo con el resultado obtenido, ¿es válido aplicar la regla de L'Hôpital? ________________

Pasos 2 y 3: utiliza la regla y obtén el valor del límite:

¿Cuál es la derivada de la función del numerador? ____

¿Cuál es la derivada de la función del denominador? ____

Aplica la regla de L´Hôpital:

Resultado final: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{(\ln x)^3 + 2x} =$ ________________________.

Otras formas indeterminadas

Si al evaluar un límite éste da como resultado cualquiera de las formas $\infty - \infty$ o $0 \cdot \infty$, éstas también se llaman indeterminadas y es claro que no cumple con las condiciones para aplicar la regla de L'Hôpital. Sin embargo, mediante operaciones algebraicas adecuadas se pueden transformar en funciones cociente, de tal forma que al evaluar el límite se obtenga como resultado alguna de las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ o $\frac{+\infty}{+\infty}$ y así poder utilizar la regla de L'Hôpital. Los siguientes ejemplos servirán para mostrar lo anterior.

Ejemplo 4 Calcula el valor de $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \csc x$.

Solución Si se sustituye directamente $x = 0$ en la función $x \cdot \csc x$ se obtiene la forma indeterminada $0 \cdot \infty$ y por lo tanto no cumple con las condiciones para aplicar la regla de L'Hôpital. Sin embargo, se sabe que la función $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$; al sustituir esta expresión en el límite dado, se obtiene:

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \csc x = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x}$$

Al sustituir $x = 0$ en $\frac{x}{\operatorname{sen} x}$, se tiene que la forma indeterminada cambió a $\frac{0}{0}$, por lo tanto, ahora ya se puede aplicar la regla de L'Hôpital.

Deriva *por separado* la función del numerador y la función del denominador y evalúa el límite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = 1$$

Ejemplo 5 Calcula el valor de $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x - \sqrt{1+x}\right)$.

Solución En esta función es claro que si $x \to +\infty$ el límite da como resultado la forma indeterminada $\infty - \infty$ **y,** por lo tanto, no cumple con las condiciones para aplicar la regla de L'Hôpital; sin embargo, si se utiliza la estrategia racionalización de funciones, es posible convertir la resta de funciones en un cociente, es decir,

$$x - \sqrt{1+x} = \frac{\left(x - \sqrt{1+x}\right)\left(x + \sqrt{1+x}\right)}{x + \sqrt{1+x}} =$$

$$\frac{x^2 - (1+x)}{x + \sqrt{1+x}} = \frac{x^2 - x - 1}{x + \sqrt{1+x}}.$$

Al analizar lo que ocurre con la función $\frac{x^2 - x - 1}{x + \sqrt{1+x}}$ cuando $x \to +\infty$, se sabe que tanto la función del numerador como la del denominador también tienden a infinito, por lo que ahora tiene la forma indeterminada $\frac{-\infty}{+\infty}$ y ya se puede aplicar L'Hôpital.

Deriva *por separado* la función del numerador y la función del denominador y evalúa el límite:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(x - \sqrt{1+x}\right) =$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - x - 1}{x + \sqrt{1+x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x - 1}{1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x}}} = \frac{+\infty}{1 + \frac{1}{+\infty}} = \frac{+\infty}{1+0} = +\infty.$$

Ejercicio 1 Calcula el $\lim_{x \to \pi/4} (\tan x - 1)\sec 2x$.

Al evaluar la función en $x = \pi/4$, se obtiene: ______________________________.

De acuerdo con el resultado obtenido, ¿es válido aplicar la regla de L'Hôpital? __________

¿Qué estrategia algebraica puedes utilizar para transformar la función de tal forma que pueda aplicarse la regla de L'Hôpital? ______________________________

¡Resuélvelo!

Resultado final: $\lim_{x \to \pi/4} (\tan x - 1)\sec x =$ ______________________________.

Ejercicio 2 Calcula el $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right)$.

Al evaluar el límite en $x = 0$, ¿qué resultado se obtiene? ______________________

De acuerdo con el resultado obtenido, ¿es válido aplicar la regla de L'Hôpital? __________.

¿Qué estrategia algebraica puedes utilizar para transformar la función de tal forma que pueda aplicarse la regla de L'Hôpital? ______________________________.

¡Resuélvelo!

Resultado final: $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right) =$ ______________________________.

Conjunto de ejercicios de práctica 3.8

Determina el valor de cada uno de los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{5\cos x}{2x-\pi}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\tan x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{\operatorname{sen} x}$

4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(6/x)}{(1/x)}$

5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$

6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2^x}{3^x}$

7. $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\theta - \operatorname{sen}\theta}{\tan^2\theta}$

8. $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \dfrac{\tan x}{\ln(\cos x)}$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \tan x \cdot \ln(2x)$

10. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{3}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{2}{x}\right)$

Optimización de funciones

Temas

4.1 Cómo aplicar la derivada a problemas de optimización: máximos y mínimos de una función

4.2 Concavidad y puntos de inflexión

En nuestra vida diaria es común escuchar o ver situaciones que presentan cambios en su comportamiento, por ejemplo, de ser creciente cambia a ser decreciente, o viceversa. Cuando uno de estos comportamientos se presenta, la función que representa a esa situación alcanza un nivel máximo o mínimo. Incluso siendo más observadores podemos determinar la forma en que está cambiando: rápido o lento; esto tiene relación con los conceptos matemáticos de *concavidad* y *puntos de inflexión* de una función. Conocer el comportamiento de una función es de gran utilidad en el área de economía, administración, finanzas y muchas áreas más, y no solamente en el campo de los negocios, sino también en nuestra vida diaria.

Por ejemplo, analicemos la gráfica de la historia de consumo de electricidad en el siguiente recibo.

La gráfica muestra el consumo bimestral en 2004 y en el año anterior. Si analizamos la información de 2003, observamos que del

primero al segundo bimestre hubo una disminución en el consumo de este bien, pero del segundo al cuarto fue siempre creciendo, siendo el cuarto bimestre donde alcanzó su máximo, para decrecer nuevamente en el siguiente bimestre.

Si tratamos de darle una interpretación a esta situación, podemos decir que el cuarto bimestre es la época de mayor consumo, ya que abarca la época de verano, que es cuando se consume más electricidad en los hogares. Observa que una situación similar se presenta en 2004, el máximo consumo registrado es también en el cuarto bimestre, incluso más que el año anterior.

La importancia de conocer esta información y hacer este tipo de análisis es que nos permite llevar a cabo acciones para mejorar la situación; por ejemplo, evitar que el próximo año el consumo se comporte de esa forma. Al minimizar los costos, nuestra economía se verá beneficiada. A esto se le llama *optimizar*.

En este caso, el problema planteado fue posible de resolver (sin tener ningún conocimiento matemático) realizando un sencillo análisis de la situación, utilizando la información que se presenta en la gráfica y nuestro sentido común, pero en otras áreas como economía o finanzas no es así de sencillo, por lo que es necesario conocer un método formal que nos permita resolver este tipo de situaciones.

En esta unidad utilizaremos las derivadas para resolver este tipo de problemas: la optimización de funciones. Si conocemos la función, encontraremos el o los puntos donde ocurre su valor máximo o mínimo y analizaremos también su comportamiento; es decir, si la función está creciendo o decreciendo. Abordaremos algunos problemas de aplicación del área de economía donde encontraremos con qué nivel de producción se obtiene un ingreso máximo, se minimizan los costos o se obtiene la máxima utilidad.

También estudiaremos los conceptos de punto de inflexión y concavidad, donde mediante una situación de la vida real interpretaremos el significado de estos conceptos respecto al comportamiento de la función.

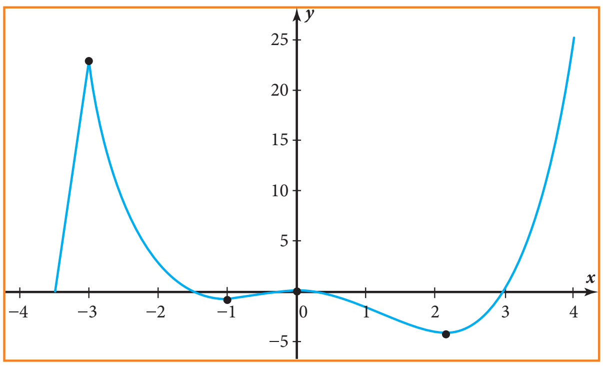
4.1 Cómo aplicar la derivada a problemas de optimización: máximos y mínimos de una función

Una de las aplicaciones de las derivadas es la resolución de problemas de optimización; es decir, para encontrar los puntos donde la función tiene un valor máximo o un valor mínimo. Este tipo de problemas es muy importante en el campo de la administración, por ejemplo, cuando deseamos obtener el nivel de producción con el que se obtiene el ingreso máximo, la utilidad máxima o los costos mínimos de producción, por mencionar algunas de las muchas aplicaciones.

En esta sección estudiaremos los máximos y mínimos locales o relativos; se les llama locales porque son el punto máximo o mínimo en un intervalo de la gráfica.

En la unidad anterior vimos que una función tiene un máximo en el punto donde su gráfica cambia de creciente a decreciente, y un mínimo si sucede lo contrario; es decir, la gráfica de la función cambia de decreciente a creciente.

Con base en lo anterior, observa la gráfica y contesta lo que se te pide:



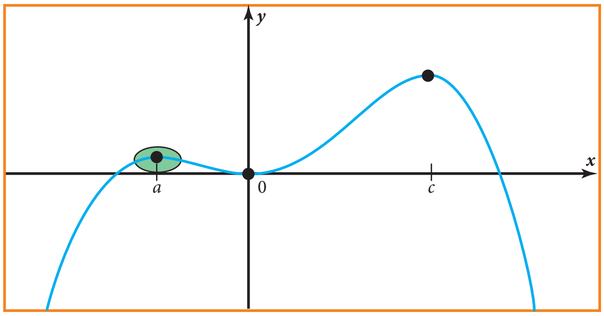
¿En qué valores de x la función tiene un valor máximo?______________________________

¿En qué valores de x la función tiene un valor mínimo? ______________________________

Decimos que la función $f(x)$ tiene un valor máximo local (o relativo) en $x = a$, si se cumple que el valor de la función en ese punto es mayor o igual que el valor de la función en cualquier otro punto x cercano al número a; es decir, $f(a) \geq f(x)$.

Observa que $f(x)$ tiene un máximo en $x = a$, ya que en ese número el valor de la función es el más alto; todos los demás valores de x alrededor de a tienen un valor de y más bajo.

Se le llama **máximo relativo**, o **local**, porque es el valor más alto de la función en esa "sección". Observa que no estamos analizando toda la gráfica.

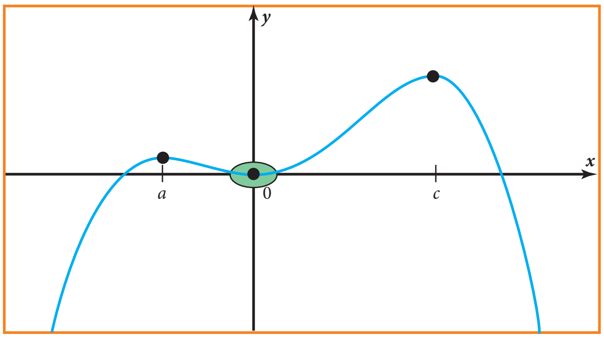


¿Hay otro punto en el cual la función tenga un máximo local? ______________________

¿Cuál es? ______________________

Decimos que la función $f(x)$ tiene un valor mínimo local (o relativo) en $x = b$, si el valor de la función en ese punto es menor o igual que el valor de la función en cualquier otro punto x cercano al número b; es decir, $f(b) \leq f(x)$.

Regresemos a la gráfica anterior.



Observa que $f(x)$ tiene un mínimo local en $x = b$, porque en ese número el valor de la función es el más bajo; todos los demás valores de x alrededor de b tienen un valor de y más alto.

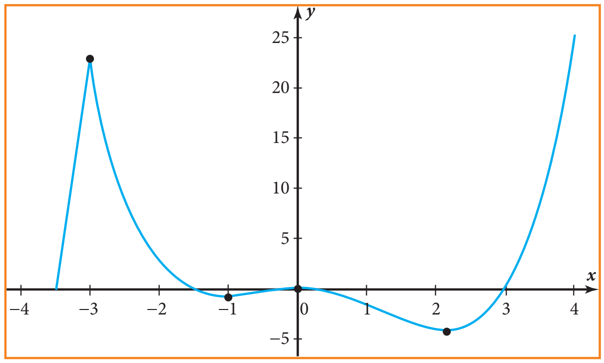
Se le llama **mínimo relativo**, o **local**, pues es el valor más bajo de la función en esa "sección" de la gráfica. Recuerda que no estamos analizando toda la gráfica.

¿Hay otro valor de x donde ocurre un mínimo local de la función? ______________________

Nota En las gráficas anteriores resultó sencillo determinar los puntos que representan los máximos y mínimos de la función. Esto no siempre es así, por lo que debemos tener otra estrategia para encontrarlos.

Cómo determinar el punto máximo o mínimo de una función

Construcción Retomemos la primera gráfica.



Sabemos que la función tiene máximos en $x = -3$ y en $x = 0$, y mínimos en $x = -1$ y $x = 2$; dibuja una recta tangente en cada uno de esos puntos y contesta lo que se indica:

a) En $x = 0$, ¿qué valor tiene la pendiente de la recta que dibujaste? ______________

Dado que la pendiente de la recta tangente. es la derivada, concluimos que $f'(0) =$ ______________.

b) En $x = -3$, ¿qué signo tiene la pendiente de la recta que dibujaste? ______________

c) Compara tu respuesta del inciso anterior con la respuesta de algunos de tus compañeros. ¿Todos obtuvieron la misma respuesta? _____

Para entender la discrepancia en los resultados obtenidos, analicemos lo que ocurre con la derivada en $x = -3$. Por la izquierda de $x = -3$, la derivada es positiva, debido a que la función crece, y por la derecha de $x = -3$ la derivada es negativa, ya que la función decrece; lo anterior sería equivalente a decir que la pendiente de la tangente por la izquierda de $x = -3$ es positiva y por la derecha de $x = -3$ es negativa. Ésta es la razón por la que ustedes dibujaron rectas "tangentes" con signos diferentes. En realidad en $x = -3$ *no existe una recta tangente*, ya que las rectas que dibujaron sólo cumplen con "la tangencia" por un lado de $x = -3$, y *no cumplen* con la tangencia bilateralmente.

Nota Cuando en un punto podemos dibujar rectas tangentes a la curva, pero sólo de forma unilateral, decimos que la derivada no existe en ese punto.

Concluimos entonces que $f'(-3)$ *no existe*.

d) En $x = 2$, ¿qué valor tiene la pendiente de la recta que dibujaste? ____________________

Dado que la pendiente de la recta tangente es la derivada, concluimos que $f'(2) =$ ____________.

e) En $x = -1$, ¿qué valor tiene la pendiente de la recta que dibujaste? ________________

Dado que la pendiente de la recta tangente es la derivada, concluimos que $f'(-1) =$ ___________.

De acuerdo con el razonamiento anterior, podemos concluir que:

En aquellos puntos en donde la función tiene máximos y mínimos, la derivada es cero o no existe.

Nota Los puntos en los cuales la derivada de una función es igual a cero o no existe, se conocen como **puntos críticos** de la función y representan un *posible* valor máximo o mínimo de la función.

Los puntos del dominio de la función en los cuales $f'(x)$ es cero o no existe, se conocen como puntos críticos de la función, es decir:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & (\textit{la derivada es cero en los valores de } x \textit{ en los que el numerador es cero}) \\ \textit{no existe} & (\textit{la derivada no existe en los valores de } x \textit{ en los que el denominador es cero}) \end{cases}$$

Éstos representan un *posible* valor máximo o mínimo de la función.

Los siguientes ejercicios nos ayudarán a comprobar que *no* todo punto crítico es un valor máximo o mínimo para una función. Utilizaremos funciones muy sencillas cuyas gráficas conocemos.

Construcción Obtén los puntos críticos de la función $f(x) = x^2$, dibuja su gráfica y determina si el punto crítico es un máximo, un mínimo o ninguno de ellos.

Solución Recuerda que los puntos críticos son aquellos puntos del dominio de la función con los cuales se cumple que:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 \\ \text{no existe} \end{cases}$$

Entonces obtenemos $f'(x) =$ _______________ .

¿Qué ecuación debes resolver para obtener el punto crítico? _________

La solución de la ecuación es $x =$ __________ .

El valor de x obtenido, ¿pertenece al dominio de la función? Es decir, ¿la función existe en ese valor? ________

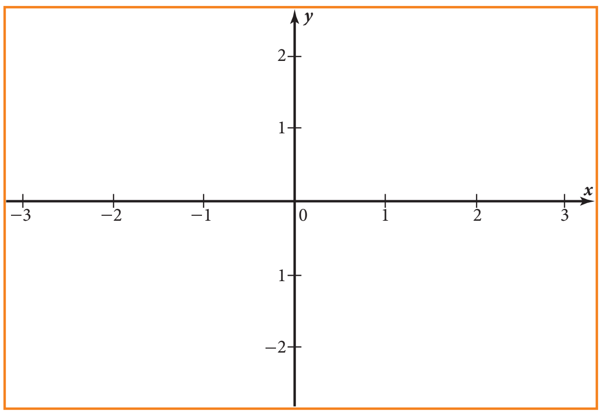
Nota Para responder a esta pregunta puedes sustituir el número de x en la función y encontrar su valor.

¿La función existe en ese valor? ____________ .

En este valor de x la función puede tener un valor máximo o mínimo.

Ahora dibuja la gráfica de la función $f(x) = x^2$.

Ya que ésta es una función muy conocida, no necesitamos de ningún graficador.



Observa la gráfica. ¿En el valor de x obtenido hay un máximo o mínimo para la función? ¿Qué es?

____

Construcción Obtén los puntos críticos de la función $f(x) = x^3$, dibuja su gráfica y determina si el punto crítico es un máximo, un mínimo o ninguno de ellos.

Solución Recuerda que los puntos críticos son aquellos puntos del dominio de la función con los cuales se cumple que:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 \\ \text{no existe} \end{cases}$$

Entonces, obtenemos $f'(x) =$ ______________.

¿Qué ecuación debes resolver para obtener el punto crítico? ______________________________

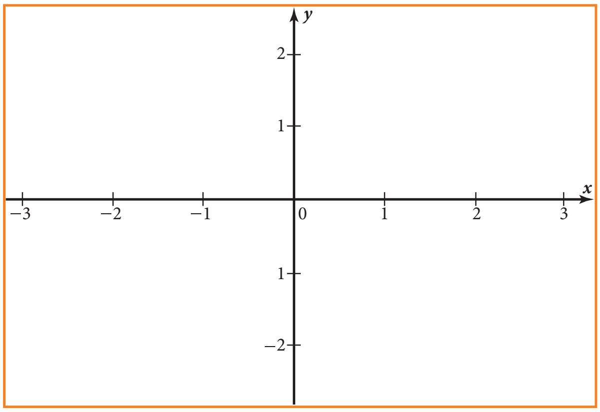
La solución de la ecuación es $x =$ ___________.

¿El valor de x obtenido pertenece al dominio de la función? Es decir, ¿la función existe en ese valor? ___________

En este valor de x la función puede tener un valor máximo o mínimo.

Ahora dibuja la gráfica de la función $f(x) = x^3$.

Debido a que se trata de una función muy conocida, tampoco necesitamos de ningún graficador.



¿En el valor de x obtenido hay un máximo o mínimo para la función? ______________________

Conclusión Del análisis anterior concluimos que *no* todo punto crítico es un punto máximo o mínimo de la función.

En el ejercicio anterior utilizamos la gráfica de la función para determinar si el punto crítico obtenido era o no un máximo o un mínimo para la función. Esto fue fácil de visualizar, pues las funciones eran muy sencillas; no siempre sucede así, por lo que es necesario contar con una alternativa para obtener el máximo o el mínimo de una función. Al inicio del tema mencionamos que una función tiene un máximo en el punto en el cual la función cambia de creciente a decreciente. Cuando esto ocurre, la derivada cambia de positiva a negativa, y lo contrario sucede con un punto mínimo; esto significa que podemos apoyarnos en la primera derivada para determinar si un punto crítico es un máximo o un mínimo de la función.

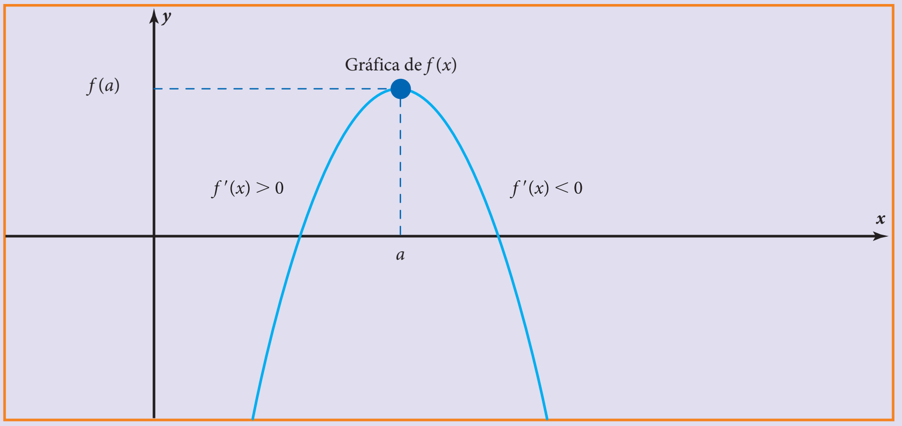
A continuación aprenderemos cómo hacerlo. Al método para determinar si un punto crítico es o no máximo o mínimo de una función, se le llama **criterio de la primera derivada**. Veamos lo que indica.

Criterio de la primera derivada

Sea f una función continua en todo punto de un intervalo abierto I que contiene al número $x = a$ y además f es diferenciable en todo punto del intervalo I, excepto posiblemente en $x = a$.

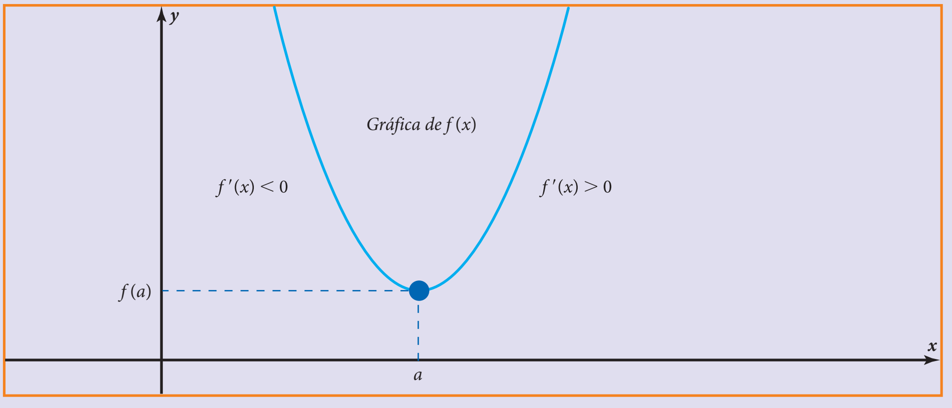
Si $x = a$ es un número crítico de la función f, entonces se cumple que:

1. Si $f'(x) > 0$ para $x < a$ y $f'(x) < 0$ para $x > a$, entonces en $x = a$ la función $f(x)$ tiene un máximo local. El valor máximo de la función se obtiene evaluando la función en el número crítico $x = a$, es decir, $f(a)$.



Nota Observa que antes de $x = a$, la función es creciente (por eso la derivada es positiva), y después de $x = a$ la función es decreciente (por eso la derivada es negativa). Cuando esto sucede, existe un máximo en la función.

2. Si $f'(x) < 0$ para $x < a$ y $f'(x) > 0$ para $x > a$, entonces en $x = a$ la función $f(x)$ tiene un mínimo local. El valor mínimo de la función se obtiene evaluando la función en el número crítico $x = a$, es decir, $f(a)$.



Nota Observa que antes de $x = a$, la función es decreciente (por eso la derivada es negativa), y después de $x = a$ la función es creciente (por eso la derivada es positiva). Cuando esto sucede, existe un mínimo en la función.

3. Si $f'(x)$ no cambia de signo alrededor de $x = a$, entonces la función no tiene máximo ni mínimo en $x = a$.

Ejemplo 1 Obtén los puntos donde ocurren los máximos y mínimos para la función y proporciona el intervalo donde $f(x)$ es creciente y donde es decreciente.

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3.$$

Solución Debemos obtener los puntos críticos de la función, pues éstos representan los posibles máximos y mínimos de la función.

Los puntos críticos se obtienen al derivar la función; al hacerlo obtenemos:

$$f'(x) = x^3 - 2x^2.$$

La definición de puntos críticos nos dice que los puntos críticos son aquellos valores de x que pertenecen al dominio de la función, con los cuales $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no existe.

El dominio de la función lo forman todos los números reales, ya que la función es polinomial; por lo tanto, la función existe para cualquier valor de x.

¿En qué valores del dominio la derivada es cero? Igualamos a cero el numerador de la derivada, y la ecuación que nos queda por resolver es:

$$x^3 - 2x^2 = 0.$$

Para resolverla tomamos como factor común x^2 y obtenemos:

$$x^2(x - 2) = 0.$$

Al igualar cada factor a cero y despejar x, obtenemos:

si $x^2 = 0$, entonces $x = 0$,

si $x - 2 = 0$, entonces que $x = 2$.

Por lo tanto, $x = 0$ y $x = 2$ son los valores de x donde hay puntos críticos. Éstos representan los puntos en los cuales la función *puede* tener un máximo o un mínimo.

¿En qué valores del dominio la derivada no existe? Recuerda que la derivada *no* existe en los valores de x en los que el denominador es cero, pero como en este caso no tenemos denominador, los únicos puntos críticos serán aquellos en los que la derivada es cero.

Debemos utilizar el criterio de la primera derivada, para determinar si los puntos críticos son o no máximos o mínimos.

Analizaremos el signo de la derivada por la izquierda y por la derecha de los valores de x obtenidos.

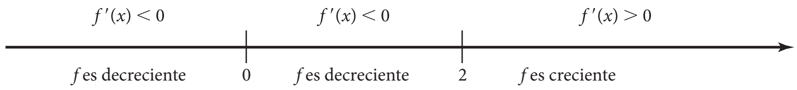
En la recta numérica marca los valores de x.

Observa que la recta se divide en tres intervalos. Debemos determinar cómo es la derivada (positiva o negativa) en cada uno de los intervalos; para lo que tomamos un número dentro del intervalo y lo sustituimos en la derivada (con cualquier número que tomemos, el signo de la derivada será el mismo).

Podemos escribir la información en una tabla de datos de la siguiente forma:

Intervalo	Número seleccionado	Sustituir el número seleccionado en la primera derivada	Signo de la primera derivada	Conclusión acerca de la función: es creciente o decreciente
$(-\infty, 0)$	Puede ser $x = -1$	$f'(-1) = -3$	Negativo	Decreciente
$(0, 2)$	Puede ser $x = 1$	$f'(1) = -1$	Negativo	Decreciente
$(2, +\infty)$	Puede ser $x = 4$	$f'(4) = 32$	Positivo	Creciente

Con los resultados obtenidos la recta numérica queda como:



Observa que alrededor del punto crítico donde $x = 0$ no hay cambio de signo en la derivada. Entonces, de acuerdo con el criterio de la primera derivada (regla 3), concluimos que $x = 0$ no es ni máximo ni mínimo para la función.

En el punto crítico en donde $x = 2$, la derivada cambia de negativa a positiva. Entonces, de acuerdo con el criterio de la primera derivada (regla 2), concluimos que en $x = 2$ la función tiene un valor mínimo local.

Si queremos obtener el valor mínimo local de la función, lo que debemos hacer es sustituir $x = 2$ en la función original $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3$, al hacerlo nos queda como:

$$f(2)=\frac{1}{4}(2)^4-\frac{2}{3}(2)^3=-\frac{4}{3}.$$

Entonces el punto más bajo de la función alrededor de $x = 2$, es $\left(2, -\frac{4}{3}\right)$.

También debemos determinar los intervalos en los que la función es creciente y decreciente. Para contestar esta pregunta utilizaremos los resultados obtenidos en la tabla anterior.

En el capítulo anterior aprendimos que:

- Si $f'(x) > 0$, entonces $f(x)$ es creciente.
- Si $f'(x) < 0$, entonces $f(x)$ es decreciente.

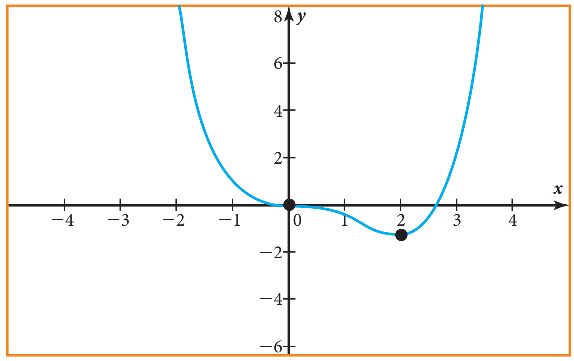
Así, sólo debemos observar en qué valores la derivada quedó negativa y en qué valores quedó positiva y, por lo tanto, concluimos que:

$f(x)$ es creciente en el intervalo $(2, +\infty)$

$f(x)$ es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, 2)$.

Nota Como la función decrece por la izquierda y la derecha de $x = 0$ podemos decir que $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 2)$.

Podemos comprobar los resultados obtenidos si observamos la gráfica de la función original $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3$. Por medio de un graficador, tenemos que la gráfica de la función es:



Observa que, en efecto, en $x = 0$ no hay máximo ni mínimo y que el valor mínimo local (punto más bajo) de la función es $y=-\frac{4}{3}$, que ocurre cuando $x = 2$.

Ejemplo 2 Obtén los puntos máximos y mínimos para la función $f(x) = x^{2/3} + 2$ y proporciona el intervalo en el que es creciente y en el que es decreciente.

Solución Debemos obtener los puntos críticos de la función, pues éstos representan los posibles máximos y mínimos de la función.

Los puntos críticos se obtienen al derivar la función, al hacerlo obtenemos:

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}.$$

Como x queda con exponente negativo, la pasamos al denominador y tenemos que:

$$f'(x)=\frac{2}{3x^{1/3}}.$$

La definición de puntos críticos nos dice que éstos son los valores de x que pertenecen al dominio de la función en los que $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no existe.

El dominio de la función es cualquier número real, ya que, aunque en la función aparece una raíz cúbica de x, sabemos que ésta existe para todos los números reales.

¿En qué valores del dominio la derivada es cero? Para encontrar los puntos que hacen cero la derivada de la función, igualamos el numerador a cero y despejamos x. Al hacerlo, obtenemos la ecuación:

$$2 = 0.$$

Observa que en esta ecuación no aparece x. Esto significa que no hay un número del dominio de la función en el que la derivada sea igual a cero.

¿En qué valores del dominio la derivada no existe? Ahora encontraremos los valores de x en los que la derivada *no* existe; recuerda que esto sucede en los valores de x en los que el denominador es cero.

Igualamos a cero el denominador de la derivada y la ecuación que nos queda por resolver es:

$$3x^{1/3} = 0.$$

Al despejar x de la ecuación obtenemos

$$x^{1/3} = \frac{0}{3}.$$

Entonces

$$x^{1/3} = 0.$$

Al elevar al cubo ambos lados de la ecuación, obtenemos que

$$x = 0.$$

Por lo tanto, $x = 0$ es el valor de x donde hay un punto crítico que representa el punto en el que la función *puede* tener un máximo relativo o un mínimo relativo.

Debemos utilizar el criterio de la primera derivada para determinar si el punto crítico es o no máximo o mínimo. Analizaremos por la izquierda y por la derecha del valor de x obtenido.

En la recta numérica marcamos el valor de x:

Observa que la recta se divide en dos intervalos. Debemos determinar cómo es la derivada (positiva o negativa) en cada uno de los intervalos; para ello, tomamos un número dentro del intervalo y lo sustituimos en la derivada (con cualquier número que tomemos, el signo de la derivada será el mismo).

Podemos escribir la información en una tabla de datos de la siguiente forma:

Intervalo	Número seleccionado	Sustituir en la primera derivada el número seleccionado	Signo de la primera derivada	Conclusión acerca de la función: es creciente o decreciente
$(-\infty, 0)$	Puede ser $x = -1$	$f'(-1) = -2/3$	Negativo	Decreciente
$(0, +\infty)$	Puede ser $x = 1$	$f'(1) = 3/3$	Positivo	Creciente

Con los resultados obtenidos, la recta numérica queda como:

En el punto crítico $x = 0$, la derivada cambia de negativa a positiva. Entonces, de acuerdo con el criterio de la primera derivada (regla 2), concluimos que en $x = 0$ la función tiene un valor mínimo local.

Si queremos obtener el valor mínimo local de la función, lo que debemos hacer es sustituir $x = 0$ en la función original, $f(x) = x^{2/3} + 2$; al hacerlo, nos queda como

$$f(0) = 0^{2/3} + 2 = 2.$$

Entonces el punto más bajo de la función alrededor de $x = 0$ es $(0, 2)$.

También debemos determinar los intervalos en los que la función es creciente y en los que es decreciente. Para contestar esta pregunta, utilizaremos los resultados obtenidos en la tabla anterior.

En la sección 2.3 aprendimos que:

- Si $f'(x) > 0$, entonces $f(x)$ es creciente.
- Si $f'(x) < 0$, entonces $f(x)$ es decreciente.

Entonces sólo debemos observar en qué valores la derivada quedó negativa y en qué valores quedó positiva y, por lo tanto, concluimos que:

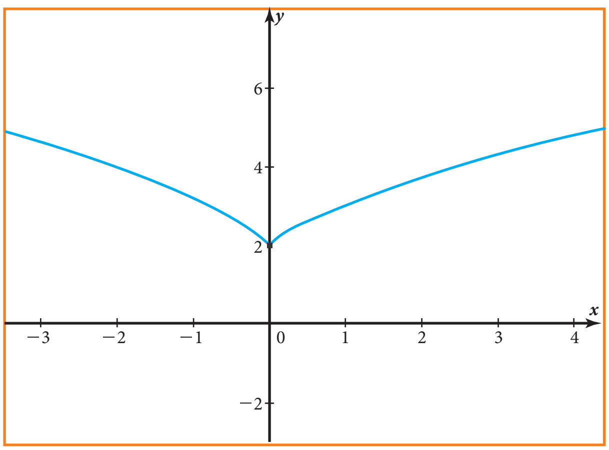
$f(x)$ es creciente en el intervalo $(0, +\infty)$

$f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$

Podemos comprobar los resultados obtenidos si observamos la gráfica de la función original

$$f(x) = x^{2/3} + 2.$$

Por medio de un graficador tenemos que la gráfica de la función es:



Observa que, en efecto, hay un mínimo local (punto más bajo) para la función en $y = 2$, que ocurre cuando $x = 0$.

Ejemplo 3 Obtén los puntos máximos y mínimos para la función $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$ y da el intervalo en que es creciente y en que es decreciente.

Solución Debemos obtener los puntos críticos de la función, pues éstos representan los posibles máximos y mínimos de la función.

Los puntos críticos se obtienen al derivar la función. Antes de derivar pasamos al numerador la x^2 del segundo término de la función, para que sea más fácil derivarlo.

$$f(x) = 2x - x^{-2}.$$

Al derivar obtenemos:

$$f'(x) = 2 + 2x^{-3},$$

Como x queda con exponente negativo, la pasamos al denominador y tenemos que

$$f'(x) = 2 + \frac{2}{x^3}.$$

Efectuamos la suma, sacando un común denominador y tenemos que

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2}{x^3}.$$

La definición de puntos críticos nos dice que los puntos críticos son aquellos valores de x que pertenecen al dominio de la función, en los que $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no existe.

El dominio de la función es cualquier número, excepto $x = 0$, ya que la función no existe en ese valor porque el denominador del segundo término se hace cero y la división entre cero no está definida; entonces, si se obtiene $x = 0$ como punto crítico, lo descartamos como posible punto máximo o mínimo, debido a que no pertenece al dominio de la función.

¿En qué valores del dominio la derivada es cero? Para encontrar los puntos que hacen cero la derivada de la función, igualamos el numerador a cero y despejamos x; al hacerlo, obtenemos:

$$2x^3 + 2 = 0.$$

Pasamos el 2 restando al lado derecho de la ecuación y obtenemos que

$$2x^3 = -2.$$

El 2 que está multiplicando pasa hacia el otro lado dividiendo y tenemos

$$x^3 = \frac{-2}{2}.$$

Es decir,

$$x^3 = -1.$$

al sacar la raíz cúbica de -1 obtenemos que

$$x = -1.$$

Por lo tanto, $x = -1$ es el valor de x donde hay un punto crítico.

¿En qué valores del dominio la derivada no existe? Ahora encontraremos los valores de x en los que la derivada *no* existe. Recuerda que esto sucede en los valores de x con los que el denominador es cero.

Igualamos a cero el denominador de la derivada y la ecuación que nos queda por resolver es:

$$x^3 = 0.$$

Al sacar raíz cúbica para despejar x, obtenemos que

$$x = 0.$$

Como el cero *no* pertenece al dominio de la función, lo descartamos como posible valor máximo o mínimo de ésta.

Por lo tanto, $x = -1$ es el único valor en el que la función *puede tener* máximo o mínimo.

Debemos utilizar el criterio de la primera derivada para determinar si el punto crítico es o no máximo o mínimo. Analizaremos por la izquierda y por la derecha del valor de x obtenido.

En la recta numérica marcamos los valores de x:

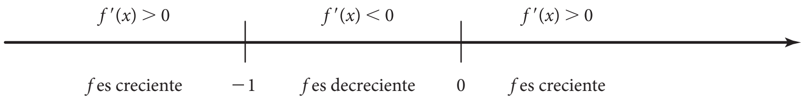
Nota Aunque el cero no es posible valor máximo o mínimo de la función, sí lo tomaremos en cuenta para delimitar los intervalos y analizar cómo es la función en valores anteriores y posteriores a ese número, ya que también queremos determinar los intervalos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

Observa que la recta se divide en tres intervalos. Debemos determinar cómo es la derivada (positiva o negativa) en cada uno de los intervalos; para lo que tomamos un número dentro del intervalo y lo sustituimos en la derivada (con cualquier número que tomemos, el signo de la derivada será el mismo).

Podemos escribir la información en una tabla de datos de la siguiente forma:

Intervalo	Número seleccionado	Sustituir en la primera derivada el número seleccionado	Signo de la primera derivada	Conclusión acerca de la función: es creciente o decreciente
$(-\infty, -1)$	Puede ser $x = -2$	$f'(-2) = 1.75$	Positivo	Creciente
$(-1, 0)$	Puede ser $x = -1/2$	$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -14$	Negativo	Decreciente
$(0, +\infty)$	Puede ser $x = 1$	$f'(1) = 4$	Positivo	Creciente

Con los resultados obtenidos, la recta numérica queda como:



En $x = -1$, la derivada cambia de positiva a negativa. Entonces, de acuerdo con el criterio de la primera derivada (regla 1), concluimos que en $x = -1$ la función tiene un valor máximo local.

Si queremos obtener el valor máximo local de la función, lo que debemos hacer es sustituir $x = -1$ en la función original $f(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$; al hacerlo, nos queda como

$$f(-1) = 2(-1) - \frac{1}{(-1)^2} = -3.$$

Entonces es el punto más alto de la función alrededor de $x = -1$ es $(-1, -3)$.

También debemos determinar los intervalos en los que la función es creciente y en los que es decreciente. Para resolverlo utilizaremos los resultados obtenidos en la tabla anterior.

En la sección 2.3 aprendimos que:

- Si $f'(x) > 0$, entonces $f(x)$ es creciente.
- Si $f'(x) < 0$, entonces $f(x)$ es decreciente.

Entonces sólo debemos observar en qué valores la derivada quedó negativa y en qué valores quedó positiva y, por lo tanto, concluimos que:

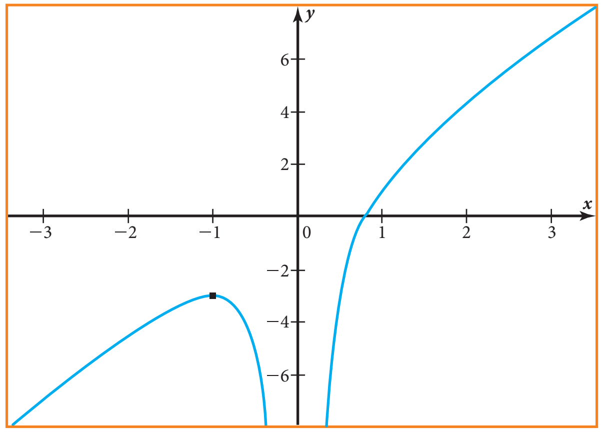
$f(x)$ es creciente en el intervalo $(-\infty, -1)$ y $(0, +\infty)$,

$f(x)$ es decreciente en el intervalo $(-1, 0)$.

Podemos comprobar los resultados obtenidos si observamos la gráfica de la función original,

$$f(x) = 2x - \frac{1}{x^2}.$$

Por medio de un graficador, tenemos que la gráfica de la función es:



Observa que, en efecto, hay un máximo local (punto más alto) de la función en $y = -3$, el cual ocurre cuando $x = -1$; en $x = 0$ la gráfica "se corta", pues la función no está definida (no existe) para ese valor de x.

Obtén los puntos críticos de la función y utiliza el criterio de la primera derivada para determinar si son máximos, mínimos o ninguno. Indica los intervalos en los que $f(x)$ es creciente y en los que es decreciente.

Ejercicio 1 $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 32$

¿Cuál es el dominio de la función? Es decir, ¿hay algún valor de x en el que la función no exista?________________

Solución Obtén los puntos críticos.

¿Qué necesitas hacer para obtenerlos? ____

Obtén $f'(x) =$ ____.

Plantea y resuelve la ecuación para determinar los valores de x en los que la primera derivada es cero.

Plantea y resuelve la ecuación para determinar los valores de x en los que la primera derivada no existe.

Los valores de x obtenidos, ¿pertenecen al dominio de la función?____________

Entonces, los puntos críticos son: ______________________________________.

Aplica el criterio de la primera derivada.

Dibuja los puntos críticos en la recta numérica:

Escribe la información en la tabla.

Intervalo	Número seleccionado	Sustituir en la primera derivada el número seleccionado	Signo de la primera derivada	Conclusión acerca de la función: es creciente o decreciente

Con base en los resultados obtenidos y en lo que indica el criterio de la primera derivada, concluimos que la función tiene:

Máximo en: ______________________ Mínimo en: ______________________

Crece en: ______________________ Decrece en: ______________________

Ejercicio 2 $f(x) = (x^2 - 9)^3$

¿Cuál es el dominio de la función? Es decir, ¿hay algún valor de x en el que la función no exista? ____________

Solución Obtén los puntos críticos.

¿Qué necesitamos hacer para obtener los puntos críticos? ______________________________

Obtenemos $f'(x) =$ ____.

Plantea y resuelve la ecuación para determinar los valores de x en los que la primera derivada es cero.

Plantea y resuelve la ecuación para determinar los valores de x en los que la primera derivada no existe.

Los valores de x obtenidos, ¿pertenecen al dominio de la función? __________

Entonces, los puntos críticos son: ______________________________.

Aplica el criterio de la primera derivada.

Dibuja los puntos críticos en la recta numérica:

Escribe la información en la tabla.

Intervalo	Número seleccionado	Sustituir en la primera derivada el número seleccionado	Signo de la primera derivada	Conclusión acerca de la función: es creciente o decreciente

Con base en los resultados obtenidos y en lo que indica el criterio de la primera derivada, concluimos que la función tiene:

Máximo en: ______________________ Mínimo en: ______________________

Crece en: ______________________ Decrece en: ______________________

Ejercicio 3 $f(x) = x + \frac{1}{x}$

¿Cuál es el dominio de la función? Es decir, ¿hay algún valor de x en el que la función no exista? ______________

____

Solución Obtén los puntos críticos.

¿Qué necesitamos hacer para obtener los puntos críticos? ______________________________

Obtenemos $f'(x) =$ ____.

Plantea y resuelve la ecuación para determinar los valores de x en los que la primera derivada es cero.

Plantea y resuelve la ecuación para determinar los valores de x en los que la primera derivada no existe.

Los valores de x obtenidos ¿pertenecen al dominio de la función? ____________

Entonces, los puntos críticos son: ______________________________.

Aplica el criterio de la primera derivada.

Dibujemos los puntos críticos en la recta numérica:

Escribe la información en la tabla.

Intervalo	Número seleccionado	Sustituir en la primera derivada el número seleccionado	Signo de la primera derivada	Conclusión acerca de la función: es creciente o decreciente

Con base en los resultados obtenidos y en lo que indica el criterio de la primera derivada, concluimos que la función tiene:

Máximo en: ____________________ Mínimo en: ____________________

Crece en: ____________________ Decrece en: ____________________

Aplicaciones de los máximos y mínimos

En nuestra vida diaria es común escuchar alguna situación que presenta cambios de comportamiento; por ejemplo, de tener siempre un comportamiento creciente, de pronto cambia a ser decreciente; en el momento en que eso ocurre, se dice que alcanza un nivel máximo, o en caso contrario, un nivel mínimo.

Un ejemplo de esta situación la podemos apreciar en las Unidades de Inversión (UDIS); éstas son unidades de cuenta de valor real constante creadas en abril de 1995 por el Banco de México como una alternativa para resolver los efectos de la crisis financiera que se presentó a finales de 1994 en México. De esta forma, si un cliente ya tenía un crédito hipotecario en moneda nacional, podía cambiarlo al sistema de UDIS, si así lo deseaba. Se decía que dichas unidades representaban una mayor ventaja que manejar la deuda en pesos, ya que el valor de las UDIS se actualiza día a día conforme al Índice Nacional de Precios al Consumidor (INPC), lo cual hace que sea más segura que las tasas nominales que tradicionalmente se utilizan para los créditos.

Las UDIS no son una moneda tangible, simboliza dinero, pero no lo son por sí mismas: el pago de las obligaciones adquiridas en UDIS se hace en pesos mexicanos.

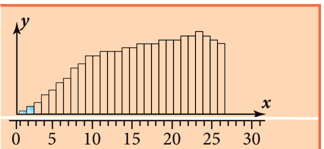
Ejemplo 4 Desde que se dieron a conocer el 4 de abril de 1995 el valor de las UDIS no había dejado de aumentar; sin embargo, en 2001 se presentó una gran sorpresa, cuando por primera vez en la historia, el valor de las UDIS dio una baja. Esto sucedió en febrero de 2001; la gráfica que presentamos a continuación muestra el valor de las UDIS en el mes de febrero de 2001.

Máx: 2.9464

Media: 2.9431

Mín: 2.9398

Fuente: elcontribuyente.com.mx



Observa que el 25 de febrero de ese año las UDIS alcanzaron su *nivel máximo* histórico de 2.946381 pesos, disminuyendo hasta los 2.942518 pesos: una disminución de 0.13% que es precisamente la deflación registrada. La función tiene un máximo relativo en $t = 25$; recuerda que se le llama máximo relativo o local porque es el punto más alto de la gráfica en un intervalo (ese comportamiento sucede solamente en una sección de la gráfica).

El hecho de que los precios de los productos agrícolas presentan una fuerte volatilidad, tanto a la alta como a la baja, influye en forma determinante en el nivel general de la inflación, por lo que el valor de las UDIS se ve afectado.

Conocer el comportamiento de una función y su valor máximo o mínimo es un dato importante en cualquier área: Economía, Finanzas, Medicina, etc., ya que permite analizar una situación y llevar a cabo oportunamente las acciones necesarias para solucionar un problema que pudiera presentarse.

Para determinar el comportamiento de una función, creciente o decreciente y sus puntos máximos y mínimos, utilizaremos el mismo procedimiento que en los ejercicios anteriores. Entonces, es necesario conocer la función; en ocasiones no se nos da directamente, por lo que es necesario plantearla.

Considera esta sugerencia para resolver un problema de aplicación de máximos y mínimos. Después de leer cuidadosamente el enunciado,

Paso 1: identifica y plantea la función para la que se te pide obtener el máximo o el mínimo.
Paso 2: obtén los puntos críticos.
Paso 3: utiliza el criterio de la primera derivada para encontrar el máximo o el mínimo que se indica obtener.

Fuente: artículo publicado por Alberto Barrientos en *El Norte*, Monterrey, NL, México.

Ejercicio 1 El precio de venta para el producto de un fabricante está dada por $p = 27 - \frac{1}{9}q^2$, donde q es la cantidad vendida, medida en cientos de unidades. ¿Con qué valor de q se tiene un ingreso máximo?

Solución Paso 1: planteamos la función.

Ingreso = ______________________________

Paso 2: obtenemos puntos críticos.

¿Cuántos puntos críticos existen? ____________ .

¿Cualquiera de los puntos críticos obtenidos puede ser la solución a la pregunta? Justifica tu respuesta. ________

____

____

Paso 3: utilizamos el criterio de la primera derivada para obtener el máximo.

Respuesta: ______________________________

Ejercicio 2 Si las funciones de ingresos y de costos para una compañía están dadas por $I = 35q - \frac{1}{2}q^2$ $C = 7q + 20$, respectivamente, donde q son las unidades, en miles, producidas y vendidas.

a) ¿Cuántas unidades del producto deben venderse para tener una ganancia máxima?

b) ¿Cuál es la máxima ganancia obtenida?

Solución Paso 1: planteamos la función.

Ganancia = ______________________________

Paso 2: obtenemos puntos críticos.

¿Cuántos puntos críticos existen? ____

Paso 3: utilizamos el criterio de la primera derivada para obtener el máximo.

a) ¿Cuántas unidades de producto deben venderse para tener una ganancia máxima? ____________________

b) ¿Cuál es la máxima ganancia obtenida? ____________________

Ejercicio 3 Una empresa de telefonía celular tiene actualmente 3 000 clientes en plan mensual que pagan una cuota de $500. Un estudio reveló que se tendrían 100 suscriptores más por cada disminución de $10 en la cuota mensual.

a) ¿Con qué cuota se obtendrá el ingreso máximo?

b) ¿Cuántos suscriptores se tendrían entonces?

Solución Paso 1: planteamos la función.

Ingreso = ____

Paso 2: obtenemos puntos críticos.

Paso 3: utilizamos el criterio de la primera derivada para obtener el máximo.

a) ¿Con qué cuota se obtendrá el máximo ingreso? ____________________

b) ¿Cuántos suscriptores se tendrían entonces? ____________________

Conjunto de ejercicios de práctica 4.1

En los siguientes ejercicios obtén los puntos críticos de la función y utiliza el criterio de la primera derivada para determinar si son máximos, mínimos o ni uno ni otro. Indica los intervalos en los que $f(x)$ es creciente y en los que es decreciente. Dibuja la gráfica de la función $f(x)$ para comprobar los resultados.

1. $f(x) = -x^2 + 4x + 8$
2. $f(x) = 3x^2 - 5x - 4$
3. $f(x) = 2x^2 + 4 + 6x$
4. $f(x) = 1 + 5x - 15x^2$
5. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 12x + 3$
6. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$
7. $f(x) = 7x^2 - 14x^3$
8. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 4$
9. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{5}{2}x - 2$
10. $f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + 1$
11. $f(x) = 20x^3 - 201x^2 + 396$
12. $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 + 12x - 1$
13. $f(x) = x^3 + 3x + 12$
14. $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + 12x + 4x^2$
15. $f(x) = -2x^3 - 3x^2 - 6x + 36$
16. $f(x) = 10 - 162x - 9x^3$
17. $f(x) = 4x - 5 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3$
18. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15x - 9$
19. $f(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x - 7$
20. $f(x) = 273 + 30x^2 + 2x^3 + 150x$
21. $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x + 2$
22. $f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 6$
23. $f(x) = 25x^3 - 30x^2 + 12x$
24. $f(x) = -16x^3 - 84x^2 - 147x + 24$
25. $f(x) = 2x^2 - x^4$
26. $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{7}{3}x^3 + 6x^2 + 4$
27. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$
28. $f(x) = 18 - 26x^3 - 9x^2 + 15x^4$
29. $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 8$
30. $f(x) = -6x^4 - 4x^3 - 6x^2$
31. $f(x) = x^5 - 125x$
32. $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - \frac{9}{4}x^4 - 6x^3 + 1$
33. $f(x) = (x^3 + 1)$
34. $f(x) = -5x^6 + 3x$
35. $f(x) = 8x^{1/3} - x^{8/3}$
36. $f(x) = 7x\sqrt{2 - x}$
37. $f(x) = 2x - x^{1/2}$
38. $f(x) = (x - 4)^{2/3}$
39. $f(x) = x - 5x^{1/5}$
40. $f(x) = x^{1/3} = \frac{1}{x^{1/3}}$
41. $f(x) = \frac{1 + x^2}{x^2}$
42. $f(x) = \frac{x^3}{4 - x^3}$
43. $f(x) = \frac{5x}{x^2 + 5}$
44. $f(x) = \frac{2}{x^4 + 9}$
45. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$
46. $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$

47. $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2+1}$

48. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

49. $f(x)=\dfrac{4x^2-16x+23}{x^2-4x+4.5}$

50. $f(x)=\dfrac{x^3+2}{3x^2}$

En los ejercicios 51 a 54 se tienen las funciones de ingreso y costo. Encuentra la máxima utilidad y el número *x* de unidades que deben producirse y venderse para lograrlo.

51. $I=35x-\dfrac{1}{2}x^2$ $\quad C = 7x + 20$

52. $I = 20x$ $\quad C = 0.1x^2 + 6x + 30$

53. $I = 3.85x^2 + 3.3x$ $\quad C = 0.15x^3 + x^2 + 6$

54. $I = -0.02x^3 + 3.22x^2$ $\quad C = 2x^2 + 8.64x + 37.44$

Contesta lo que se te pide.

55. Una persona posee 100 departamentos y los renta a estudiantes por \$2 000 al mes cada uno. Actualmente, sólo tiene ocupados 60 departamentos. La experiencia ha demostrado que por cada disminución de \$200 pesos mensuales en la renta el número de departamentos rentados aumenta en 10.

    a) ¿A qué precio tendrá un ingreso máximo?
    b) ¿Cuál será el ingreso máximo?

56. La función de costos para una compañía que fabrica calculadoras está dada por: $C(x) = 0.0001x^2 - 0.08x + 40$ donde x representa la cantidad de calculadoras producidas. Determina el número de éstas que se deben producir para minimizar los costos de la compañía.

57. Una compañía vende teléfonos celulares a \$1 500 cada uno. Si se venden x miles de teléfonos, la función de costos totales está dada por $C(x) = 1000 + 150x^2$. ¿Cuántos celulares se deberán vender para que la compañía tenga una utilidad máxima?

58. La función de demanda de cierto artículo está dada por $p = 345 - 0.015x$, donde p es el precio unitario del artículo y x es el número de unidades.

    a) ¿Cuántas unidades deberán venderse para obtener un ingreso máximo?
    b) ¿Cuál será el ingreso máximo?

59. El costo (en pesos) de transportar mercancía de una fábrica a un almacén está dado por $C(v) = v^2 - 180v + 12\,000$, donde v representa la velocidad (en km/h).

    a) ¿A qué velocidad se debe manejar para que el costo de transportación sea mínimo?
    b) ¿Cuál será el costo mínimo?

60. La ganancia mensual estimada (en dólares) obtenida por la empresa Olivetti al producir y vender x unidades de máquinas de escribir del modelo ET-1250md está dada por $U(x) = -0.04x^2 + 240x - 10\,000$. ¿Cuántas máquinas de escribir debe vender cada mes para maximizar sus ganancias?

61. Los costos fijos de una empresa son de \$1 200 dólares y los costos variables son de \$2 dólares por unidad. Si la ecuación de demanda está dada por $p = 100x^{-1/2}$, donde x es el número de unidades producidas, ¿cuántas unidades deben producirse y venderse para obtener una utilidad máxima?

62. El material (en metros cuadrados) para fabricar tiendas de campaña está dado por $f(x)=x^2+\dfrac{3\,456}{x}$, donde x representa la cantidad de unidades fabricadas. ¿Cuántas tiendas de campaña se pueden fabricar con el mínimo material?

63. La función de demanda de cierto artículo está dada por $p = 20e^{-x/5}$, donde p es el precio unitario, en miles de pesos, y x es la cantidad de unidades vendidas, en cientos. ¿Cuántas unidades se deben vender para obtener el máximo ingreso?

64. En el parque de diversiones Bosque Mágico se sabe que cuando el precio del boleto cuesta \$80 los visitantes son 210. Por cada \$5 que disminuye el precio del boleto, aumenta en 30 el número de visitantes. ¿A qué precio se debe vender el boleto para obtener el máximo ingreso?

65. La Constructora Fabela y Asociados ha estimado que el tiempo para terminar una construcción está dado por $T(x) = 0.25x^2 - 8x + 70$, donde x es el número de trabajadores. Obtén la cantidad necesaria de trabajadores para terminar la construcción en el menor tiempo posible.

66. Si la cantidad x demandada semanalmente de cierto vestido está relacionada con el precio unitario p, en dólares, mediante la ecuación de demanda $p=\sqrt{800-x}$.

    a) ¿Cuántos vestidos deben fabricarse y venderse por semana para obtener el máximo ingreso?

b) ¿Cuál sería el precio de venta?
c) ¿Cuál es el ingreso que se obtendría?

67. Una empresa produce un artículo que tiene las siguientes funciones de demanda y costo $p = 72 - 0.04q$ y $C = 500 + 30q$.

a) ¿Cuántas unidades deberán producirse y venderse para maximizar la utilidad?
b) ¿Cuál sería el precio de venta?
c) ¿Cuál es la utilidad que se obtendría?

68. Una empresa de televisión por cable tiene 4 800 suscriptores que pagan \$240 mensuales cada uno. Se estima que por cada \$20 que aumenta la cuota mensual, se pierden 160 suscriptores.

a) ¿Cuál deberá ser la cuota mensual para maximizar el ingreso?
b) ¿Cuántos suscriptores tendría la empresa?
c) ¿Cuál es el ingreso que se obtendría?

69. Se pretende construir una cerca alrededor de un terreno rectangular de 128 000 pies^2; uno de sus lados está frente a un acantilado. El costo por pie en el lado del acantilado es de \$1.50 dólares y \$2.50 en los demás lados.

a) ¿Cuáles son las medidas de los lados del rectángulo que hacen que el costo total sea mínimo?
b) ¿Cuál es el costo mínimo?

70. El propietario de un club campestre tiene 50 cabañas de lujo. Todas las cabañas son ocupadas cuando cobra \$2 500 por día, pero si aumenta \$850 el precio diario, no se ocupan 4 cabañas. El costo por servicio y mantenimiento de cada cabaña ocupada es de \$350 por día. ¿Cuánto debe cobrar por cabaña a fin de maximizar la utilidad?

71. Cierta universidad trata de determinar el precio que debe cobrar por los boletos para los partidos de fútbol americano. Cuando el precio del boleto es de \$20 se venden 70 000 entradas, pero si el precio se incrementa \$1 se pierden 1 000 entradas.

a) ¿Qué precio se debe cobrar por boleto a fin de maximizar los ingresos?
b) ¿Cuántas entradas se venderán a ese precio?

72. Un distribuidor compra pelotas de béisbol a un fabricante de artículos deportivos. El costo anual por la compra, posesión y mantenimiento del inventario está dado por medio de la siguiente función $C = q^2 + \dfrac{54}{q}$, donde q es el tamaño de pedido (en cientos de pelotas) y C indica el costo anual del inventario (en miles de pesos).

a) Determina el tamaño del pedido q que minimice el costo anual del inventario.
b) Determina los costos mínimos de inventario.

73. Cierto país estima que la demanda de automóviles está relacionada con el impuesto de exportación de acuerdo con la función $Q = 520 - 20x$, donde x es el porcentaje del impuesto y Q es el número de automóviles. Si los ingresos por exportación de automóviles están dados en miles de pesos:

a) Obtén la función de ingreso.
b) ¿Cuál debe ser el impuesto de exportación que produce el máximo ingreso.
c) ¿Cuál es ese máximo ingreso?

74. La fábrica de calefactores Calorex determina el precio de su producto de acuerdo con la función $P = 144 - 0.8x$, donde x es el número de calefactores, en cientos de unidades, y el costo total de producción de estos calefactores está dado por $C = 12 + 1.6x^2$, en miles de pesos.

a) ¿Cuántas unidades debe producir y vender la compañía a fin de maximizar la utilidad?
b) ¿Cuál es la máxima utilidad?

75. La propietaria de un negocio de pasteles caseros sabe que la demanda está dada por $x = 500 - 2p$, donde x es la cantidad de pasteles y p es el precio de cada uno de ellos.

a) ¿Cuál es el precio al que se debe vender cada pastel para obtener un ingreso máximo?
b) ¿Cuál es ese ingreso máximo?

76. El costo unitario, en pesos, de fabricar un artículo está dado por la función $C = 500 + \dfrac{2\,916}{x} + \dfrac{1}{4}x^2$, donde x son los cientos de unidades producidas.

a) Determina cuántas unidades se deben producir para que el costo sea mínimo.
b) ¿Cuál es ese costo mínimo?

77. El dueño de un negocio de elotes desea incrementar sus utilidades. Sus costos e ingresos semanales, en pesos, están dados por las siguientes funciones $C = 6x + 1\,200$ e $I = 15x - 3x^2 - x^3$, donde x representa los elotes vendidos, en miles. ¿Cuántos elotes tiene que vender a la semana para que su utilidad sea máxima?

78. Una compañía exportadora estima que los costos de embarque y almacenamiento de su producto están dados por la siguiente función $C = \dfrac{288}{x} + 0.2x + 300$, donde x son las unidades almacenadas.

¿Cuántas unidades debe almacenar para que sus costos sean mínimos?

79. El propietario de una escuela particular de secretarias bilingües, cuyo cupo es de 500 estudiantes, actualmente tiene inscritas a 250 alumnas, pagando una colegiatura de $6 000. Estudios realizados detectaron que por cada disminución de $150 en la colegiatura, se incrementa en 10 el número de alumnas inscritas.

   a) ¿Cuál debe ser el costo de la colegiatura para que el ingreso sea máximo?
   b) ¿Cuántas alumnas deben estar inscritas para que el ingreso sea máximo?
   c) ¿Cuál sería el ingreso máximo?

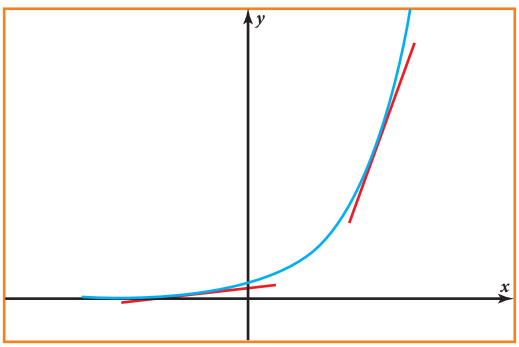
80. Una compañía de consultoría está diseñando un software para sus clientes, cuanto más se trabaje en él, más valor tendrá. Sin embargo, se demora t días en salir al mercado y se estima que el precio es $p = 100 + 20t$; por otra parte, cuanto más se demore en salir al mercado, menos ventas tendrá (debido a la competencia), de modo que si se demora t días podrían venderse $q = 1\,000 - 25t$ paquetes de software.

   ¿Cuántos días podrá demorarse en salir a la venta el software para obtener un ingreso máximo?

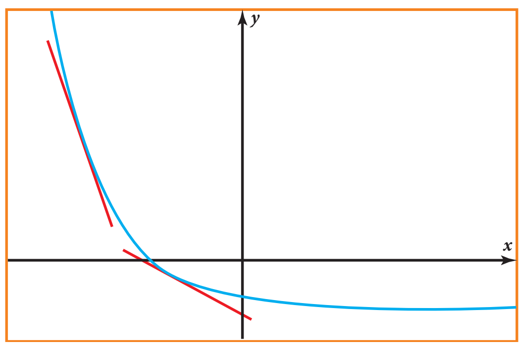
4.2 Concavidad y puntos de inflexión

La concavidad nos proporciona información acerca de la forma en que la gráfica de una función se *flexiona*, es decir, se vuelve curva.

Si trazamos rectas tangentes a una gráfica y ésta se encuentra siempre por arriba de las rectas tangentes, se dice que la gráfica es cóncava hacia arriba.

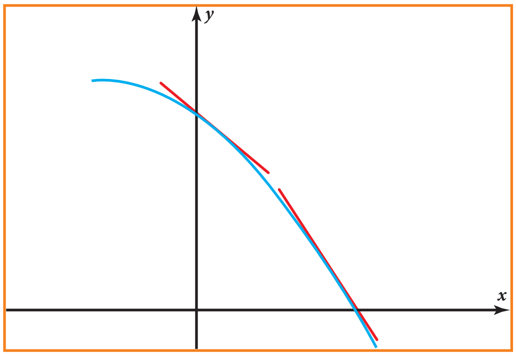


Función cóncava hacia arriba y creciente

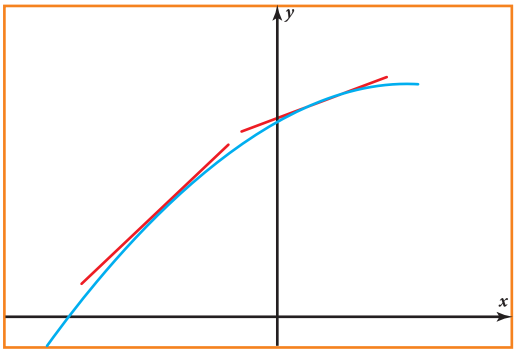


Función cóncava hacia arriba y decreciente

Observa que decir que la función es **cóncava hacia arriba**, no implica que la función sea creciente. De manera similar, si trazamos rectas tangentes a una gráfica y ésta se encuentra siempre por abajo de las rectas tangentes, se dice que la gráfica es **cóncava hacia abajo**.



Función cóncava hacia abajo y decreciente



Función cóncava hacia abajo y creciente

De nuevo, decir que la función es cóncava hacia abajo no implica que ésta sea decreciente.

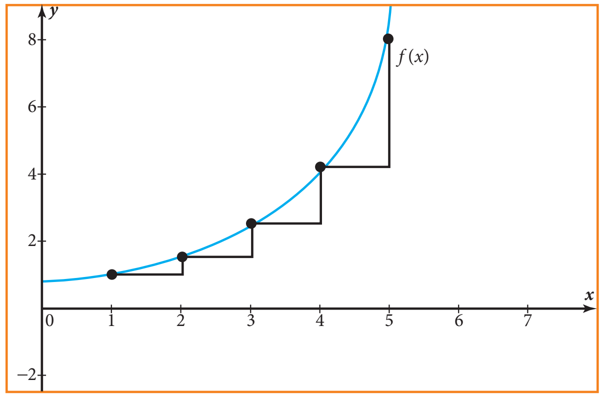
Qué información nos da la concavidad de una función acerca de su razón de cambio

Conocer la concavidad es importante, pues nos indica cómo cambia la función, si lo hace rápida o lentamente; esto es de gran utilidad sobre todo cuando la función representa una situación de la vida real, por ejemplo, una población, la demanda de un artículo, etcétera.

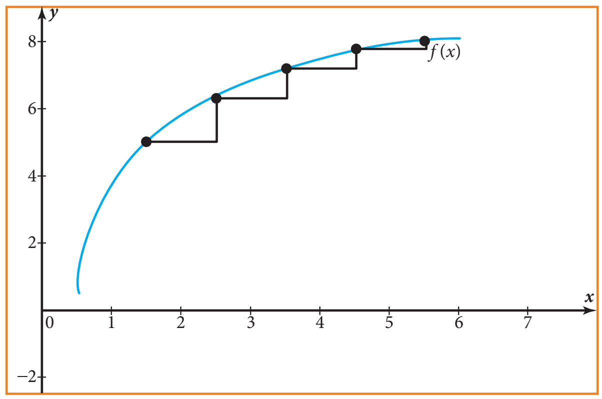
El siguiente análisis gráfico muestra cómo es la concavidad de una función de acuerdo con cómo se comporta su cambio promedio.

- Si el cambio promedio es **creciente**, entonces la gráfica de la función es *cóncava hacia arriba*.

> **Nota** Observa en la gráfica cómo el "escalón" se hace cada vez más grande. El escalón representa el cambio de un punto a otro en la función; por eso se dice que *la función crece rápido*.

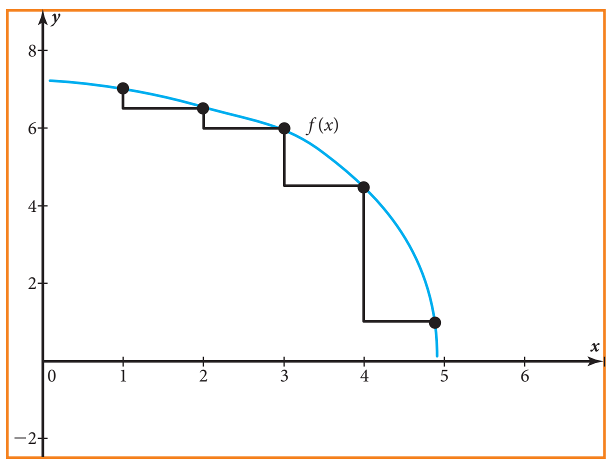


- Si el cambio promedio es decreciente, entonces la gráfica de la función es *cóncava hacia abajo*.



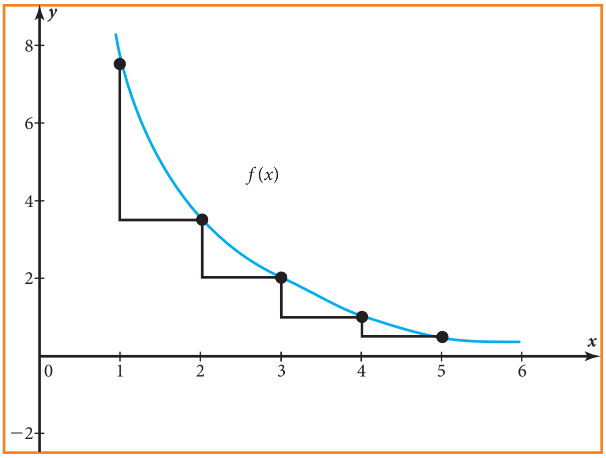
> **Nota** Observa en la gráfica cómo el "escalón" se hace cada vez más pequeño. El escalón representa el cambio de un punto a otro en la función; por eso se dice que *la función crece lento o despacio*.

- Si el cambio promedio es **decreciente**, entonces la gráfica de la función es *cóncava hacia abajo*.



Nota Observa en la gráfica cómo el "escalón" se hace cada vez más grande. El escalón representa el cambio de un punto a otro en la función; por eso se dice que *la función decrece rápido*.

- Si el cambio promedio es creciente, entonces la gráfica de la función es *cóncava hacia arriba*.



Nota Observa en la gráfica cómo el "escalón" se hace cada vez más pequeño. El escalón representa el cambio de un punto a otro en la función; por eso se dice que *la función crece lento o despacio*.

Ejemplo La siguiente información muestra la *tabla de amortización* para el financiamiento de una camioneta Voyager modelo 2000, en un trato directo con la agencia Chrysler Country a un plazo de 2 años, efectuado en febrero de 2000. (*Datos reales solicitados en la agencia mencionada.*)

Observa que las mensualidades son una cantidad fija. Por lo general, en una transacción de este tipo, de la mensualidad pagada, una parte se destina a capital y la otra a interés. La situación mencionada se presenta en este caso. Observa cómo al sumar capital + interés se obtiene la cantidad mensual pagada.

VALOR CHRYSLER

TABLA DE AMORTIZACIÓN — TASA DE INTERÉS: 18.00

MES	NETO A FIN.	CAPITAL	INTERÉS E IVA	MENSUAL
1	147,204.93	5,003.26	2,539.29	7,542.55
2	142,201.67	5,089.57	2,452.98	7,542.55
3	137,112.10	5,177.37	2,365.18	7,542.55
4	131,934.73	5,266.68	2,275.87	7,542.55
5	126,668.05	5,357.53	2,185.02	7,542.55
6	121,310.52	5,449.94	2,092.61	7,542.55
7	115,860.58	5,543.95	1,998.60	7,542.55
8	110,316.63	5,639.59	1,902.96	7,542.55
9	104,677.04	5,736.87	1,805.68	7,542.55
10	98,940.17	5,835.83	1,706.72	7,542.55
11	93,104.34	5,936.50	1,605.05	7,542.55
12	87,167.84	6,038.90	1,503.65	7,542.55
13	81,128.94	6,143.08	1,399.47	7,542.55
14	74,985.86	6,249.04	1,293.51	7,542.55
15	68,736.82	6,356.84	1,185.71	7,542.55
16	62,379.98	6,466.50	1,076.05	7,542.55
17	55,913.48	6,578.04	964.51	7,542.55
18	49,335.44	6,691.51	851.04	7,542.55
19	42,643.93	6,806.94	735.61	7,542.55
20	35,836.99	6,924.36	618.19	7,542.55
21	28,912.63	7,043.81	498.74	7,542.55
22	21,868.82	7,165.31	377.24	7,542.55
23	14,703.51	7,288.91	253.64	7,542.55
24	7,414.60	7,414.60	127.95	7,542.55
		147,204.93	33,816.27	181,021.20

a) Dibuja la gráfica para la cantidad de dinero mensual asignada a capital.

Lo primero que debemos hacer es identificar qué tipo de función es. Si se trata de una exponencial, debe tener un factor de cambio constante. Comprobémoslo dividiendo los términos:

$$\frac{\text{segundo}}{\text{primero}} = \frac{5\,089.57}{5\,003.26} = 1.0172$$

$$\frac{\text{tercero}}{\text{segundo}} = \frac{5\,177.37}{5\,089.57} = 1.0172$$

$$\frac{\text{cuarto}}{\text{tercero}} = \frac{5266.68}{5177.37} = 1.0172, \text{ y así sucesivamente;}$$

$$\frac{\text{término 24}}{\text{término 23}} = \frac{7\,414.60}{7\,288.91} = 1.0172.$$

Hasta la cuarta cifra decimal podemos decir que la función se ajusta a un modelo exponencial, ya que al dividir los términos siempre obtenemos el mismo resultado, es decir, la función tiene un factor de cambio constante.

La gráfica debe ser una curva creciente, pues los valores de capital aumentan; para determinar la concavidad, determinamos el cambio promedio de un mes a otro. Recuerda que éste se obtiene restando los términos.

Cambio promedio en los dos primeros meses:

$$m = \frac{5\,089.57 - 5\,003.26}{2-1} = 86.31.$$

Cambio promedio en segundo y tercer mes:

$$m = \frac{5\,177.37 - 5\,089.57}{3-2} = 87.8.$$

Cambio promedio en el tercer y cuarto mes:

$$m = \frac{5\,266.68 - 5\,177.37}{4-3} = 89.31.$$

Cambio promedio en el cuarto y quinto mes:

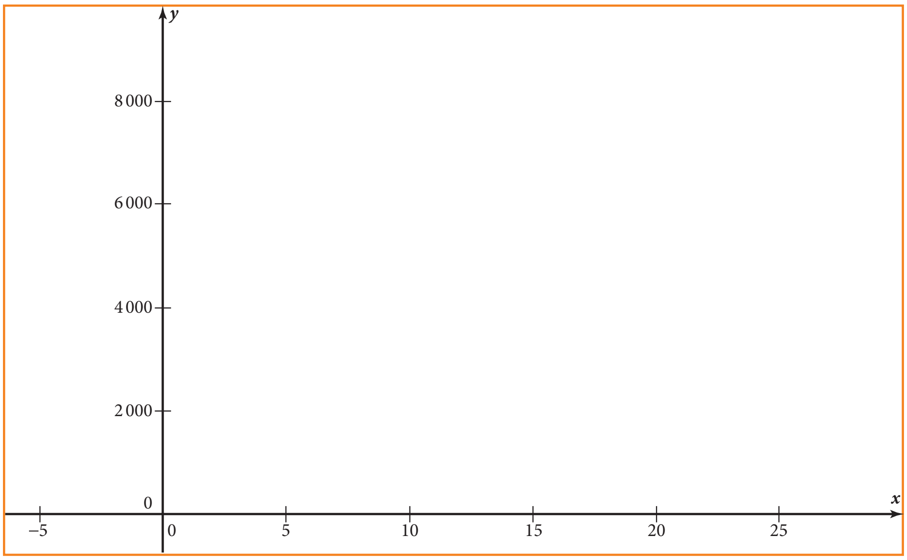
$$m = \frac{5\,357.53 - 5\,266.68}{5-4} = 90.85.$$

Y así sucesivamente.

Cambio promedio en el mes 23 y 24:

$$m = \frac{7\,414.60 - 7\,288.91}{24-23} = 125.69.$$

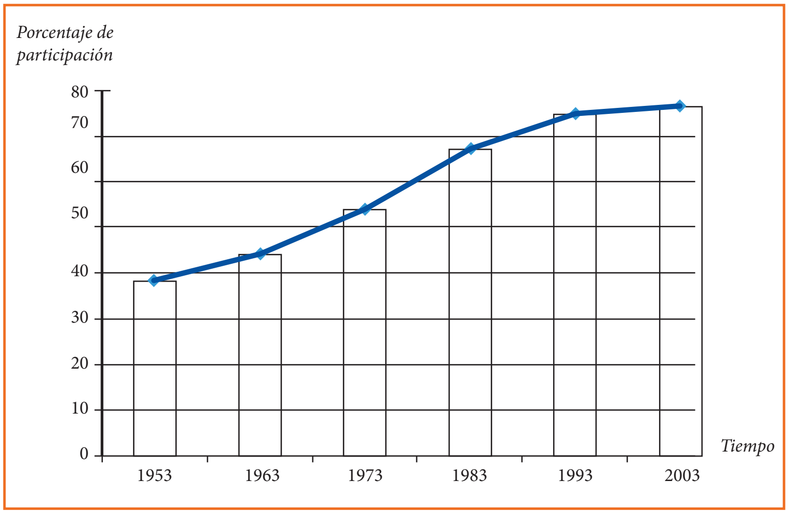
Observa que el cambio promedio aumenta, por lo que la concavidad debe ser hacia arriba. Por lo tanto, la gráfica de la función es una curva creciente cóncava hacia arriba. ¡Dibújala!



Nota

Sabemos que, en general, las gráficas no son exclusivamente cóncavas hacia arriba o hacia abajo, el siguiente ejemplo es una muestra de ello.

¡A reflexionar! La gráfica que se presenta a continuación muestra el porcentaje de participación de la mujer, con edades entre 25 y 54 años, en la fuerza laboral, como una función del tiempo medido en décadas desde 1953 hasta 2003. (*Fuente*: adaptado del artículo "The New Gender Gap", revista *BusinessWeek*, 26 de mayo de 2003, p. 79.)



El porcentaje de participación de la mujer en la fuerza laboral, ¿está aumentando o disminuyendo?

____

¿Por qué? ______________________________

¿Cómo es la concavidad de la gráfica entre 1953 y 1973? ____________________________

¿Y entre 1983 y 2003? ____________________

Como podemos observar, aunque la gráfica siempre es creciente, entre 1953 y 1963 el incremento es pequeño; sin embargo, a medida que transcurren los años aumenta con rapidez. De hecho, entre 1973 y 1983 se presentó el crecimiento más rápido en el porcentaje de participación, y es precisamente entre esos años que la gráfica cambia de concavidad, ya que en las décadas siguientes, aunque el porcentaje de participación de la mujer en la fuerza laboral continúa incrementándose, lo hizo con menor rapidez.

El valor de t en el que cambia la concavidad puede interpretarse como el *valor de participación decreciente*, lo cual no implica que la participación de la mujer en la fuerza laboral disminuya, sino que aumenta menos rápido.

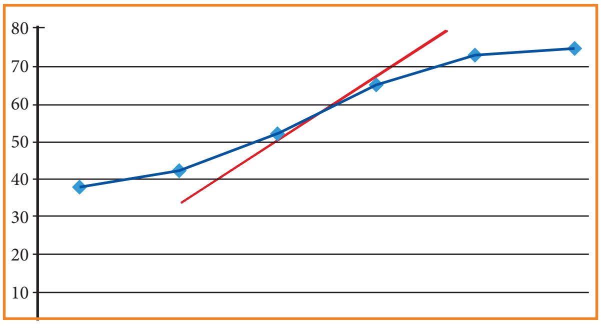
En Matemáticas, a los puntos en los que la concavidad cambia se les llama **puntos de inflexión**.

A continuación damos la definición formal.

Se dice que una función f tiene un punto de inflexión en $x = a$, si cumple con las siguientes condiciones:

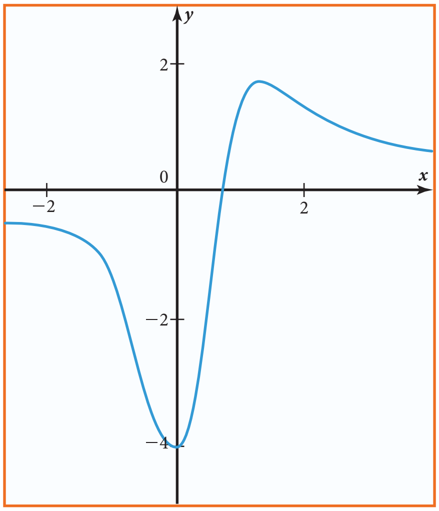
1. **$x = a$ pertenece al dominio de la función.**
2. **La gráfica de f cambia de concavidad en $x = a$.**
3. **La gráfica de f tiene una recta tangente en el punto $(a, f(a))$.**

Comprueba visualmente que la gráfica para el porcentaje de participación de la mujer en la fuerza laboral cumple con las tres condiciones anteriores.



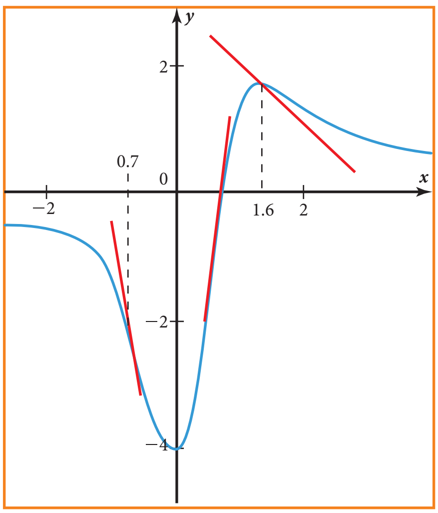
Observa cómo en el punto de inflexión la recta tangente corta a la gráfica; esto se debe al cambio de concavidad.

Ejemplo 1 Estima los valores de x donde se encuentran los puntos de inflexión de la función dada en la siguiente gráfica.



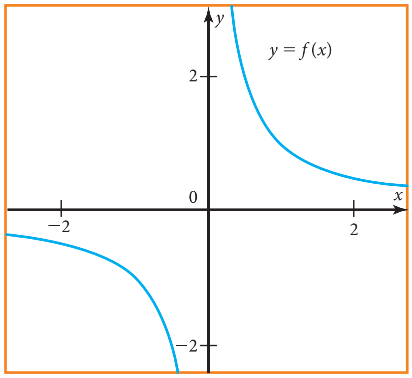
Solución Para encontrar los puntos de inflexión en la gráfica de una función, basta con observar en dónde cambia la concavidad; para ello trazamos las rectas tangentes a la curva. En los puntos en donde la recta tangente corte a la curva, ahí estarán los puntos de inflexión.

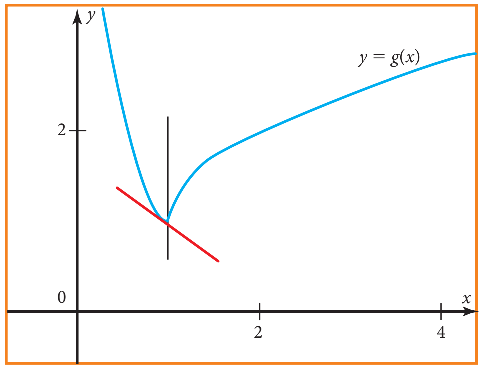
Observamos que los puntos de inflexión ocurren aproximadamente en $x = -0.7$, $x = 0.7$ y en $x = 1.6$.



Cabe aclarar que no es suficiente que una gráfica cambie de concavidad en un punto para que éste sea de inflexión, se deben cumplir las tres condiciones. A continuación presentamos algunas gráficas de funciones donde la concavidad cambia y, sin embargo, los puntos donde eso ocurre no se consideran de inflexión.

Ejemplo 2 Justifica por qué las siguientes gráficas no tienen puntos de inflexión.





Solución La gráfica de la función $y = f(x)$ es cóncava hacia abajo a la izquierda de $x = 0$, y cóncava hacia arriba a la derecha de $x = 0$; sin embargo, en $x = 0$ la función no está definida, lo cual significa que $x = 0$ no pertenece al dominio de la función. Por lo tanto, aunque la función cambia de concavidad en $x = 0$, éste no es un punto de inflexión.

La gráfica de la función y $= f(x)$ sí está definida en $x = 1$, y en ese valor la gráfica cambia de concavidad; sin embargo, no se considera punto de inflexión, ya que en ese punto se pueden trazar dos rectas que sólo cumplen con la tangencia en forma unilateral, por lo tanto, *no existe* recta tangente en $x = 1$.

Nota Esta situación es muy común en las funciones seccionadas, pero en este texto no estudiaremos este tipo de funciones, por lo que en adelante no tendremos que verificar la tercera condición de los puntos de inflexión.

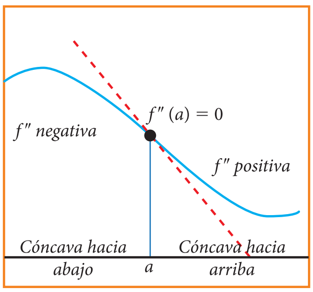
Hasta el momento hemos aprendido a localizar puntos de inflexión a partir de una gráfica, ahora veremos la forma de encontrar puntos de inflexión a partir de una ecuación.

Cómo localizar los puntos de inflexión a partir de una ecuación

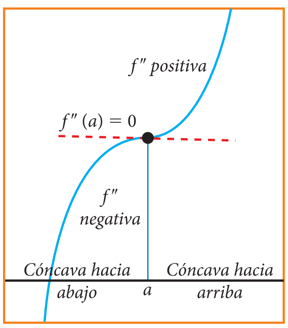
En el capítulo anterior aprendimos que la segunda derivada nos da información acerca de la concavidad de una función, así que los valores de x en donde podrían existir puntos de inflexión pueden obtenerse con la segunda derivada.

Sabemos que si $f''(x)$ es positiva, la gráfica de la función $f(x)$ es cóncava hacia arriba, y que si es $f''(x)$ es negativa, la gráfica de la función $f(x)$ es cóncava hacia abajo; por lo tanto, para que la concavidad cambie en un valor de x, es necesario que en ese punto la segunda derivada cambie de signo. Entonces, en el punto de inflexión, la segunda derivada deberá ser cero o puede darse el caso de que no exista.

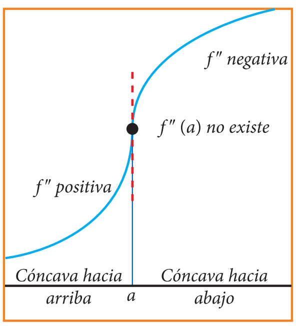
Observa las siguientes gráficas. Las gráficas 1 y 2 muestran puntos de inflexión en los que la segunda derivada es cero, mientras que la gráfica 3 presenta un punto de inflexión en el que la segunda derivada no existe.



Gráfica 1



Gráfica 2



Gráfica 3

Sin embargo, debemos tener cuidado, ya que no siempre la gráfica de una función tiene un punto de inflexión en los valores de x donde la segunda derivada sea cero o no exista.

La forma de obtener los posibles valores de x donde podrían existir puntos de inflexión es similar a la de los números críticos, sólo que ahora utilizamos la segunda derivada.

Posibles valores de *x* donde pueden existir puntos de inflexión

Aquellos valores del dominio de la función, en los cuales la segunda derivada sea cero o no exista, representarán los *posibles* valores de x donde pueden existir puntos de inflexión.

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{(la segunda derivada es cero en los valores de x en los que el numerador es cero)} \\ \text{no existe} & \text{(la segunda derivada no existe en los valores de } x \text{ en los que el denominador es cero)} \end{cases}$$

Los siguientes ejercicios nos ayudarán a comprobar lo dicho anteriormente. Lo haremos a partir de funciones muy sencillas cuyas gráficas conocemos.

Construcción Utiliza la segunda derivada para obtener los posibles puntos de inflexión para la función $f(x) = x^{1/3}$, luego traza la gráfica de la función para determinar si los puntos obtenidos son o no puntos de inflexión.

Solución Recuerda que los posibles valores de x en donde podrían existir puntos de inflexión son aquellos valores del dominio de la función en los cuales se cumple que:

$$f''(x) = \begin{cases} 0 \\ \text{no existe} \end{cases}$$

Encuentra $f'(x) =$ ______________________.

Encuentra $f''(x) =$ ______________________.

¿En qué valores de x la segunda derivada es cero? $x =$ ______________________.

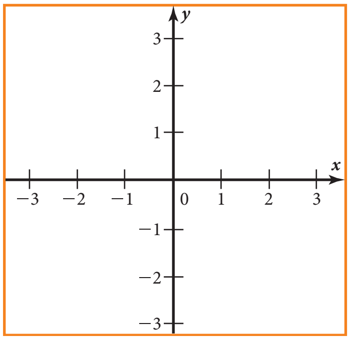
¿En qué valores de x la segunda derivada no existe? $x =$ ______________________.

¿El valor de x obtenido pertenece al dominio de la función? Es decir, ¿la función existe en ese punto? ____________

En este valor de x puede existir un punto de inflexión.

Ahora traza la gráfica de la función $f(x) = x^{1/3}$. Como se trata de una función muy conocida, no necesitamos un graficador.

Dibuja la gráfica:



En el valor obtenido, ¿existe un punto de inflexión? ____________________

¿Por qué? ________________________________
____

Construcción Utiliza la segunda derivada para obtener los posibles puntos de inflexión para la función $f(x) = x^4$. Luego traza la gráfica de la función para determinar si los puntos obtenidos son o no son de inflexión.

Solución Encuentra $f'(x) =$ ______________.

Encuentra $f''(x) =$ ________________________.

¿En qué valores de x la segunda derivada vale cero? $x =$ ____________________________.

Como no hay denominador en la segunda derivada, eso significa que los únicos posibles puntos de inflexión son aquellos en los que la segunda derivada sea cero.

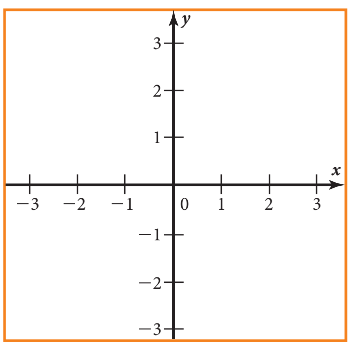
El valor de x obtenido, ¿pertenece al dominio de la función? ____________________________

¿En este valor de x puede existir un punto de inflexión? ____________________________

Ahora traza la gráfica de la función $f(x) = x^4$.

Como se trata de una función muy conocida, no necesitamos un graficador.

Dibuja la gráfica:



En el valor obtenido, ¿existe un punto de inflexión? ____________________

¿Por qué? ________________________________
____
____

Nota De los ejemplos anteriores concluimos que, en efecto, no todo punto en el cual la segunda derivada es cero o no existe, es un punto de inflexión en la gráfica de la función.

En los ejercicios anteriores, nos apoyamos en las gráficas de las funciones para decidir si existía o no un punto de inflexión; sin embargo, no siempre podemos graficar con facilidad.

¿Qué hacer para determinar los puntos de inflexión cuando la gráfica no es conocida?

Paso 1: encontramos los posibles puntos de inflexión.

Paso 2: determinamos el signo de la segunda derivada por la izquierda y la derecha de cada posible valor de x donde podría existir un punto de inflexión.

Paso 3: analizamos los signos de la segunda derivada.

Si de izquierda a derecha del posible valor de x donde podría existir punto de inflexión cambia el signo de la segunda derivada, concluimos que sí hay un punto de inflexión.

Si de izquierda a derecha del posible valor de x donde podría existir un punto de inflexión no cambia el signo de la segunda derivada, concluimos que no hay un punto de inflexión.

Ejercicio 1 Utiliza la segunda derivada para determinar los puntos de inflexión de la función $f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{5}{12}x^4$ y determina los intervalos en los que la función es cóncava hacia arriba y en los que es cóncava hacia abajo.

Solución Paso 1: determinamos los posibles valores de x donde podrían existir puntos de inflexión; para ello necesitamos obtener la segunda derivada.

La primera derivada de la función está dada por

$$f'(x) = \frac{5}{20}x^4 - \frac{20}{12}x^3.$$

Y al volverla a derivar obtenemos

$$f''(x) = x^3 - 5x^2.$$

Recuerda que los posibles puntos de inflexión ocurren en aquellos valores de x que pertenecen al dominio de la función donde se cumple que $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ no existe.

En este caso la función es polinomial, por lo que su dominio son todos los números reales.

¿En qué valores del dominio la segunda derivada vale cero? Al igualar a cero la segunda derivada, obtenemos la ecuación $x^3 - 5x^2 = 0$.

Para resolverla extraemos como factor común a x^2 y obtenemos $x^2(x - 5) = 0$.

Al igualar cada factor a cero y despejar x de cada uno de ellos nos queda:

De $x^2 = 0$ obtenemos que $x = 0$.

De $x - 5 = 0$ obtenemos que $x = 5$.

Así que $x = 0$ y $x = 5$ serán los valores de x donde podrían existir puntos de inflexión.

¿En qué valores del dominio la segunda derivada no existe? Recuerda que la segunda derivada no existe en los valores de x donde el denominador es cero, pero como en este caso no hay denominador, los únicos posibles valores de x donde podría existir un punto de inflexión serán los valores de x en los que la segunda derivada sea cero.

Paso 2: determinamos el signo de la segunda derivada por la izquierda y derecha de cada valor de x donde es posible que exista un punto de inflexión.

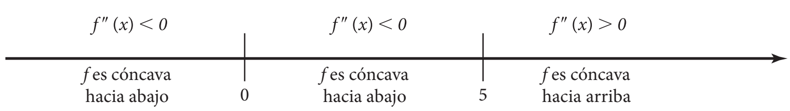
En una recta numérica marcamos los valores de x:

Observa cómo la recta queda dividida en tres intervalos, debemos determinar si el signo de la segunda derivada es positivo o negativo en cada uno de los intervalos; para ello elegimos un valor de x dentro del intervalo y lo sustituimos en la segunda derivada (el signo de la segunda derivada será siempre el mismo para cualquier valor de x que tomemos dentro de cada intervalo).

Podemos escribir la información en una tabla de datos de la siguiente forma:

Intervalo	Número seleccionado	Sustituir en la segunda derivada el número seleccionado	Signo de la segunda derivada	Conclusión acerca de la concavidad de *f*
$(-\infty, 0)$	Puede ser $x = -1$	$f''(-1) = -6$	Negativo	Cóncava hacia abajo
$(0, 5)$	Puede ser $x = 1$	$f''(1) = -4$	Negativo	Cóncava hacia abajo
$(5, +\infty)$	Puede ser $x = -6$	$f''(6) = 36$	Positivo	Cóncava hacia arriba

Con los resultados obtenidos, la recta numérica queda como:



Paso 3: analizamos los signos de la segunda derivada.

Observa que de izquierda a derecha del punto $x = 0$ la segunda derivada no cambia de signo, por lo que concluimos que $x = 0$ no es un valor de x donde exista un punto de inflexión de la gráfica de la función.

De izquierda a derecha del punto $x = 5$, la segunda derivada cambia de negativa a positiva, por lo que concluimos que en el punto donde $x = 5$ la gráfica de la función tiene un punto de inflexión.

Si queremos obtener la ordenada y del valor de x, debemos sustituir $x = 5$ en la función original:

$$f(x)=\frac{1}{20}x^5-\frac{5}{12}x^4;$$

al hacerlo nos queda como

$$f(5)=\frac{1}{20}(5)^5-\frac{5}{12}(5)^4=-104.166666.$$

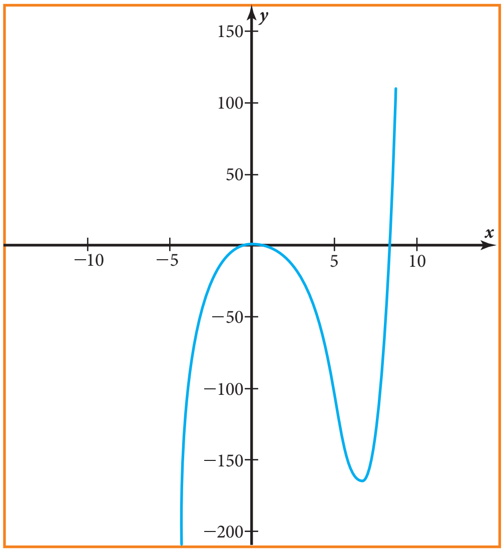
Por lo que el punto de inflexión es

$$(5,\ -104.166666).$$

Para obtener los intervalos en los que la función es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo basta observar el resumen de resultados que aparece en la recta numérica. Entonces concluimos que la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $(5, +\infty)$.

Nota Como la función es cóncava hacia abajo tanto por la izquierda como por la derecha de $x = 0$, podemos concluir que es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, 5)$.

Podemos comprobar los resultados obtenidos si vemos la gráfica de la función original $f(x)=\frac{1}{20}x^5-\frac{5}{12}x^4$. Si utilizamos un graficador, tenemos que la gráfica de la función es:



Ejercicio 2 Utiliza la segunda derivada para determinar los puntos de inflexión de la función $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{3}x^3$ y determina los intervalos en los que la función es cóncava hacia arriba y en los que es cóncava hacia abajo.

Solución Paso 1: determinamos los posibles valores de x donde podrían existir puntos de inflexión; para ello necesitamos obtener la segunda derivada.

La primera derivada de la función está dada por $f'(x) = -x^{-2} - x^2$, y al volverla a derivar obtenemos $f''(x) = 2x^{-3} - 2x$, que es igual a $f''(x)=\frac{2}{x^3}-2x$.

Efectuamos la resta sacando a x^3 como común denominador y obtenemos:

$$f''(x)=\frac{2-2x^4}{x^3}.$$

Recuerda que los posibles valores de x donde podrían existir puntos de inflexión ocurren en aquellos valores de x que pertenecen al dominio de la función donde se cumple que $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ no existe.

En este caso el dominio de la función son todos los números reales, excepto $x = 0$, ya que en este valor la función no existe.

¿En qué valores del dominio la segunda derivada es cero? Para encontrar los valores de x que hacen cero la segunda derivada de la función, igualamos el numerador a cero y despejamos x, al hacerlo obtenemos: $2 - 2x^4 = 0$.

Al restar 2 en ambos miembros de la igualdad, nos queda $-2x^4 = -2$.

Al dividir ambos miembros de la igualdad entre -2 se obtiene $x^4 = 1$.

Al extraer raíz cuarta en ambos miembros de la igualdad obtenemos que $x = 1$ y $x = -1$.

¿En qué valores del dominio la segunda derivada no existe? Recuerda que la segunda derivada *no* existe en los valores de x donde el denominador es cero.

Igualamos a cero el denominador de la segunda derivada, y la ecuación que nos queda por resolver es: $x^3 = 0$; al extraer raíz cúbica en ambos miembros de la ecuación obtenemos que $x = 0$.

Como el cero *no* pertenece al dominio de la función, lo descartamos como punto de inflexión de la misma.

Entonces tenemos que los únicos posibles valores de x donde podrían existir puntos de inflexión son $x = 1$ y $x = -1$.

Paso 2: determinamos el signo de la segunda derivada por la izquierda y por la derecha de cada valor de x donde podrían existir puntos de inflexión.

En una recta numérica marcamos los valores de x donde podrían existir puntos de inflexión.

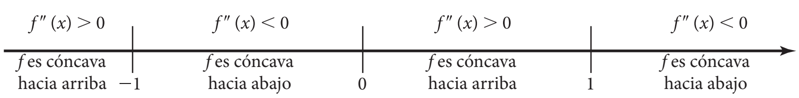
Nota Aunque el cero no es un valor de x donde podría existir un punto de inflexión de la función, sí lo tomaremos en cuenta para delimitar los intervalos y analizar cómo es la concavidad de la función en valores anteriores y posteriores a él.

Observa que la recta queda dividida en cuatro intervalos. Debemos determinar si el signo de la segunda derivada es positivo o negativo en cada uno de los intervalos; para ello seleccionamos un valor de x dentro del intervalo y lo sustituimos en la segunda derivada (el signo de la segunda derivada será siempre el mismo para cualquier valor de x que tomemos dentro de cada intervalo).

Podemos escribir la información en una tabla de datos de la siguiente forma:

Intervalo	Número seleccionado	Sustituir en la segunda derivada el número seleccionado	Signo de la segunda derivada	Conclusión acerca de la concavidad de f
$(-\infty, -1)$	Puede ser $x = -2$	$f''(-2) = 15/4$	Positivo	Cóncava hacia arriba
$(-1, 0)$	Puede ser $x = -1/2$	$f''(-1/2) = -15$	Negativo	Cóncava hacia abajo
$(0, 1)$	Puede ser $x = 1/2$	$f''(1/2) = 15$	Positivo	Cóncava hacia arriba
$(1, +\infty)$	Puede ser $x = 2$	$f''(2) = -15/4$	Negativo	Cóncava hacia abajo

Con los resultados obtenidos la recta numérica queda como:



Paso 3: analizamos los signos de la segunda derivada.

Observa que de izquierda a derecha de $x = -1$ la segunda derivada cambia de positiva a negativa, por lo que concluimos que es el punto donde $x = -1$ es un valor donde existe un punto de inflexión en la gráfica de la función.

De izquierda a derecha de $x = 1$, la segunda derivada cambia de positiva a negativa, por lo que concluimos que en el punto donde $x = 1$ la gráfica de la función tiene un punto de inflexión.

Aunque en $x = 0$ la segunda derivada cambia de signo, recuerda que no es un valor de x donde existe un punto de inflexión, ya que éste no pertenece al dominio de la función.

Si queremos obtener la ordenada y de cada uno de los valores de x donde existe el punto de inflexión, debemos sustituir $x = -1$ y $x = 1$ en la función original:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{3}x^3;$$

al hacerlo nos quedaría:

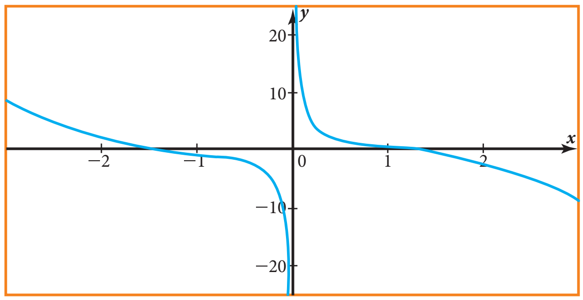
$$f(-1) = -2/3 \quad \text{y} \quad f(1) = 2/3.$$

Por lo tanto, los puntos de inflexión son

$$(-1, -2/3) \quad \text{y} \quad (1, 2/3).$$

Para obtener los intervalos en los que la función es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo basta observar el resumen de resultados que aparece en la recta numérica. Entonces, concluimos que la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

Podemos comprobar los resultados obtenidos, si vemos la gráfica de la función original $f(x) = \frac{1}{x}-\frac{1}{3}x^3$. Si utilizamos un graficador, tenemos que la gráfica de la función es:



Ejercicio 1 Utiliza la segunda derivada para determinar los puntos de inflexión de la función y los intervalos en los que la función es cóncava hacia arriba y en los que es cóncava hacia abajo.

$$f(x)=\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{2}x^3-x^2+8x-7$$

Solución Paso 1: determina los posibles valores de x donde podrían existir puntos de inflexión.

Encuentra $f'(x)=$ ______________________________.

Encuentra $f''(x)=$ ______________________________.

Plantea y resuelve la ecuación para determinar los valores de x en los que la segunda derivada es cero.

Plantea y resuelve la ecuación para determinar los valores de x en los que la segunda derivada no existe.

¿Los valores de x obtenidos pertenecen al dominio de la función? ________________

Paso 2: determina el signo de la segunda derivada por la izquierda y por la derecha de cada valor de x donde podrían existir puntos de inflexión.

Dibuja en la recta numérica los posibles valores de x donde podrían existir puntos de inflexión.

Completa la información de la tabla.

Intervalo	Número seleccionado	Sustituir en la segunda derivada el número seleccionado	Signo de la segunda derivada	Conclusión acerca de la concavidad de $f(x)$

Paso 3: analiza los signos de la segunda derivada.

Respuesta:

Punto(s) de inflexión: ______________________________.

Cóncava hacia arriba en: ______________________________.

Cóncava hacia abajo en: ______________________________.

Ejercicio 2 Encuéntralos ahora en la función $f(x) = (x - 1)^3 + 4x$.

Solución Paso 1: determina los posibles valores de x en donde podrían existir puntos de inflexión.

Encuentra $f'(x) =$ ______________________________ .

Encuentra $f''(x) =$ ______________________________ .

Plantea y resuelve la ecuación para determinar los valores de x en los que la segunda derivada vale cero.

Plantea y resuelve la ecuación para determinar los valores de x en los que la segunda derivada no existe.

¿Los valores de x obtenidos pertenecen al dominio de la función? ______________

Paso 2: determina el signo de la segunda derivada por la izquierda y por la derecha de cada valor de x donde podrían existir puntos de inflexión.

Dibuja en la recta numérica los posibles valores de x donde podrían existir puntos de inflexión.

Completa la información de la tabla.

Intervalo	Número seleccionado	Sustituir en la segunda derivada el número seleccionado	Signo de la segunda derivada	Conclusión acerca de la concavidad de $f(x)$

Paso 3: analiza los signos de la segunda derivada.

Respuesta:

Punto(s) de inflexión: ____ .

Cóncava hacia arriba en: ____ .

Cóncava hacia abajo en: ____ .

Ejercicio 3 Encuéntralos para $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.

Solución Paso 1: determina los posibles valores de x donde podrían existir puntos de inflexión.

Encuentra $f'(x) =$ ____ .

Encuentra $f''(x) =$ ____ .

Plantea y resuelve la ecuación para determinar los valores de x en los que la segunda derivada es cero.

Plantea y resuelve la ecuación para determinar los valores de x en los que la segunda derivada no existe.

¿Los valores de x obtenidos pertenecen al dominio de la función? _______________

Paso 2: determina el signo de la segunda derivada por la izquierda y por la derecha de cada valor de x donde podrían existir puntos de inflexión.

Dibuja en la recta numérica los posibles valores de x donde podrían existir puntos de inflexión.

Completa la información de la tabla.

Intervalo	Número seleccionado	Sustituir en la segunda derivada el número seleccionado	Signo de la segunda derivada	Conclusión acerca de la concavidad de $f(x)$

Paso 3: analiza los signos de la segunda derivada.

Respuesta:

Punto(s) de inflexión: ____.

Cóncava hacia arriba en: ____.

Cóncava hacia abajo en: ____.

Ejercicio 4 Encuéntralos ahora para $f(x) = 2x + 3x^{2/3}$.

Solución Paso 1: determina los posibles valores de x donde podrían existir puntos de inflexión.

Encuentra $f'(x) =$ ____.

Encuentra $f''(x) =$ ____.

Plantea y resuelve la ecuación para determinar los valores de x en los que la segunda derivada es cero.

Plantea y resuelve la ecuación para determinar los valores de x en los que la segunda derivada no existe.

¿Los valores de x obtenidos pertenecen al dominio de la función? _____________

Paso 2: determina el signo de la segunda derivada por la izquierda y por la derecha de cada valor de x donde podrían existir puntos de inflexión.

Dibuja en la recta numérica los posibles valores de x donde podrían existir puntos de inflexión.

Completa la información de la tabla.

Intervalo	Número seleccionado	Sustituir en la segunda derivada el número seleccionado	Signo de la segunda derivada	Conclusión acerca de la concavidad de $f(x)$

Paso 3: analiza los signos de la segunda derivada.

Respuesta:

Punto(s) de inflexión: ____________________________.

Cóncava hacia arriba en: ____________________________.

Cóncava hacia abajo en: ____________________________.

Conjunto de ejercicios de práctica 4.2

En los siguientes ejercicios utiliza la segunda derivada para determinar los puntos de inflexión de la función, y los intervalos en donde la función es cóncava hacia arriba y en donde es cóncava hacia abajo. Dibuja la gráfica de $f(x)$ para comprobar los resultados.

1. $f(x)=\frac{1}{2}x^3+2x^2+2x-5$
2. $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 24$
3. $f(x) = x^3 - 7x^2 + 16x + 8$
4. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$
5. $f(x)=\frac{1}{6}x^4+\frac{5}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2+10$
6. $f(x)=4x-27x^2+x^3+\frac{1}{3}x^4$
7. $f(x) = x^4 + 12x^3 - 42x^2 + 24x - 12$
8. $f(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{19}{6}x^3-\frac{7}{2}x^2+x+5$
9. $f(x)=x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2-3x+1$
10. $f(x)=\frac{49}{12}x^4+\frac{7}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$
11. $f(x) = -x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 72x - 24$
12. $f(x) = -x^4 + 16x^3 - 96x^2 - 28$
13. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 60x - 14$
14. $f(x)=\frac{1}{12}x^4+x^2-x$
15. $f(x) = -2x^4 - 20x^2 + 8$
16. $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 24x^2 - 36x + 8$
17. $f(x)=2-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{20}x^5$
18. $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{5}{3}x^4-16x^3$
19. $f(x)=\frac{x^5}{10}-\frac{5}{6}x^3+2x-1$
20. $f(x) = 6x^5 - 5x^4 - 30x^3 + 4$
21. $f(x)=\frac{9}{5}x^5-2x^4+6x-12$
22. $f(x)=\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{10}x^5+2x+12$
23. $f(x)=3+2x-\frac{1}{20}x^5+\frac{5}{12}x^4$
24. $f(x) = 25x^4 - 12x^5 + 2$
25. $f(x)=\frac{3}{10}x^6+\frac{6}{5}x^5+\frac{4}{3}x^4$
26. $f(x)=\frac{1}{20}x^5-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{3}x^3+1$
27. $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{x^4}{3}+\frac{x^3}{6}+x-1$
28. $f(x)=\frac{25}{6}x^3-\frac{5}{3}x^4-2x+\frac{1}{5}x^4$
29. $f(x) = x^5 + 5x^3 + 20x$
30. $f(x)=\frac{3}{10}x^5+25x^3+6x-16$
31. $f(x) = 9x^5 + 40x^4 - 25$
32. $f(x)=\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{6}x^3+3x+22$
33. $f(x)=\frac{2}{x^2+1}$
34. $f(x)=\frac{-8}{x^2+25}$
35. $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2-3}$
36. $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$
37. $f(x) = (2x - 4)^{1/3}$
38. $f(x) = (x + 2)^{1/5} - 1$
39. $f(x) = 6 - x^{1/7}$
40. $f(x) = (x + 3)^{3/5}$
41. $f(x) = (2x - 4)^{4/3} + 2$
42. $f(x) = (x + 5)^{5/3} - x - 8$

En los ejercicios 43 a 52, utiliza un graficador para determinar los puntos de inflexión de la función, y los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba y donde es cóncava hacia abajo.

43. $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2-1}$

44. $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-4}$

45. $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-1}$

46. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+7}$

47. $f(x) = (x^2 - 3x)^{1/3}$

48. $f(x) = (x^2 - 4)^{5/3}$

49. $f(x) = (x^3 - x)^{1/7}$

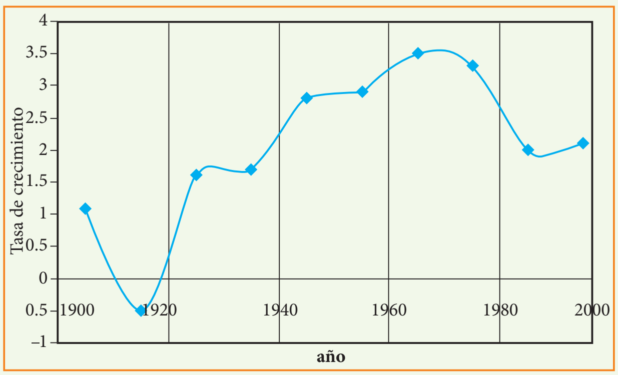
50. $f(x)=x^2\sqrt{9-x^2}$

51. $f(x)=x^2\sqrt{1-x}$

52. $f(x) = x^{-5/3} + 5x^{2/3}$

En los siguientes ejercicios realiza lo que se te pide.

53. La siguiente gráfica muestra la tasa de crecimiento de la población en México en el periodo de 1900 a 2000.



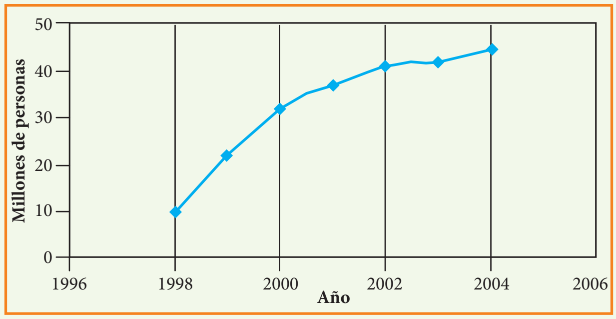
a) ¿En qué periodo la razón con que cambia la tasa de crecimiento es creciente y cómo es la concavidad en ese periodo?

b) ¿En qué periodo la razón con que cambia la tasa de crecimiento es decreciente y cómo es la concavidad en ese periodo?

c) ¿En qué año la tasa de crecimiento crece más rápidamente? (Punto de tasa de crecimiento decreciente.)

d) ¿En qué año la tasa de crecimiento decrece más rápidamente? (Punto de tasa de crecimiento creciente.)

54. La siguiente gráfica muestra el número de usuarios de telefonía móvil (millones de personas) en América Latina, en el periodo de 1998 a 2004.



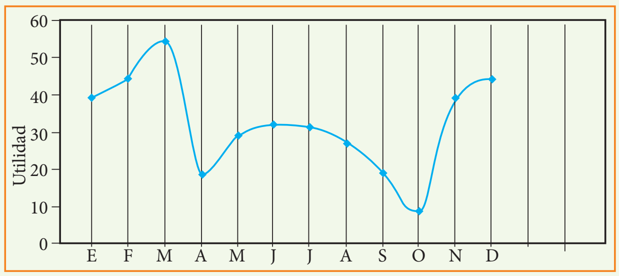
a) ¿En qué periodo la razón con que cambia el número de usuarios de telefonía móvil es creciente y cómo es la concavidad en ese periodo?

b) ¿En qué periodo la razón con que cambia el número de usuarios de telefonía móvil es decreciente y cómo es la concavidad en ese periodo?

c) ¿En qué año el número de usuarios de telefonía móvil crece más rápidamente? (Punto de número de usuarios decreciente.)

d) ¿En qué año el número de usuarios de telefonía móvil decrece más rápidamente? (Punto de número de usuarios creciente.)

55. La siguiente gráfica muestra las utilidades de la florería Rosita de enero a diciembre de 2003.



a) En el periodo enero-febrero la razón de cambio de las utilidades, ¿es creciente o decreciente?; ¿cómo es la concavidad en ese periodo?

b) En el periodo mayo-septiembre, la razón de cambio de las utilidades ¿es creciente o decreciente?; ¿cómo es la concavidad en ese periodo?

Respuestas a los ejercicios de práctica

Unidad I

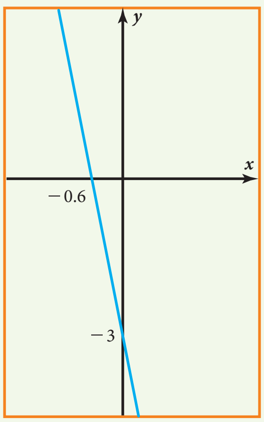
Tema 1.1

1. No es función **2.** No es función **3.** Sí es función. Variables discretas **4.** Sí es función. Variables discretas **5.** Sí es función. Variables discretas **6.** No es función **7.** Sí es función. Variables discretas **8.** No es función **9.** No es función **10.** Sí es función. Variables discretas **11.** No es función **12.** No es función **13.** Sí es función. Variables discretas **14.** Sí es función. Variables discretas **15.** Sí es función. Variable discreta y variable continua **16.** Sí es función. Variables continuas **17.** Sí es función. Variables continuas **18.** Sí es función. Variables discretas **19.** *a*) No es función *b*) Sí es función *c*) No es función *d*) Sí es función *e*) No es función **20.** *a*) Dominio: $[2, 12)$ Rango: $[0, 2)$ *b*) Dominio: $(-5, 4)$ Rango: $(-4, 5)$ *c*) Dominio: $[-5, 5]$ Rango: $[0, 5]$ *d*) Dominio: $[-6, -1)$ Rango: $[-7, 3]$ *e*) Dominio: $(-\infty, \infty)$ Rango: $(-\infty, \infty)$ *f*) Dominio: $(-2, 6)$ Rango: $(-5, 5]$ **21.** *a* **28.** Las respuestas son variables o requieren una interpretación. **29.** *a*) No es función *b*) Sí es función *c*) Sí es función *d*) No es función *e*) Sí es función

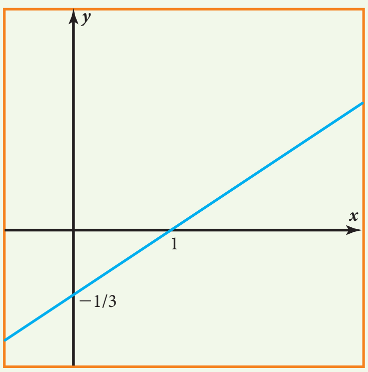
Tema 1.2

1. $y = -\frac{8}{5}x - \frac{1}{5}$ **2.** $y = \frac{9}{4}x - \frac{11}{4}$ **3.** $y = 2.5x + 1.3$ **4.** *a*) $q = f(p)$ sí corresponde a un modelo lineal *b*) $t = f(r)$ no corresponde a un modelo lineal *c*) $y = f(x)$ no corresponde a un modelo lineal *d*) $w = f(z)$ si corresponde a un modelo lineal **5.** *a*) $D = 1.7 + 0.1\,t$ *b*) En 2007 **6.** *a*) $M = 77.6 + 0.3\,t$ *b*) 80.6% de mortalidad **7.** $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ **8.** *a*) $m > 0$ y $b > 0$, ecuación $y = 5x + 3$ *b*) $m < 0$ y $b > 0$, ecuación $y = 7 - 2x$ *c*) $m = 0$ y $b > 0$, ecuación $y = 9$ *d*) $m > 0$ y $b < 0$, ecuación $y = \frac{1}{2}x - 4$ *e*) $m < 0$ y $b < 0$, ecuación $y = -2 - 3x$

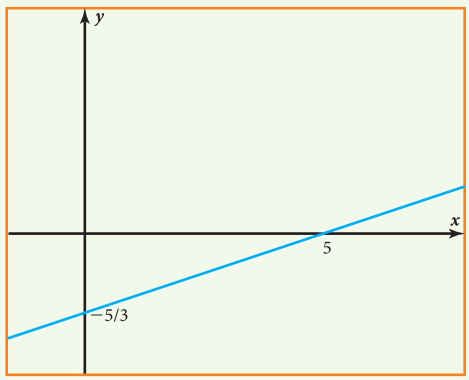
9.



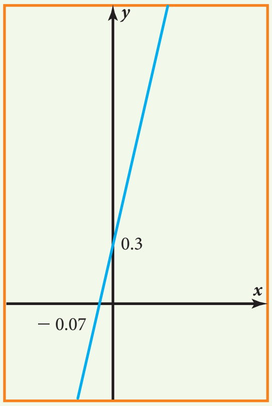
a) $y = -5x - 3$



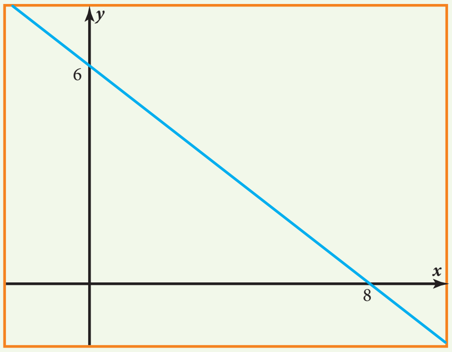
b) $2x - 3y - 1$



c) $-5 - 3y = -x$



d) $y = 0.3 + 4.3\,x$



e) $\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{6}=1$

10. *a*) $1 500 *b*) $7.50*q* **11.** *a*) $V = 800\,000 + 40\,000t$ *b*) Después de 21.27 años

12. 50 artículos **13.** *a*) $V=-\dfrac{80}{7}p+\dfrac{6\,250}{7}$ *b*) 299 visitantes **14.** *a*) $C = -0.4\,p + 1480$

b) $1 287.50 **15.** *a*) Depende de la distancia (km) que va a recorrer *b*) 76 km

16. *a*) $10\,000 = 292\,p + 180a$ *b*) 25 pulseras **17.** $C = 4\,825 + 5\,f$, $I = 13.50\,f$, $U = 8.50\,f - 4\,825$

18. *a*) $V=-\dfrac{1150}{7}t+15200$ *b*) 92.52 meses **19.** *a*) $V = 152\,000 - 20\,520t$ *b*) $8 360

20. *a*) $8\,352C + 15\,796L = 195\,000$ *b*) 6 portátiles **21.** 62.5 cajas **22.** *a*) $V = 250\,000 + 9375t$
b) $278 125 *c*) $428 125 **23.** $1 120 **24.** *a*) $V = 4\,353.45 + 304.74t$ *b*) $6 486.63

25. *a*) $D = 1.43x$ *b*) $3 531.47 **26.** *a*) $p=\dfrac{62}{6\,975}x$ *b*) 320 artículos **27.** $y=2x+\dfrac{1}{55}$ será paralela a las anteriores gráficas cortando en 1/55 en el eje *y* **28.** *a*) $y = 100\,x - 4$ estará más pegada al eje *y* y corta en -4 al eje *y* *b*) $y = 0.15x + 4$ será más horizontal pegándose al eje *x* y corta al eje *y* en 4
29. *a*) $y = -120x + 20$ será más vertical pegándose al eje *y* y lo corta en 20 *b*) $y = -0.05x - 3$ será más horizontal, pegándose más al eje *x* y cortando al eje *y* en -3 **30.** 1 500 unidades

Tema 1.3

1. $k = 1.2$, $n = -3$ **2.** $k = 7$, $n=\dfrac{1}{2}$ **3.** No es función potencia **4.** $k = 8$, $n = 3$

5. $k=\dfrac{7}{3}$, $n=-\dfrac{5}{2}$ **6.** No es función potencia **7.** $y = 0.07x^3$ **8.** $y = 2x^{1/2}$ **9.** $y = 4x^{-5}$ **10.** $y=\dfrac{1}{3}x^{2/3}$

11. $P = Kd^{-1}$, K positiva **12.** $I = KP$, K positiva, K representa la cantidad vendida

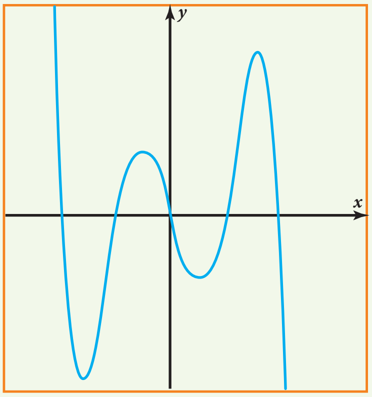
13. $52 500 **14.** *a*) $C = 0.7\,p$ *b*) El cliente paga $577.50 **15.** *a*) $k=\dfrac{2.13}{80}=0.026625$

b) 1.8105 kg 16. *a*) $k = 90$ *b*) 3.6 semanas *c*) 12 albañiles **17.** *a*) IV *b*) III *c*) I *d*) II
18. *a*) III *b*) IV *c*) II *d*) I

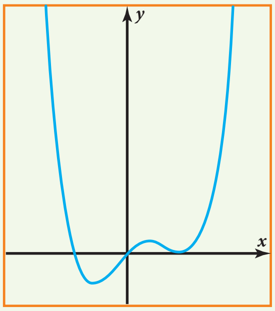
Tema 1.4

1. *i*) *a*) 6 *b*) Negativo *c*) 2 raíces dobles, 2 raíces simples *ii*) *a*) 7 *b*) Negativo *c*) 1 raíz triple, 1 raíz doble, 2 raíces simples *iii*) *a*) 4 *b*) Positivo *c*) 1 raíz triple, 1 raíz simple **2.** i) *a*) 5 *b*) Negativo *c*) 1 raíz triple, 2 raíces simples *ii*) *a*) 6 *b*) Positivo *c*) 2 raíces dobles, 2 raíces simples *iii*) *a*) 6 *b*) Negativo *c*) 1 raíz triple, 1 raíz doble, 1 raíz simple

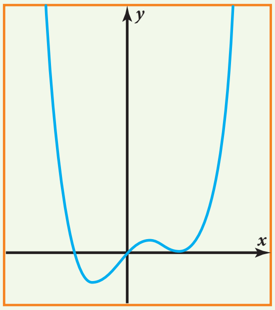
3. Grado 5; coeficiente principal −8; una posible gráfica sería la que tenga cuatro vueltas y que empiece arriba.



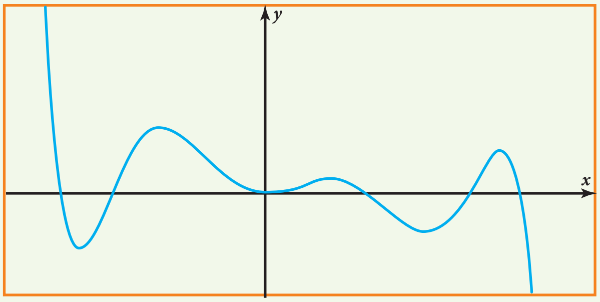
4. Grado 4; coeficiente principal 5; una posible gráfica sería la que tenga tres vueltas y que empiece arriba.



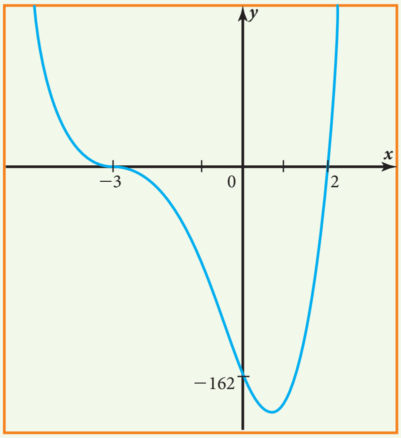
5. Grado 4; coeficiente principal 2; una posible gráfica sería la que tenga tres vueltas y que empiece arriba.



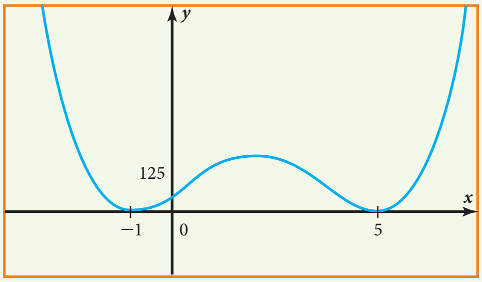
6. Grado 7; coeficiente principal −9; una posible gráfica sería la que tenga seis vueltas y que empiece arriba.



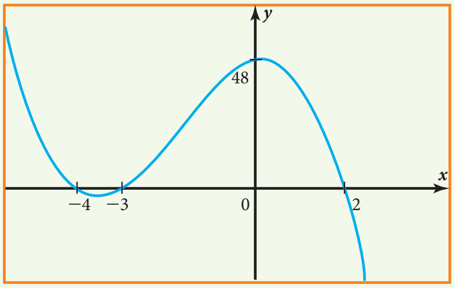
7.



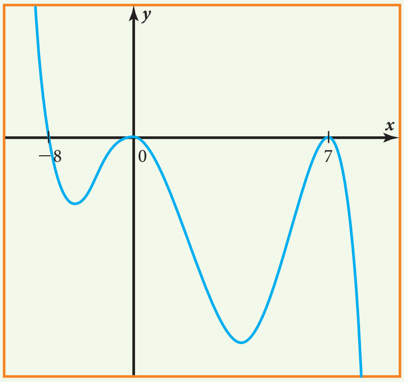
8.



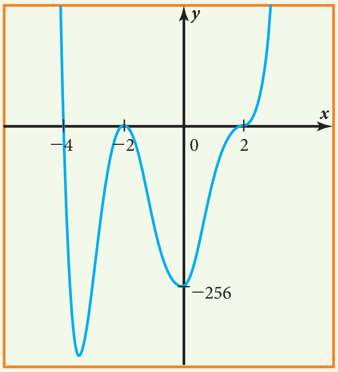
9.



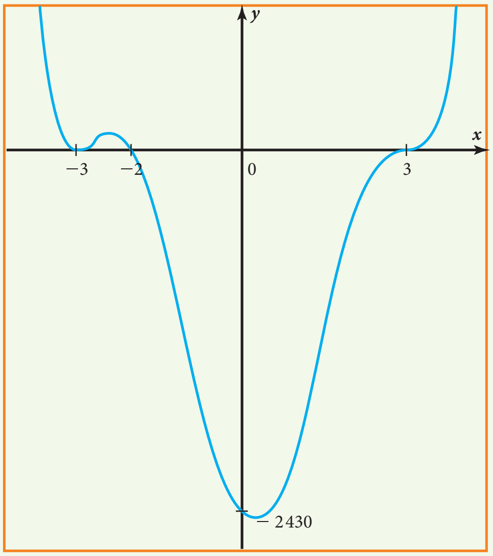
10.



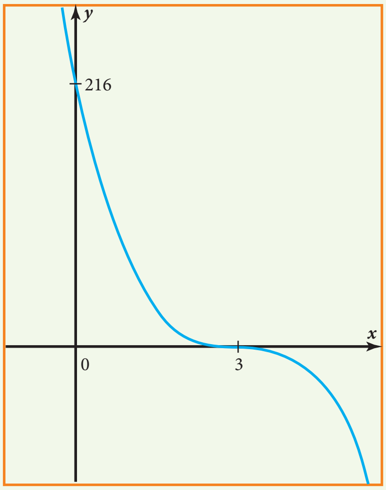
11.



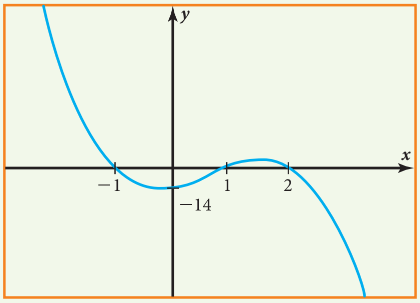
12.



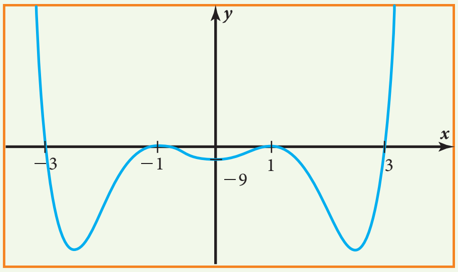
13.



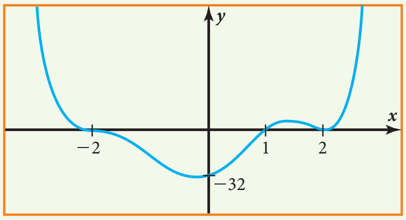
14.



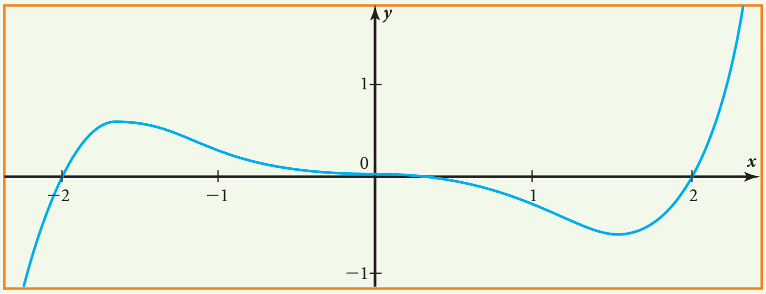
15.



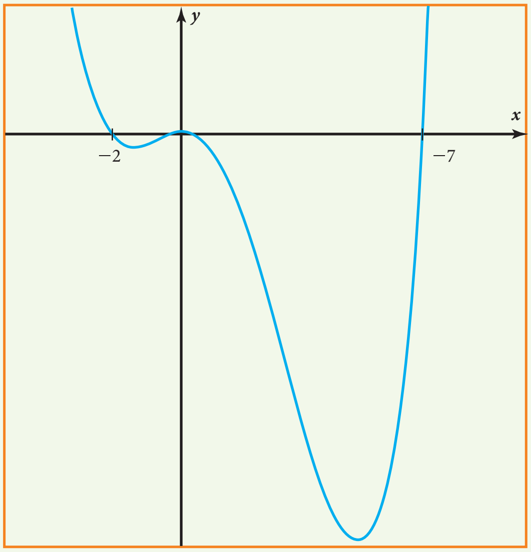
16.



17.



18.



19. $y=k(x+2)(x-2)(x-6)$ con $k<0$ **20.** $y=k(x)(x-4)(x-7)$ con $k>0$ **21.** $y=k(x+3)^2(x-4)^2$ con $k>0$ **22.** $y=k(x+1)^3(x-5)$ con $k<0$ **23.** $y = 0.1875(x + 2)^2(x - 1)(x - 3)$ **24.** $y = 0.0625(x + 1)^2(x - 3)^3$ **25.** $y = -0.01777(x + 3)(x - 1)(x - 3)(x - 5)^2$ **26.** $y = -0.0085034(x + 2)^2(x - 3)(x - 7)^2$ **27.** $y = -0.04\,(x - 2)(x - 6)(x^2)(x - 4)^2$ **28.** $y = 0.00042328(x + 4)(x - 8)^2(x)^3$ **29.** 500 CD, utilidad máxima de \$13 750 **30.** 2 horas **31.** 1 500 unidades **32.** 4 pisos

Tema 1.5

1. *a)* Sí corresponde a un modelo exponencial *b)* No corresponde a un modelo exponencial *c)* Sí corresponde a un modelo exponencial *d)* No corresponde a un modelo exponencial
2. *a)* $C = 5\,003.26(1.01725)^t$ *b)* Capital \$6 038.89 y \$1 503.65 de interés *c)* 1.725%
3. *a)* $P = 339\,282(9.8048)^{t/50}$ *b)* 5 251 547 habitantes **4.** *a)* $I = 12\,500(1.2765)^t$ *b)* 69 032.84 millones de dólares **5.** $y=(3)^{1/2}\left(\frac{1}{3}\right)^{x/4}$ o $y = 1.7320\,(0.759835)^x$ **6.** $y = 1.1547(3)^{x/2}$ **7.** $y=3\left(\frac{10}{3}\right)^{x/4}$ **8.** $y=7\left(\frac{7}{12}\right)^{x/3}$ **9.** No **10.** *c)* **11.** *b)* **12. al 17.** Las respuestas son variables o requieren una interpretación **18.** *a)* $P = b(1.02)^{t/2}$ *b)* 10.408% del valor inicial
19. El 0.15998% de la cantidad original **20.** *a)* $P = 40(0.9996)^t$ *b)* 39.68 watts *c)* 333.76 días **21.** *a)* $P = 126.4(1.0281)^t$ *b)* 171.45 millones de habitantes *c)* En 2010
22. *a)* $O = 150(1.004)^p$ *b)* 160 unidades **23.** *a)* $D = b(0.9513)^p$ *b)* 60.698% de la demanda inicial
24. *a)* $N=25\,000\left(\frac{2}{5}\right)^{t/2}$ *b)* 1 600 ejemplares **25.** *a)* $P = 50\,000\,(0.594)^{t/5}$ *b)* \$14 323.78
26. 6 horas **27.** 5 meses **28.** \$300 001.20 **29.** Punto de equilibrio $x = 54.8$
30 y 31. Las respuestas son variables o requieren una interpretación **32.** \$60 080.01 **33.** \$11 014.78
34. \$32 030.94 **35.** \$292 066.93 **36.** 4.88% **37.** 11.86% **38.** 10.24% **39.** 7.88%
40. 9.41% **41.** 13.34% **42.** Inversión: \$20 000 Tasa anual: 4% **43.** Inversión: \$50 000 Tasa anual: 6%

Tema 1.6

1. $y = 3.1e^{0.25x}$ **2.** $P = 6e^{-0.35t}$ **3.** $y = e^{0.27x}$ **4.** $y = 3.59468e^{-0.33x}$ **5.** $y = 6.0329e^{-0.20x}$
6. $y = 3.5e^{0.15x}$ **7.** *c)* **8.** *b)* **9. al 11.** Las respuestas son variables o requieren una interpretación
12. *a)* $P = 23(1.217744)^t$ *b)* $P = 1.24(0.09255)^t$ **13.** *a)* $P = 0.48(10.07442)^t$ *b)* $P = 24(0.7788)^t$
14. *a)* $V = 184\,350e^{-0.025t}$ *b)* \$162 688.30 **15.** *a)* $P = be^{0.055t}$ *b)* 93.48% más de la que originalmente había **16.** *a)* $Q = 277e^{0.00353t}$ *b)* 669 partes por millón **17.** Razón continua de 3.6% cada hora
18. *a)* $Q = 15\,000e^{0.08P}$ *b)* 58 443 unidades **19.** \$229 583.69 **20.** \$158 446.51 **21.** \$32 852.34
22. \$75 754.04 **23.** 4.8122% **24.** 3.3033% **25.** \$59 871.31 **26.** \$8 714.93 **27.** Cuando K es positiva. la gráfica crece. Cuanto mayor sea el valor de K, más rápido sube la gráfica **28.** Cuando K es negativa, la gráfica decrece. Cuanto más negativa se haga K, más rápido decrece la gráfica.

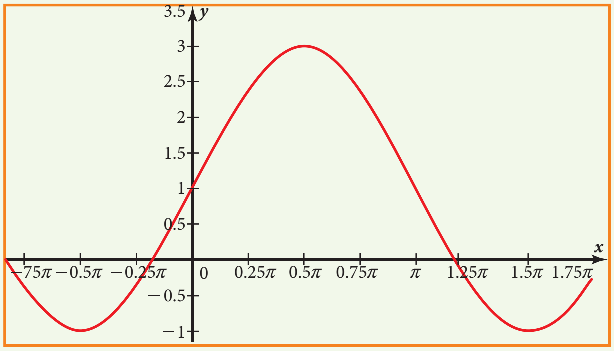
Tema 1.7

1. $t = 2.4091$ **2.** $x = 8$ **3.** $t = -0.5108$ **4.** $x = 1.6931$ **5.** $t = -0.3586$ **6.** $y = 0.5594$ **7.** $x = 0.33$
8. $x=-\frac{1}{12}$ **9.** $x = -0.3735$ **10.** $t = -3.9277$ **11.** *a)* $V = 25\,769.89(0.714286)^{P/0.2}$ *b)* \$3.71
12. *a)* $Q = 17.8e^{-0.120t}$ *b)* 15 horas **13.** *a)* $P = 520e^{0.250t}$ *b)* En 2011 **14.** *a)* $U = 125.36(1.032)^t$ *b)* A los 11 años **15.** 115.52 años **16.** 97.63 días **17.** 18.34 días **18.** 3.15 meses
19. *a)* Razón continua de 23.105% *b)* A los 13 meses **20.** Razón continua de 2.509%
21. 11.38 años **22.** El modelo 2007 **23.** 5.33 años **24.** 8.29 años **25.** 11.73 años
26. 6 años **27.** 24.85% **28.** 20.18% **29.** 7.3% **30.** 10.98% **31.** $r = 6.93\%$ **32.** 4.39 años

Tema 1.8

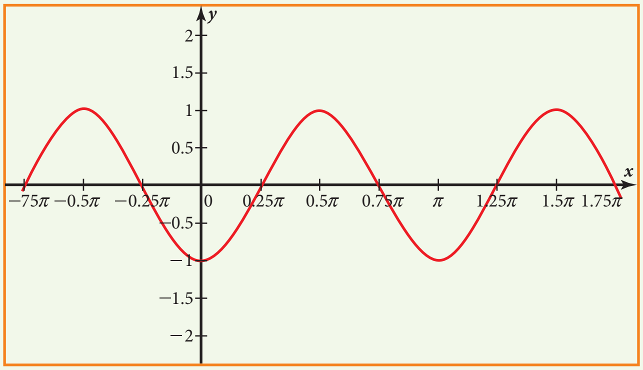
1. $y = 3\cos 4(x - \pi / 8) + 1$ **2.** $y = -2\text{sen}\,[(1 / 4)(x - 4\pi)] + -2$ **3.** $y = \text{sen}\,(x) + 2$
4. $y = (3 / 2)\cos 2(x + \pi) + 1$

5.



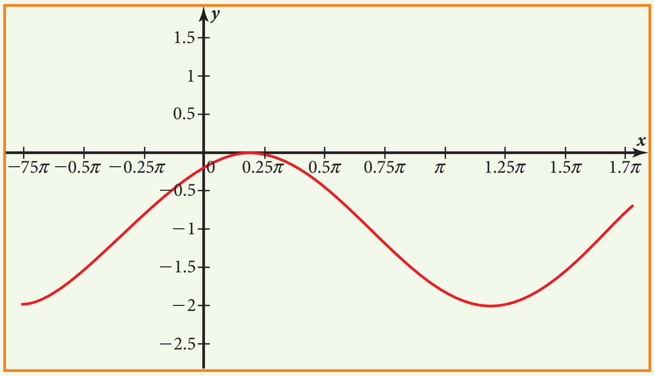
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
− 0.5
− 1
y
x
−75π −0.5π −0.25π
0
0.25π 0.5π 0.75π
π
1.25π
1.5π 1.75π

6.



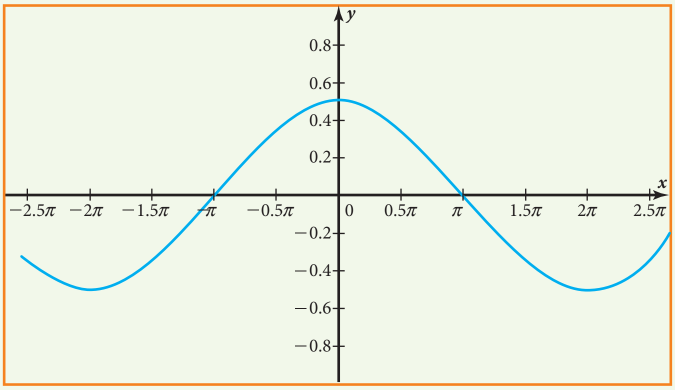
y
2
1.5
1
0.5
−0.5
−1
−1.5
−2
x
−75π −0.5π −0.25π
0
0.25π 0.5π 0.75π
π
1.25π
1.5π 1.75π

7.



y
1.5
1
0.5
−0.5
−1
−1.5
−2
−2.5
x
−75π −0.5π −0.25π
0
0.25π 0.5π 0.75π
π
1.25π 1.5π 1.7π

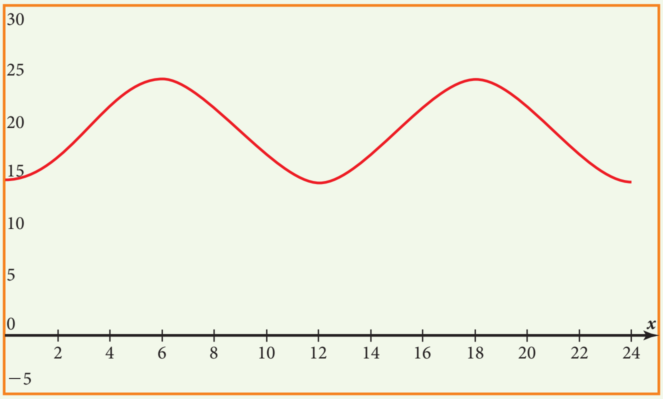
8.



y
0.8
0.6
0.4
0.2
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
x
−2.5π −2π −1.5π −π −0.5π
0
0.5π π 1.5π 2π 2.5π

9. *a)* Periodo = 1/262 segundos *b)* Frecuencia = 262 ciclos por segundo **10.** $y = (1/2)\cos((\pi/12)x) + 37$
$T = -5\cos((\pi/6)t) + 20$

11.



12. $P = 0.5\text{sen}((\pi/2)t) + 1.5$ **13.** $D = 0.0075\text{sen}((2\pi/1.3)t) + 0.0325$

Tema 1.9

Conjunto de ejercicios de práctica de función compuesta

1. *a)* $f \circ g = \dfrac{5^x}{\sqrt{5^x + 4}}$ *b)* $g \circ f = 5^{\left(\frac{x}{\sqrt{x+4}}\right)}$ *c)* $f \circ f = \dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{x+4}}}{\sqrt{\dfrac{x}{x+4} + 4}}$ *d)* $g \circ g = 5^{(5^x)}$ **2.** *a)* $f \circ g = 2e^{\left(\frac{3}{x^2}+5\right)}$

b) $g \circ f = \dfrac{1}{(2e^{3x+5})^2} = \dfrac{1}{4e^{6x+10}}$ *c)* $f \circ f = 2e^{(6e^{3x+5}+5)}$ *d)* $g \circ g = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2} = x^4$ **3.** *a)* $f \circ g = \ln e^{2x} = 2x$

b) $g \circ f = e^{\ln x^2} = x^2$ *c)* $f \circ f = \ln(\ln x^2)^2$ *d)* $g \circ g = e^{e^x}$ **4.** *a)* $f \circ g = \sqrt{(x+1)^2 + 3(x+1)} = \sqrt{x^2 + 5x + 4}$

b) $g \circ f = \sqrt{x^2 + 3x} + 1$ *c)* $f \circ f = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+3x}\right)^2 + 3\sqrt{x^2+3x}} = \sqrt{x^2 + 3x + 3\sqrt{x^2+3x}}$ *d)* $g \circ g = x + 2$

5. *a)* $f \circ g = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3 + \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) + 1$ *b)* $g \circ f = \dfrac{x^3 + x + 2}{x^3 + x}$ *c)* $f \circ f = \left(x^3 + x + 1\right)^3 + x^3 + x + 2$

d) $g \circ g = \dfrac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)-1} = \dfrac{2x}{2} = x$ **6.** *a)* $f \circ g = \sqrt{\ln(1-2x) - 1}$ *b)* $g \circ f = \ln\left(1 - 2\sqrt{x-1}\right)$ *c)* $f \circ f = \sqrt{\sqrt{x-1} - 1}$

d) $g \circ g = \ln(1 - 2\ln(1 - 2x))$ **7.** *a)* $f \circ g = e^{(e^{x+4})2} = e^{e^{2x+8}}$ *b)* $g \circ f = e^{(e^{x^2}+4)}$ *c)* $f \circ f = e^{(e^{x^2})2} = e^{e^{2x^2}}$

d) $g \circ g = e^{(e^{x+4}+4)}$ **8.** *a)* $f \circ g = 3^{\sqrt{x^5}}$ *b)* $g \circ f = \left(3^{\sqrt{x}}\right)^5 = 3^{5\sqrt{x}}$ *c)* $f \circ f = 3^{\sqrt{3^{\sqrt{x}}}}$ *d)* $g \circ g = x^{25}$

9. $f(x) = \ln x$ $g(x) = \sqrt{x}$ **10.** $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = \ln x$ **11.** $f(x) = e^x$ **12.** $f(x) = \ln x$

13. $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = x^2 + 5$ **14.** $f(x) = x^3 - 2$ $g(x) = x + 1$ **15.** $g(x) = x^3 + 5$

16. $g(x) = \sqrt{x}$ **17.** $I(x) = \dfrac{5823x - x^2}{20}$ **18.** $I(x) = -x\ln(x)$ **19.** *a)* $c(t) = 8\,192t^2 + 64t + 1\,200$

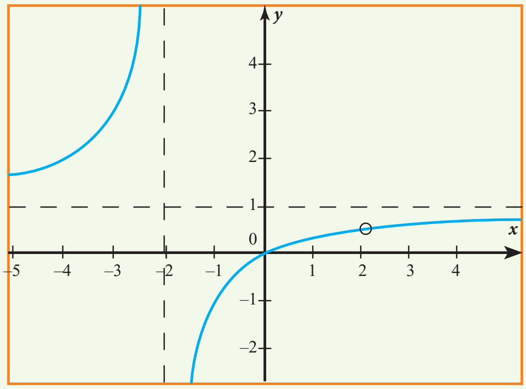
b) 206 320 miles de pesos (o $206 320 000) **20.** *a)* $c(t) = 100 + 15t + 9t^2$ *b)* $796

21. *a)* $q(t) = \left(8 - \frac{2t}{4+t^2}\right)^3 + 10$ *b)* 438 viviendas **22.** *a)* $q(t) = (4t^2 + t + 65)^2 - 12t^2 - 3t - 195$

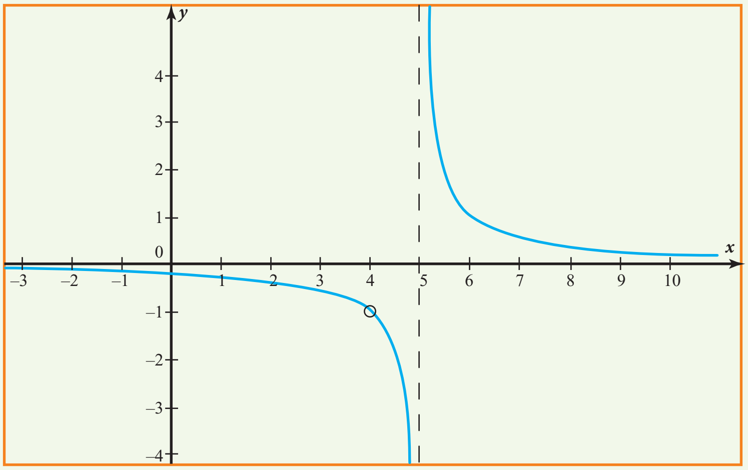
b) 2 834 170 kilogramos

Conjunto de ejercicios de práctica de función racional

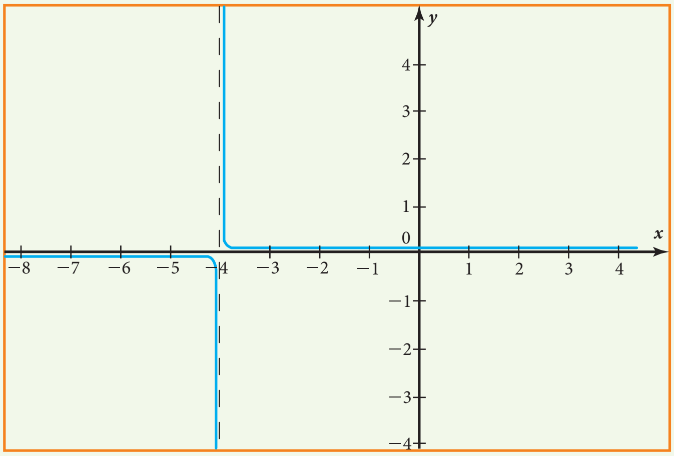
1. Asíntota vertical: $x = -2$
Asíntota horizontal: $y = 1$
Hueco: $x = 2$



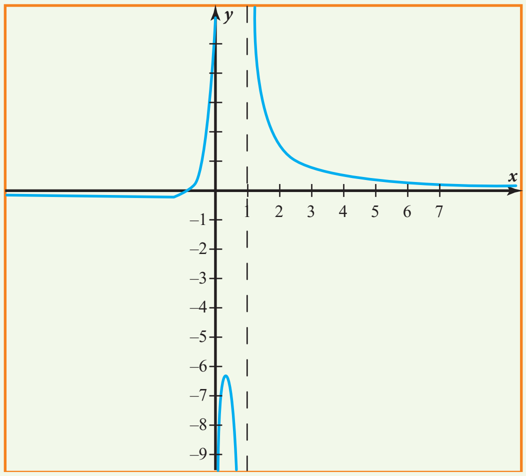
2. Asíntota vertical: $x = 5$
Asíntota horizontal: $y = 0$
Hueco: $x = 4$



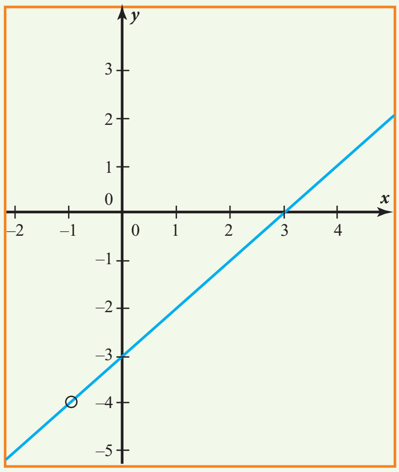
3. Asíntota vertical: $x = -4$
Asíntota horizontal: $y = 0$



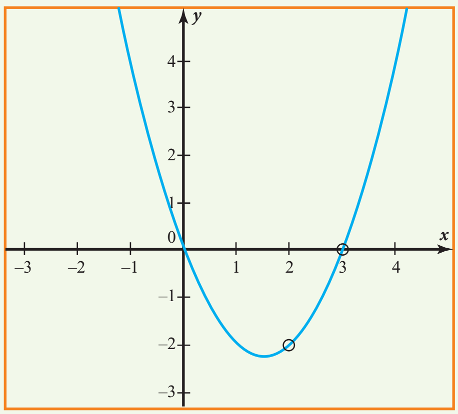
4. Asíntota vertical: $x = 0, x = 1$
Asíntota horizontal: $y = 0$



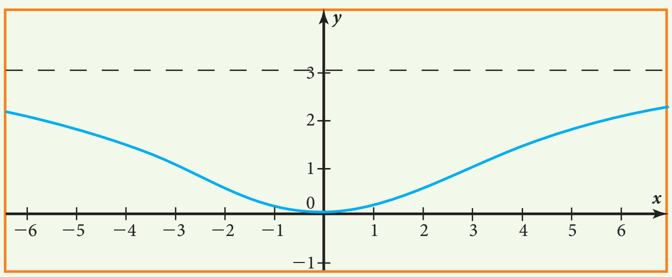
5. Asíntota vertical: No hay
Asíntota horizontal: No hay
Hueco: $x = -1$



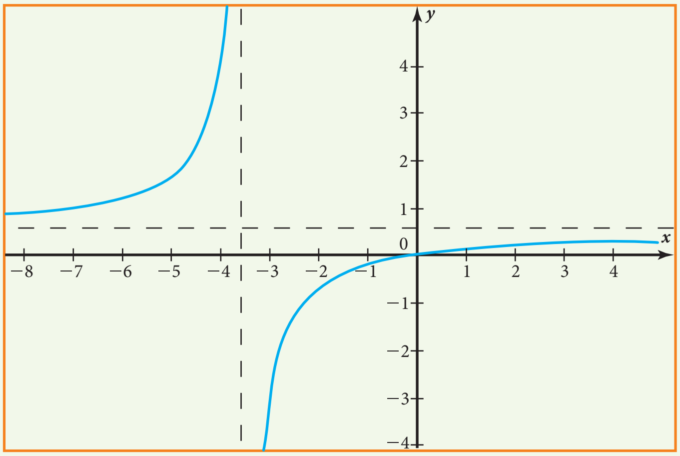
6. Asíntota vertical: No hay
Asíntota horizontal: No hay
Hueco: $x = 2$ y $x = 3$



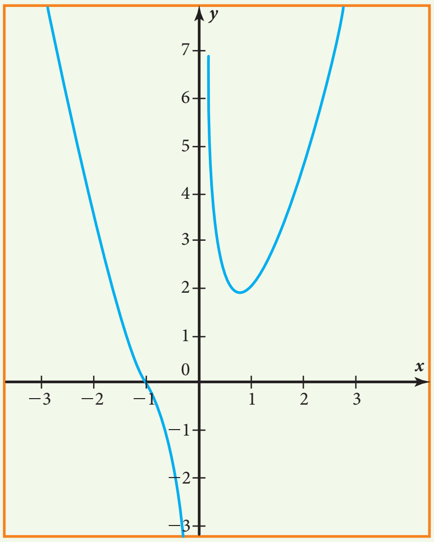
7. Asíntota vertical: No hay
Asíntota horizontal: $y = 3$



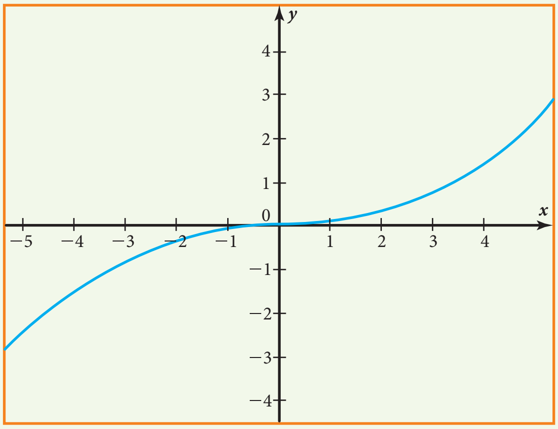
8. Asíntota vertical: $x = -7/2$
Asíntota horizontal: $y = 1/2$



9. Asíntota vertical: $x = 0$
Asíntota horizontal: No hay



10. Asíntota vertical: No hay
Asíntota horizontal: No hay



Unidad 2

Tema 2.1

1. No existe **2.** ∞ **3.** 0 **4.** 10 **5.** *a*) 0.5 *b*) -2.6 *c*) $-\infty$ *d*) ∞ *e*) $+\infty$ **6.** *a*) 0 *b*) 1 *c*) 2 *d*) No existe **7.** *a*) 2 *b*) 3.5 *c*) 1 *d*) 2 **8.** No existe **9.** No existe **10.** *a*) 1 *b*) No existe *c*) No existe *d*) 0 *e*) 3 **11.** 1 **12.** $\frac{22}{5}$ **13.** 0 **14.** 0 **15.** e^4 **16.** ln 5 **17.** $-\frac{4}{5}$ **18.** $-\frac{1}{6}$ **19.** 0 **20.** 1 **21.** 11 **22.** $\frac{10}{3}$ **23.** -1 **24.** $-\frac{4}{3}$ **25.** $\frac{135}{7}$ **26.** No existe **27.** 18 **28.** 10 **29.** -36 **30.** $\frac{1}{2}$ **31.** 3/19 **32.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ **33.** 11/17 **34.** ∞ **35.** 1 **36.** $\frac{1}{2}$ **37.** 0 **38.** 4 **39.** $\frac{1}{2}$ **40.** $-\infty$ **41.** 0 **42.** ∞ **43.** $-\infty$ **44.** $+\infty$ **45.** 3/2 **46.** 1/3

Tema 2.2

1. Discontinua en $x = 0$, ya que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ no existe **2.** Discontinua en $x = -2$, ya que $\lim\limits_{x\to -2} h(x) \neq h(-2)$
3. Discontinua en $x = -3$, ya que $\lim\limits_{x\to -3} g(x) =$ no existe **4.** Discontinua en $x = 36$ ya que $g(36) =$ no existe
5. Discontinuidad eliminable en $x = 2$, si se redefine $h(2) = 1/2$ **6.** Discontinuidad esencial en $x = 0$
7. Discontinuidad eliminable en $x = 0$, si se redefine $g(0) = 5$ **8.** Discontinuidad esencial en $x = -1$
9. Continua en todo número real **10.** Continua para todo valor de $x \neq 1$ **11.** Continua en todo número real
12. Continua en todo número real **13.** Continua para todo valor de $x \neq 0$ y $x \neq -3$ **14.** Continua en todo número real

Unidad 3

Tema 3.1

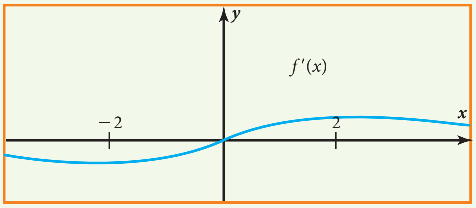
1. $P'_{EM'02} \approx 110$ alumnos graduados/semestre **2.** $m'_{13} \approx 23.02$ pesos/mes **3.** $P'_{96} \approx 0.275$ %/año **4.** $E'_{99} = \frac{1}{3}$ **5.** $D'_{60} \approx 3\,398$ divorciados/año **6.** $V'_{(2001)} \approx 1\,295.5$ millones de dólares/año **7.** $I'_{(2002)} \approx 63.5$ millones de dólares/año **8.** $P'_{(\text{Abril})} \approx -1.75$ miles de dólares/tonelada • mes **9.** $\text{PIB}'_{(1988)} = 64$ millones de dólares/año **10.** $P'_{(\text{Jul})} \approx 0.091$ miles de unidades/mes **11.** $V'(6) \approx -5.8468$, el valor del automóvil disminuye con una rapidez de 5 846.80 pesos/año **12.** $C'(3) = 1\,530$, el costo total de producción aumenta con una rapidez de 1 530 pesos/mil unidades **13.** $S'(2.5) \approx 25.005$, la velocidad de la cubeta a los 2.5 s fue de 25.005 m/s **14.** $h'(45) \approx 181$, la velocidad del globo a los 45 s fue de 181 pies/s **15.** $q'(5) \approx 0.3465$, la demanda crece 346.5 unidades/mes **16.** $S'(3) \approx 342.67$, el saldo aumenta con una rapidez de 342.67 pesos/año **17.** $I'(100) \approx 200.0010$ el ingreso aumenta a una razón de 200,001 pesos/póliza **18.** $P'(7) \approx 444.24$, la población crece a una rapidez de 444 bacterias/día. **19.** $U'(9) \approx -212.955$, la utilidad está disminuyendo con una rapidez de 212.95 pesos/cien unidades. **20.** $C'(5) \approx 0.749875$, el costo mensual crece a una rapidez de 749.875 pesos/cien marcos **21.** $f'(-2) \approx -8.3645$ **22.** $f'(7) \approx 2.0794$ **23.** $f'(1) \approx 4$ **24.** $f'(1) \approx 1$ **25.** $f'(4) \approx 13.55056$ **26.** $f'(1/2) \approx 0.43502$ **27.** $f'(2) \approx 0.41612$ **28.** $f'(0) \approx 5.5059$ **29.** $f'(5) \approx 0.23$ **30.** $f'(2) \approx -1.2$ **31.** $f'(\pi) \approx 2\pi$ **32.** $f'(\pi/2) \approx -3$ **33.** $f'(0) \approx -1$

Tema 3.2

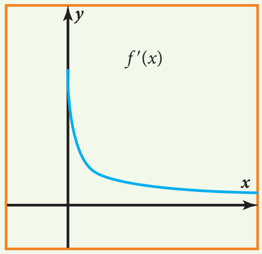
1. $m_{\text{tangente}} \approx 2.6$ **2.** $m_{\text{tangente}} \approx 1.137$ **3.** $m_{\text{tangente}} \approx 1.0986$ **4.** $m_{\text{tangente}} \approx -0.25$ **5.** $m_{\text{tangente}} \approx 0.494$
6. $m_{\text{tangente}} \approx 0.4625$ **7.** *a*) $m_{\text{tangente}} \approx -0.075$ *b*) $m_{\text{tangente}} \approx 0.06$ **8.** *a*) $m_{\text{tangente}} \approx 0.385$ *b*) En 1980, el total de viviendas habitadas en México estaba creciendo con una rapidez de 385 000 viviendas/año.
9. *a*) $m_{\text{tangente}} \approx 0.035$ *b*) En 1950, el crecimiento relativo de la población estaba aumentando con una rapidez de 0.035% por año

Tema 3.3

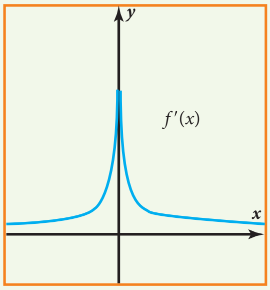
1.



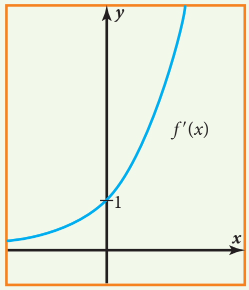
2.



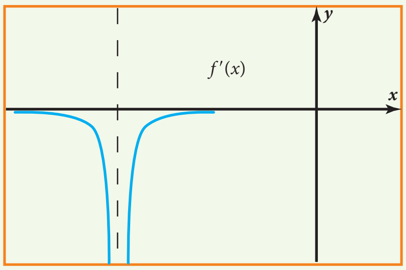
3.



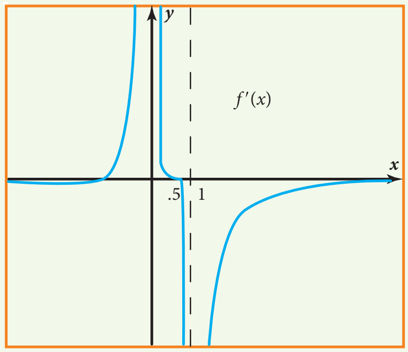
4.



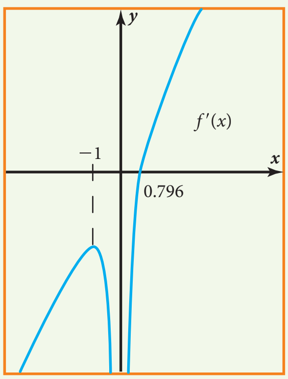
5.



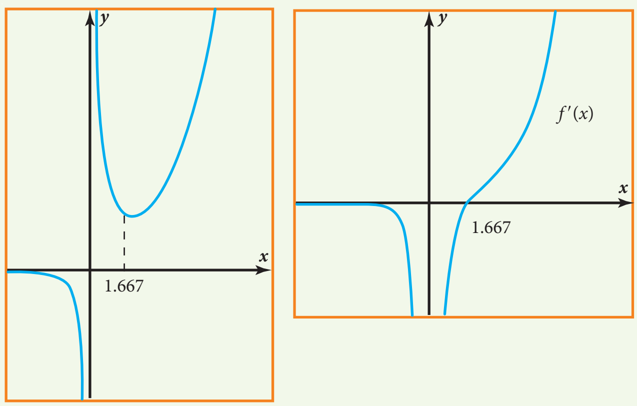
6.



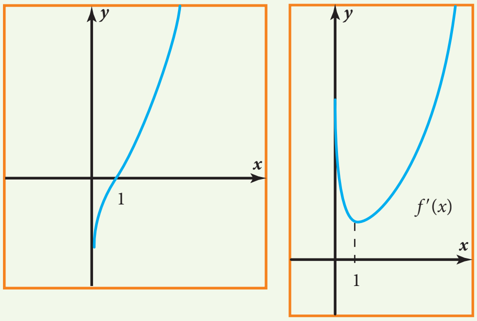
7.



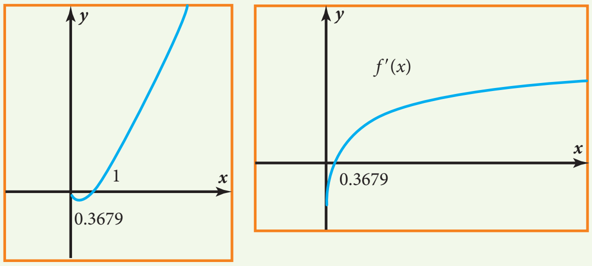
8.



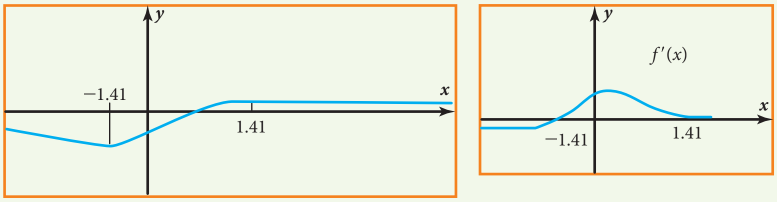
9.



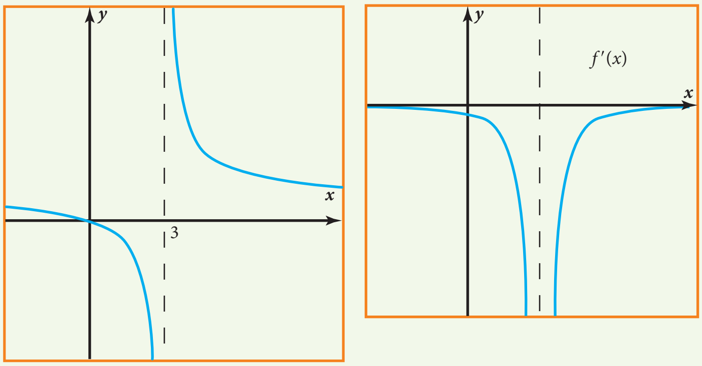
10.



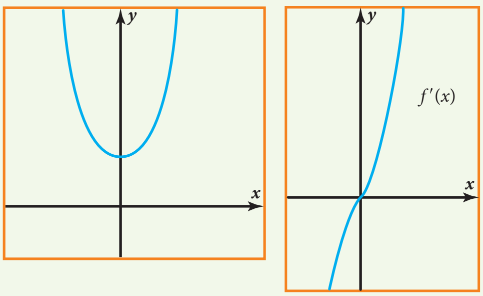
11.



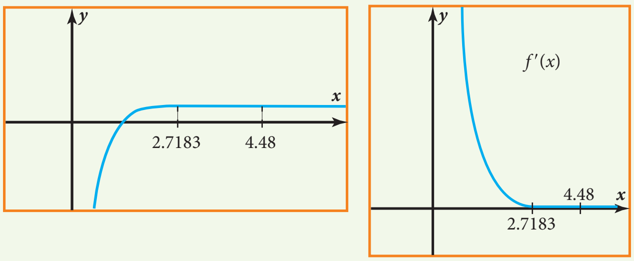
12.



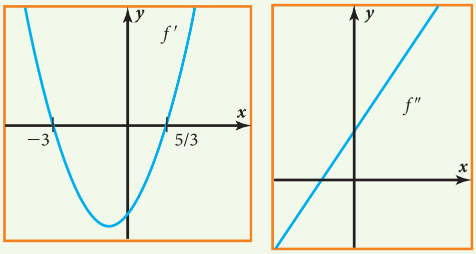
13.



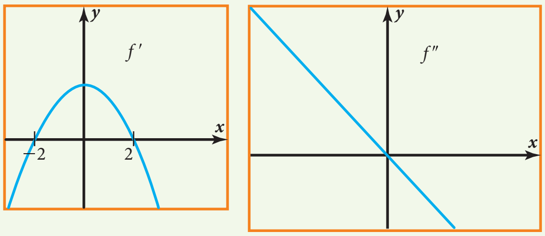
14.



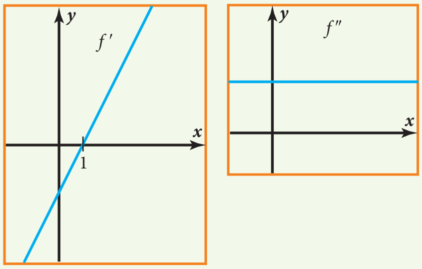
15.



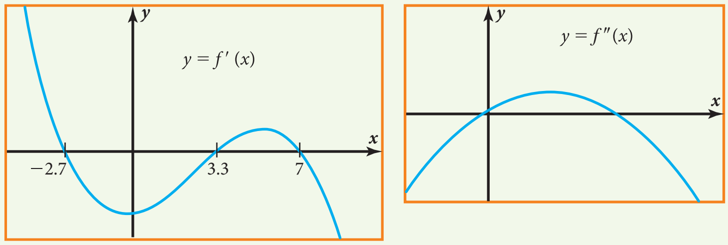
16.



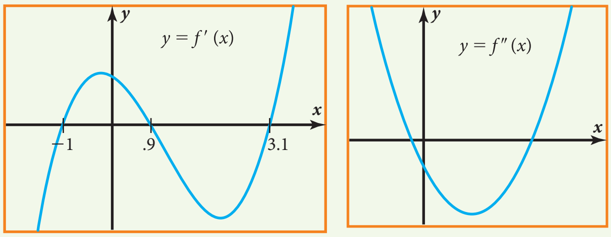
17.



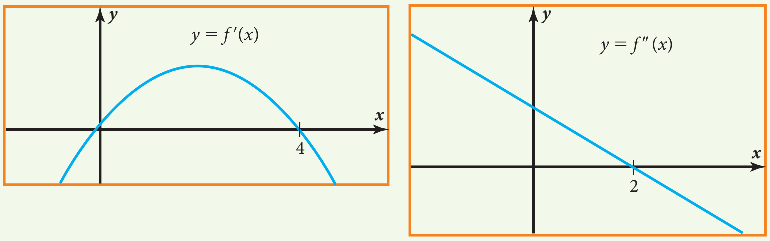
18.



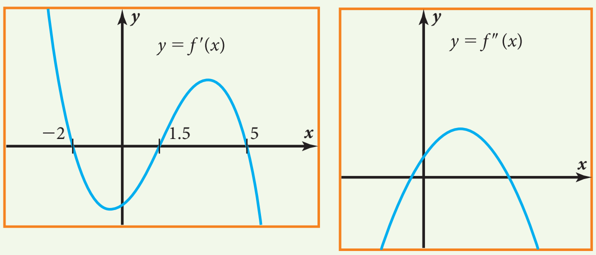
19.



20.

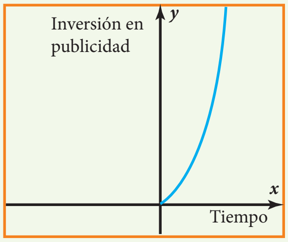


21.

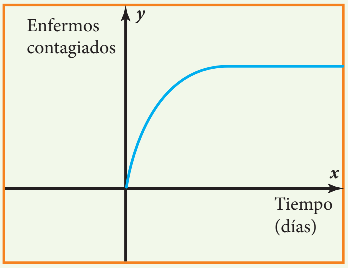


22. *a*) *f* crece en $(-\infty, -2)\cup(-2, 1)$ *b*) *f* decrece en $(1, \infty)$ *c*) *f* es cóncava hacia arriba en $(-2, 0)$ *d*) *f* es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)\cup(0, \infty)$ *e*) *f* tiene máximo en $x = 1$, *f* no tiene mínimo **23.** *a*) *f* crece en $(-\infty, -2)\cup(-2, 5)\cup(5, \infty)$ *b*) *f* nunca decrece *c*) *f* es cóncava hacia arriba en $(-2, 1.5)\cup(5, \infty)$ *d*) *f* es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)\cup(1.5, 5)$ *e*) *f* no tiene máximos ni mínimos **24.** *a*) *f* crece en $(-5, 1)$ *b*) *f* decrece en $(-\infty, -5)\cup(1, 5)\cup(5, \infty)$ *c*) *f* es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -3)\cup(2.5, 5)$ *d*) *f* es cóncava hacia abajo en $(-3, 2.5)\cup(5, \infty)$ *e*) *f* tiene máximo en $x = 1$, *f* tiene mínimo en $x = -5$ **25.** *a*) *f* crece en $(-\infty, 4)$ *b*) *f* decrece en $(4, \infty)$ *c*) *f* es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 4)U(4, \infty)$ *d*) *f* nunca es cóncava hacia abajo *e*) *f* no tiene máximos ni mínimos **26.** *a*) *f* crece en $(-\infty, 0)$ *b*) *f* decrece en $(0, \infty)$ *c*) *f* nunca es cóncava hacia arriba *d*) *f* es cóncava hacia abajo en $(-\infty, \infty)$ *e*) *f* tiene máximo en $x = 0$, *f* no tiene mínimo

27. El resultado significa que si se aumentan los gastos de publicidad, las ventas aumentan rápidamente.

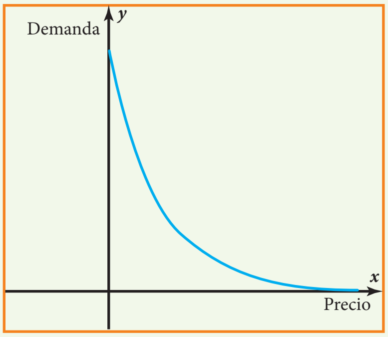


28.



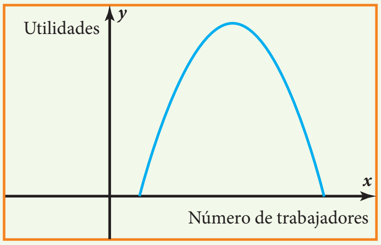
El resultado significa que a medida que pasan los días, la cantidad de contagiados aumenta más lentamente.

29.



El resultado significa que cuando el precio aumenta, la cantidad demandada de productos decrece lentamente.

30.



El resultado significa que a medida que aumenta el número de trabajadores, las utilidades van incrementándose hasta una utilidad máxima; si se sigue aumentando la cantidad de trabajadores, las utilidades disminuyen.

Tema 3.4

1. $y' = 0$ **2.** $y' = 5x^4$ **3.** $f'(t) = 1$ **4.** $f'(t) = \frac{1}{t}$ **5.** $f'(t) = e^t$ **6.** $y' = 3^x \ln 3$ **7.** $y' = -2x^{-3}$ **8.** $h'(z) = 1$

9. $h'(w) = \frac{1}{w}$ **10.** $g'(z) = e^z$ **11.** $y' = \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln(1/2)$ **12.** $y' = 0$ **13.** $y'(r) = 1$ **14.** $g'(y) = \frac{1}{y}$ **15.** $h'(w) = e^w$

16. $f'(x) = (1.6)^x \ln(1.6)$ **17.** $g'(z) = 0$ **18.** $h'(r) = 1.5r^{1/2}$ **19.** $f'(x) = -\frac{2}{5\sqrt[5]{x^7}}$ **20.** $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ **21.** $g'(y) = 0$

22. $h'(t) = 0$ **23.** $h'(s) = (\ln(4.1))^s (\ln(\ln 4.1))$ **24.** $h'(z) = \left(\sqrt{3.7}\right)^z \ln\left(\sqrt{3.7}\right)$ **25.** $f'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$

26. $h'(x) = 3^x(x^2 \ln 3 + 2x)$ **27.** $y' = 5e^x$ **28.** $y' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ **29.** $y' = \frac{-4x^{-5} - x^{-4}}{e^x}$ **30.** $h'(x) = \frac{1}{2}x^{-3/2} + \pi^x \ln \pi$

31. $f'(x) = \frac{1 + (1/2)\ln x}{x^{1/2}}$ **32.** $y' = \frac{1}{2x}$ **33.** $y' = -\frac{3}{5x^{6/5}}$ **34.** $y' = \frac{1 - 2x\ln 2}{2x^{1/2}\,2^x}$ **35.** $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x^{-3}$

36. $h'(x) = e^x\left(x^{-5/3} - \frac{5}{3}x^{-8/3}\right)$ **37.** $y' = (1.6)^x\left(\frac{1}{x} + (\ln x)(\ln 1.6)\right)$ **38.** $f'(t) = 6.8(2.3)^t \ln 2.3$ **39.** $f'(x) = (1.8)^x$

40. $g'(x) = e^y - \frac{3}{8}y^{-5/8}$ **41.** $f'(t) = \frac{3^t \ln 3 - 3^t - 2}{e^t}$ **42.** $g'(y) = 2 - \frac{1}{y} + 2\ln y$ **43.** $f'(x) = \frac{(x+1)^3 e^x - 1}{(x+1)^2}$

44. $y' = \frac{10 + 2xe^x - 5\ln x - e^x}{2x^{3/2}}$ **45.** $y' = 2^x(\ln 3)(\ln 2) + 4$ **46.** $y' = \frac{x^4(2x^3+5)}{(x^3+1)^2}$ **47.** $y' = \frac{5}{x^5} - \frac{0.9}{7}x^{3.1} - \frac{35.5}{x^{3.1}}$

48. $f'(x)=\frac{5}{6x^{1/6}}-\frac{5}{2x^{7/2}}+\frac{4}{3x^{2/3}}-\frac{12}{x^4}$ **49.** $f'(t) = 18t^5 + 60t^4 - 4t^3 - 21t^2 + 1$ **50.** $y'=-\frac{3\left(e^x+\frac{1}{x}\right)}{(e^x+\ln x)^2}$

51. $h'(x)=\frac{e^x(x-x\ln 2-1)}{x^2 2^x}$ **52.** $g'(x)=-\frac{5}{3}x^8+\frac{7}{6}x^5+\ln x\left(-15x^8+7x^5\right)$ **53.** $r'(x)=\frac{1}{x}+5x^5e^x+25x^4e^x$

54. $w'(x)=\frac{\pi^2(1-x\ln x\ln 3)}{x3^x}$ **55.** $p'(x)=125(2.3)^x\ln 2.3-\frac{1}{2x^{3/2}}$ **56.** $y'=\frac{-3x^2-18x+129}{(3x-4)^2(x-9)^2}$

57. $y'=\frac{-1-\ln x}{x^2\ln^2 x}$ **58.** $y'=-\frac{11}{2}\pi x^{-3/2}$ **59.** $f'(x) = (1.28)^x(x\ln(1.28)+1)+e^x\left(\frac{1}{x}+\ln x\right)$

60. $g'(x)=\frac{e^2-5x^5\ln 2}{x}$ **61.** $y'=\frac{\cos(x)+x\operatorname{sen}(x)}{(\cos(x))^2}$ **62.** $f'(x) = e^x(-\operatorname{sen}(x)+\cos(x))$

63. $f(t)=\ln(t)\cos(t)+\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}$ **64.** $y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x$ **65.** $f'(t)=\frac{\cos(t)-\operatorname{sen}(t)+t\ln(t)(\operatorname{sen}(t)+\cos(t))}{t(\cos(t)-\operatorname{sen}(t))^2}$

Tema 3.5

1. $h'(t)=\frac{4t^3}{\sqrt[3]{(3t^4+5)^2}}$ **2.** $f'(x)=\frac{1}{x\ln x}$ **3.** $g'(x)=\frac{3(\ln x)^2}{x}$ **4.** $g'(x)=e^{x^2+x+1}(2x+1)$ **5.** $h'(x)=\frac{2^{\ln x}(\ln 2)}{x}$

6. $y'=\frac{(45x^2+24)\sqrt{5x^3+8x-3}}{2}$ **7.** $y' = -5e^{-5x+3}$ **8.** $y' = \ln 5$ **9.** $y' = (x\ln 1.253)(1.253)^{0.5x^2}$

10. $y'=\frac{15x^4}{6x^5+4}$ **11.** $f'(x)=\frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{3\sqrt[3]{x^2}}$ **12.** $f'(x)=\frac{e^x+2e^{-2x}}{5\left(e^x-e^{-2x}\right)^{4/5}}$ **13.** $f'(x)=\frac{4^{\sqrt{x+8}}\ln 4}{2\sqrt{x+8}}$ **14.** $g'(x)=\frac{-5e^x-5}{2\sqrt{(e^x+x)^3}}$

15. $g'(x)=\frac{x^4-14x}{x^5+7x^2}$ **16.** $y'=\frac{(3^{x/\ln})(\ln 3)(\ln x-1)}{(\ln x)^2}$ **17.** $y'=\frac{\left(e^{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)}\right)(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ **18.** $y'=-1/x$

19. $y'=\frac{(0.032)^{\sqrt{x-5}}\ln 0.032}{2\sqrt{x-5}}$ **20.** $y' = e^{x\ln x}(\ln x+1)$ **21.** $y'=6x^2\ln(x+3)+\frac{2x^3}{x+3}$ **22.** $g'(y)=\frac{12y^2e^{\sqrt{4y^3}}}{\sqrt{4y^3}}$

23. $f'(x)=\frac{3e^{3x}-10e^{2x}}{(3e^x-5)^2}$ **24.** $y'=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{2x}{x^2+1}$ **25.** $g'(x)=15x^2e^{x^3}$ **26.** $h'(x) = (2xe^{x^2})(6^{-x})-(e^{x^2})(6^{-x}\ln 6)$

27. $f'(x)=\frac{6-3\ln(20x^3)}{2\sqrt{x^5}}$ **28.** $h'(x)=\frac{3^{\sqrt{x}}\ln 3\sqrt[4]{8x^2-e}}{2\sqrt{x}}+\frac{4x3^{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{(8x^2-e)^3}}$ **29.** $g'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x^2+x}\right)$

30. $R'(x)=\frac{(x^{1/2}+2x^3)\left[2\ln(x^{1/2}+2x^3)-1\right]}{\left[\ln(x^{1/2}+2x^3)\right]^2}\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}+6x^2\right)$ **31.** $y' = (2x+2x^3)e^{x^2}$

32. $y'=\frac{-x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}+\frac{7x^6-8}{2\sqrt{x^7-8x}}$ **33.** $y' = (48.76x-24.38)\ln(1.76)(1.76)^{x^2-x}$ **34.** $h'(x) = 2x(52^{x^2})$

35. $r'(x)=\frac{3^x\ln(3)}{(3^x+1)^2}$ **36.** $f'(x)=\frac{(4+36x)(x^3-2x)^3}{3\sqrt[3]{2x+9x^2}}+(9x^2-6)(x^3-2x)^2(2x+9x^2)^{2/3}$

37. $g'(x)=\frac{8x}{(4x^2+3)e^{x^3}}-\frac{3x^2\ln(4x^2+3)}{e^{x^3}}$ **38.** $h'(x)=8^{x^3}\cdot 3^{x/2}\left(3x^2\ln 8+\frac{\ln 3}{2}\right)$

39. $h'(x)=\dfrac{e^{6x^5-x^3}\left(30x^4-3x^2\right)}{\sqrt{x^3-1}}-\dfrac{1.5x^2e^{6x^5-x^3}}{\left(x^3-1\right)^{3/2}}$ 40. $f'(x)=8^{e^x}\left(e^x\ln 8+\dfrac{1}{2x}\right)$ 41. $y' = 72e\ln 2(8\cdot 2^{9x})^{e-1}(2^{9x})$

42. $h'(t)=\dfrac{3t}{\left(3t^2+1\right)\sqrt{\ln\left(3t^2+1\right)}}$ 43. $f'(x)=\dfrac{7^{-x}}{2x-4}-7^{-x}\ln(7)\ln\sqrt{2x-4}$ 44. $h'(x)=\left(\dfrac{2}{3}x^{-1/3}+x^{2/3}\right)e^x-\dfrac{6}{6x+8}$

45. $f'(x)=\dfrac{2^{\left(y^3+y\right)^2}\left(3y^2+1\right)}{\left(y^3+y\right)^2}\left[2\ln(2)\left(y^3+y\right)^2-1\right]$ 46. $f'(x)=\dfrac{1}{2}xe^{e^{x^2}+x^2}-\dfrac{30x^2}{1-2x^3}$

47. $g'(x)=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{6x^2+\sqrt{x^3+8}}\right)^2}\right]\left[12x+\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+8}}\right]$ 48. $h'(x)=\sqrt[3]{\ln\sqrt{7x^3-x}}+\dfrac{21x^2-1}{\left(42x^2-6\right)\sqrt[3]{\ln^2\sqrt{7x^3-x}}}$

49. $g'(x) = 28^{x^2e^{-x}}(2x-x^2)e^{-x}\ln(28)$ 50. $h'(x)=\dfrac{36x^3}{9x^4+1}-\dfrac{5x^4}{x^5-0.5}$

51. $y'=\dfrac{6x^2\left(x^3+8\right)^{4/3}}{\left(24-4x^2\right)^{1/3}}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x^3+8}{24-4x^2}\right)^{4/3}\dfrac{\left(4x^4-72x^2-64x\right)}{\left(x^3+8\right)^2}$ 52. $y'=\dfrac{\left(3x^6-2x\right)^4\left(90x^5-10\right)+6x^2}{4\left[\left(13x^6-2x\right)^5+2x^3\right]^{3/4}}$

53. $y'=3^{\sqrt{\ln x}}\pi^{\frac{x^2}{x+1}}\left[\dfrac{\ln\pi\left(x^2+2x\right)}{(x+1)^2}+\dfrac{\ln 3}{2x\sqrt{\ln x}}\right]$ 54. $y'=\dfrac{\left(x^4+6\right)^4}{4x+2}+16x^3\left(x^4+6\right)^3\ln\sqrt[4]{2x+1}$

55. $y'=\dfrac{(0.523)^{\sqrt{x^3-x}}\ln(0.523)\left(3x^2-1\right)e^{-2x}}{2\sqrt{x^3-x}}-2e^{-2x}(0.523)^{\sqrt{x^3-x}}$ 56. $y'=\dfrac{4}{7}\left(\ln(7x)-6^{2x}\right)^{-3/7}\left(\dfrac{1}{x}-2\ln 6\left(6^{2x}\right)\right)$

57. $y'=-\dfrac{1}{4}\left(e^{\sqrt[3]{x-1}}+\ln\sqrt{x-1}\right)^{-5/4}\left(\dfrac{e^{\sqrt[3]{x-1}}}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}+\dfrac{1}{2x-2}\right)$

58. $y'=-8\left(e^{2.43}+\ln(2.43)\right)^{-8x}\ln\left(e^{2.43}+\ln(2.43)\right)-\dfrac{8\left(\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\right)^3}{(x+1)(x-1)}$ 59. $y'=e^{-4\ln x^3}\left(\dfrac{184}{\sqrt{x}}\right)$

60. $y'=\dfrac{\left(x^2+2\right)^4\left(x^5+2x\right)^5}{\left(x^2-1\right)^3}\left[10x\left(x^5+2x\right)\left(x^2-1\right)+6\left(x^2-1\right)\left(x^2+2\right)\left(5x^4+2\right)-4x\left(x^2+2\right)\left(x^5+2x\right)\right]$

61. $y'=\dfrac{(2.8x+12.6)\left(x^4-10x\right)^{5/4}}{\left(x^2+9x\right)^{4/5}}+\left(35x^3-87.5\right)\left(x^4-10x\right)^{1/4}\left(x^2+9x\right)^{1/5}$

62. $y'=\dfrac{3x}{\sqrt{1+3x^2}\left(4x^{3/8}-e\right)^{27}}-\dfrac{81\sqrt{1+3x^2}}{2x^{5/8}\left(4x^{3/8}-e\right)^{28}}$ 63. $y'=\dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{\ln x+1}}{2x\sqrt{\ln x+1}}$ 64. $y' = -3(xe^x+e^x)\cos^2(xe^x)\operatorname{sen}(xe^x)$

65. $y'=\dfrac{\cos x+x\operatorname{sen}x}{\cos^2 x}$ 66. $y'=\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}$ 67. $y' = 2x\ln 5(\cos x^2)5^{\operatorname{sen}x^2}$ 68. $y'=\dfrac{-2xy}{x^2-\dfrac{5}{x}-2y}$ 69. $y' = -e^{x-y}$

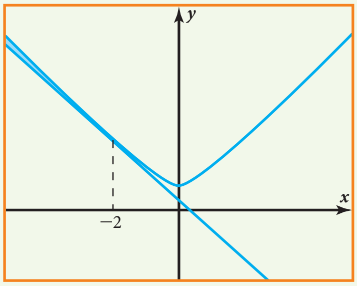
70. $y'=\dfrac{3^x\ln 3}{2y+5^y\ln 5}$ 71. $y'=\dfrac{\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{x}{y^2}+2^y\ln 2}$ 72. $y'=\dfrac{4^x\ln 4+2x}{\pi^y\ln\pi+2y}$ 73. $y'=\dfrac{y\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}y}{\cos x+\cos y}$

74. $y' = \dfrac{2x\,\text{sen}\left(x^2+y^2\right)-1}{2y\,\text{sen}\left(x^2+y^2\right)-1}$ **75.** $y'' = x5^x(\ln 5)^2 + 2(5^x \ln 5)$, $y''' = x5^x(\ln 5)^3 + 3(5^x \ln 5)^2$ **76.** $y'' = 3 + 2\ln x$
$y''' = \dfrac{2}{x}$ **77.** $y'' = \pi^x(\ln \pi)^2 - \pi(\pi-1)x^{\pi-2}$, $y''' = \pi^x(\ln \pi)^3 - \pi(\pi-1)(\pi-2)x^{\pi-3}$ **78.** $y'' = -4(x+1)^{-3}$,
$y''' = 12(x+1)^{-4}$ **79.** $y'' = x^2e^x + 4xe^x + 2e^x + 6e^2x$, $y''' = x^2e^x + 6xe^x + 6e^x + 6e^2$
80. $y'' = -x\cos x - 2\,\text{sen}\,x$, $y''' = x\,\text{sen}\,x - 3\cos x$

Tema 3.6

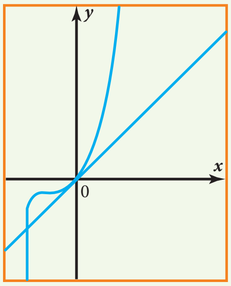
1. La ecuación de la recta tangente es:

$$y = -\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{4}{\sqrt{5}} + \sqrt{5}$$



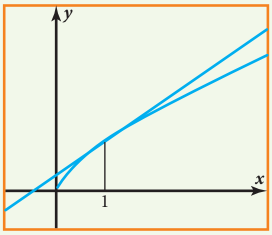
2. La ecuación de la recta tangente es:

$$y = x$$



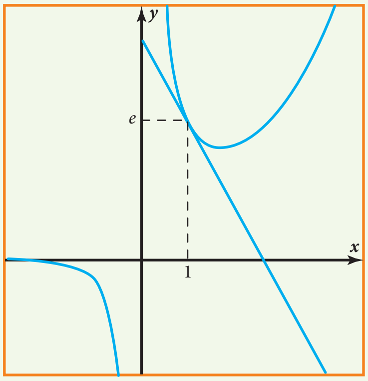
3. La ecuación de la recta tangente es:

$$y = \ln 2x - \ln 2 + 1$$



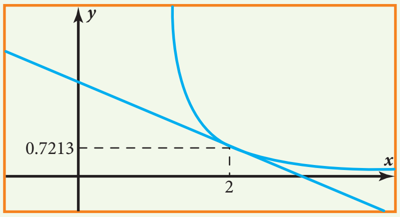
4. La ecuación de la recta tangente es:

$$y = -\frac{2}{3}ex + \frac{5}{3}e$$



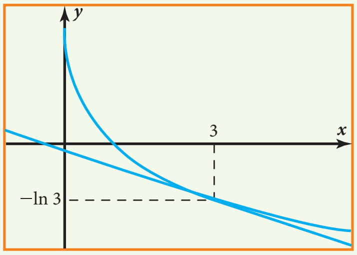
5. La ecuación de la recta tangente es:

$$y=-\left(\frac{1+\ln 2}{(2\ln 2)^2}\right)(x-2)+\frac{1}{2\ln 2}$$



6. La ecuación de la recta tangente es:

$$y=-\frac{1}{3}x+1-\ln 3$$



7. La ecuación de la recta tangente es:

$$y=\frac{1}{16}x+\frac{9}{16}$$

8. La ecuación de la recta tangente es:

$$y=-e^8x+e^8$$

9. La ecuación de la recta tangente es:

$$y=(\ln 3-3)x+3$$

10. La ecuación de la recta tangente es:

$$y=2$$

11. La ecuación de la recta tangente es:

$$y=2e^{-1}x-e^{-1}$$

12. La ecuación de la recta tangente es:

$$y=-0.0221615x+20.734$$

13. La ecuación de la recta tangente es:

$$y=816x-1\,120$$

14. La ecuación de la recta tangente es:

$$y=0.07115x+1$$

15. La ecuación de la recta tangente es:

$$y=5.5452x-0.7726$$

16. El costo aumenta con una rapidez de 0.221872 dólares/unidad producida

17. El costo marginal es \$501.89 **18.** El saldo aumenta con una rapidez de 0.221872 dólares/día **19.** El saldo aumentará con una rapidez de 1 127.09 dólares/año **20.** El precio disminuye 1 802 dólares/computadora **21.** La demanda disminuye 71 llantas/mes **22.** La población crece a una rapidez de 7.8183 millones de personas/año **23.** La población crece a una rapidez de 0.580635 millones de personas/año **24.** La utilidad marginal es de \$306.74 **25.** La utilidad aumenta con una rapidez de \$6 000 223.60/tonelada de acero **26.** La productividad marginal es de 10 unidades **27.** La producción marginal es de \$2 076 kg **28.** El ingreso marginal es de \$2 500 **29.** El ingreso aumenta a una razón de 85 dólares/unidad vendida **30.** El tumor crece a una rapidez de 2 325.94 miligramos/mes

Tema 3.7

Las interpretaciones prácticas no se dan, porque sería contestar la pregunta que se te hace.

1. *f*) ºC/min *g*) Negativo **2.** *a*) ºF/min *b*) Positivo **3.** *a*) kg/miles de calorías *b*) Positivo

4. *a*) Miligramos/meses *b*) Positivo **5.** *a*) Miles de pesos/cientos de unidades vendidas *b*) Positivo **6.** *a*) Miles de pesos/cientos de docenas de huevos vendidos *b*) Positivo **7.** *a*) Miles de pesos/cientos de garrafones vendidos *b*) Positivo **8.** *a*) Miles de pesos/toneladas de acero vendido *b*) Positivo **9.** *a*) Dólares/reproductores fabricados *b*) Positivo **10.** *a*) Millones de pesos/toneladas de maíz producidas *b*) Positivo **11.** $P'(12) = -2.00096$ **12.** $P'(4) = 1.99207$ **13.** $P'(5) = 2.57999$ **14.** $S'(3) = 1.5061717$ **15.** $V'(2) = -43.68139$ **16.** $M'(30) = -8.8242$ **17.** $I'(100) = 5\,000$ **18.** $P'(400) = 3/\sqrt{400} = 0.15$ **19.** *a*) $I(p) = -2p^2 + 780\,p$ *b*) $I'(38) = 628$ **20.** *a*) $U(x) = 538x - 0.05x^2 - 4\,000$ *b*) $U'(400) = 498$

Unidad 4

Tema 4.1

1. Máximo en $x = 2$, f crece en $(-\infty, 2)$, f decrece en $(2, \infty)$ **2.** Mínimo en $x = \frac{5}{6}$ f crece en $(5/6, \infty)$ f decrece en $(-\infty, 5/6)$ **3.** Mínimo en $x = -1.5$, f crece en $(-1.5, \infty)$, f decrece en $(-\infty, -1.5)$ **4.** Máximo en $x = \frac{1}{6}$, f crece en $(-\infty, 1/6)$, f decrece en $(1/6, \infty)$ **5.** Máximo en $x = -2$, mínimo en $x = 3$ f crece en $(-\infty, -2)\cup(3, \infty)$, f decrece en $(-2, 3)$ **6.** Máximo en $x = \frac{1}{3}$, mínimo en $x = 1$, f crece en $(-\infty, 1/3)\cup(1, \infty)$, f decrece en $(1/3, 1)$ **7.** Mínimo en $x = 0$, máximo en $x = \frac{1}{3}$, f crece en $(0, 1/3)$, f decrece en $(-\infty, 0)\cup(1/3, \infty)$ **8.** Máximo en $x = 2$, mínimo en $x = 3$, f crece en $(-\infty, 2)\cup(3, \infty)$ f decrece en $(2, 3)$ **9.** Máximo en $x = -3.85$, mínimo en $x = 20.649$, f crece en $(-\infty, -3.85)\cup(-0.649, \infty)$, f decrece en $(-3.85, -0.649)$ **10.** Máximo en $x = -2$, mínimo en $x = \frac{1}{3}$, f crece en $(-\infty, -2)\cup(1/3, \infty)$, f decrece en $(-2, 1/3)$ **11.** Máximo en $x = 0$, mínimo en $x = 6.7$, f crece en $(-\infty, 0)\cup(6.7, \infty)$, f decrece en $(0, 6.7)$ **12.** Mínimo en $x = -1$, máximo en $x = 6$, f crece en $(-1, 6)$, f decrece en $(-\infty, -1)\cup(6, \infty)$ **13.** No hay máximos ni mínimos, f crece en $(-\infty, +\infty)$ **14.** No hay máximos ni mínimos, f crece en $(-\infty, +\infty)$ **15.** No hay máximos ni mínimos, f decrece en $(-\infty, +\infty)$ **16.** No hay máximos ni mínimos, f decrece en $(-\infty, +\infty)$ **17.** No hay máximos ni mínimos, f crece en $(-\infty, +\infty)$ **18.** No hay máximos ni mínimos, f crece en $(-\infty, +\infty)$ **19.** No hay máximos ni mínimos, f crece en $(-\infty, +\infty)$ **20.** No hay máximos ni mínimos, f crece en $(-\infty, +\infty)$ **21.** No hay máximos ni mínimos, f crece en $(-\infty, +\infty)$ **22.** No hay máximos ni mínimos, f crece en $(-\infty, +\infty)$ **23.** No hay máximos ni mínimos, f crece en $(-\infty, +\infty)$ **24.** No hay máximos ni mínimos, f crece en $(-\infty, +\infty)$ **25.** Máximo en $x = -1, x = 1$, mínimo en $x = 0$, f crece en $(-\infty, -1)\cup(0, 1)$, f decrece en $(-1, 0)\cup(1, +\infty)$ **26.** Máximo en $x = 3$, mínimo en $x = 0, x = 4$, f crece en $(0, 3)\cup(4, +\infty)$, f decrece en $(-\infty, 0)\cup(3, 4)$ **27.** Máximo en $x = 0$, mínimo en $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$, f crece en $\left(-\sqrt{3}, 0\right)\cup\left(\sqrt{3}, +\infty\right)$, f decrece en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right)\cup\left(0, \sqrt{3}\right)$ **28.** Máximo en $x = 0$, mínimo en $x = -1/5, x = 3/2$, f crece en $(-1/5, 0)\cup(3/2, +\infty)$, f decrece en $(-\infty, -1/5)\cup(0, 3/2)$ **29.** Mínimo en $x = 0$, f crece en $(0, \infty)$, f decrece en $(-\infty, 0)$ **30.** Máximo en $x = 0$, f crece en $(-\infty, 0)$, f decrece en $(0, \infty)$ **31.** Máximo en $x = -2.236$, mínimo en $x = 2.236$, f crece en $(-\infty, -2.236)\cup(2.236, \infty)$, f decrece en $(-2.236, 2.236)$ **32.** Máximo en $x = -\frac{3}{2}$, mínimo en $x = 6$, No es máximo ni mínimo $x = 0$, f crece en $(-\infty, -3/2)\cup(6, \infty)$, f decrece en $(-3/2, 0)\cup(0, 6)$ **33.** No tiene máximos ni mínimos, f crece en $(-\infty, +\infty)$ **34.** Máximo en $x = 0.63$, f crece en $(-\infty, 0.63)$, f decrece en $(0.63, \infty)$ **35.** Máximo en $x = 1$, no es máximo ni mínimo $x = 0$, f crece en $(-\infty, 1)$, f decrece en $(1, +\infty)$ **36.** Máximo en $x = \frac{4}{3}$, f crece en $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$, f decrece en $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$ **37.** Mínimo en $x = \frac{1}{16}$, f crece en $\left(\frac{1}{16}, +\infty\right)$, f decrece en $\left(0, \frac{1}{16}\right)$ **38.** Mínimo en $x = 4$, f crece en $(4, +\infty)$, f decrece en $(-\infty, 4)$ **39.** Máximo en $x = -1$, mínimo en $x = 1$, f crece en $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$, f decrece en $(-1, 1)$ **40.** No hay máximos ni mínimos, f crece en $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ **41.** No hay máximos ni mínimos, f crece en $(-\infty, 0)$, f decrece en $(0, +\infty)$ **42.** No hay máximos ni mínimos, f crece en $(-\infty,0)\cup\left(0,\sqrt[3]{4}\right)\cup\left(\sqrt[3]{4},\infty\right)$ **43.** Máximo en $x=\sqrt{5}$, mínimo en $x=-\sqrt{5}$, f crece en $\left(-\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$, f decrece en $\left(-\infty,-\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5},+\infty\right)$ **44.** Máximo en $x = 0$, f crece en $(-\infty, 0)$, f decrece en $(0, +\infty)$ **45.** No tiene máximos ni mínimos, f decrece en $(-\infty, -1)\cup(-1, 1)\cup(1, +\infty)$ **46.** Máximo en $x = 0$, f crece en $(-\infty, -2)\cup(-2, 0)$, f decrece en $(0, 2)\cup(2, +\infty)$ **47.** Máximo en $x = -2.4142$, mínimo en $x = 0.4142$, f crece en $(-\infty, -2.4142)\cup(0.4142, +\infty)$, f decrece en $(-2.4142, 0.4142)$ **48.** Mínimo en $x = 0$, f crece en $(0, +\infty)$, f decrece en $(-\infty, 0)$ **49.** Máximo en $x = 2$, f crece en $(-\infty, 2)$, f decrece en $(2, +\infty)$ **50.** Mínimo en $x=\sqrt[3]{4}$, f crece en $(-\infty,0)\cup\left(\sqrt[3]{4},\infty\right)$, f decrece en $\left(0,\sqrt[3]{4}\right)$ **51.** Se deben producir y vender 28 unidades para obtener una máxima utilidad de \$372. **52.** Se deben producir y vender 70 unidades para obtener una máxima utilidad de \$460 **53.** Se deben producir y vender 13 unidades para obtener una máxima utilidad de \$189 **54.** Se deben producir y vender 37 unidades para obtener una máxima utilidad de \$300 **55.** *a)* El precio al que debe rentar es \$1 600 para tener Ingreso máximo *b)* Ingreso máximo = \$128 000 **56.** Se deben producir 400 calculadoras para minimizar los costos de la compañía **57.** Se deben vender 5 000 celulares para que la compañía tenga una utilidad máxima **58.** *a)* Se deben vender 11 500 unidades para obtener un ingreso máximo *b)* Ingreso máximo = \$1 983 750 **59.** *a)* Se debe manejar a 90 km/h para que el costo de transportación sea mínimo *b)* Costo mínimo = \$3 900 **60.** Se deben vender 3 000 máquinas por mes para maximizar las ganancias de la empresa **61.** Se deben producir y vender 625 unidades para maximizar la utilidad **62.** Se pueden fabricar 12 tiendas de campaña con el mínimo de material **63.** Se deben vender 500 unidades para obtener el máximo ingreso **64.** El boleto debe venderse a \$57.50 para maximizar su ingreso **65.** Se deben emplear 16 trabajadores para terminar la construcción en el menor tiempo posible **66.** *a)* Se deben fabricar y vender 533 vestidos por semana para obtener el máximo ingreso *b)* Precio de venta: \$16.34 dólares *c)* Ingreso: \$8 709.22 dólares **67.** *a)* Se deben producir 525 unidades para maximizar la utilidad *b)* Precio de venta: \$51 *c)* Utilidad: \$10 525 dólares **68.** *a)* Cuota mensual: \$420 *b)* La empresa tendrá 3 360 suscriptores *c)* Ingreso: \$1 411 200 **69.** *a)* Las medidas del rectángulo son: 320 pies y 400 pies para que el costo de la cerca sea mínimo *b)* Costo mínimo: \$3 200 dólares **70.** Se deben cobrar \$6 750 pesos por cabaña para maximizar la utilidad **71.** *a)* El boleto se debe vender a \$45 para maximizar los ingresos *b)* Se venderán 45 000 entradas si el precio es de \$45 **72.** *a)* El costo anual del inventario se minimiza cuando se hace un pedido de 300 pelotas de beisbol *b)* El costo mínimo de inventario es de \$27 000 **73.** *a)* $I = 520x - 20x^2$ *b)* El 13% de impuesto de importación produce el máximo ingreso *c)* Ingreso máximo de \$3 380 000 pesos **74.** *a)* Para maximizar las utilidades se deben producir y vender 3 000 calefactores. *b)* Utilidad máxima de \$2 148 000 **75.** *a)* Cada pastel se debe vender en \$125 para alcanzar un ingreso máximo *b)* El ingreso máximo es de \$31 250 **76.** *a)* Para obtener un mínimo costo se deben fabricar 1 800 artículos *b)* El costo mínimo es de \$743 **77.** Tiene que vender 1 000 elotes a la semana para tener una utilidad máxima **78.** Se deben almacenar 1 200 unidades para que los costos sean mínimos **79.** *a)* El precio de la colegiatura debe ser de \$4 875 para obtener un ingreso máximo. *b)* Para que el ingreso sea máximo deberán estar inscritas 325 alumnas *c)* Ingreso máximo \$1 584 375 **80.** Si el software se demora 17.5 días es salir al mercado se obtendrá un ingreso máximo

Tema 4.2

1. Punto de inflexión en $x = -4/3$, f es cóncava hacia arriba en $(-4/3, +\infty)$, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -4/3)$ **2.** Punto de inflexión en $x = 2$, f es cóncava hacia arriba en $(2, +\infty)$, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 2)$ **3.** Punto de inflexión en $x = 7/3$, f es cóncava hacia arriba en $(7/3, +\infty)$, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 7/3)$ **4.** Punto de inflexión en $x = 1/3$, f es cóncava hacia arriba en $(1/3, +\infty)$, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1/3)$ **5.** Puntos de inflexión en $x = -3$ $x = 0.5$, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -3)\cup(0.5, +\infty)$, f es cóncava hacia abajo en $(-3, 0.5)$ **6.** Puntos de inflexión en $x = -4.5$ $x = 3$, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -4.5)\cup(3, +\infty)$, f es cóncava hacia abajo en $(-4, 5.3)$ **7.** Puntos de inflexión en $x = 1$ $x = -7$, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -7)\cup(1, +\infty)$, f es cóncava hacia abajo en $(-7, 1)$ **8.** Punto de inflexión en $x = 1/3$, $x = -7/2$, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -7/2)\cup(1/3, +\infty)$, f es cóncava hacia

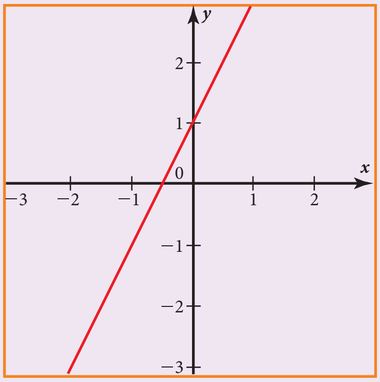
abajo en $(-7/2, 1/3)$ **9.** No tiene puntos de inflexión, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, +\infty)$ **10.** No tiene puntos de inflexión, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, +\infty)$ **11.** No tiene puntos de inflexión, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, +\infty)$ **12.** No tiene puntos de inflexión, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, +\infty)$ **13.** No tiene puntos de inflexión f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, +\infty)$ **14.** No tiene puntos de inflexión, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, +\infty)$ **15.** No tiene puntos de inflexión, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, +\infty)$ **16.** No tiene puntos de inflexión, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, +\infty)$ **17.** Puntos de inflexión en $x = 0, x = 2, x = -1$, f es cóncava hacia arriba en $(-1, 0)\cup(2, +\infty)$, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1)\cup(0, 2)$ **18.** Puntos de inflexión en $x = 0, x = 8, x = -3$, f es cóncava hacia arriba en $(-3, 0)\cup(8, +\infty)$, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -3)\cup(0, 8)$ **19.** Puntos de inflexión en $x=0, x=\sqrt{5/2}, x=-\sqrt{5/2}$, f es cóncava hacia arriba en $\left(-\sqrt{5/2},0\right)\cup\left(\sqrt{5/2},+\infty\right)$, f es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty,-\sqrt{5/2}\right)\cup\left(0,\sqrt{5/2}\right)$ **20.** Puntos de inflexión $x=0, x=\sqrt{5/2}, x=-\sqrt{5/2}$, f es cóncava hacia arriba en $(-1, 0)\cup(1.5 +\infty)$, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1)\cup(0, 1.5)$ **21.** Punto de inflexión $x = 2/3$, f es cóncava hacia arriba en $(2/3, +\infty)$, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 2/3)$ **22.** Punto de inflexión $x = 2$, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 2)$, f es cóncava hacia abajo en $(2, +\infty)$ **23.** Punto de inflexión $x = 5$, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 5)$, f es cóncava hacia abajo en $(5, +\infty)$ **24.** Punto de inflexión $x = 1.25$, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 1.25)$, f es cóncava hacia abajo en $(1.25, +\infty)$ **25.** No tiene puntos de inflexión, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, \infty)$ **26.** Punto de inflexión en $x = 0$ f es cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ **27.** Punto de inflexión en $x = 0$, f es cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ **28.** Punto de inflexión en $x = 0$, f es cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ **29.** Punto de inflexión en $x = 0$, f es cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ **30.** Punto de inflexión en $x = 0$, f es cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ **31.** Punto de inflexión en $x = 0$, f es cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ **32.** Punto de inflexión en $x = 0$, f es cóncava hacia arriba en $(0, +\infty)$, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ **33.** Puntos de inflexión en $x = -0.58$ y $x = 0.58$, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -0.58)\cup(0.58, +\infty)$, f es cóncava hacia abajo en $(-0.58, .58)$ **34.** Puntos de inflexión en $x = -2.89$ y $x = 2.89$, f es cóncava hacia arriba en $(-2.89, 2.89)$, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2.89)\cup(2.89, +\infty)$ **35.** No tiene puntos de inflexión, f es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$, f es cóncava hacia abajo en $\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$ **36.** No tiene puntos de inflexión, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$ **37.** Punto de inflexión en $x = 2$, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, 2)$, f es cóncava hacia abajo en $(2, \infty)$ **38.** Punto de inflexión en $x = -2$, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2)$, f es cóncava hacia abajo en $(-2, \infty)$ **39.** Punto de inflexión en $x = 0$, f es cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ **40.** Punto de inflexión en $x = -3$, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -3)$, f es cóncava hacia abajo en $(-3, \infty)$ **41.** No tiene puntos de inflexión, f es cóncava hacia arriba en $(-\infty, \infty)$ **42.** Punto de inflexión en $x = -5$, f es cóncava hacia arriba en $(-5, \infty)$, f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -5)$ **43.** No tiene puntos de inflexión **44.** Punto de inflexión en $x = 0$ **45.** Punto de inflexión en $x = 0$ **46.** Punto de inflexión en $x = 0$ **47.** Puntos de inflexión en $x = 0$ y $x = 3$ **48.** Puntos de inflexión en $x = -2, x = 2, x = -1.309$ y $x = 1.309$ **49.** Puntos de inflexión en $x = -1, x = 1, x = 0$ **50.** Puntos de inflexión en $x = -1.563$ y $x = 1.563$ **51.** Punto de inflexión en $x = 0.474$ **52.** No tiene puntos de inflexión, pero sí hay cambio de concavidad
53. *a)* 1900-1920, 1930-1940, 1950-1960, 1980-2000, Cóncava hacia arriba *b)* 1920–1930, 1940–1950, 1960-1980, Cóncava hacia abajo *c)* 1920, 1940, 1960 *d)* 1930, 1950, 1980
54. *a)* 2003-2004, Cóncava hacia arriba *b)* 1998-2003, Cóncava hacia abajo *c)* No hay punto de número de usuarios decreciente *d)* 2003 **55.** *a)* La razón de cambio es creciente y la función es cóncava hacia arriba *b)* La razón de cambio es decreciente y la función es cóncava hacia abajo

Conocimientos previos

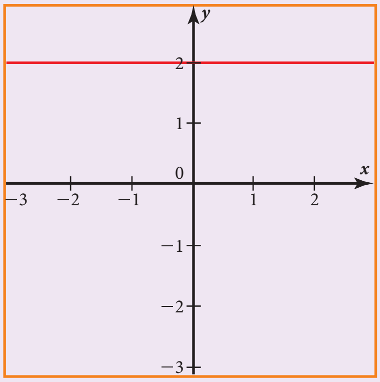
1. Reconocimiento de gráficas

A continuación se muestran algunas gráficas con las que se trabaja en el curso.

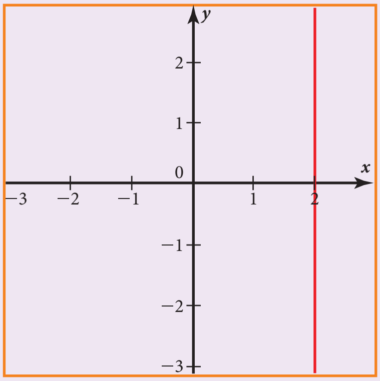
Rectas



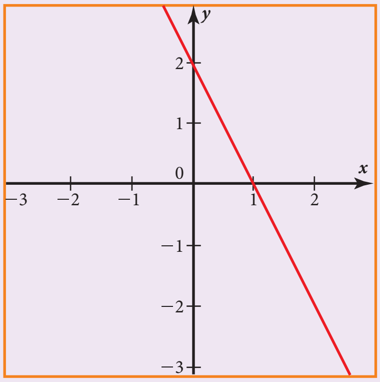
Recta con pendiente positiva



Recta con pendiente 0

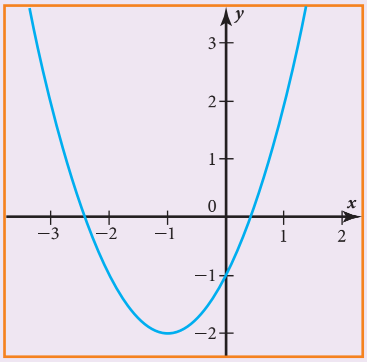


Recta con pendiente indefinida

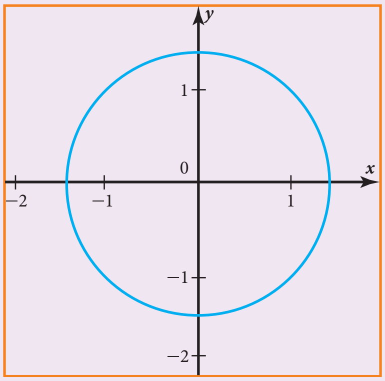


Recta con pendiente negativa

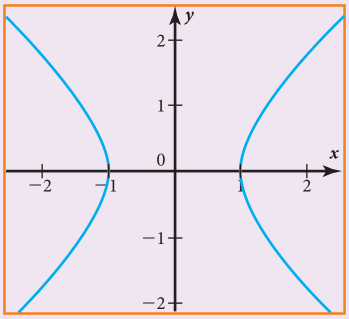
Cuadráticas



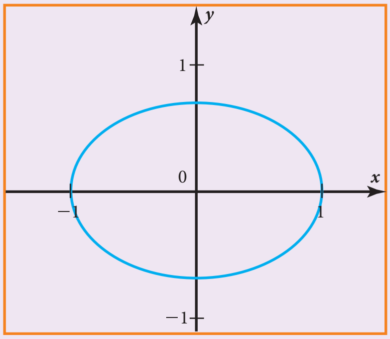
Parábola



Circunferencia

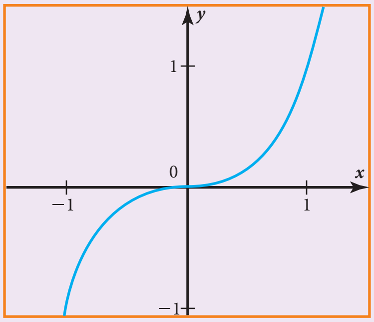


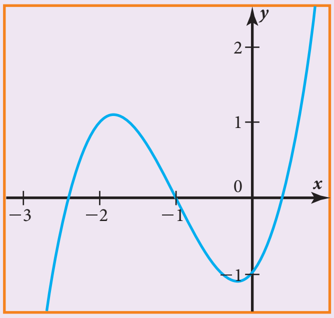
Hipérbola



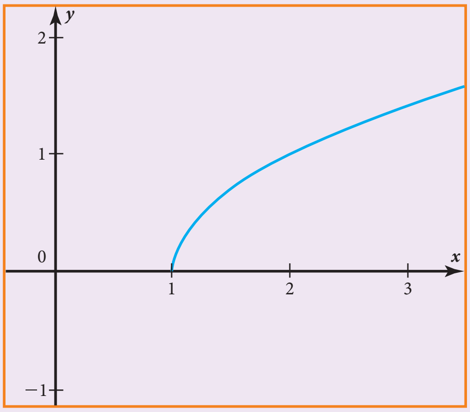
Elipse

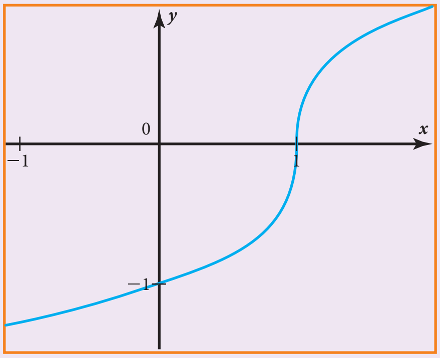
Cúbicas





Radicales

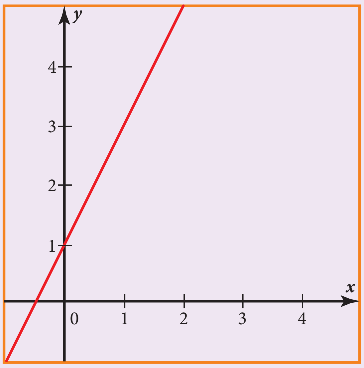




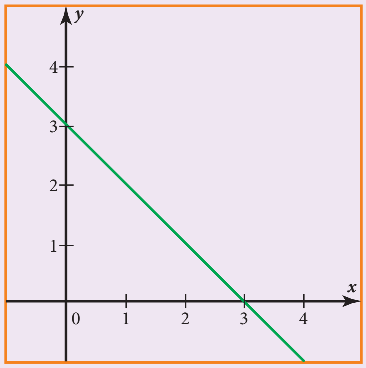
2. Funciones lineales

Elementos gráficos y numéricos de una gráfica lineal

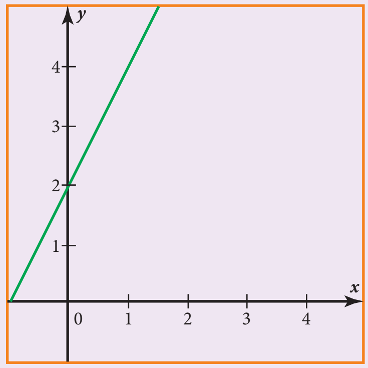
Observa las siguientes gráficas.



A)



B)



C)

A partir de la forma $y = mx + b$, m representa la pendiente de la recta o la razón de cambio constante y b es la intersección con el eje y o bien el valor inicial. Por ejemplo, en la gráfica *A* el valor de $b = 1$, en la gráfica *B*, $b = 3$.

Las gráficas *A* y *B* tienen pendiente positiva, por lo tanto, son crecientes. La gráfica *B* tiene pendiente negativa y es decreciente. También observa que las líneas del inciso *C* son paralelas, por lo tanto, tienen la misma pendiente.

¿Cómo podemos calcular la pendiente de una recta?

Ejemplo 1 Si tenemos dos puntos (2, 3) y (1, 5), calculemos la pendiente de la siguiente manera:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-y_1}=\frac{5-3}{1-2}=\frac{2}{-1}=-2$$

o bien

$$m=\frac{3-5}{2-1}-\frac{-2}{1}=-2$$

Observa que no importa el orden que decidas en cuanto a cuál es el punto 1 o el punto 2, de cualquier manera vas a obtener el mismo resultado.

Ejemplo 2 Ahora, si tenemos los puntos (4, −1) y (−2, −2), calculemos la pendiente:

$$m=\frac{-2-(-1)}{-2-4}=\frac{-1}{-6}=\frac{1}{6}$$

o bien

$$m=\frac{-1-(-2)}{4-(-2)}=\frac{1}{6}$$

Observa cómo el signo (−) afecta al signo de (−) del número. Las leyes de los signos juegan un papel importante en este tipo de cálculo.

Leyes de los signos

$+ * + = +$

$- * - = +$

$+ * - = -$

$- * + = -$

¡A practicar!

Instrucciones: encuentra la pendiente o razón de cambio (asumiendo que el cambio es constante) a partir de los siguientes pares ordenados. Verifica que tu respuesta sea la correcta.

Puntos	Pendiente o razón de cambio
(3, −5), (2, 1)	
(−4, −1), (5, 0)	
(0, −2), (−3, −6)	

Soluciones $\left\{-6, \frac{1}{9}, \frac{4}{3}\right\}$

¿Cómo se calcula la ecuación de una recta?

Existen varias alternativas para calcular la ecuación de una recta, por ejemplo:

Si se conocen dos puntos de la recta	$(y - x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
Si se conoce un punto y la pendiente	$(y - y_1) = m(x - x_1)$
También se puede usar la forma de la recta	$y = mx + b$

Dado que el objetivo de aprendizaje es que te familiarices con la forma $y = mx + b$, vamos a usar esa forma para ilustrar los ejemplos siguientes.

a) Cálculo de la ecuación de la recta cuando se conoce un punto y su pendiente.

Ejemplo 1 Punto (2, − 1) y $m = 3$

Algoritmo

Se sustituyen el punto y la pendiente en la ecuación $y = mx + b$	$y = mx + b$ $-1 = 3(2) + b$
Se despeja a la variable b	$-1 = 6 + b$ $-1 - 6 = b$ $b = -7$
Se sustituyen los valores de la pendiente y el de b en la ecuación $y = mx + b$	$y = 3x - 7$

Ejemplo 2 *b*) Cálculo de la ecuación de la recta cuando se conocen dos puntos.

Punto (2, − 1) y (1, −3)

Algoritmo

Se calcula la pendiente	$m=\frac{-3-(-1)}{1-(2)}=\frac{-2}{-1}=2$
Se sustituye cualquiera de los puntos y la pendiente en la ecuación $y = mx + b$	$y = mx + b$ $-1 = 2(2) + b$
Se despeja a la variable b	$-1 = 4 + b$ $-1 - 4 = b$ $b = -5$
Se sustituyen los valores de la pendiente y el de b en la ecuación $y = mx + b$	$y = 2x - 5$

¡A practicar!

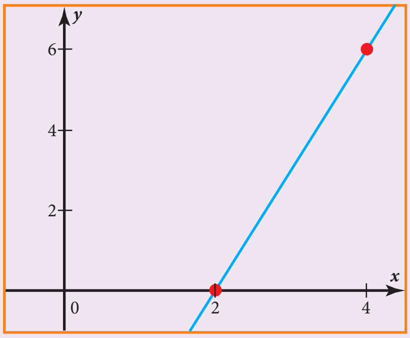
Instrucciones: a partir de los puntos obtén la ecuación de la recta en la forma $y = mx + b$.

Puntos	Ecuación de la recta
(3, −5), (2, 1)	
$(-4,-1), m=\frac{1}{9}$	
(0, −2), (−3, −6)	

Soluciones $y=-6x-12,\quad y=\frac{1}{9}x-\frac{5}{9},\quad y=\frac{4}{3}x-2$

c) Cálculo de la ecuación de la recta cuando se conoce su gráfica.

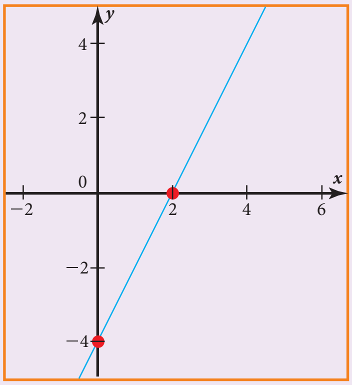
Ejemplo 1



Algoritmo

Escoge dos puntos que estén sobre la recta, en este caso se escogieron	(2, 0) y (4, 6)
Calcula la pendiente tal y como se explicó en el ejemplo 2 de esta misma sección	$m=\frac{6-(0)}{4-(2)}=\frac{6}{2}=3$
Se sustituye cualquiera de los puntos y la pendiente en la ecuación $y = mx + b$	$y = mx + b$ $0 = 3(2) + b$
Se despeja a la variable b	$0 = 6 + b$ $-6 = b$ $b = -6$
Se sustituyen los valores de la pendiente y el de b en la ecuación $y = mx + b$	$y = 3x - 6$

Ejemplo 2



Escoge dos puntos que estén sobre la recta, en este caso se escogieron	(0, −4) y (2, 0)
Calcula la pendiente tal y como se explicó en el ejemplo 2 de esta misma sección	$m=\frac{0-(-4)}{2-(0)}=\frac{4}{2}=2$
En este caso afortunado, se puede leer directamente el valor de b, ya que b representa el valor inicial o la intersección de la recta con eje y, en esta gráfica se aprecia con exactitud esta intersección	$b = -4$
Se sustituyen los valores de la pendiente y el de b en la ecuación $y = mx + b$	$y = 2x - 4$

3. Cambiar una expresión, cuya variable está en el denominador, a forma de potencia

En ocasiones se pueden encontrar funciones expresadas como $y=\frac{2}{x^2}$ o $y=7\sqrt[5]{x^2}$ o $y=\frac{5}{\sqrt[3]{x}}$, por lo que se hace necesario reexpresarlas como una función potencia ya sea para identificar sus elementos, para realizar operaciones, o bien, para derivarlas o antiderivarlas. Veamos paso a paso cada ejemplo:

1. $y = \frac{1}{2x^3} = \frac{1}{2}x^{-3}$ Observa que la variable "sube" al numerador y con potencia negativa.
2. $y = 7\sqrt[5]{x^2}$ Hay una propiedad que dice $y = \sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$ esto es, que la potencia del radicando es el numerador y el índice del radical el denominador por lo que si tenemos $9 = 7\sqrt[5]{x^2}$ esto es lo mismo que $y = 7x^{2/5}$
3. $y = \frac{5}{\sqrt[3]{x}}$ En ocasiones puedes encontrar radicales en el denominador, por lo que deberás aplicar lo comentado en los ejemplo 1 y 2, de tal manera que si $y = \frac{5}{\sqrt[3]{x}}$ se puede expresar como $y = \frac{5}{x^{1/3}}$, y esto a la vez como $y = 5x^{-1/3}$

Observa que la variable es el único elemento de la expresión que cambia, las constantes permanecen iguales.

¡A practicar!

Instrucciones: expresa en forma de potencia las siguientes funciones.

	Función potencia
$y = \frac{1}{3x^5}$	
$y = \frac{8\sqrt{t}}{5}$	
$y = \frac{3}{4\sqrt[7]{x^2}}$	

Soluciones $y = \frac{1}{3}x^{-5}$, $y = \frac{8}{5}t^{\frac{1}{2}}$, $y = \frac{3}{4}x^{\frac{-2}{7}}$

4. Cambio de porcentaje a forma decimal, y viceversa

Para cambiar de un porcentaje a forma decimal basta con dividir el porcentaje por 100, por ejemplo:

$35\% = \frac{35}{100} = 0.35$ $\quad 7.5\% = \frac{7.5}{100} = 0.75$ $\quad 0.4\% = \frac{0.4}{100} = 0.004$

De manera contraria, si queremos cambiar de un decimal a porcentaje, bastará con multiplicar por 100 ese número, por ejemplo:

$0.55 = 0.55 * 100 = 55\%$ $\quad 0.007 = 0.007 * 100 = 0.7\%$ $\quad 1.3 = 1.3 * 100 = 130\%$

Ejercicio Llena la siguiente tabla.

Porcentaje	A decimal	Decimal	A porcentaje
13.5%		0.818	
0.67%		1.15	

Soluciones 0.135, 0.0067, 81.8%, 115%

5. Leyes de los exponentes

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$, es decir, cuando las variables se multiplican, los exponentes se suman. Por ejemplo, si tenemos $x^2 \cdot x^3 = (x \cdot x)(x \cdot x \cdot x) = x^5$. Como puedes ver los exponentes se suman, pues esto representará las veces que la variable se está multiplicando a sí misma.

   Más ejemplos:

   $x^3 \cdot x^5 = x^8$

   $2x \cdot 3x^2 = 6x^3$

   $x^{-3} \cdot x^5 = x^2$

   $3^2 \cdot 3^4 = 3^6$

2. $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$, *es decir,* si una variable está elevada a otra potencia las potencias se multiplicarán. Por ejemplo, si tenemos $(x^5)^2 = (x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x)(x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x) = x^{10}$. Como puedes observar los exponentes deben multiplicarse para indicar el número de veces que la variable se multiplica a sí misma.

   Más ejemplos:

   $(x^2)^7 = x^{14}$

   $(2x^2)^3 = 8x^6$

   $(x^2)^{-7} = x^{-14} = \dfrac{1}{x^{14}}$

   $\left(\dfrac{x^2}{y}\right)^8 = \dfrac{x^{16}}{y^8}$

   $(3^5)^4 = 3^{20}$

Ejercicio Realiza las siguientes operaciones con exponentes.

$4x^5 \cdot (-3x^2) =$
$2^8 \cdot 2^{-3} =$
$(e^{-2})^3 =$
$\left(\dfrac{x^2}{y^{-2}}\right)^5 =$

Soluciones $-12x^7, 2^5, e^{-6}, x^{10}y^{10}$

6. Despejes

Para despejar a la variable y de la ecuación $2x - 3y = 6$ se haría lo siguiente:

$2x - 3y = 6$	
$-3y = 6 - 2x$	Pasa restando al lado derecho de la igualdad el término $2x$. En realidad lo que sucede es que a cada miembro de la igualdad se le suma $-2x$ (para no alterar la igualdad), pero en la práctica algorítmica se dice que pasa sumando o restando, según sea el caso.
$y = \frac{6-2x}{-3}$	Pasa dividiendo al lado derecho el -3. En realidad lo que sucede es que a cada miembro de la igualdad se le divide -3 (para no alterar la igualdad), pero en la práctica algorítmica se dice que pasa dividiendo o se pasa multiplando, según sea el caso.
$y = \frac{2}{3}x - 2$	Simplificamos y ordenamos.

Despeja x de la ecuación $y = \frac{4x}{2x-1}$.

$y = \frac{4x}{2x-1}$	
$(2x - 1)y = 4x$	Se pasa multiplicando el denominador. En realidad lo que sucede es que a cada miembro de la igualdad se le multiplica $(2x-1)$ (para no alterar la igualdad), pero en la práctica algorítmica se dice que pasa multiplicando o dividiendo, según sea el caso.
$2xy - y = 4x$	Aplicamos la propiedad distributiva, es decir, multiplicamos a la variable y por cada término.
$2xy - 4x = y$	Dejamos de un lado de la igualdad a las x y del otro lado a la y.
$2x(y - 2) = y$	Factorizamos la ecuación.
$x = \frac{y}{2(y-2)}$	Finalmente pasamos dividiendo al otro lado de la igualdad tanto el 2 como $y - 2$ para despejar a la x. En realidad lo que sucede es que a cada miembro de la igualdad se le divide $2(y - 2)$ (para no alterar la igualdad), pero en la práctica algorítmica se dice que pasa multiplicando o dividiendo, según sea el caso.

Observa que el secreto para hacer un despeje correcto radica en que siempre se respete la igualdad.

Despeja b de la ecuación $y = b(2)^x$.

$y = b(2)^x$	
$\frac{y}{2^x} = b$	Como $2x$ está multiplicándose con la b, entonces pasa dividiendo.
$b = \frac{y}{2^x}$	Recuerda que si $a = b$, entonces $b = a$.

Despeja r de la ecuación $100 = \left(1 + \frac{r}{6}\right)^{12}$.

$100 = 50\left(1 + \frac{r}{6}\right)^{12}$	
$2 = \left(1 + \frac{r}{6}\right)^{12}$	El 50 pasó dividiendo al lado izquierdo de la igualdad.
$\sqrt[12]{2} = \sqrt[12]{\left(1 + \frac{r}{6}\right)^{12}}$	Para eliminar el exponente 12 se aplicó la operación inversa que es la raíz 12 a cada lado de la igualdad.
$1.0594 = 1 + \frac{r}{6}$	Se obtiene la raíz 12 de 2 del lado izquierdo de la igualdad y del lado derecho se eliminó el exponente.
$1.0594 - 1 = \frac{r}{6}$	El 1 se pasó restando.
$0.0594 \cdot 6 = r$	El 6 se pasó multiplicando.
$r = 0.357$	Resultado.

¡A practicar!

Instrucciones: despeja la variable indicada.

a) $y = \frac{2x}{1 - 4x}$, despeja a x	
b) $s = \frac{q^7 + 8}{3}$ despeja a q	
c) $1\,250 = 1\,000(1 + r)^{20}$ despeja a r	

Soluciones

a) $x = \frac{y}{2 + 4y}$ *b*) $q = \sqrt[7]{3s - 8}$ *c*) $r = 0.0112$

7. Logaritmos

Un logaritmo es un exponente y es la función inversa de una exponencial. Por ejemplo si se quiere expresar $2^3 = 8$ en forma logarítmica se tiene que $\log_2 8 = 3$, es decir, de la forma $\log_b \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$, b representa la base, x es el resultado y y es el exponente.

Más ejemplos.

Forma exponencial	Forma logarítmica
$3^4 = 81$	$\log_3 81 = 4$
$7^x = 49$	$\log_7 49 = x$
$e^3 = 20.085$	$\ln 20.085 = 3$ Observa que cuando la base es e, el logaritmo que le corresponde es ln (logaritmo natural). Es decir, no se tiene que escribir la base, se sobreentiende que su base es e.

Propiedades de los logaritmos

Las propiedades de los logaritmos resultan muy útiles para simplificar, para resolver ecuaciones logarítmicas y exponenciales, para derivar y para antiderivar.

Logaritmo de base 10	Logaritmo de base e
1. $\log(AB) = \text{Log } A + \text{Log } B$	1. $\ln(AB) = \ln A + \ln B$
2. $\log(A/B) = \text{Log } A - \text{Log } B$	2. $\ln(A/B) = \ln A - \ln B$
3. $\log A^B = B \log A$	3. $\ln A^B = B \ln A$
4. $\log(10^A) = A$	4. $\ln(e^A) = A$
5. $10^{\log A} = A$	5. $e^{\ln A} = A$
6. $\log(10) = 1$	6. $\ln e = 1$
7. $\log(1) = 0$	7. $\ln 1 = 0$

Expandir logaritmos

Si se tiene $\ln x\sqrt{x+1}$, esto se puede escribir, de acuerdo con las propiedades, como

$\ln x + \ln(x+1)^{\frac{1}{2}} = \ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1)$.

Más ejemplos.

	Logaritmo expandido
$\log \frac{5x}{x+2}$	$\log 5x - \log(x+2)$
$\ln \sqrt[5]{(x+1)^2}$	$\ln(x+1)^{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}\ln(x+1)$

Ejemplo 1 Despeja a la variable de $5 = 2 \cdot 3^x$.

Paso 1: **despeja** la base $\frac{5}{2} = 3^x$ $2.5 = 3^x$	Paso 2: **aplicar** ln o log a cada lado de la igualdad $\ln 2.5 = \ln 3^x$
Paso 3: **aplica** la ley $\ln A^B = B\ln A$ para bajar el exponente $\ln 2.5 = x \ln 3$	Paso 4: **despeja** a la variable $\frac{\ln 2.5}{\ln 3} = x$ $\therefore x = 0.834$

Ejemplo 2 Despeja a la variable de $10e^{3x} = 5e^{5x}$.

$10e^{3x} = 5e^{5x}$

Deja una sola base: $\frac{10}{5} = \frac{e^{5x}}{e^{3x}}$

Simplifica: $2 = e^{2x}$

Aplica ln a cada lado: $\ln 2 = \ln e^{2x}$

Aplica la propiedad de los logaritmos: $\ln 2 = 2x$

$\therefore x = \frac{\ln 2}{2} = 0.3465$

¡A practicar!

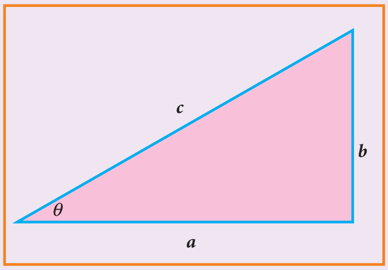
Instrucciones: despeja a la variable.

a) $12 * 3^{2p} = 4 * 3^{5p}$
b) $150 = 300e^{-.7t}$
c) $200e^t = 250e^{-.03t}$

Soluciones *a*) $p = \frac{1}{3}$ *b*) $t = 0.99$ *c*) $t = 0.2166$

8. Razones trigonométricas y gráficas de sen(x) y cos(x)

Las razones trigonométricas muestran la relación de un ángulo con los lados. A continuación se muestran:

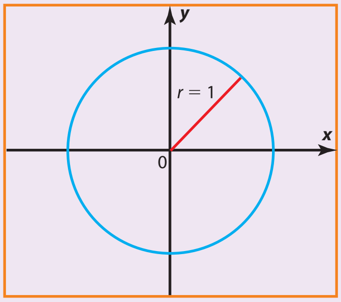


$$\text{sen}\ \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} \qquad \text{scc}\ \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{b}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} \qquad \sec \theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{a}$$

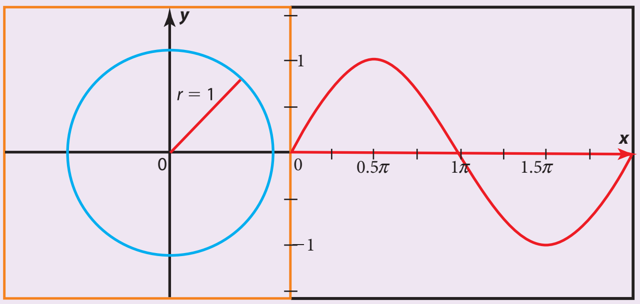
$$\tan \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{a} \qquad \cot \theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{a}{b}$$

Círculo trigonométrico se caracteriza por tener un radio igual a 1:

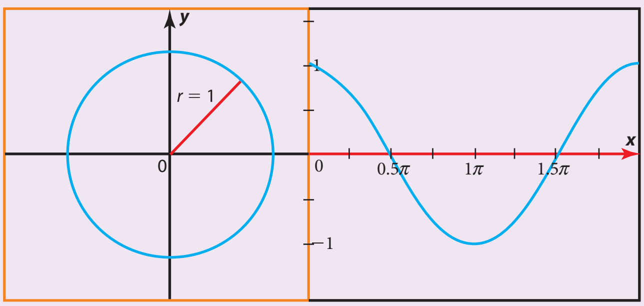


y de éste se desprenden las gráficas trigonométricas:

$f(x) = \text{sen}\ (x)$



$f(x) = \cos\ (x)$



Para ver la construcción animada de cada gráfica da clic a los siguientes enlaces:

http://www.ies.co.jp/math/java/trig/graphSinX/graphSinX.html

http://www.ies.co.jp/math/java/trig/graphCosX/graphCosX.html

9. Factorizaciones: factor común y trinomios de la forma $x^2 + bx + c$

a) Factor común

$ax + bx = x(a + b)$ Observa que lo que se repite en la expresión de la izquierda de la igualdad es x, entonces x es el factor común. La expresión factorizada de la derecha se obtiene dividiendo cada término de la expresión de la izquierda por el factor común, es decir, $\frac{ax}{x} = a$, $\frac{bx}{x} = b$, por lo tanto, la factorización queda como $x(a + b)$. Para comprobar el resultado basta con que multipliques a los factores, el resultado debe corresponder a la expresión de la izquierda.

Ejemplos

	Explicación
1. $xy - xw - x(y - w)$	Observa que lo que se repite es la x, por tanto, x es el factor común.
2. $4x^2 + 2x = 2x\,(2x + 1)$	En este caso lo que se repite es $2x$ porque esta expresión divide de manera exacta cada término de la izquierda de la igualdad.
3. $-x^2 + 3x = -x\,(x - 3)$	En este ejemplo $-x$ es el factor común y debes aplicar la ley de los signos.
4. $x^2 e^{2x} - 3e^{2x} = e^{2x}(x^2 - 3)$	En este caso se repite e^{2x}.
5. $5\sqrt{x+1} - \frac{x}{\sqrt{x+1}} = 5(x+1)^{\frac{1}{2}} - x\,(x+1)^{-\frac{1}{2}}$ $= (x+1)^{-\frac{1}{2}}\left[5(x+1) - x\right] = (x+1)^{-\frac{1}{2}}(5x + 5 - x)$ $= (x+1)^{-\frac{1}{2}}(4x+5) = \frac{4x+5}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}$	En este ejemplo debes escribir los radicales en forma de potencia y subir el radical de denominador. Para encontrar el factor común, escoge el factor con el menor exponente y en este caso en particular se debe ser más consciente de la ley de los exponentes.

b) Factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$.

Ejemplo 1 Factoriza la expresión $x^2 - 2x - 15$.

Algoritmo:

1. Escribe dos juegos de paréntesis y dentro de cada uno escribe una x.

   $(x \quad)(x \quad)$

2. Ahora vamos a buscar dos números que multiplicados nos den -15 y sumados -2 (algebraicamente), estos números son -5 y 3:

   $(x - 5)(x + 3)$

3. Si se resuelve el producto, debe dar la expresión original:

   $(x - 5)(x + 3) = x^2 + 3x - 5x - 15 = x^2 - 2x - 15$, esto es solamente para comprobar.

Ejemplo 2 $x^2 - 3x + 2$.

1. Escribe dos juegos de paréntesis y dentro de cada uno escribe una x.

   $(x \quad)(x \quad)$

2. Ahora vamos a buscar dos números que multiplicados nos den 2 y sumados -3 (algebraicamente), estos números son -1 y -2.

   $(x - 1)(x - 2)$

3. Resolvemos el producto para comprobar.

   $(x - 1)(x - 2) = x^2 - 2x - x + 2 = x^2 - 3x + 2$

¡A practicar!

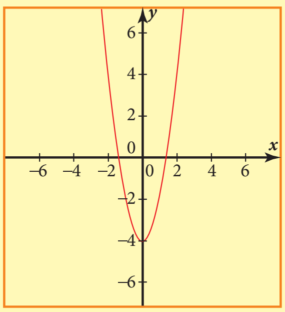
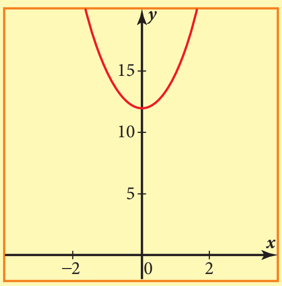
Factoriza los siguientes polinomios.

Ejercicios	Resultados
a) $5x^3 + 15x^2 + 20x$	
b) $x^3 5^x - 3 \cdot 5^{2x}$	
c) $t^2 - 7t + 12$	

Soluciones *a*) $5x\,(x^2 + 3x + 4)$ *b*) $5^x\,(x^3 - 3 \cdot 5^x)$ *c*) $(t - 3)(t - 4)$

10. Ecuaciones cuadráticas

a) Del tipo $ax^2 + c = 0$, este tipo de ecuaciones se resuelven despejando a la variable.

Ejemplos	Visualización gráfica
$2x^2 - 4 = 0$ $2x^2 = 4$ $x^2 = \frac{4}{2}$ $x^2 = 2$ $x = \pm\sqrt{2}$ $x_1 = -\sqrt{2}\ x_2 = \sqrt{2}$	 Las soluciones $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son las intersecciones de la gráfica con el eje x.
$3x^2 + 12 = 0$ $3x^2 = -12$ $x^2 = \frac{-12}{3}$ $x^2 = -4$ $x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$ $x_1 = 2i\ x_2 = -2i$	 En este caso, dado que las soluciones resultaron imaginarias, no existen intersecciones de la gráfica con el eje x.

b) Las del tipo $ax^2 + bx = 0$ se resuelven aplicando la factorización del factor común.

<table>
<tr><th>Ejemplos</th><th>Visualización gráfica</th></tr>
<tr><td>

$3x^2 + 27x = 0$

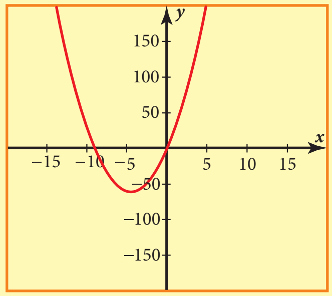
$3x(x + 9) = 0$

$3x = 0 x + 9 = 0$

$x_1 = -9 x_2 = 0$

Una vez que factorizas, cada factor se iguala a cero.

</td><td>



Observa que el vértice de la parábola ya no está sobre el eje, lo que provoca que las soluciones sean diferentes.

</td></tr>
</table>

c) Para las del tipo $ax^2 + bx + c = 0$ se proponen dos métodos de solución: la factorización, en caso de que se pueda, y la fórmula general.

<table>
<tr><th>Ejemplos</th><th>Visualización gráfica</th></tr>
<tr><td>

Si el parámetro *a* es igual a 1 y se puede factorizar, es mejor usar ese camino.

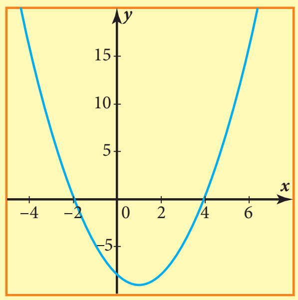
$x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x - 4)(x + 2) = 0$

$x - 4 = 0 \ \ x + 2 = 0$

$x_1 = 4 \ \ x_2 = -2$

</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

Cuando no se puede factorizar o el parámetro *a* es diferente de 1 puede ser mejor usar la fórmula general:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$4x^2 + 4x - 19 = 0$

$a = 4, \ b = 4 \ \text{y} \ c = -19$

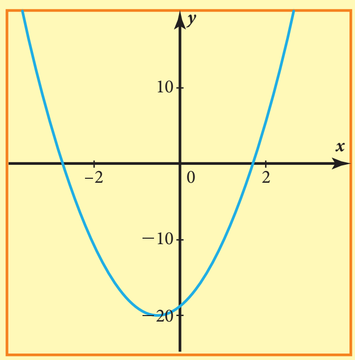
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(4)(-19)}}{2(4)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 304}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{320}}{8}$$

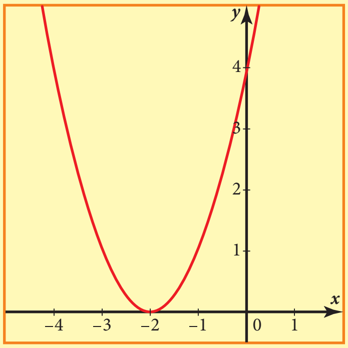
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{64 * 5}}{8} = \frac{-4 \pm 8\sqrt{5}}{8}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 2\sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{-1 - 2\sqrt{5}}{2}$$

</td><td>



</td></tr>
</table>

Ejemplos	Visualización gráfica
$x^2 + 4x + 4 = 0$ $(x + 2)(x + 2) = 0$ $x_1 = -2,\ x_2 = -2$ En este ejemplo observa que las soluciones se repiten, se trata de una raíz doble.	 En la gráfica se observa un rebote cuando la solución es una raíz doble.

¡A practicar!

1. $x^2 + 3x + 2 = 0$	
2. $9t^2 - 27 = 0$	
3. $4x^2 + x + 1 = 0$	

Soluciones **1.** $x_1 = -1, x_2 = -2$ **2.** $x_1 = \sqrt{3},\ \ x_2 = -\sqrt{3}$ **3.** $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{15}i}{8},\ \ x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{15}i}{8}$

11. Funciones seccionadas

Instrucciones: resuelve las siguientes ecuaciones.

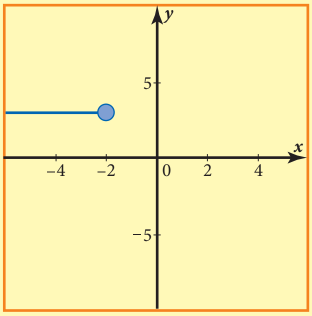
Una función seccionada es una función que está formaada de dos o más funciones donde a cada una se le ha establecido un dominio particular. En otras palabras, cada función tiene un dominio preestablecido, de tal manera que la gráfica parece un trozo o una porción de la función original. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1 Dibuja la gráfica de la función dada.

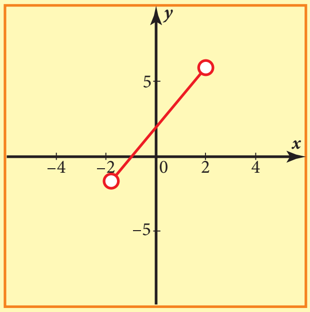
$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x \leq -2 \\ 2x + 2 & \text{si} \quad -2 < x < 2 \\ -1.5x + 6 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Para construir la función seccionada primero se debe conformar cada función a partir del intervalo dado, de tal manera que:

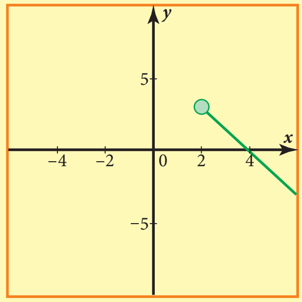
$f(x) = 3, x \leq -2,$
tiene como gráfica



$f(x) = 2x + 2, -2 < x < 2,$
tiene como gráfica



y, $f(x) = -1.5x + 6, \quad x \leq 2,$
tiene como gráfica



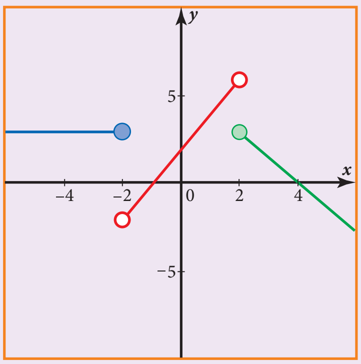
Nota Observa que en las gráficas donde el dominio tiene una desigualdad cerrada ($\leq$ o $\geq$) se marca en la gráfica con un punto relleno, y cuando la desigualdad es abierta ($<$ o $>$), la gráfica marca con un punto hueco.

La gráfica final resulta de colocar las tres gráficas anteriores en un mismo plano cartesiano.

Así que la gráfica de la función seccionada

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x \leq -2 \\ 2x + 2 & \text{si} \quad -2 < x < 2 \\ -1.5x + 6 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

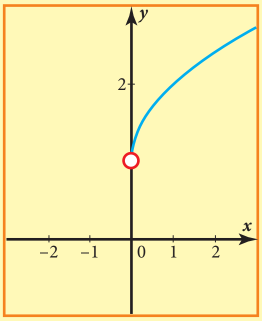
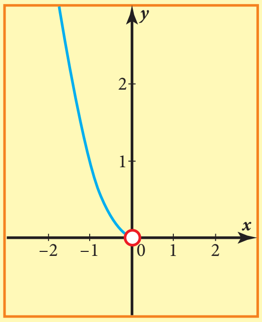
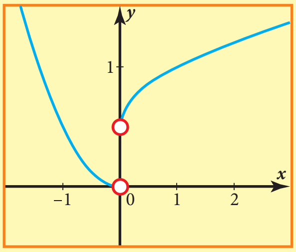
queda de la siguiente manera:



Así, se puede visualizar que el dominio son todos los números reales $(-\infty, \infty)$ y el rango son todos los reales menores a 6, es decir $(-\infty, 6)$.

Ejemplo 2 $f(x)=\begin{cases}1+\sqrt{x} & \text{si } x>0\\ x^2 & \text{si } x<0\end{cases}$

Las gráficas quedarían como se muestra a continuación.

de $f(x)=1+\sqrt{x}\,,\ x>0$	y de $f(x) = x^2, x < 0$	Por lo tanto, la gráfica final de $f(x)=\begin{cases}1+\sqrt{x} & \text{si } x>0\\ x^2 & \text{si } x<0\end{cases}$ queda:
		 donde el dominio son todos los reales excepto el 0, es decir, $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, mientras que el rango son todos los reales mayores a 0 $(0, \infty)$.

Caso especial de funciones seccionadas: funciones con valor absoluto

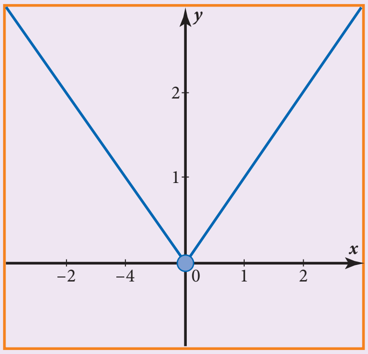
Las funciones con valor absoluto son un caso especial de las funciones seccionadas, pues, como bien se sabe, el valor absoluto es el número de unidades que representa un número, por tal razón siempre es positivo.

Ya que $f(x) = |\,x\,|$

En esta función se deduce que el dominio puede ser cualquier número real; es decir, que la x o variable independiente puede tomar cualquier valor. Sin embargo, los valores del rango, es decir de la y, o variable dependiente, siempre serán positivos. Por esta razón se suele descomponer una función con valor absoluto de la siguiente manera,

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\\ -x & \text{si } x<0\end{cases}$$

observa que el punto de referencia para las desigualdades y la igualdad es la intersección de la gráfica con el eje de las x, en este caso, el cero. Su gráfica correspondiente es:

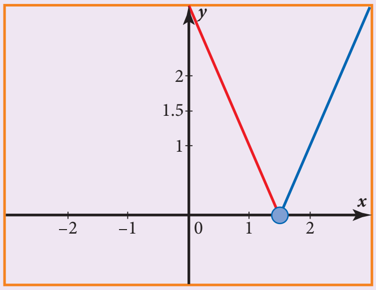


Ejemplo 2 Traza la gráfica de la función. $f(x) = |2x - 3|$.

Primero determina el punto de intersección con el eje x, éste es $x = 1.5$, por lo tanto, la función seccionada correspondiente es:

$$f(x)=|2x-3|=\begin{cases} 2x-3 & \text{si } x>1.5 \\ 1.5 & \text{si } x=1.5 \\ -2x+3 & \text{si } x<1.5 \end{cases}$$

y su gráfica es:



Puede verse con claridad que el dominio son todos los números reales, y el rango son los valores mayores que cero, es decir, $(-\infty, \infty)$ y $[0, \infty)$, respectivamente.

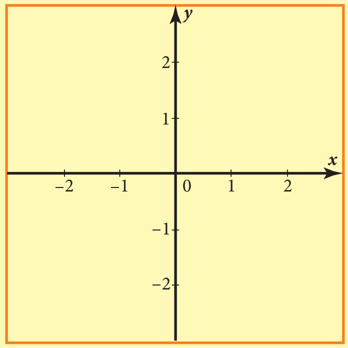
¡A practicar!

Ahora tú mismo resuelve este par de ejercicios.

<table>
<tr><th>Obtén las gráficas de las siguientes funciones seccionadas y luego da su dominio y rango</th><th>Tu respuesta</th></tr>
<tr><td>

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x>1\\ x^3 & \text{si} \quad -1\leq x\leq 1\\ -1 & \text{si} \quad x<-1\end{cases}$$

</td><td>



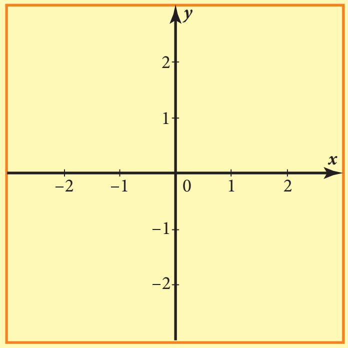
Dominio:

Rango:

</td></tr>
<tr><td>

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{si} \quad x>1\\ 2 & \text{si} \quad x<1\end{cases}$$

</td><td>



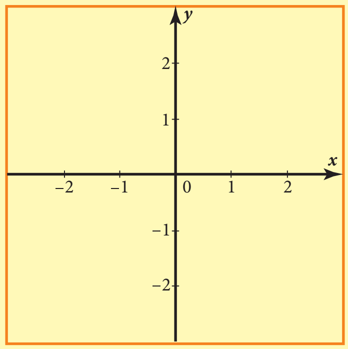
Dominio:

Rango:

</td></tr>
<tr><td>

$f(x) = |4 - 2x|$

</td><td>

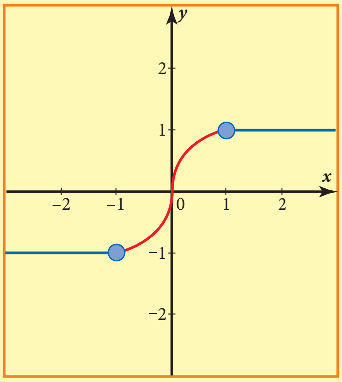


Dominio:

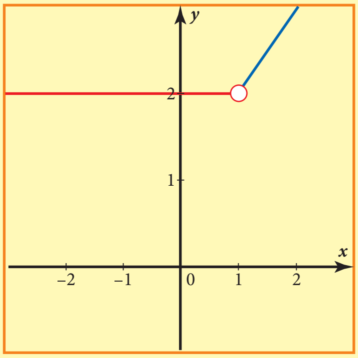
Rango:

</td></tr>
</table>

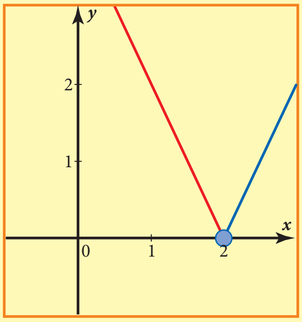
Respuestas



Dominio: $(-\infty, \infty)$ Rango: $[-1, 1]$



Dominio: $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ Rango: $[2, \infty)$



Dominio: $(-\infty, \infty)$ Rango: $[0, \infty]$

Hojas de trabajo

Nombre ____________________________ Matrícula __________________ Grupo ____________

Nombre ____________________________ Matrícula __________________

Nombre ____________________________ Matrícula __________________

Escribe un enunciado de la vida real donde se relacionen dos variables o cantidades.

1. ____

____

2. Del enunciado que escribiste, identifica y define las variables.

   Variable independiente: ____________________

   Variable dependiente: ____________________

3. La relación entre las variables, ¿es función? ____________________

   Justifica tu respuesta.____

   ____

4. ¿Cómo se denota la función?____

5. ¿Qué valores puede tomar la variable independiente?______________________________

   A este conjunto de valores se le llama: ____.

6. ¿Qué valores tomaría la variable dependiente?___________________________________

   A este conjunto de valores se le llama: ____.

Nombre ___________________________ Matrícula _________________ Grupo ____________

En la ciudad de Monterrey, N. L., circula un periódico llamado *El Norte*; en la sección de Avisos de Ocasión puedes colocar un anuncio para vender bienes (automóvil, casa o terreno), ofrecer servicios o empleos, etc. El costo de publicar un anuncio está en función del número de palabras que éste contenga.

Al acceder a la dirección electrónica www.elnorte.com, en marzo de 2011 se observó la siguiente pantalla:

Para colocar un aviso de ocasión en el periódico *El Norte* en sus versiones impresa y electrónica, escoja una de las siguientes clasificaciones.

Tarifas			
	Lunes a sábado		
Palabras	3 días	5 días	7 días
5	125	162	198
7	147	198	249
9	169	235	300
11	191	271	352
13	213	308	403
15	235	344	454
17	257	381	505
19	279	417	556

Todos los precios incluyen IVA.

Nota Observa cómo el precio varía de acuerdo con el número de palabras que se utilizan, toma la información de la columna lunes a sábado correspondiente a 3 días y contesta lo siguiente:

a) ¿Cuánto aumenta el precio a medida que se incrementa el número de palabras?

____

b) ¿El aumento en el precio es constante? ______________________________

c) ¿Cuánto es el incremento del precio por palabra?______________________

d) ¿Los datos de la tabla corresponden a una función lineal? Justifica tu respuesta.

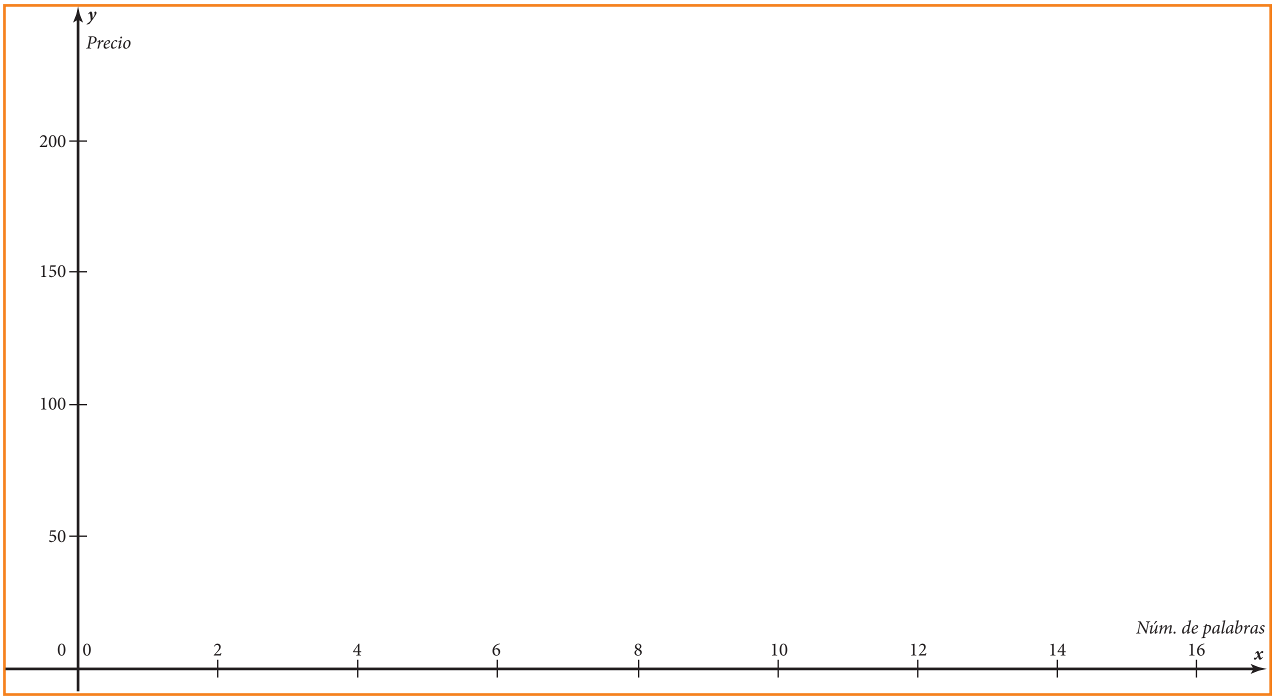
____

____

e) Si la función es lineal, escribe una ecuación para el precio P como una función del número de palabras publicadas n.

$P(n) =$ ____

f) Traza la gráfica de P respecto a n.



g) De acuerdo con el modelo que encontraste, ¿cuál sería el precio por publicar un anuncio de 24 palabras? ____________________

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo _________

Investiga los precios por publicar un anuncio en algún periódico de tu localidad. Con los datos investigados, completa la siguiente tabla; observa cómo el precio P varía de acuerdo con el número de palabras n que se publican y decide si es posible establecer una función para asignar el precio de publicación de un anuncio.

Núm. de palabras, n							
Precio en \$ P							

a) ¿Cuánto aumenta el precio a medida que aumentan las palabras? ______________

b) ¿El aumento en el precio es constante? ________________

c) ¿Cuánto es el incremento del precio por palabra? __________________________

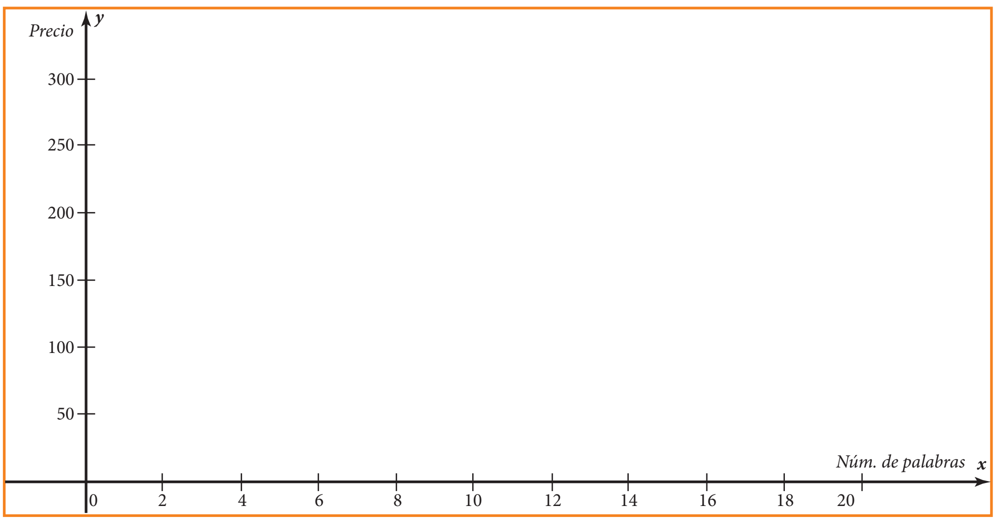
d) ¿Se ajustan los datos de la tabla a una función lineal? Justifica tu respuesta. _______

____

e) Si la función es lineal, escribe una ecuación para el precio P como una función del número de palabras publicadas n.

$P(n) =$ ____

f) Traza la gráfica de P respecto a n.



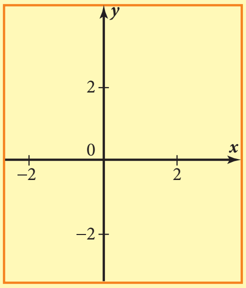
a) De acuerdo con el modelo que encontraste, ¿cuál sería el precio por publicar un anuncio de 24 palabras en el periódico de tu localidad? ________________

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo __________

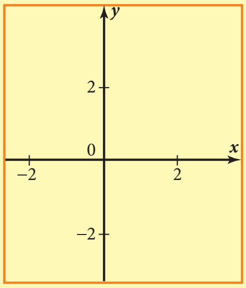
Utiliza tu calculadora con graficador o algún software como graphmatica para trazar la gráfica de cada una de las funciones potencia dadas; luego contesta lo que se te pide.

Funciones con potencia *entera par positiva*

$y = x^2$



$y = 3x^4$



Las gráficas de las funciones a la izquierda ¿tienen forma similar? ______________

Cuando $x = 1$, ¿cuál es el valor de $y = x^2$?

____

¿Y el valor de $y = 3x^4$? ______________

¿A qué se debe que sus alturas sean diferentes? ______________________

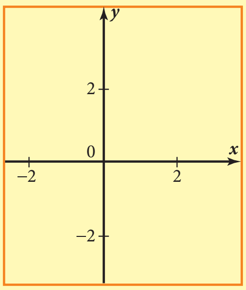
Con tu graficador verifica si las funciones con potencia 6, 8,… también tienen gráficas similares a las funciones de la izquierda.

Podría decirse que las funciones con potencia *entera par positiva*, ¿tienen gráficas similares?

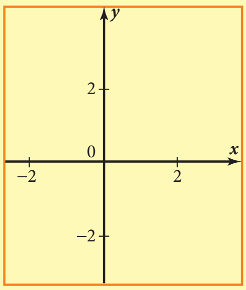
____

Funciones con potencia *entera impar positiva*

$y = x^3$



$y = 4x^5$



Las gráficas de las funciones a la izquierda ¿tienen forma similar? ______________

Cuando $x = 1$ ¿cuál es el valor de $y = x^3$? ____

____

¿Y el valor de $y = 4x^5$? ______________

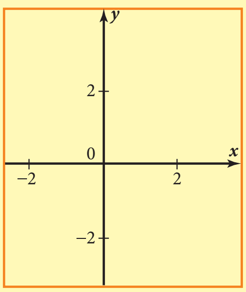
¿A qué se debe que sus alturas sean diferentes? ______________________

Con tu graficador verifica si las funciones con potencia 7, 9,… también tienen gráficas similares a las funciones de la izquierda.

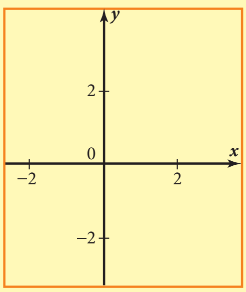
Podría decirse que las funciones con potencia *entera impar positiva*, ¿tienen gráficas similares? ______________________

Funciones con potencia *entera par negativa*

$y = x^{-2}$



$y = 3x^{-4}$



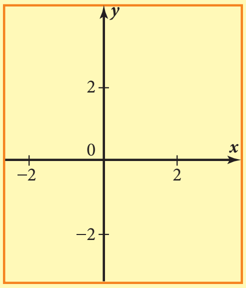
Las gráficas de las funciones a la izquierda ¿tienen forma similar? ______________

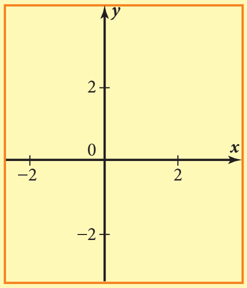
Con tu graficador verifica si las funciones con potencia 6, 8,… también tienen gráficas similares a las funciones de la izquierda.

Podría decirse que las funciones con potencia *entera par negativa*, ¿tienen gráficas similares?______________________

Funciones con potencia *entera impar negativa*

$y = x^{-1}$ $\qquad$ $y = 4x^{-3}$





Las gráficas de las funciones a la izquierda ¿tienen forma similar? ____________________

Con tu graficador verifica si las funciones con potencia $-5, -7, \ldots$ también tienen gráficas similares a las funciones de la izquierda.

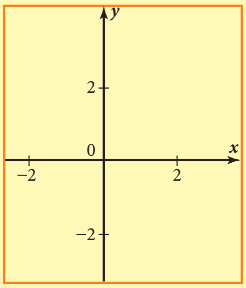
Podría decirse que las funciones con potencia *entera negativa*, ¿tienen gráficas similares?

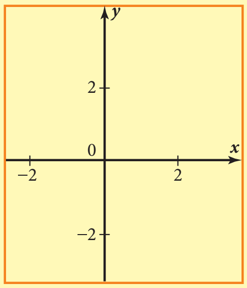
____

Funciones con potencia fraccionaria de la forma 1/*n*

Si el denominador "*n*" es entero par positivo

$y = x^{1/2}$ $\qquad$ $y = 2x^{1/4}$





Otra forma en que puede escribirse

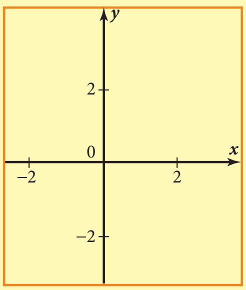
$x^{1/2} =$ ______________________________.

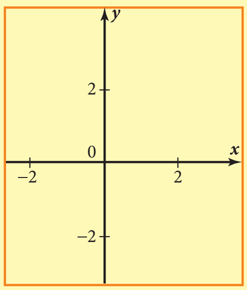
y = ‴$2x^{1/4} =$ ________________________.

¿A qué se debe que la gráfica de estas funciones sólo existe en el primer cuadrante?

Si el *denominador "n" es entero impar positivo*

$y = x^{1/3}$ $\qquad$ $y = 3x^{1/5}$





Otra forma en que puede escribirse

$x^{1/3} =$ ______________________________.

y = $3x^{1/5} =$ __________________________.

¿A qué se debe que la gráfica de estas funciones exista valores negativos de x?

____

____

____

Investiga las siguientes leyes de potencias y radicales; completa los espacios en blanco.

$a^0 =$ __________	$a^m a^n =$ __________	$(a\,b)^m =$ __________	$a^{1/n} =$ __________
$a^{-1} =$ __________	$\dfrac{a^m}{a^n} =$ __________	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m =$ __________	$\sqrt[n]{a^m} =$ __________
$a^{-n} =$ __________	$(a^m)^n =$ __________		$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m =$ __________

Nombre ____________________________ Matrícula _________________ Grupo ___________

Nombre ____________________________ Matrícula _________________ Grupo ___________

Si una función puede transformarse a la forma $y = kx^n$, utilizando las leyes de los exponentes, entonces puede asegurarse que es una función potencia. Determina si las siguientes funciones son funciones potencia; para aquellas que sí lo sean completa la información que se indica en la siguiente tabla.

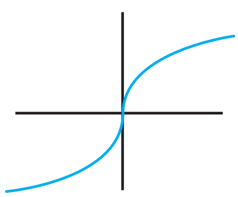
	Transforma la función a la forma $y = kx^n$, si es posible	¿Es función potencia?	¿Cuál es el valor de la potencia n?	¿Cuál es el valor del coeficiente k?
$y = 3^{-x}$				
$y = \dfrac{-5x}{2\sqrt[7]{x}}$				
$y = -4(0.1)^x$				
$y = 5x^2 - 3$				
$y = 9\sqrt[6]{x^7}$				
$y = \dfrac{2x^{1/3}}{7}$				

Relaciona cada gráfica con las ecuaciones dadas y escribe sobre la línea la letra de la gráfica que le corresponde. (Las gráficas no están a escala.)

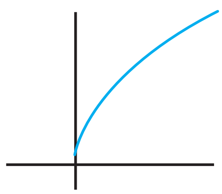
$y = \frac{1}{2}x^{-1}$ ________________ $y = \frac{1}{3}x^{-2}$ ________________ $y = 0.7\,x^3$ ________________

$y = 3\sqrt{x}$ ________________ $y = 1.5x^2$ ________________ $y = \sqrt[3]{x}$ ________________

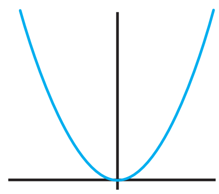
a)



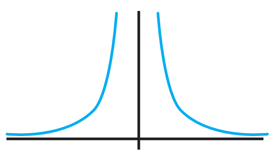
b)



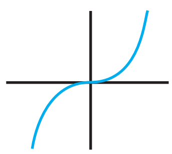
c)



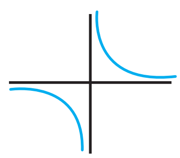
d)



e)



f)



Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo _________

Nombre ______________________ Matrícula ______________

Nombre ______________________ Matrícula ______________

Una sustancia radioactiva se está desintegrando de tal manera que la cantidad de masa que permanece después de t horas está dada en la siguiente tabla:

t (horas)	0	1	2	3	4
Q (mg)	972	324	108	36	12

a) Los datos contenidos en la tabla, ¿corresponden a una función lineal? Sí No

¿Por qué? ____

b) ¿Representan los datos a una función exponencial? Sí No

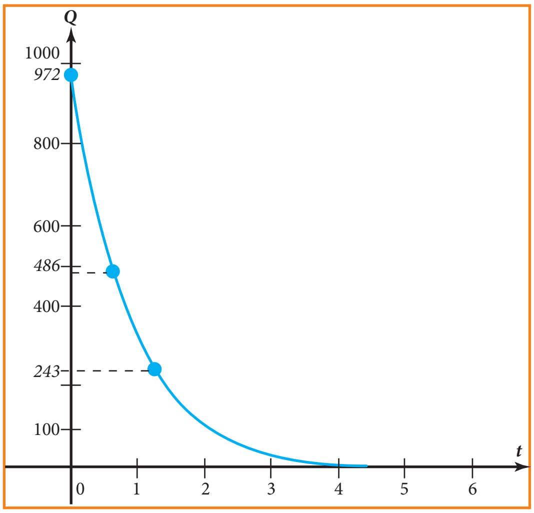
¿Por qué? ____

c) Halla una fórmula para predecir la cantidad de masa remanente en cualquier instante.

$Q(t) =$ ____

d) ¿Qué cantidad de masa estará presente después de 12 horas? ______________

e) Utiliza la siguiente gráfica para estimar el tiempo que tarda la sustancia en reducirse a la mitad.



Nombre ____________________ Matrícula ______________ Grupo __________

1. ¿Cuál es la forma general de una función exponencial en base a? ______________

2. ¿Cuándo se dice que una cantidad tiene un crecimiento exponencial? ______________

____

3. ¿Cuándo se dice que una cantidad tiene un decaimiento exponencial? ______________

____

4. ¿Qué entiendes por factor de cambio? ______________________________

____

5. ¿A qué se le llama tiempo de duplicación? ____________________________

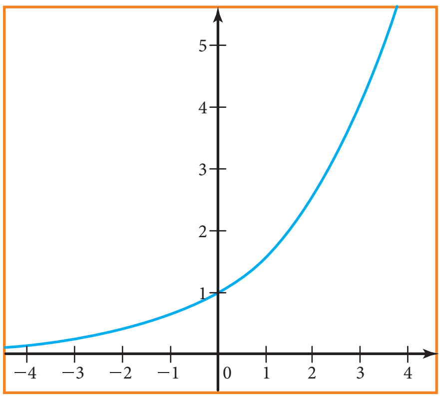
____

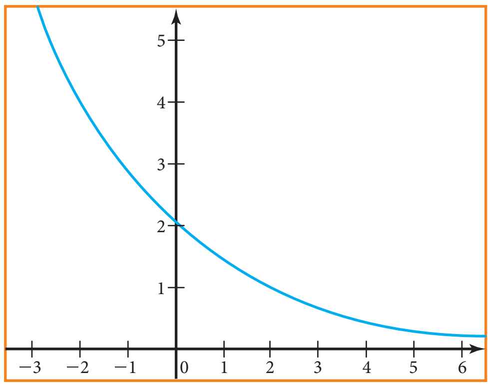
6. ¿A qué se le llama vida media? ______________________________________

____

7. Observa las gráficas que se dan a continuación y escribe sobre la línea la información que corresponda a cada una, de acuerdo con el siguiente banco de datos.

$0 < a < 1$,	4,	$a > 1$,	$a \geq 0$,	1/2,	2,	$a < 1$,	1,	$a < 0$





Valor inicial b = __________ Valor inicial b = __________

Factor de cambio a __________ Factor de cambio a __________

8. Utiliza las gráficas anteriores para estimar la vida media y el tiempo de duplicación según corresponda.

Nombre ________________________ Matrícula _______________ Grupo __________

Esta actividad consta de tres etapas.

La *primera* de ellas consiste en una investigación bibliográfica acerca de las UDIS. Esta primera etapa es muy importante, pues te permitirá resolver esta actividad.

En la *segunda* etapa aplicarás los conocimientos adquiridos para reconocer y plantear el modelo matemático que representa el valor de las UDIS como función del tiempo. Después de eso contestarás algunas preguntas acerca de una situación planteada.

La *tercera* etapa consiste en una reflexión sobre lo aprendido acerca del tema.

¡A trabajar!

Etapa I: investigación bibliográfica

Investiga qué son las UDIS, para qué y cuándo se crearon, con base en qué factores cambian su valor y las ventajas y desventajas de manejar una deuda en estas utilidades. Deberás entregar un resumen de lo investigado, indicando las fuentes consultadas.

Etapa II: aplica tus conocimientos

Investiga en los diarios, en alguna institución bancaria o en internet el valor de las UDIS durante seis o siete días consecutivos, deberán ser datos actuales.

1. Escribe en la siguiente tabla el valor de las UDIS en función del día.

Fecha	*t* (días)	*V* valor de las UDIS (en pesos)
	0	
	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	

2. Tomando los datos de la tabla anterior (con todos los decimales de las UDIS) contesta lo indicado en la siguiente tabla.

t (días)	¿Cuál es el cambio promedio en el valor de las UDIS en el intervalo indicado?	¿Cuál es el factor de cambio para el valor de las UDIS en el intervalo indicado?
0-1		
1-2		
2-3		
3-4		
4-5		
5-6		
6-7		

Analiza los resultados obtenidos en la tabla anterior y contesta a la siguiente pregunta:

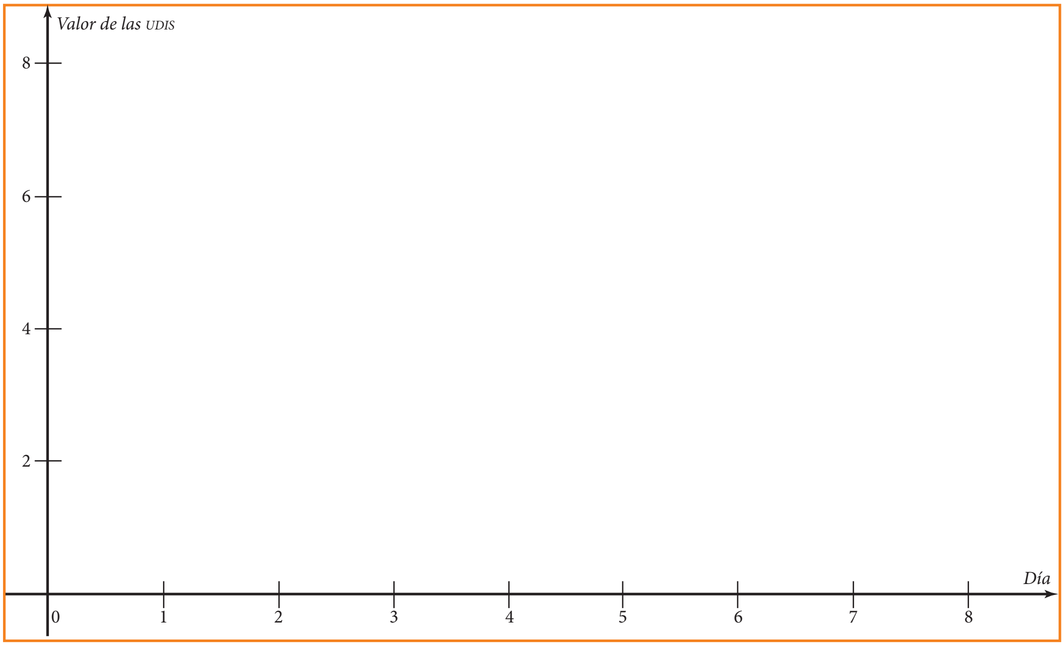
¿A qué tipo de función se ajusta *más* la función del valor de las UDIS? Justifica tu respuesta. ____________________

____________________.

3. Escribe la fórmula para el valor V de las UDIS como función del tiempo t.

$V(t) =$ ____________________

4. Grafica la función encontrada.



5. ¿A qué fecha corresponde el primer valor de las UDIS? ____________________

A partir de esa fecha, ¿cuántos días faltan para que termine el año? ____________________

De acuerdo con la tabla, ¿qué valor de *t* corresponde al último día del año?_________

Utiliza la fórmula obtenida en el punto 3 para calcular el valor de las UDIS para el último día del año.

El último día del año, el valor de las UDIS será: ______________.

Analiza la siguiente situación y contesta lo que se pregunta.
José tiene una deuda hipotecaria, con un banco, manejada en pesos, y desea cambiarla a UDIS. Supón que el valor de las UDIS, en ese momento, corresponde al valor inicial de la tabla del punto 1 (datos investigados). Si mensualmente José estará pagando 650 UDIS, ¿cuál va a ser su pago (en pesos) al inicio?

Pago en pesos al inicio del plazo:_______________________

Normalmente un crédito hipotecario tiene un plazo de 20 o 30 años; si el plazo que eligió José para pagar su deuda fue de 20 años, y durante ese tiempo el valor de las UDIS se comportó de acuerdo con la fórmula obtenida en el punto 3, ¿cuál va a ser su pago (en pesos) al final del plazo?

Pago (en pesos) al final del plazo:______________________

Etapa III: reflexión

Tomando como base el resumen de tu investigación, la actividad realizada y los conceptos vistos hasta el momento, reflexiona sobre lo siguiente:

¿Conviene tener una deuda en UDIS o es mejor manejarla en pesos?

¿Crees que reestructurar una deuda hipotecaria en UDIS resulte benéfico para el deudor?
Tu respuesta debe ir acompañada de una opinión personal sustentada en los resultados de tu investigación, la actividad y lo que aprendiste en clase. Tu aportación no deberá exceder de 10 renglones.

____

____

____

____

____

____

____

____

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo _________

1. En el campo de las ciencias, la base que se utiliza con mayor frecuencia en una función exponencial es el número e; ¿cuál es el valor de este número? ________________

____

2. ¿Cuál es la forma general de la función exponencial de base e?________________

____

3. ¿Qué representa la constante r que aparece en el exponente de la función exponencial de base e? ____

____

4. ¿Cuándo una función exponencial de base e representa crecimiento?____________

____

5. ¿Cuándo una función exponencial de base e representa decaimiento?____________

____

6. Contesta si es verdadera o falsa la siguiente afirmación; justifica tu respuesta.

Si se tiene que la población de cierta ciudad crece a razón continua de 2.6%, entonces $r = 1 + 0.026$ y la ecuación de la población estará dada por $P = be^{1.026\,t}$.

____

____

____

____

____

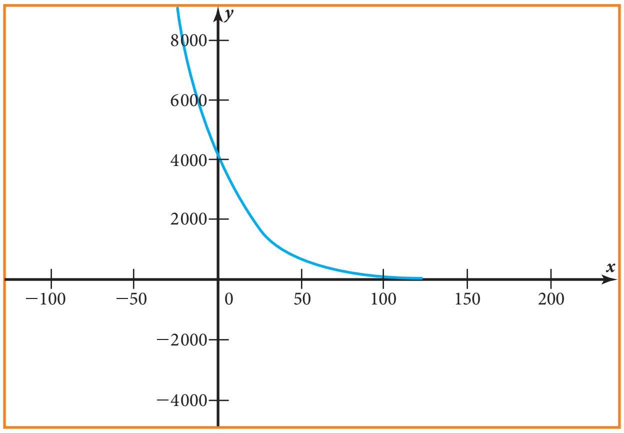
____

____

____

Nombre ____________________________ Matrícula _________________ Grupo ____________

La siguiente gráfica muestra la depreciación de cierto activo que se compró en 2005. La tasa a la cual decrece es de 3.5% a razón continua.



a) Determina el modelo matemático.

b) ¿Cuál es el valor actual (2012) del activo?

c) ¿En cuánto tiempo el valor del activo es exactamente la mitad?

Nombre ____________________ Matrícula ______________ Grupo __________

La siguiente tabla muestra las ventas V (en millones de dólares) del mercado global para los cultivos genéticamente modificados.

t (años)	V (millones de dólares)
1995	75
1996	235
1997	670
1998	1 600
2000	2 100
2001	3 000

Con la información, responde lo siguiente:

1. ¿Cómo se denota esta función, en términos de las variables V y t? ______________

2. Describe la información que este modelo proporciona. ______________

____

____

3. ¿Cuál es el dominio de la función? ______________

4. ¿Cuál es el rango de la función? ______________

5. Encuentra $f(2\,000) =$ ______________

¿Qué significa este número en términos prácticos? ______________

____

Ahora, leamos la tabla de derecha a izquierda.

6. ¿En qué año las ventas llegaron a 670 millones de dólares? ______________

7. ¿En qué año las ventas llegaron a 2 100 millones de dólares? ______________

8. Al leer la información de derecha a izquierda, es decir, de las ventas a los años, la relación entre los datos, ¿sigue representando una función? ¿Por qué? ______________

____

____

9. ¿Qué nombre recibe esta nueva función? ______________

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo _________

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo _________

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo _________

I. Contesta lo que se te indica para cada uno de los siguientes enunciados.

1. Desde lo alto de un edificio se lanza un objeto hacia arriba. La distancia recorrida por el objeto está en función del tiempo transcurrido desde que fue lanzado hasta que llegó al suelo.

a) Identifica y define las variables:

Variable independiente: ____.

Variable dependiente: ____.

b) Esta función se denota como: ____.

c) ¿La función es invertible? Sí No

Justifica tu respuesta. ____

____

____

2. La calificación obtenida en un examen parcial está en función del alumno.

a) Identifica y define las variables:

Variable independiente: ____.

Variable dependiente: ____.

b) Esta función se denota como: ____.

c) ¿La función es invertible? Sí No

Justifica tu respuesta. ____

____

____

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo _________

I. Contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Cómo se define la función logaritmo de x base 10 ($y = \log_{10} x$)?

____

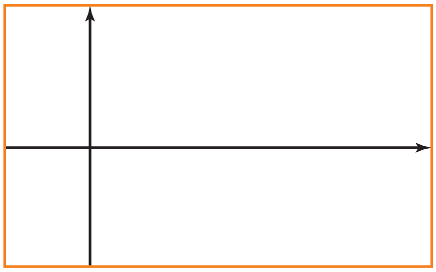
2. ¿Cómo se define la función logaritmo natural de x ($y = \ln x$)?

____

3. ¿Cuándo se utilizan los logaritmos naturales?

____

4. Dibuja la gráfica de la función logaritmo natural de x.



5. El dominio de la función logaritmo natural es: ____________________________.

6. La *imagen* (rango) de la función logaritmo natural es: ______________________.

II. Escribe sobre la línea la opción que complete correctamente la igualdad dada.

1. $\ln x^2 + \ln y^3 =$ ____

a) $\ln(x^2 + y^3)$ *b*) $\ln x^2 \ln y^3$ *c*) $\ln (x^2 y^3)$

2. $\ln (4p^6) - \ln (2q^3) =$ ____

a) $\dfrac{\ln 4p^6}{\ln 2q^3}$ *b*) $\ln\left(\dfrac{2p^6}{q^3}\right)$ *c*) $\ln (4p^6 - 2q^3)$

3. $3 \ln z =$ ____

a) $\ln^3 z$ *b*) $(\ln z)^3$ *c*) $\ln (z^3)$

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo _________

Cuando se tiene dinero, éste puede invertirse para ganar intereses. Dichos intereses pueden pagarse de muchas formas; por ejemplo, una o varias veces al año.

1. Cuando el interés se paga más de una vez al año y los intereses no se retiran, hay un beneficio para el mayor inversionista. ¿Por qué? Justifica tu respuesta.

   ____

   ____

   A este efecto se le llama: ____.

2. ¿Qué significa que una cuenta bancaria gane una tasa de interés de 8% compuesto anual? ____

   ____

3. ¿Qué significa que una cuenta bancaria gane una tasa de interés de 8% compuesto trimestral? ____

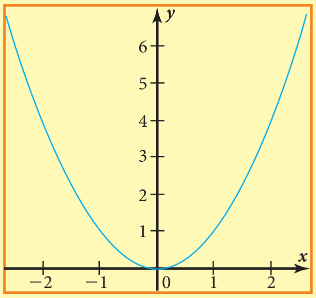
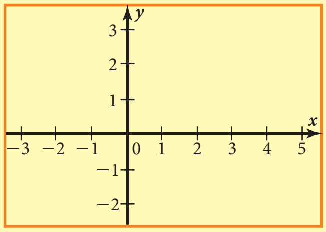
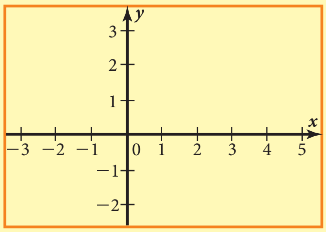
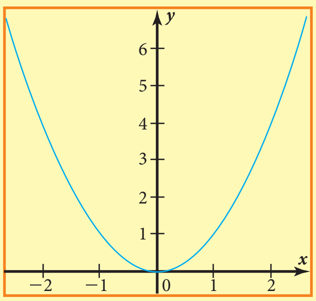
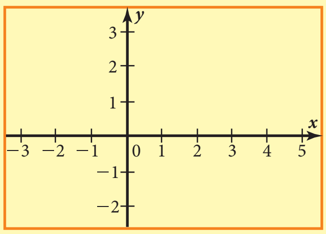
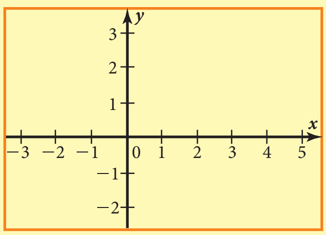
   ____

4. ¿Qué significa que una cuenta bancaria gane una tasa de interés de 8% compuesto mensual? ____

   ____

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo __________

Utiliza algún software graficador para determinar los efectos geométricos de las gráficas de las funciones dadas y completa los espacios en blanco.

Funciones básicas	Nuevas funciones	Describe y explica lo observado
$y = f(x) = x^2$ 	$y = g(x) = x^2 + 1$  $y = g(x) = x^2 - 2$ 	
$y = f(x) = x^2$ 	$y = h(x) = (x + 1)^2$  $y = h(x) = (x - 2)^2$ 	

Conclusiones

Si c es una constante positiva y $y = f(x)$ una función cuya gráfica se conoce, entonces la gráfica de la función:

$y = f(x) - c$ se desplaza c unidades hacia la ______________________________.

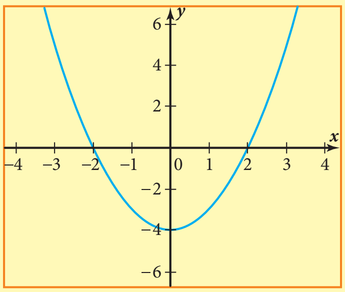
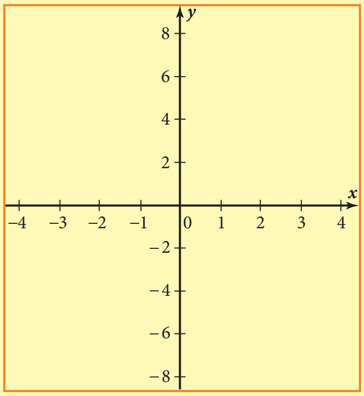
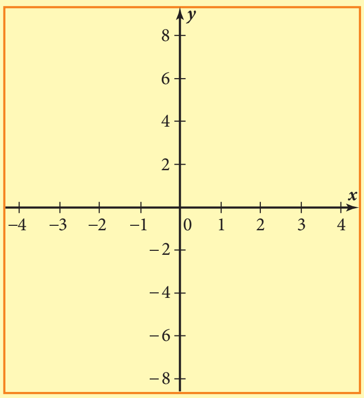
$y = f(x) + c$ se desplaza c unidades hacia la ______________________________.

$y = f(x + c)$ se desplaza c unidades hacia la ______________________________.

$y = f(x - c)$ se desplaza c unidades hacia la ______________________________.

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo _________

Utiliza algún software graficador para determinar los efectos geométricos de las gráficas de las funciones dadas y completa los espacios en blanco.

<table>
<tr><th>Funciones básicas</th><th>Nuevas funciones</th><th>Describe y explica lo observado</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$h(x) = (x^2 - 4)$
</td><td>$g(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4)$
</td><td>Compara la gráfica de la función básica con la de la nueva función. Observa lo que ocurre con la altura de la nueva función en el punto $x = 0$.
¿Se alarga o se encoge verticalmente?
____
____
____
____________________</td></tr>
<tr><td>$g(x) = 2(x^2 - 4)$
</td><td>Compara la gráfica de la función básica con la de la nueva función. Observa lo que ocurre con la altura de la nueva función en el punto $x = 0$.
¿Se alarga o se encoge verticalmente?
____
____
____
____________________</td></tr>
</table>

Conclusiones

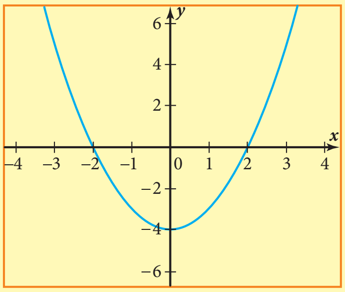
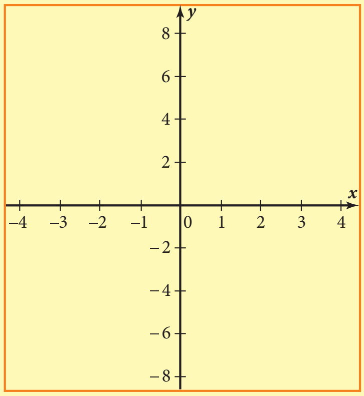
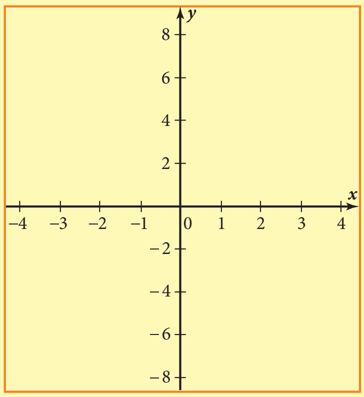
Completa cada enunciado con la palabra correcta (alarga o encoge).

Si c es una constante y $y = f(x)$ una función cuya gráfica se conoce, entonces:

- Si $c > 1$, la gráfica de la función $y = cf(x)$ se______________________ verticalmente.
- Si $0 < c < 1$, entonces la gráfica de la función $y = cf(x)$ se__________ verticalmente.

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo __________

Utiliza algún software graficador para determinar los efectos geométricos de las gráficas de las funciones dadas y completa los espacios en blanco.

Funciones básicas	Nuevas funciones	Describe y explica lo observado
$h(x) = x^2 - 4$ 	$g(x) = ((2x)^2 - 4)$ 	Compara la gráfica de la función básica con la de la nueva función. Describe lo que ocurre en los valores en donde las gráficas cortan al eje x. ________________ ________________ ________________ ________________ ________________
	$g(x) = \left(\left(\frac{1}{2}x\right)^2 - 4\right)$ 	Compara la gráfica de la función básica con la de la nueva función. Describe lo que ocurre en los valores en donde las gráficas cortan al eje x. ________________ ________________ ________________ ________________ ________________

Conclusiones

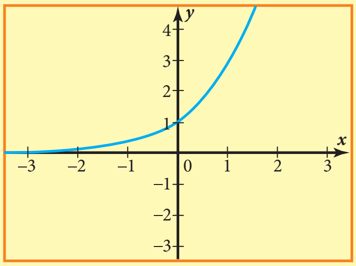
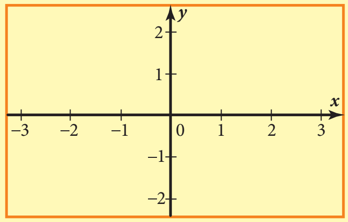
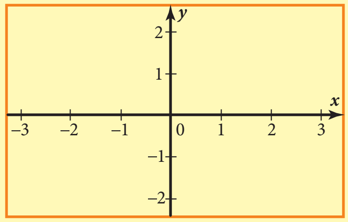
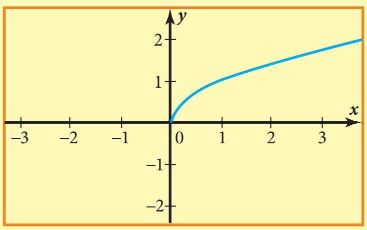
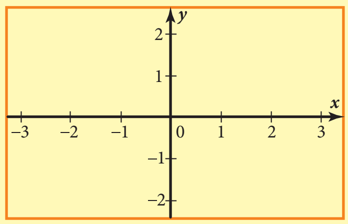
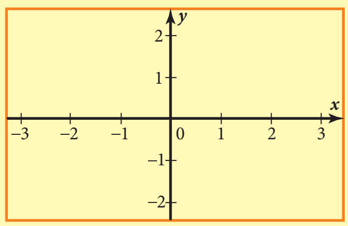
Completa cada enunciado con la palabra correcta (*alarga* o *encoge*).

Si c es una constante y $y = f(x)$ una función cuya gráfica se conoce, entonces:

- Si $c > 1$, la gráfica de la función $y = f(cx)$ se ________________ horizontalmente.
- Si $0 < c < 1$, entonces la gráfica de la función $y = f(cx)$ se ________ horizontalmente.

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo __________

Utiliza algún software graficador para determinar los efectos geométricos de las gráficas de las funciones dadas y completa los espacios en blanco.

Funciones básicas	Nuevas funciones	Describe y explica lo observado
$y = h(x) = e^x$ 	$y = g(x) = -e^x$  $y = g(x) = e^{-x}$ 	
$h(x) = \sqrt{x}$ 	$g(x) = -\sqrt{x}$  $g(x) = \sqrt{-x}$ 	

Conclusiones

Si la gráfica de $y = f(x)$ es conocida, entonces la gráfica de la función.

$y = -f(x)$ se invierte (vertical u horizontalmente) ______________________.

$y = f(-x)$ se invierte (vertical u horizontalmente) ______________________.

Nombre ____________________ Matrícula ______________ Grupo __________

Utiliza algún software para obtener la gráfica de las siguientes funciones y establece un patrón de comportamiento general para cada grupo de funciones.

Nota Al número que acompaña la potencia más alta se le llama **coeficiente principal.**

Grupo I

$f(x) = 3x^2 + x - 2$	$f(x) = x^2 - x - 1$	¿Cuál es el grado de estas dos funciones? __________ ¿Qué signo tienen sus coeficientes principales? __________
$f(x) = -5x^2 + 5$	$f(x) = -x^2 - 4x$	¿Cuál es el grado de estas dos funciones? __________ ¿Qué signo tienen sus coeficientes principales? __________

Describe la relación que observas entre las gráficas de las funciones anteriores y el signo del coeficiente principal.

____

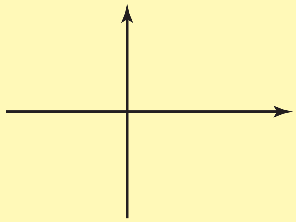
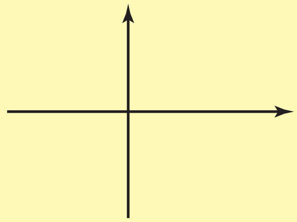
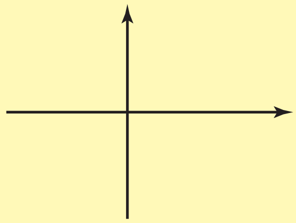
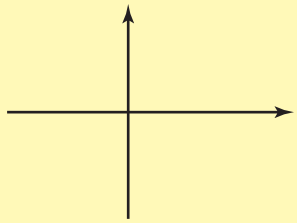
Grupo II

$f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$	$f(x) = x^3 - x + 2$	¿Cuál es el grado de estas dos funciones? __________ ¿Qué signo tienen sus coeficientes principales? __________
$f(x) = -2x^3 + x^2 + 1$	$f(x) = -x^3 + 5x^2 + 3x$	¿Cuál es el grado de estas dos funciones? __________ ¿Qué signo tienen sus coeficientes principales? __________

Describe la relación que observas entre las gráficas de las funciones anteriores y el signo del coeficiente principal.

____

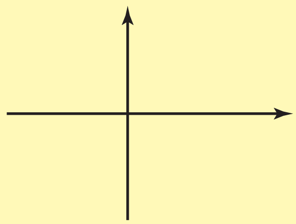
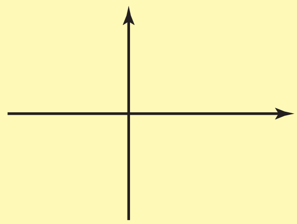
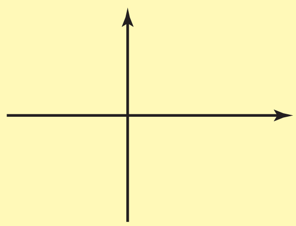
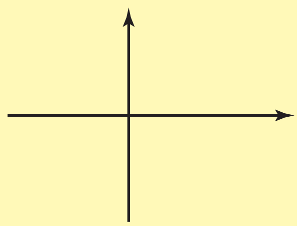
Grupo III

$f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 1$ 	$f(x) = 2x^4 - 3x^3 - x^2 + 3$ 	¿Cuál es el grado de estas dos funciones? ________ ¿Qué signo tienen sus coeficientes principales? ________
$f(x) = -\ 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 6x - 3$ 	$f(x) = -\ x^4 + 2x^3 - 1$ 	¿Cuál es el grado de estas dos funciones? ________ ¿Qué signo tienen sus coeficientes principales? ________

Describe la relación que observas entre las gráficas de las funciones anteriores y el signo del coeficiente principal.

____

Grupo IV

$f(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + 2x + 3$ 	$f(x) = x^5 + 3x^4 - 4x^2$ 	¿Cuál es el grado de estas dos funciones? ________ ¿Qué signo tienen sus coeficientes principales? ________
$f(x) = -x^5 + 2x^3 - x$ 	$f(x) = -\ x^5 + 2x^4 + x^3 - 2x^2$ 	¿Cuál es el grado de estas dos funciones? ________ ¿Qué signo tienen sus coeficientes principales? ________

Conclusiones

Dibuja la forma general que tienen las funciones anteriores de acuerdo con su grado y con el signo del coeficiente principal.

Grado	Gráfica de la función polinomial con coeficiente principal positivo (+)	Gráfica de la función polinomial con coeficiente principal positivo (−)
2		
3		
4		
5		

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo _________

I. Contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es la forma general de un polinomio de grado n?

____

2. ¿Cómo se determina el grado de un polinomio?

____

3. ¿A qué se le llama coeficiente principal de una función polinomial?

____

4. Escribe el grado y el coeficiente principal de las siguientes funciones:

a) $h(t) = 9t^2 - 6t^4 + 2t^3 - 1$ Grado _________ Coeficiente principal _________

b) $f(q) = 1 + 5q^8 - 3q^7$ Grado _________ Coeficiente principal _________

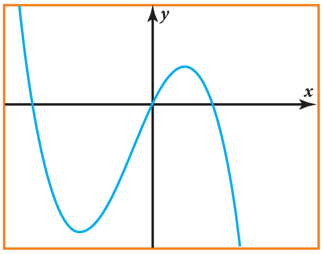
5. ¿Qué relación hay entre el grado y el número de vueltas (crestas)?

____

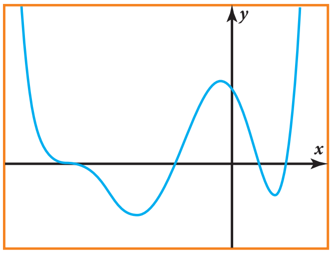
6. Dibuja cómo se ve la gráfica de una función polinomial al momento de cortar al eje x, de acuerdo con la multiplicidad de sus raíces.

Multiplicidad de las raíces reales	Efecto geométrico	
Una raíz sencilla	$\longrightarrow x$	$\longrightarrow x$
Una raíz doble	$\longrightarrow x$	$\longrightarrow x$
Una raíz triple	$\longrightarrow x$	$\longrightarrow x$

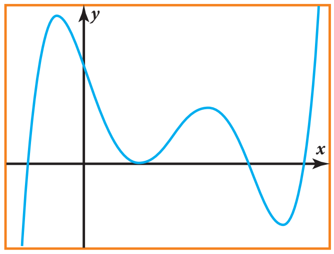
7. ¿Cuál es el número mínimo de raíces reales que tienen las siguientes funciones?



a) ____________________



b) ____________________



c) ____________________

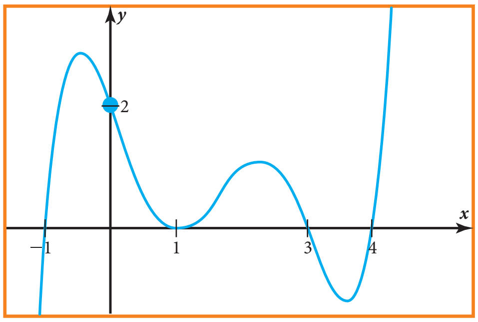
8. Indica el grado de las funciones polinomiales anteriores.

a)____________________ *b*) ____________________ *c*) ____________________

9. Basándote en los incisos 7 y 8, ¿qué relación encuentras entre el grado y el número de raíces de un polinomio?

____

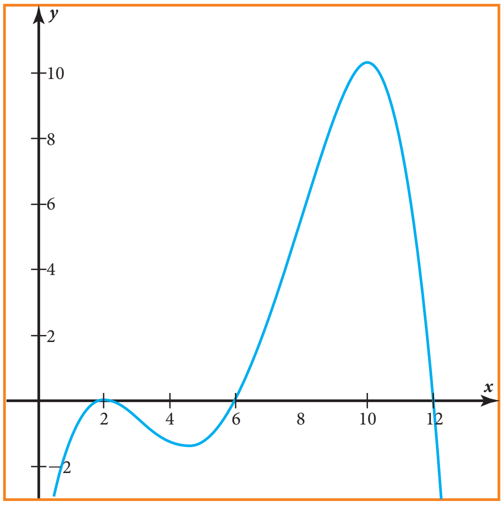
II. Basándote en la siguiente gráfica, contesta lo que se te pide.



1. ¿Cuál es el grado de esta función polinomial? ____________________
2. ¿Cuántas inversiones (o vueltas) tiene la función? ____________________
3. ¿Cuáles son las raíces? ____________________
4. ¿Cuáles son los factores? ____________________
5. Escribe una posible fórmula para la gráfica ____________________.

Nombre ____________________ Matrícula ______________ Grupo __________

La siguiente es la gráfica de la razón de cambio $r(x)$ de la función $U(x)$ en el intervalo $[0,12]$, donde x representa el tiempo medido en meses y U las utilidades en miles de euros. Con base en la información de la gráfica de la razón de cambio, contesta lo que se pide en cada inciso.



Gráfica de la razón de cambio de $U(x)$

1. ¿En cuál o cuáles meses las utilidades fueron máximas? Considera $x = 1$ como el mes de enero. ____________

2. ¿En cuál o cuáles meses fueron mínimas las utilidades? Considera $x = 1$ como el mes de enero. ____________

3. ¿En qué mes las utilidades alcanzaron la máxima velocidad? (Punto de inflexión.)

____

4. ¿En cuáles meses crecieron las utilidades? Exprésalo en intervalo.

____

5. ¿En cuáles meses decrecieron las utilidades? Exprésalo en intervalo.

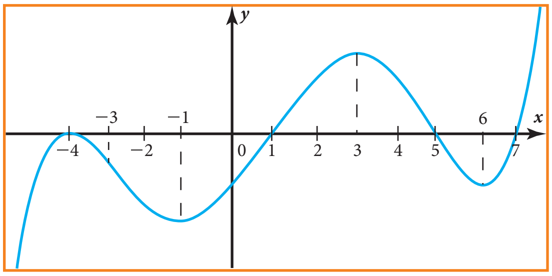
____

6. ¿En cuáles meses las utilidades crecieron cada vez más rápido? Exprésalo en forma de intervalo. ____________

7. ¿En cuáles meses las utilidades decrecieron cada vez más lento? Exprésalo en forma de intervalo. ____________

Nombre ____________________ Matrícula ______________ Grupo __________

1. La siguiente gráfica muestra el comportamiento de la razón de cambio de una función. Apoyándote en ella determina lo que se pide.



a) ¿En qué valores de x existen los máximos relativos de la función $f(x)$? __________

____

b) ¿En qué valores de x existen los mínimos relativos de la función $f(x)$? __________

____

c) ¿En qué valores de x existen los puntos de inflexión? ____________________

____

d) Determina los intervalos donde la función $f(x)$ es creciente. ________________

____

e) Determina los intervalos donde la función $f(x)$ es decreciente. ______________

____

f) Determina los intervalos donde la función $f(x)$ crece cada vez más rápido. ______

____

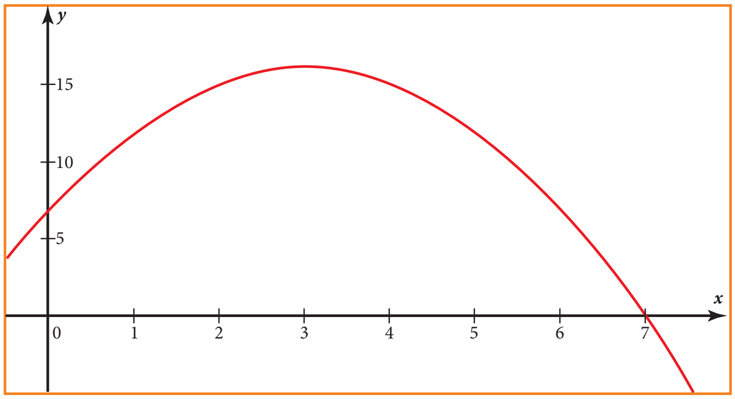
g) Determina los intervalos donde la función $f(x)$ decrece cada vez más rápido.

____

h) Determina los intervalos donde la función $f(x)$ es cóncava hacia abajo. ________

____

2. La siguiente gráfica muestra los costos marginales respecto al tiempo (razón de cambio). Los costos están dados en miles de pesos, y el tiempo, en meses. Considera $x = 1$ como el mes de enero.

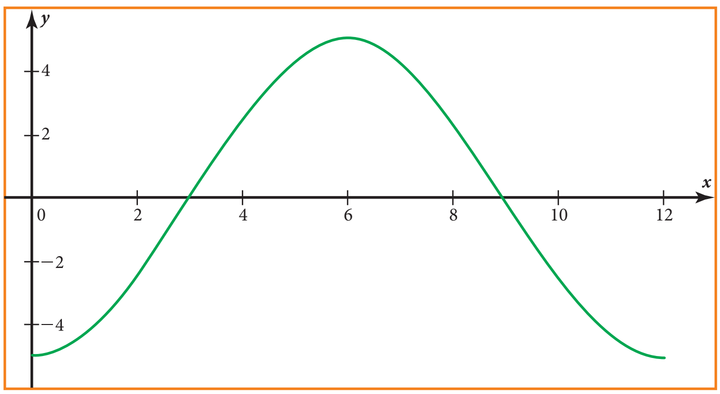


a) ¿En qué momento los costos crecen? ____________________.

b) ¿En qué mes los costos son máximos? ____________________.

c) ¿En qué momento los costos disminuyen? ____________________.

3. La siguiente gráfica muestra las ventas marginales de trajes de baño en México en un año ($x = 1$ representa el mes de enero).



Completa el siguiente párrafo.

Del mes de ____________ a __________ las ventas fueron disminuyendo cada vez más ________________. En el mes de ____________ se tuvieron las ventas mínimas, pero a partir de ese mes al mes de ____________ las ventas empezaron a crecer, de marzo a junio cada vez más ____________ y de junio a septiembre lo hicieron cada vez más ________ alcanzando las ventas máximas en el mes de ____________. Sin embargo, del mes de ______________ al mes de __________ las ventas comenzaron a ____________ cada vez más ______________.

Nombre ____________________________ Matrícula __________________ Grupo ___________

Utiliza la definición de derivada dada a continuación:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x - f(a)}{\Delta x} \quad \text{con } \Delta x = 0.0001,$$

para calcular la derivada de la función dada en el punto indicado. Como sugerencia, completa la columna "Patrón" hasta que obtengas los datos que se te piden en las tres columnas anteriores; posteriormente, observa el patrón que se repite con los valores obtenidos y utilízalo para encontrar una fórmula para la derivada de la función en cualquier valor de x.

1. Encuentra la derivada de la función $f(x) = x^2$ en los valores indicados de x.

En el punto	Planteamiento de la derivada	Valor aproximado	Valor redondeado a enteros	Patrón
x = 1	$f'(1) =$			
x = 2	$f'(2) =$			
x = 3	$f'(3) =$			

En general, la fórmula para la derivada de x^2 es: $f'(x) =$ ________________________.

2. Encuentra la derivada de la función $f(x) = \ln x$ en los valores indicados de x.

En el punto	Planteamiento de la derivada	Valor aproximado	Valor redondeado a enteros	Patrón (con fracciones)
x = 2	$f'(2) =$			
x = 3	$f'(3) =$			
x = 4	$f'(4) =$			

En general, la fórmula para la derivada de $\ln x$ es: $f'(x) =$ ________________________.

3. Encuentra la derivada de la función $f(x) = e^x$ en los valores indicados de x.

En el punto	Planteamiento de la derivada	Valor aproximado	Valor redondeado a tres decimales
$x = 1$	$f'(1) =$		
$x = 2$	$f'(2) =$		
$x = 3$	$f'(3) =$		

Antes de encontrar la fórmula de la derivada, completa la siguiente tabla de valores (utiliza tu calculadora).

Evaluación de la función	Valor redondeado a tres decimales
$f(1) = e^1 =$	
$f'(2) = e^2 =$	
$f'(3) = e^3 =$	

Compara las columnas que contienen los valores redondeados de las dos tablas anteriores y describe lo que observas.

____

____

____

En general, la fórmula para la derivada de e^x es: $f'(x) =$ ________________________.

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo __________

I. En tu libro de texto, investiga las siguientes propiedades de una derivada. (La letra c representa una constante.)

1. Si $H(x) = f(x) + g(x)$, entonces $H'(x) =$ ________________________________.
2. Si $H(x) = f(x) \cdot g(x)$, entonces $H'(x) =$ ________________________________.
3. Si $H(x) = c \cdot f(x)$, entonces $H'(x) =$ ________________________________.
4. Si $H(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, entonces $H'(x) =$ ________________________________.
5. Si $H(x) = \dfrac{f(x)}{c}$, entonces $H'(x) =$ ________________________________.

II. Escribe las fórmulas de derivación correspondientes a cada inciso, utilizando el material visto en clase, la investigación número 5 y tu libro de texto. (La letra c representa una constante.)

1. Si $f(x) = c$, entonces $f'(x) =$ ________________________________.
2. Si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) =$ ________________________________.
3. Si $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) =$ ________________________________.
4. Si $f(x) = a^x$, entonces $f'(x) =$ ________________________________.
5. Si $f(x) = \ln x$, entonces $f'(x) =$ ________________________________.

Nombre ____________________ Matrícula ______________ Grupo __________

Nombre ____________________ Matrícula ______________ Grupo __________

Utiliza las propiedades y fórmulas de derivación para encontrar la derivada de las siguientes funciones. Describe paso a paso el procedimiento utilizado y justifícalo.

Función	Derivada
1) $f(x) = \ln 2$	
2) $g(z) = z^2 + \dfrac{1}{2z}$	
3) $h(x) = \pi^2 + x^\pi + \pi^x$	
4) $H(t) = 8t^6 + 7t^5 - \sqrt{2}\,t^2 + e^3$	
5) $f(w) = \dfrac{5w^2 + w^3 - 1}{w^4 + 8}$	
6) $P(t) = P_0(1.05)^t$	
7) $h(p) = 10^p \ln p$	

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo __________

Utiliza la siguiente guía didáctica para encontrar la derivada de la función $y = [g(x)]^n$:

1. Realiza lo que se indica en los siguientes incisos para encontrar la derivada de la función $y = [g(x)]^2$.

a) Escribe la función dada como un producto de funciones. $y =$ ______________

b) Utiliza la regla de la derivada de un producto para obtener la derivada de la función propuesta en el inciso *a*). $y' =$ ______________________________

c) Escribe en forma simplificada la derivada que obtuviste en el inciso *b*)
$y' =$ ____

2. Realiza lo que se indica en los siguientes incisos para encontrar la derivada de la función $y = [g(x)]^3$.

a) ¿Es válido escribir la función dada como $y = g(x)[g(x)]^2$? ______________

b) Utiliza la regla de la derivada de un producto y la respuesta del inciso 1*c*), para obtener la derivada de la función propuesta en el inciso 2*a*).

$y' =$ ____

c) Escribe de forma simplificada la derivada que obtuviste en el inciso *b*).

$y' =$ ____

3. Realiza lo que se indica en los siguientes incisos para encontrar la derivada de la función $y = [g(x)]^4$.

a) ¿Es válido escribir la función dada como $y = g(x)[g(x)]^3$? ______________

b) Utiliza la regla de la derivada de un producto y las respuestas del inciso 2*c*), para obtener la derivada de la función propuesta en el inciso 3*a*).

$y' =$ ____

c) Escribe de forma simplificada la derivada que obtuviste en el inciso *b*).

$y' =$ ____

4. Completa la siguiente tabla con los resultados obtenidos en los incisos 1*c*), 2*c*) y 3*c*).

Función	Derivada
$y = [g(x)]^2$	$y' =$
$y = [g(x)]^3$	$y' =$
$y = [g(x)]^4$	$y' =$

5. De acuerdo con el patrón de comportamiento de las derivadas de las funciones anteriores, ¿cuál sería la derivada para la función $y = [g(x)]^5$? $y' =$ ________________________.

6. Generaliza los resultados anteriores para establecer una fórmula para derivar funciones compuestas elevadas a potencias.

   Si $y = [g(x)]^n$, entonces $y' =$ ____.

Nombre ____________________ Matrícula ____________ Grupo ________

Nombre ____________________ Matrícula ____________ Grupo ________

Encuentra la derivada de las siguientes funciones compuestas, utilizando la regla de la cadena.

	Función	Derivada
1.	$y=\sqrt[3]{(x^2-4)^2}$	
2.	$f(x) = (x^2 + 5)^3(3x^3 - 8)$	
3.	$f(x) = 7^{(x^2 - 5x)}$	
4.	$f(x) = (23.1)^{-4x}$	
5.	$f(x) = e^{(1 + 3x)^2}$	
6.	$f(t)=\dfrac{e^{t^2}}{1+\ln t}$	
7.	$f(x) = \ln (e^{-2x} + x)$	
8.	$f(x) = 5 \ln (x^{3/2})$	

Nombre ____________________________ Matrícula _________________ Grupo ____________

Nombre ____________________________ Matrícula _________________ Grupo ____________

Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada, en el punto indicado.

1. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ en $x = 2$

2. $f(x) = \ln(x + 1)$ en $x = 0$

3. $f(x) = 3e^{x^2}$ en P(0, 3)

4. $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-8)^2}$ en P(3, 1)

5. $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ en $x = 0$

6. $f(x) = x \cdot \ln x^2$ en P(1, 0)

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo __________

I. Reflexiona acerca de las propiedades y fórmulas para derivar funciones y completa los espacios en blanco.

1. Si k es una constante y n es un entero, entonces la derivada de $y = k^n$ es $y' =$ ____.
2. Si $f'(4) = 6$ y $g'(4) = 3$, determina la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la curva $y = 2f(x) - 5g(x)$, en $x = 4$ ______________________________.
3. Si $y = f(x)$ es una función polinomial de grado 2, entonces $f''(x) =$ ____________.
4. La derivada de la función $h(x) = x^2 f(x)$ es ______________________________.
5. Si $f(x) = \dfrac{x^2+1}{e^x}$, la razón de cambio instantánea de $f'(x)$ en $x = 0$ es ____________.

II. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la curva $f(x) = -x^2 + 5x + 1$ es $f(x) = -2x + 5$. ______________________________.
2. La derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas ______________.
3. Si $f'(x) = g'(x)$, entonces $f(x) = g(x)$ ______________________________.
4. Si $f(x) = k^{1/2}x^4$, donde k es una constante positiva, entonces $f'(x) = 4k^{1/2}x^3 + x^4(1/2)k^{-1/2}$ ______________________________.
5. Si $H(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, entonces la derivada de $H(x)$ se obtiene dividiendo la derivada de $f(x)$ entre la derivada de $g(x)$ ______________________________.

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo _________

Estas son las preguntas que debe contener tu reporte:

1. ¿En qué casos se dice que una función tiene un valor:

a) Mínimo local en un número $x = a$? ____________________________________

____

b) Máximo local en un número $x = a$? ____________________________________

____

2. ¿Cuáles son las condiciones para que un número $x = a$ sea un número crítico de una función f?

a) ____

____

b) ____

____

3. *¿Cómo determinar cuáles puntos críticos son mínimos locales o máximos locales?*

____

4. ¿En qué consiste el criterio de la primera derivada para máximos y mínimos locales?

a) ____

____

b) ____

____

5. ¿Una función *siempre* tendrá un valor máximo o mínimo local en un punto crítico? Justifica tu respuesta.

____

____

____

Nombre ______________________ Matrícula ______________ Grupo __________

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿En qué casos se dice que una función *f* tiene un punto de inflexión?

   a) ____

   ____

   b) ____

   ____

2. ¿Cómo se localizan los puntos de inflexión?

   a) ____

   ____

   b) ____

   ____

3. ¿La gráfica de la función *f* siempre tendrá un punto de inflexión en donde se cumplen las condiciones $f'' = 0$ o f'' no existe? Justifica tu respuesta. Apóyate con gráficas.

   ____

   ____

   ____

¡A reflexionar!

¿Qué información proporciona cada uno de los siguientes puntos respecto a la gráfica de la función?

1. Punto crítico ____

   ____

   ____

2. Punto de inflexión ____

   ____

   ____

Temas complementarios

Función inversa

Los datos que aparecen en la siguiente tabla se obtuvieron de una factura expedida por la Compañía de Agua y Drenaje de Monterrey en el 2000. De todos es sabido que el cobro por el servicio de agua depende de la cantidad de metros cúbicos que se hayan consumido.

m = consumo (en m^3)	5	20	35	50
C = cobro por el servicio (en pesos)	27.7964	111.1857	194.575	277.9642

Es evidente que los datos proporcionados en la tabla corresponden a una función, ya que se cumple que a cada valor de consumo m le corresponde un único valor de cobro por servicio C, por lo tanto, podemos denotar la función como $C = f(m)$, de tal forma que la expresión $f(20) = 111.1857$ significa que si se consumen 20 m^3 de agua, pagaremos $111.1857.

Leamos ahora la información *al revés*, es decir, si vamos a pagar $111.1857, esto significa que consumimos 20 m^3 de agua en el mes.

Esa relación *al revés*, ¿representa una función? Es decir, si escribimos la tabla como:

C = cobro por el servicio (en pesos)	27.7964	111.1857	194.575	277.9642
m = consumo (en m^3)	5	20	35	50

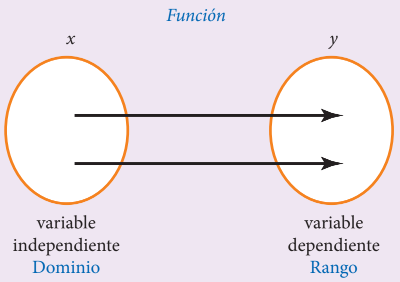
¿Se cumple que a cada valor de cobro por el servicio C le corresponde un único valor de consumo m? ________________________. Entonces, esa relación *al revés*, ¿es una función? ________________________

A esa relación *al revés* que cumple con la condición para ser función la llamaremos **función inversa** y la denotaremos como f^{-1}.

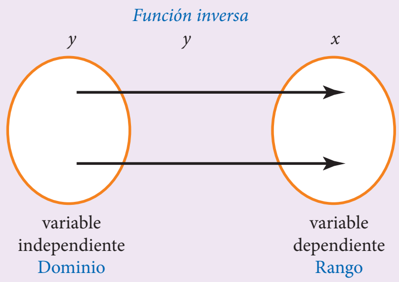
¿Cómo quedaría la notación para el consumo como una función del cobro por el servicio?

____

En diagramas, la función queda representada como:



La función se denota como: $y = f(x)$



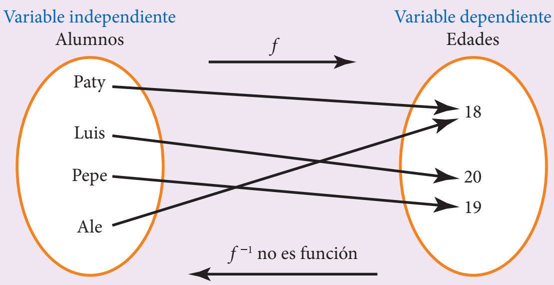
La función se denota como $y = f^{-1}(x)$

Observa cómo en la función inversa todo cambia; ahora la variable independiente es y y la dependiente es x; el dominio lo forman el conjunto de posibles valores de y, el rango, o imagen, del conjunto de los correspondientes valores de x. La notación funcional también cambia, tenemos x en función de y.

Nota Para que la inversa sea una función, se debe cumplir que cada valor de y se relacione con un único valor de x.

Cabe aclarar que *no* todas las funciones tienen una inversa. Analicemos la siguiente situación: cada estudiante n en la clase de Matemáticas I tiene una y sólo una edad E, por lo tanto, $E = f(n)$ es una función; sin embargo, es seguro que habrá dos o más estudiantes con la misma edad, así que al pensar al revés, $n = f^{-1}(E)$ no es una función, por lo tanto, se dice que la función original $E = f(n)$ no tiene inversa.

Observa el diagrama:



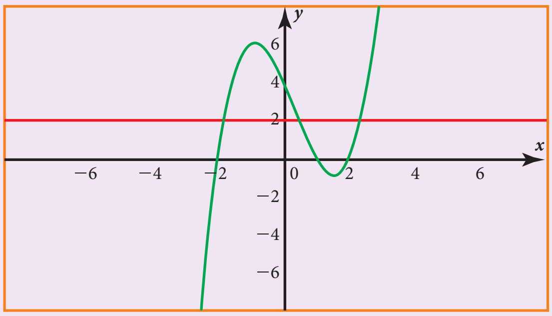
Nota Si en una función f, a dos o más valores del dominio les corresponde el mismo valor en el rango, entonces la función no tiene inversa.

Prueba de la línea horizontal

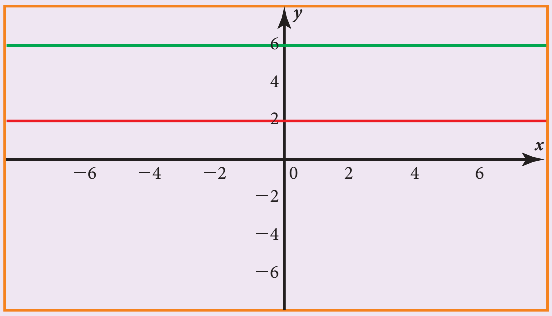
Otra forma de comprobar si una función tiene inversa es mediante la prueba de la línea horizontal; para utilizar esta prueba es necesario conocer la gráfica de la función y consiste en lo siguiente:

Si toda línea horizontal que tracemos en la gráfica de la función la corta en un solo punto, entonces decimos que la función tiene inversa,

ya que se estaría relacionando un valor de y con un único valor de x. Si observamos que al menos una línea horizontal corta a la gráfica en dos o más puntos, entonces decimos que la función no tiene inversa. Por ejemplo,



Esta función no tiene una inversa: hay por lo menos una línea horizontal que corta tres veces a la gráfica.



Esta función sí tiene inversa; cualquier línea horizontal que tracemos, corta una sola vez a la gráfica.

Ecuación de la función inversa

Si tenemos la función $y = f(x)$, la ecuación de la inversa se obtiene al despejar x como función de y, es decir, $x = f(y)$.

Ejemplo 1 Obtén la ecuación de la función inversa para la función $y = \dfrac{3x}{2x-1}$.

Solución Para obtener la ecuación de la función inversa, debemos despejar x en función de y, para ello utilizaremos las reglas de despeje que aprendimos en nuestros cursos de álgebra.

Al pasar el denominador del lado derecho hacia el lado izquierdo, obtenemos, $y(2x - 1) = 3x$; efectuamos la multiplicación del lado izquierdo y obtenemos

$$2xy - y = 3x$$

puesto que queremos despejar x, dejamos de un lado de la igualdad los términos con x y en el otro lado los que no tienen x; es indistinto hacia qué lado lo pasemos. Al hacerlo obtenemos

$$2xy - 3x = y$$

tomamos x como factor común:

$$x(2y - 3) = y.$$

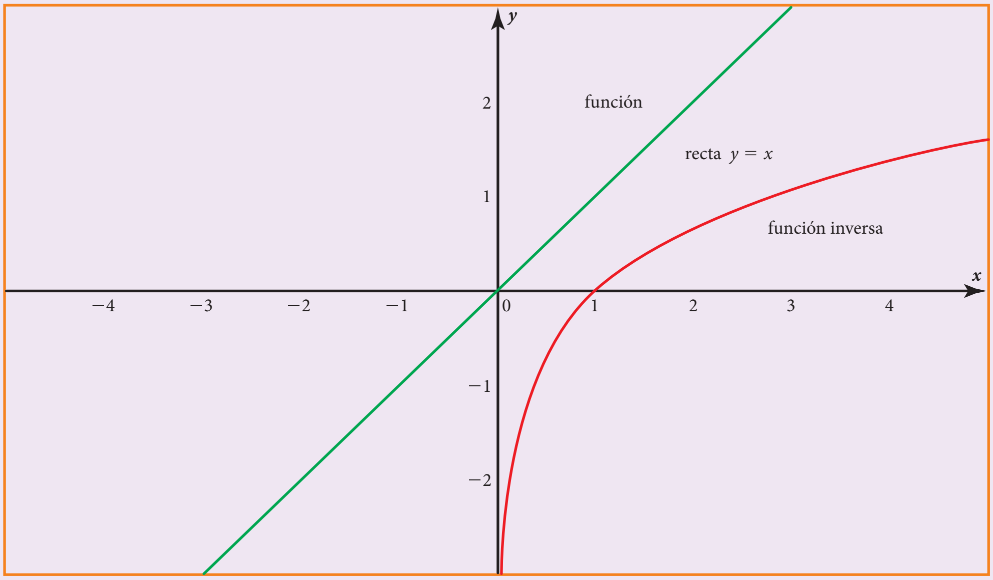
Por último, al despejar x nos queda $x = \dfrac{y}{2y-3}$. Ésta es la ecuación de la función inversa.

Gráfica de la función inversa

La gráfica de la función inversa es la gráfica de la función reflejada respecto a la línea $y = x$.

Ejemplo 2 Dibuja la gráfica de la función inversa de la función dada en la gráfica.

Solución Debemos reflejar la gráfica de la función respecto a la línea $y = x$; para ello primero dibujamos la gráfica de la función $y = f(x)$, y luego la reflejamos.



Nota Observa cómo la gráfica de la función pasa por el punto (0, 1) y la función inversa pasa por el punto (1, 0), es decir, se voltea el punto; eso mismo ocurrirá en cualquier punto que tomes.

¡A trabajar!

Ejercicio 1 En cada una de las siguientes funciones, determina si existe la inversa.

Solución *a*) $C = f(a)$, donde C representa la calificación final de Matemáticas de los alumnos a.

Sugerencia: para resolver este ejercicio, pregunta a cuatro o cinco compañeros su nombre y su calificación.

función | | inversa |
---|---|---|---
variable | *variable dependiente* | *variable* | *variable dependiente*

¿Cada uno de tus compañeros tiene asignada una única calificación? __________

¿Todos los compañeros del grupo habrán obtenido calificaciones diferentes? __________

¿Cuál es la condición para que exista la inversa? __________

¿Se cumple? Justifica tu respuesta. __________

Conclusión ¿La función dada tiene inversa? Justifica tu respuesta. __________

b) $N = f(a)$, donde N representa el número de matrícula de los alumnos a del ITESM.

función | | inversa |
---|---|---|---
variable | *variable dependiente* | *variable* | *variable dependiente*

¿Cuál es la condición para que exista la inversa? __________

¿Se cumple? Justifica tu respuesta. __________

c) $N = f(d)$, donde N representa el número de estudiantes de la clase de matemáticas que cumple años el día d del año.

función | | inversa |
---|---|---|---
variable | *variable dependiente* | *variable* | *variable dependiente*

¿Cuál es la condición para que exista la inversa? ____________________

____

¿Se cumple? Justifica tu respuesta. ____________________

____

Ejercicio 2 La función $I=\frac{\sqrt{25+4q^3}}{100}$ representa el ingreso obtenido al vender una cantidad q de televisores.

Solución *a*) Si la función es $I=f(q)$, ¿cómo queda expresada la función inversa? ____________________

____

b) Obtén la ecuación de la función inversa.

¿Qué tienes que hacer para obtener la ecuación de la inversa? ____________________

____

____

Encuentra la ecuación:

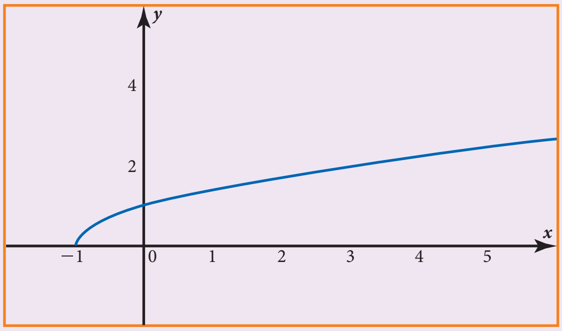
c) ¿Qué información nos da la función inversa? ____________________

____

Ejercicio 3 Utiliza la prueba de la línea horizontal para determinar si las siguientes funciones tienen inversa:

Solución

a)



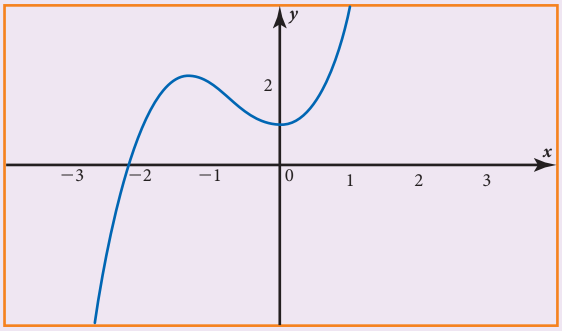
¿Tiene inversa? ____________________

Justifica tu respuesta. ____________________

____

____

b)



¿Tiene inversa? ____________________

Justifica tu respuesta. ____________________

____

____

Conjunto de ejercicios Función inversa

Determinar si existe la inversa para las funciones representadas en las siguientes tablas; si existe, dar el dominio y el rango.

1.

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

2.

q	-1	0	1	1/2	2
p	12	8	4	6	1

3. La siguiente tabla muestra el crecimiento de la mancha urbana del área metropolitana de Monterrey.

t (años)	1765	1880	1900	1950	2000
m (hectáreas)	58	800	1 145	6 467	57 282

4. La siguiente tabla muestra las ventas mensuales de una empresa en miles de pesos.

mes	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
ventas	52	70	72	60	72	75

5. La siguiente tabla muestra el porcentaje de alumnos de tiempo completo inscritos en el "Tec" en la carrera de LAF (Lic. en Administración Financiera).

	2001	2001	2002	2002	2003	2003
tiempo	Ene-May	Ago-Dic	Ene-May	Ago-Dic	Ene-May	Ago-Dic
% de alumnos	91.86	89.05	88.18	87.57	85.17	79.87

6. La siguiente tabla muestra la cantidad de alumnos extranjeros inscritos en el Tec, campus Monterrey, en nivel profesional.

	2001	2001	2002	2002	2003	2003
semestre	Ene-May	Ago-Dic	Ene-May	Ago-Dic	Ene-May	Ago-Dic
# de alumnos	726	714	673	662	651	662

En los problemas 7 al 10 obtén la ecuación de la inversa de las siguientes funciones.

7. $S=\dfrac{p}{3p-2}$

8. $y=\sqrt[3]{x-1}$

9. $y=\sqrt{8x-9}$

10. $P=160+\dfrac{900}{t+10}$

11. La función $P=2.5(1.036)^t$ representa la población de una ciudad en el tiempo *t* en años.

    a) ¿Qué información te da la inversa de esa función?

    b) ¿Puedes obtener la ecuación de la inversa?

12. La función $Q=5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/4}$ representa la cantidad de medicamento en la sangre de una persona *t* horas después de haberse administrado.

    a) ¿Qué información te da la inversa de esta función?

    b) ¿Puedes obtener la ecuación de la inversa?

13. La función $N=60+\dfrac{3}{7}p$ representa el número de unidades vendidas de un producto cuando se invierten *p* pesos en publicidad.

    a) Obtén la ecuación de la función inversa.

    b) ¿Qué información te da la inversa de esa función?

En los problemas 14 al 19 determina si existe la inversa para las funciones dadas (justifica) en los siguientes enunciados si existe; da el dominio y rango.

14. $T=f(d)$, donde T representa la máxima temperatura registrada en el día d del año.

15. $M=f(a)$, donde M representa los municipios de Nuevo León (Monterrey, San Pedro, San Nicolás, etc.) y a es el alcalde del municipio.

16. $P=f(g)$, donde P representa profesores de Matemáticas I, y g son los grupos de Matemáticas I.

17. $N=f(h)$, donde N representa el número de alumnos que están en la biblioteca y h es la hora del día.

18. $B=f(p)$, donde B representa el número de boletos de cine que se pueden comprar con p pesos.

19. $C=f(w)$, donde C representa el costo del recibo de electricidad cuando se consumen w kilowatts.

20. La función de ingresos para una compañía está dad por $I = 100\,q$, y la función de costos totales es $C = 1\,200 + 28\,q$.

   a) Plantea la función de utilidad.

   b) Obtén la inversa de la función utilidad.

   c) ¿Qué representa en términos prácticos la inversa?

21. Una empresa que produce libretas gasta mensualmente \$15 000 en renta, \$2 380 en servicios y \$20 000 en sueldos. Si el costo de fabricar cada libreta es de \$12,

   a) Plantea la función de costo.

   b) Obtén la inversa de la función costo.

   c) ¿Qué representa en términos prácticos la inversa?

Respuestas:

1. No tiene inversa

2. Dominio de $f^{1} = \{1, 4, 6, 8, 12\}$

   Rango de $f^{1} = \{-1, 0, 1, 1/2, 2\}$

3. Dominio de $f^{1} = \{58, 800, 1145, 6467, 57\,282\}$

   Rango de $f^{1} = \{1765, 1880, 1900, 1950, 2000\}$

4. No tiene inversa

5. Dominio de $f^{1} = \{79.87, 85.17, 87.57, 88.18, 89.05, 91.86\}$

   Rango de f^{1} = {Ene-May (2001), Ago-Dic (2001), Ene-May (2002), Ago-Dic (2002), Ene-May (2003), Ago-Dic (2003), Ago-Dic (2003)}

6. No tiene inversa

7. $p = \dfrac{2s}{3s-1}$

8. $x = y^3 + 1$

9. $x = \dfrac{1}{8}\left(y^2 + 9\right)$

10. $t = \dfrac{900}{P - 160} - 10$

11. *a*) La inversa de esta función representa el tiempo t en años que deben pasar para que la ciudad tenga una población P.

    b) No, porque la variable a despejar está en el exponente.

12. *a*) La inversa de esta función representa las t horas que deben transcurrir para que quede una cantidad Q de medicamento en la sangre.

    b) No, porque la variable a despejar está en el exponente.

13. *a*) $p = \dfrac{7}{3}(N - 60)$

    b) La inversa de esta función representa los p pesos que se deben invertir en publicidad para vender N unidades de un producto.

14. No tiene inversa

15. Dominio de M^{1} = {M | Municipios de Nuevo León}

    Rango de M^{1} = {a | alcaldes de los Municipios de Nuevo León}.

16. No tiene inversa.

17. No tiene inversa.

18. Dominio de B^{1} = {B | # de boletos de cine} o {0, 1, 2, ...}

    y rango de B^{1} = { P | pesos para comprar boletos para el cine}.

19. Dominio de $C^{1} = [50, \infty)$ donde ∞ significa que no se conoce el costo máximo.

    Rango de $C^{1} = (0, \infty)$ donde ∞ significa que no se conoce el consumo máximo de electricidad.

20. a) $U = 72q - 1\,200$

    b) $q = \dfrac{1}{72}(U + 1\,200)$

    c) Cantidad de artículos q que se deben producir para obtener una determinada utilidad de la compañía.

21. *a*) $C = 37\,380 + 12q$

    b) $q = \dfrac{1}{12}(C - 37\,180)$

    c) Cantidad de libretas que se pueden fabricar a un costo determinado.

Efectos gráficos

Efectos en la gráfica de una función al sumar, restar o multiplicar una constante

Cuando agregamos una constante a una función obtenemos una nueva función; en esta sección nos interesa saber cómo es la gráfica de esa nueva función.

Para esto realizaremos el ejercicio correspondiente a este tema, que se encuentra en el apartado de Hojas de trabajo.

Construcción Cuando la resuelvas, lograrás *descubrir* cuál es el efecto en la gráfica de una función al sumar, restar o multiplicar una constante por una función; es importante que primero realices la investigación que se te indica, ya que esto te permitirá aprovechar toda la riqueza en cuanto al aprendizaje de conceptos y habilidades que puedes lograr.

Desplazamientos rígidos

Si $y = f(x)$ es una función y $C > 0$, entonces, para obtener la gráfica de:

1. $y = f(x) + C$, la gráfica de $f(x)$ se desplaza C unidades hacia ________________ .
2. $y = f(x) - C$, la gráfica de $f(x)$ se desplaza C unidades hacia ________________ .
3. $y = f(x + C)$, la gráfica de $f(x)$ se desplaza C unidades a la ________________ .
4. $y = f(x - C)$, la gráfica de $f(x)$ se desplaza C unidades a la ________________ .

Este tipo de efecto es llamado *rígido*, pues la gráfica no sufre ninguna alteración.

Los desplazamientos rígidos ocurrirán siempre que aparezca una constante sumando o restando a x o a y.

Distorsiones

1. Si $y = C \cdot f(x)$, la gráfica de $f(x)$ se estira o comprime verticalmente, esto depende del valor de C.
   a) Si $C > 1$, la gráfica se ________________ en un factor C.
   b) Si $0 < C < 1$, la gráfica se ________________ en un factor C.
2. Si $y = f(C \cdot x)$, la gráfica de $f(x)$ se estira o comprime horizontalmente, esto depende del valor de C.
   a) Si $C > 1$, la gráfica se ________________ en un factor $\frac{1}{C}$.
   b) Si $0 < C < 1$, la gráfica se ________________ en un factor $\frac{1}{C}$.

Este tipo de efecto es llamado *distorsión*, debido a que al estirar o comprimir la gráfica, ésta sufre una alteración que la hace ver diferente a la original (más abierta o más cerrada).

Las distorsiones ocurrirán siempre que aparezca una constante multiplicando a x o a y.

Por ejemplo, si la nueva función está expresada como:

- $y = 2\,f(x)$, el efecto es estirar verticalmente al doble la gráfica de la función original.
- $y = \frac{1}{2}f(x)$, el efecto es comprimir verticalmente a la mitad la gráfica de la función original.
- $y = f(2x)$, el efecto es comprimir horizontalmente a la mitad la gráfica de la función original, ya que el valor de C es 2 y el factor en que se debe comprimirse es $\frac{1}{C} = \frac{1}{2}$.
- $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$, el efecto es estirar horizontalmente al doble la gráfica de la función original, ya que el valor de C es $\frac{1}{2}$, y el factor en que debe estirarse es $\frac{1}{C} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Reflejos

1. $y = -f(x)$, la gráfica se invierte verticalmente (arriba abajo), es decir, ocurre un reflejo respecto al eje x.

2. $y = f(-x)$, la gráfica se invierte horizontalmente (derecha a izquierda), es decir, ocurre un reflejo respecto al eje y.

Este tipo de efecto es llamado *reflejo* porque al invertirse la gráfica es como si se estuviera reflejando respecto a alguno de los ejes.

El reflejo ocurrirá siempre que aparezca un signo negativo multiplicando a x o a y.

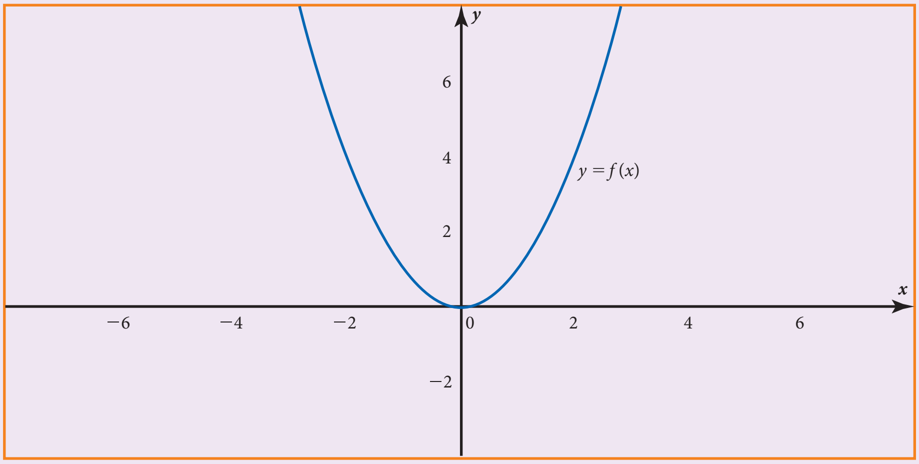
De las reglas anteriores podemos concluir que siempre que la constante esté sumando, restando o multiplicando a las x, el efecto será similar al comportamiento del eje x, es decir, a la izquierda, a la derecha o con efecto horizontal.

Cuando esté sumando, restando o multiplicando a las y, el efecto será similar al comportamiento del eje y, es decir, hacia arriba, hacia abajo o con efecto vertical.

El orden adecuado en que deben efectuarse las operaciones es de adentro hacia afuera; primero lo que esté adentro del paréntesis con x, y después lo que esté con y, es decir:

- Operaciones con x
- Operaciones con y

Ejemplo 1 Dibuja la gráfica de la nueva función, a partir de la gráfica de $f(x)$ dada. Describe si se trata de un movimiento rígido, distorsión o reflejo.

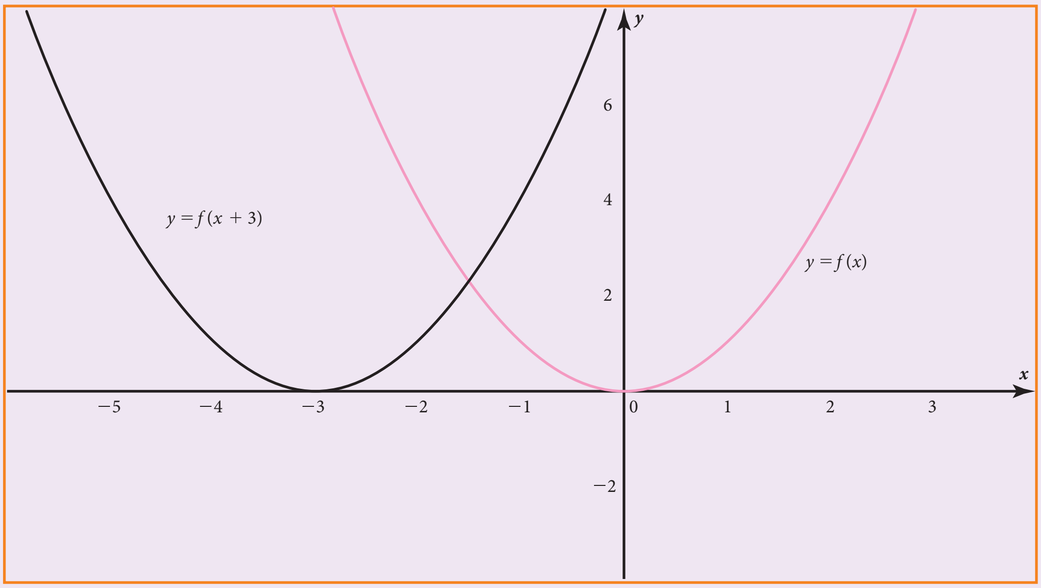


Obtén $f(x + 3)$.

Solución Si comparamos la expresión original $f(x)$ con la que se pide, $f(x + 3)$ identificamos que la diferencia es el número 3 que está sumando a x.

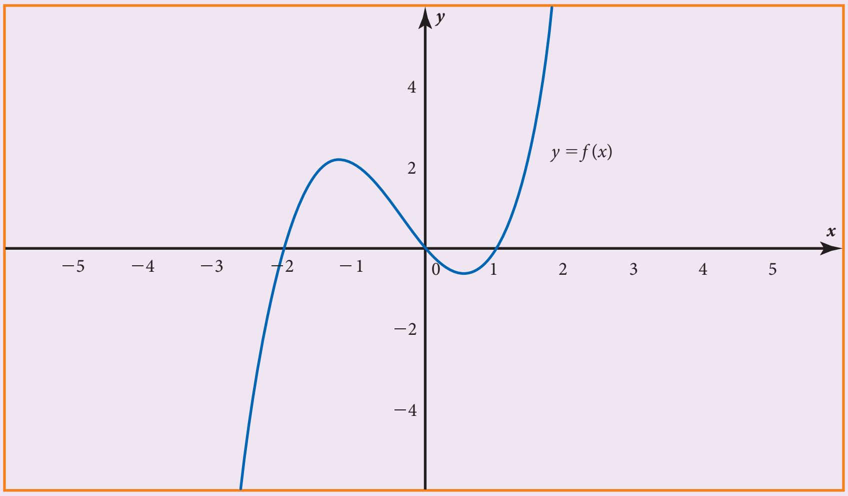
Por las reglas anteriores sabemos que esto produce un desplazamiento rígido en la función. La regla 3 indica un desplazamiento hacia la izquierda de tres unidades; al hacerlo, la gráfica nos queda como

Función transformada



Nota Observa cómo la parábola está exactamente igual que la original; solamente se movió hacia la izquierda, pero la forma y la abertura es la misma que la función original.

Ejemplo 2 Dibuja la gráfica de la nueva función, a partir de la gráfica de $f(x)$ dada. Describe si se trata de un movimiento rígido, distorsión o reflejo.



Obtén $2f(x) - 1$.

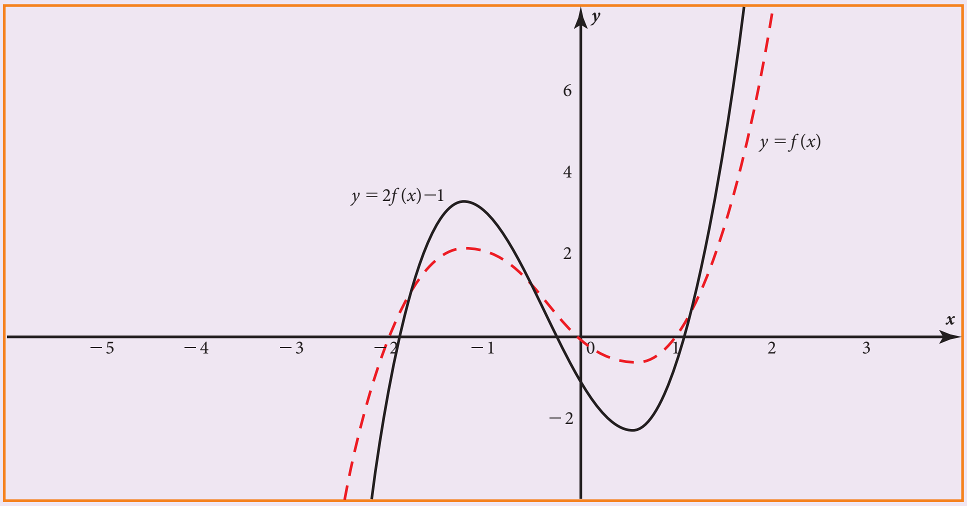
La diferencia entre la función original y la que se pide obtener es el 2 multiplicando y el 1 restando a la función, es decir, ambos efectos son para y.

Aplicando las reglas anteriores sabemos que esto produce una distorsión y un desplazamiento rígido respectivamente. La regla 1 inciso *a*) de distorsión indica que la gráfica se estira verticalmente al doble de su valor, y la regla 2 de desplazamientos rígidos indica un desplazamiento de una unidad hacia abajo.

Según la regla que establece el orden en que se deben efectuar las operaciones es:

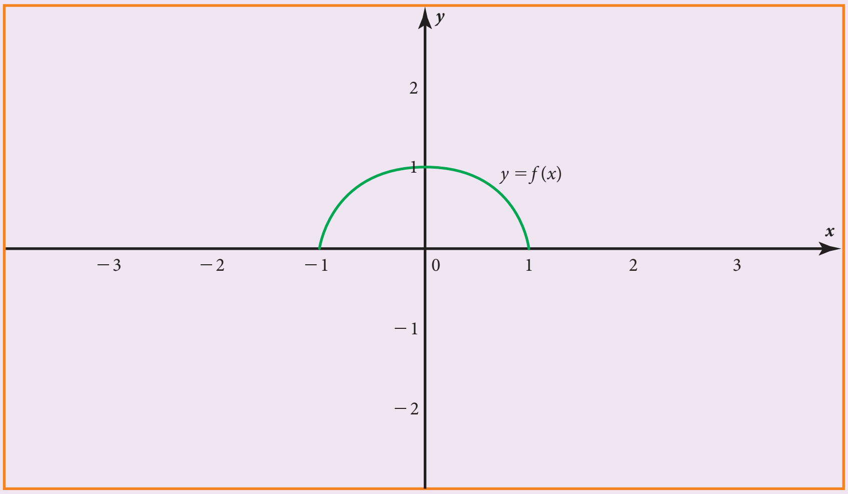
- Alargamiento vertical al doble
- Desplazamiento rígido hacia abajo de una unidad, al hacerlo, la gráfica quedaría como

Función transformada



Nota Observa que al alargarse verticalmente al doble, la gráfica no queda igual que la original, es por eso que decimos que la gráfica se distorsiona.

Ejemplo 3 Dibuja la gráfica de la nueva función, a partir de la gráfica de $f(x)$ dada. Describe si se trata de un movimiento rígido, distorsión o reflejo.



Obtén $-f(2x)$.

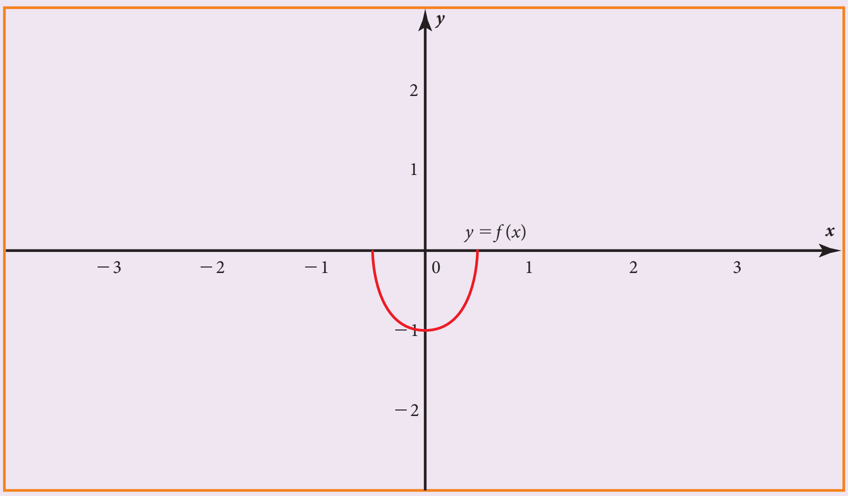
La diferencia entre la función original y la que se pide, $-f(2x)$ es el 2 que multiplica a la x y el signo negativo que multiplica a la función, es decir, el primero es un efecto para x y el segundo es un efecto para y.

Por las reglas anteriores sabemos que esto produce una distorsión y un reflejo respectivamente. La regla 2 inciso *a*) de distorsión indica que la gráfica se comprime horizontalmente, en este caso a la mitad de su valor, y la regla 1 de reflejos indica que la gráfica se invierte verticalmente, es decir, se refleja respecto al eje x.

Según la regla que establece el orden en que deben efectuarse las operaciones es:

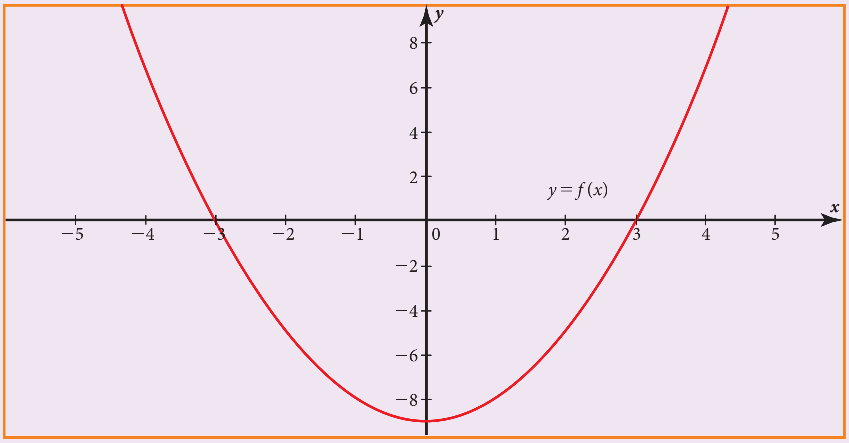
- Comprimir horizontalmente a la mitad.
- Invertir verticalmente la gráfica, al hacerlo, la gráfica quedaría como:

Función transformada



Nota Observa que, en efecto, la gráfica se encogió horizontalmente y se invirtió. Ahora abre hacia arriba.

Ejemplo 4 Dibuja la gráfica de la nueva función, a partir de la gráfica dada de $f(x)$. Describe si se trata de un movimiento rígido, distorsión o reflejo.



Obtén $f(3x - 15)$.

Solución La diferencia entre esta función y la original es que aparece un 3 multiplicando a la x y un 15 que se resta al $3x$, ambos efectos son horizontales.

Por las reglas anteriores sabemos que esto produce una distorsión y un desplazamiento rígido, respectivamente. La regla 2 inciso *a*) de distorsiones indica que la gráfica se comprime horizontalmente, en este caso, a una tercera parte de su valor. La regla 4 indica que la gráfica se desplaza hacia la derecha; es importante enfatizar en que el número de unidades que se desplaza *no* es 15, ya que la expresión que se encuentra entre paréntesis no tiene la forma $f(x - c)$ como está expresado en la regla 4; lo primero que debemos hacer es factorizar adentro del paréntesis para que esté expresado de tal forma que el coeficiente de x sea 1, al hacerlo obtenemos $f(3x - 15) = f(3(x - 5))$.

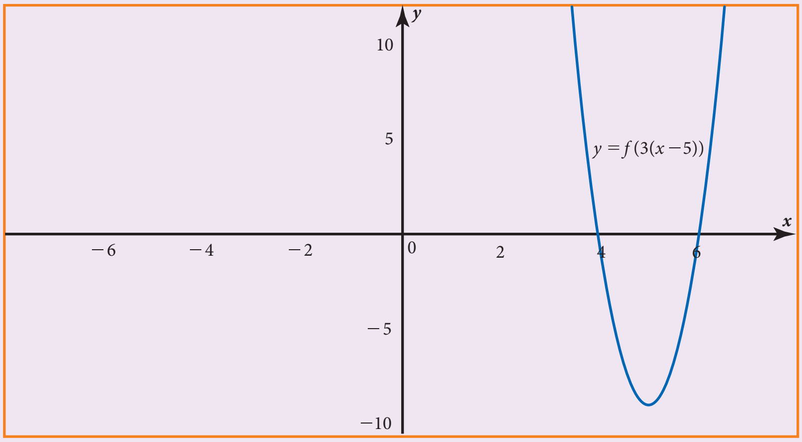
Observa que al factorizar la expresión nos queda $(x - 5)$ como desplazamiento rígido; es decir, se debe desplazar cinco unidades hacia la derecha.

De acuerdo con la regla, el orden en que deben efectuarse las operaciones es el siguiente:

- Desplazar horizontalmente cinco unidades hacia la derecha.
- Comprimir horizontalmente a una tercera parte.

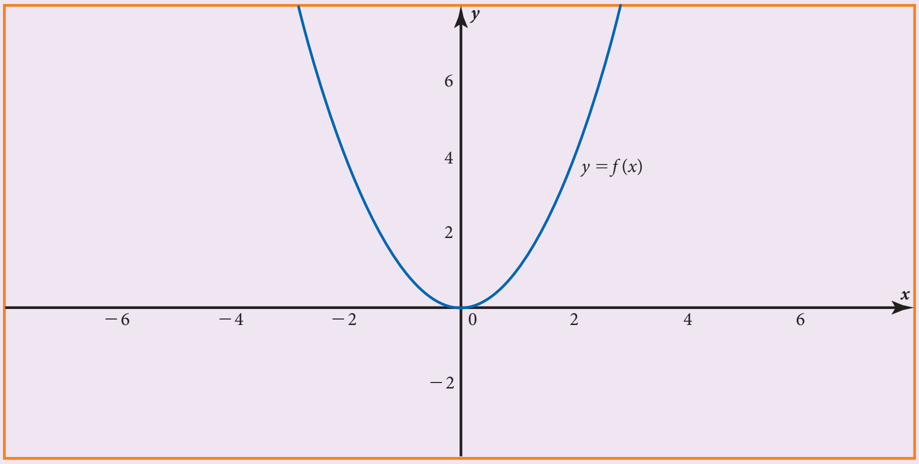
La gráfica quedaría como:

Función transformada



Nota Observa que la nueva gráfica quedó más cerrada que la gráfica original, esto sucede porque ahora se comprime a una tercera parte.

Ejemplo 5 Dibuja la gráfica de la nueva función, a partir de la gráfica de $f(x)$ dada. Describe si se trata de un movimiento rígido, distorsión o reflejo.

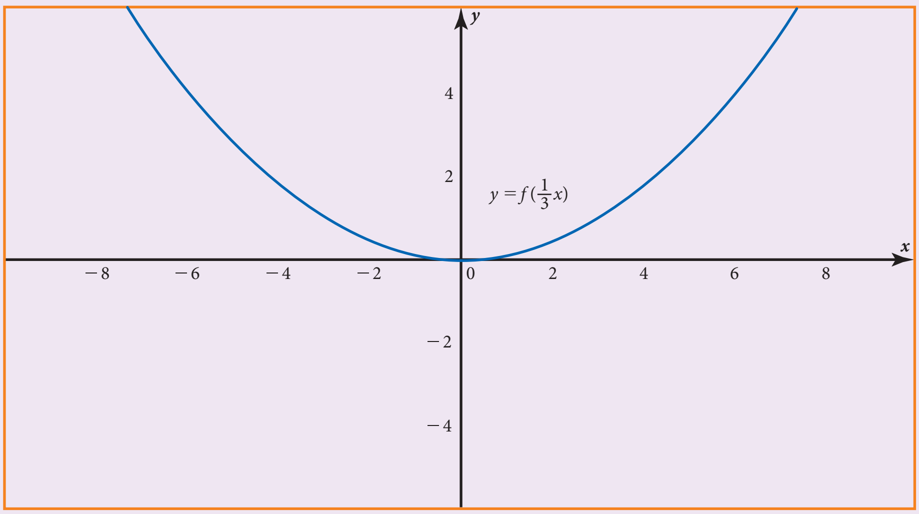


Obtén $f\left(\frac{1}{3}x\right)$.

Solución La diferencia de esta función con la original es el $\frac{1}{3}$ multiplicando a la x.

Por las reglas anteriores sabemos que esto produce una distorsión de la gráfica de la función. La regla 2 indica que la gráfica se alarga horizontalmente al triple de su valor, al hacerlo, la gráfica nos queda como:

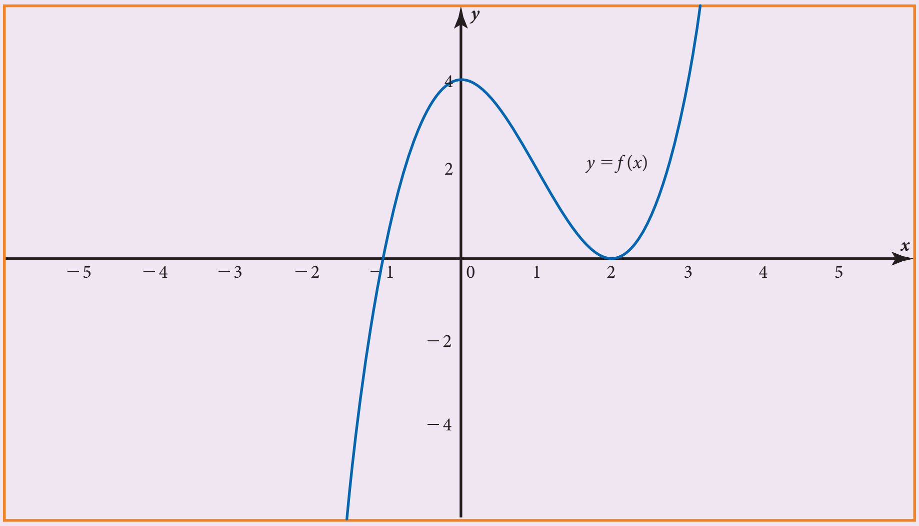
Función transformada



Nota Observa cómo al alargarse horizontalmente la parábola se abre más.

¡A trabajar!

Ejercicio 1 Utiliza las reglas anteriores para graficar la nueva función, a partir de la gráfica $f(x)$ dada. Escribe en la línea el efecto geométrico y si se trata de desplazamiento rígido, distorsión o reflejo. Marca los puntos exactos por los que va a cruzar la gráfica con el eje x y el eje y.



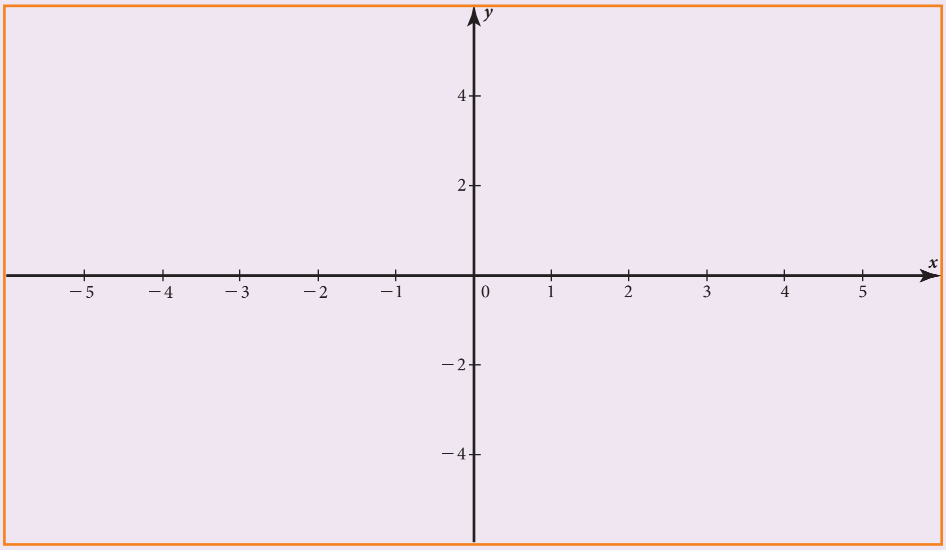
a) $f(x) - 2$

Solución 1. Determina si es desplazamiento rígido, distorsión o reflejo. ______________________

2. Identifica qué regla debes utilizar. ______________________

3. Describe lo que indica la regla respecto al cambio de la gráfica. ______________________

4. Dibuja la gráfica.



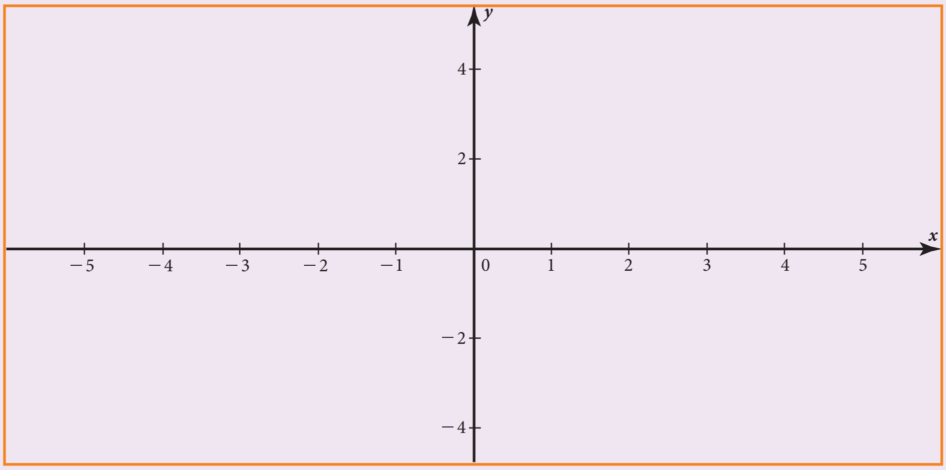
b) $f\left(\frac{1}{2}x\right)$

Solución 1. Determina si es desplazamiento rígido, distorsión o reflejo. ____________________

2. Identifica qué regla debes utilizar. ____________________

3. Describe lo que indica la regla respecto al cambio de la gráfica. ____________________

4. Dibuja la gráfica.



c) $f(-x + 1)$

Nota Observa que en esta expresión hay dos efectos, para resolver.

Solución 1. Determina si es desplazamiento rígido, distorsión o reflejo. ____________________

2. Identifica qué regla debes utilizar. ____________________

3. Describe lo que indica la regla respecto al cambio de la gráfica. ____________________

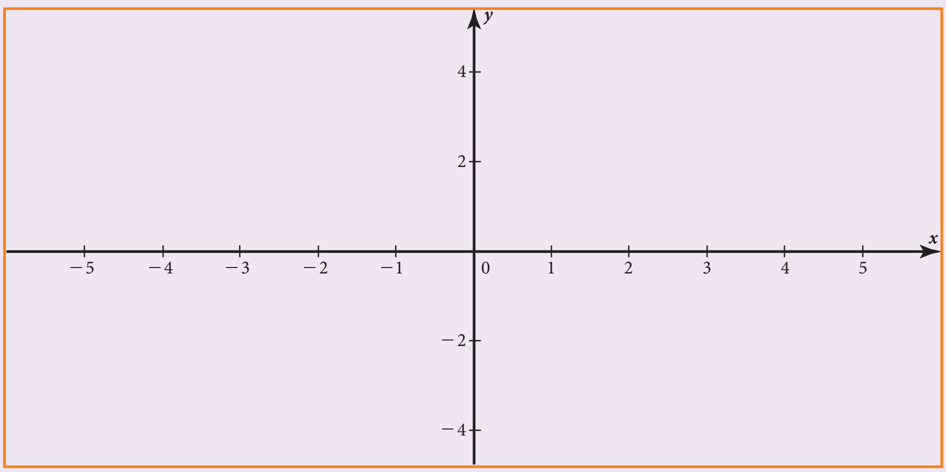
4. Escribe el orden en que vas a aplicar las reglas.

Primero: ____________________

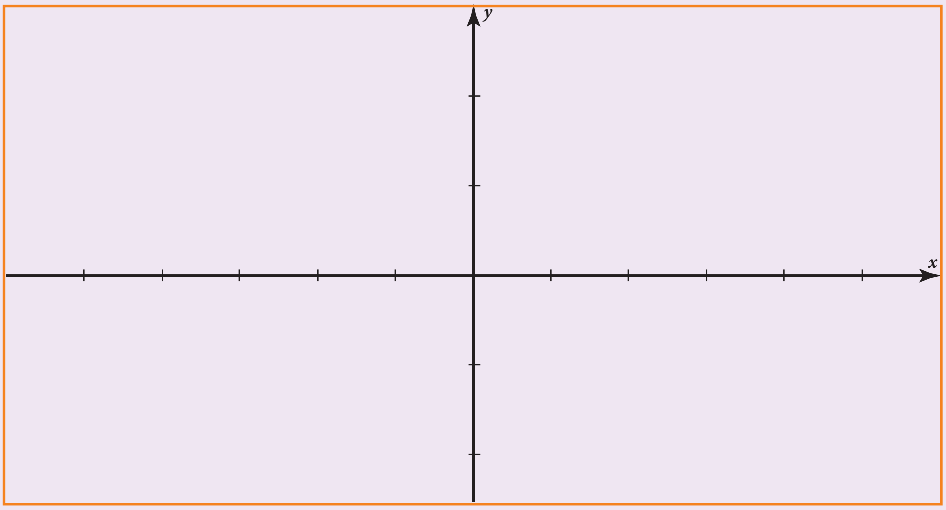
Segundo: ____________________

5. Dibuja la gráfica.

Primer efecto



Segundo efecto



d) $-3\,f(2x + 8)$

Nota

Observa que en esta expresión hay cuatro efectos por resolver.

Solución

1. Determina si es desplazamiento rígido, distorsión o reflejo. ______
2. Identifica qué regla debes utilizar. ______
3. Describe lo que indica la regla respecto al cambio de la gráfica. ______
4. Escribe el orden en que vas a aplicar las reglas:

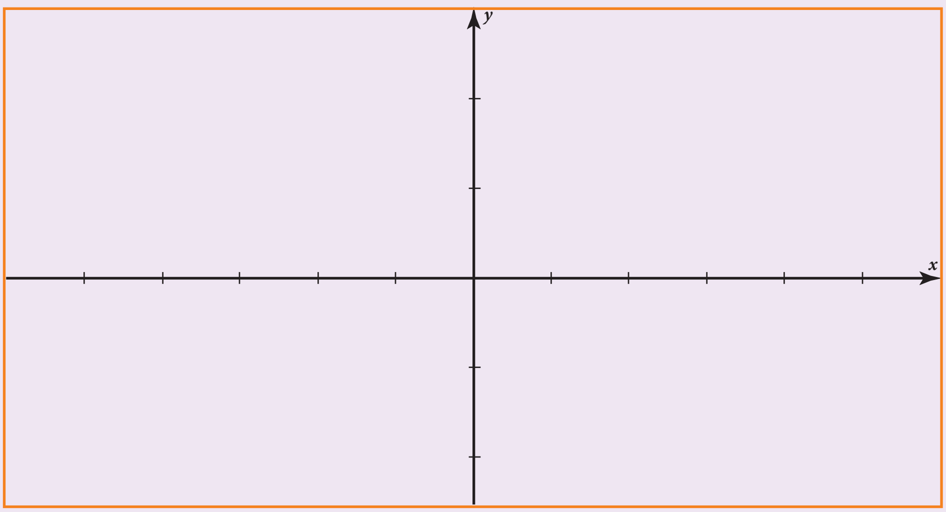
   Primero: ______

   Segundo: ______

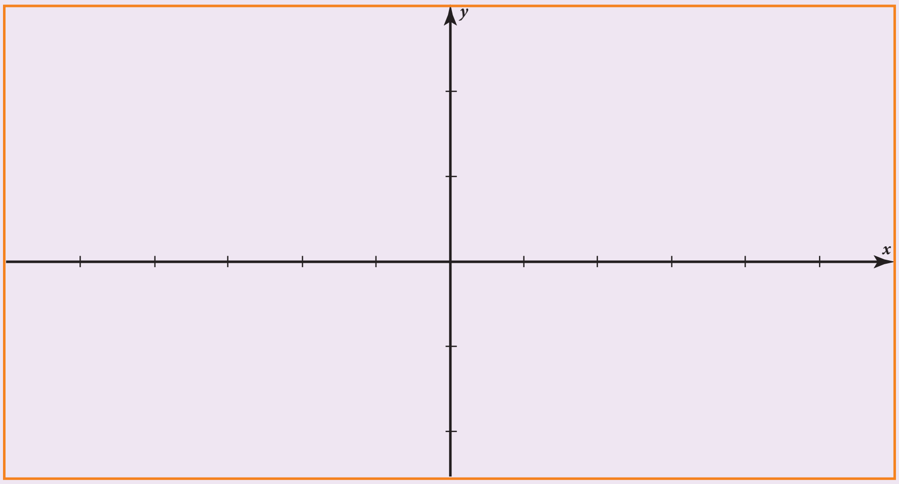
   Tercero: ______

   Cuarto: ______
5. Dibuja la gráfica.

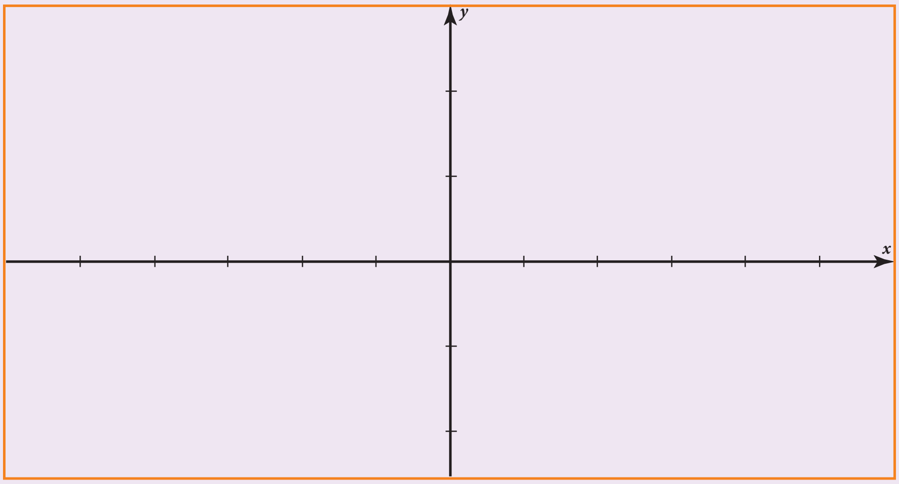
Primer efecto



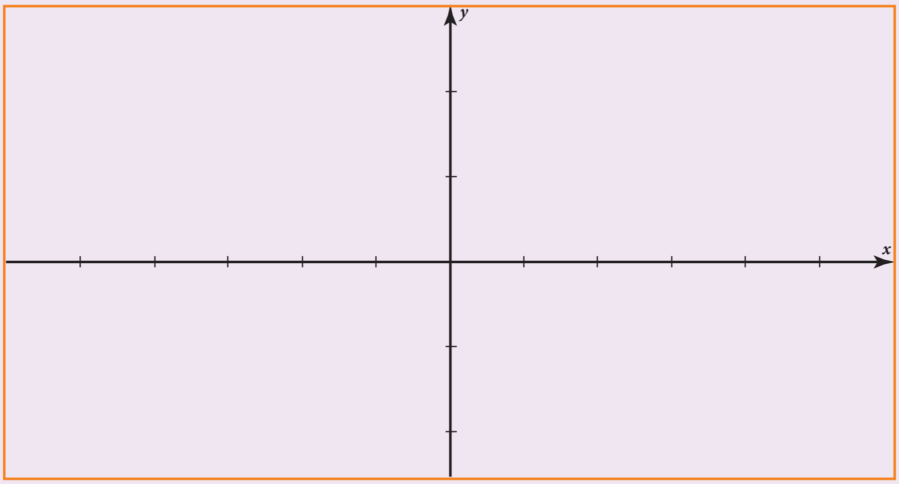
Segundo efecto



Tercer efecto



Cuarto efecto



Ejercicio 2 Sin dibujar la gráfica de la función $y = e^x$, escribe el efecto en la nueva función.

a) $y = \frac{1}{2}e^{x+3}$

¿En qué difiere esta función de la función original?

_____________________ y _____________________.

¿Qué efectos producen esas diferencias? Escríbelos en el orden en que deben efectuarse.

____________________ y ____________________.

b) $y = e^{-2x} + 1$

¿En qué difiere esta función de la función original?

____________________, ____________________ y ____.

¿Qué efectos producen esas diferencias? Escríbelos en el orden en que deben efectuarse.

____________________, ____________________ y ____.

c) $y = -2e^{x}$

¿En qué difiere esta función de la función original?

____________________ y ____________________.

¿Qué efectos producen esas diferencias? Escríbelo en el orden en que deben efectuarse.

____________________ y ____________________.

d) $y = 4e^{3x-18} - 2$

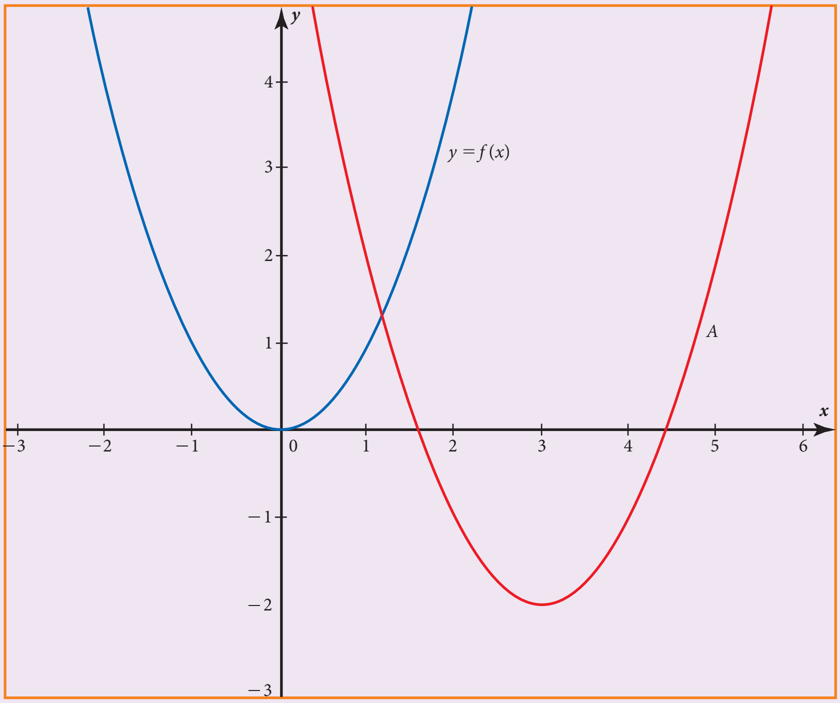
¿En qué es diferente esta función respecto a la función original?

____________________, ____________________, ____________________ y ____________________.

¿Qué efectos producen esas diferencias? Escríbelo en el orden en que deben efectuarse.

____________________, ____________________, ____________________ y ____________________.

Ejercicio 3 *a*) En la siguiente figura toma como base la gráfica de la función $y = f(x)$ y selecciona la opción que describa correctamente las transformaciones hechas sobre la gráfica de f para obtener la gráfica A, así como la ecuación para dicha gráfica.



A. Primero se desplaza dos unidades hacia abajo y luego tres unidades a la derecha, lo que en forma matemática se describe con la ecuación $y = [f(x) - 2] - 3$.

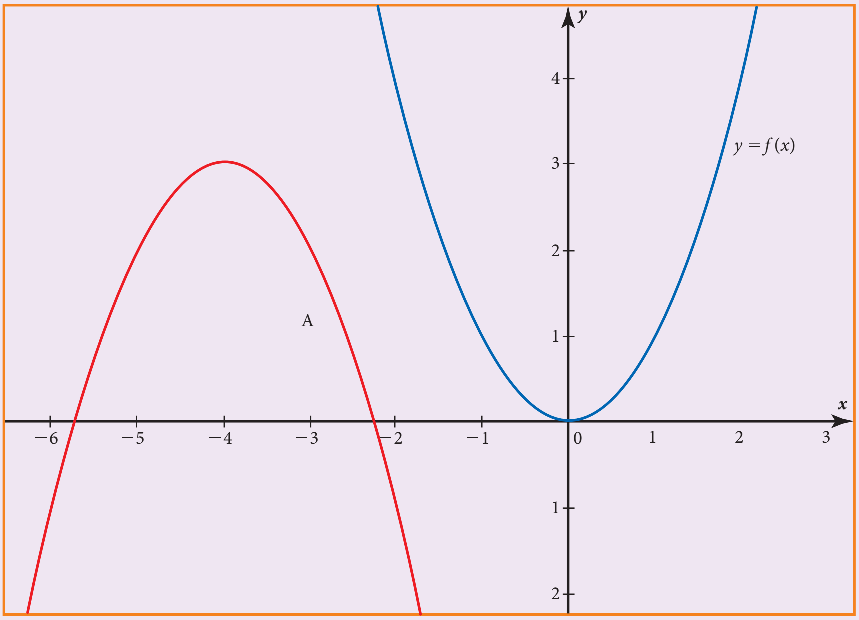
B. Primero se desplaza tres unidades a la derecha y luego dos unidades hacia abajo, lo que en forma matemática se describe con la ecuación $y = f(x + 3) - 2$.

C. Primero se desplaza dos unidades hacia abajo y luego tres unidades a la derecha, lo que en forma matemática se describe con la ecuación $y = f(x - 2) + 3$.

D. Primero se desplaza dos unidades hacia abajo y luego tres unidades a la derecha, lo que en forma matemática se describe con la ecuación $y = [f(x) - 2] + 3$.

E. Primero se desplaza tres unidades a la derecha y luego dos unidades hacia abajo, lo que en forma matemática se describe con la ecuación $y = f(x - 3) - 2$.

b) En la siguiente figura, toma como base la gráfica de la función $y = f(x)$ y selecciona la opción que describe correctamente las transformaciones hechas sobre la gráfica de f para obtener la gráfica A así como la ecuación para dicha gráfica.



A. Primero se refleja sobre el eje x, luego se desplaza tres unidades hacia arriba y, por último, se desplaza cuatro unidades hacia la izquierda, lo que en forma matemática se describe con la ecuación $y = f(-x + 3) + 4$.

B. Primero se desplaza tres unidades hacia arriba, luego se mueve cuatro unidades a la izquierda y, por último, se refleja sobre el eje x, lo que en forma matemática se describe con la ecuación $y = -[f(x) + 3] - 4$.

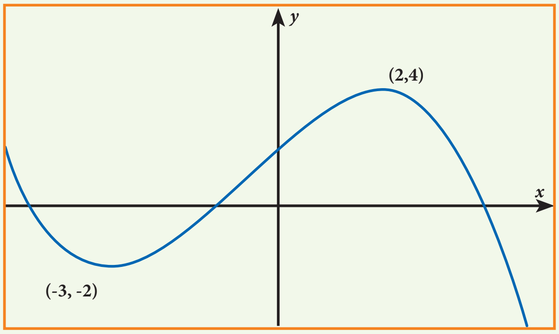
C. Primero se refleja sobre el eje x, luego se desplaza cuatro unidades hacia la izquierda y, por último, se desplaza tres unidades hacia arriba, lo que en forma matemática se describe con la ecuación $y = f(-x + 4) + 3$.

D. Primero se desplaza cuatro unidades a la izquierda, luego se refleja sobre el eje x y, por último, se desplaza hacia arriba tres unidades, lo que en forma matemática se describe con la ecuación $y = -f(x + 4) + 3$.

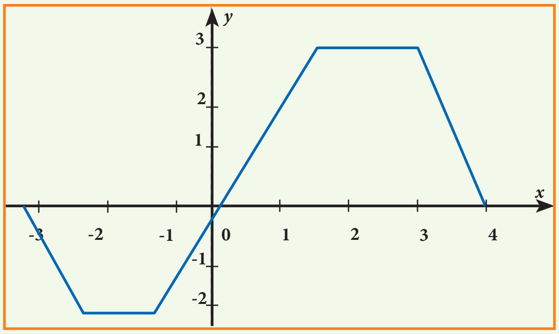
E. Primero se desplaza cuatro unidades a la izquierda, luego se mueve tres unidades hacia arriba y, por último, se refleja sobre el eje x; la ecuación es $y = -[f(x + 4) + 3]$.

Conjunto de ejercicios
Efectos gráficos

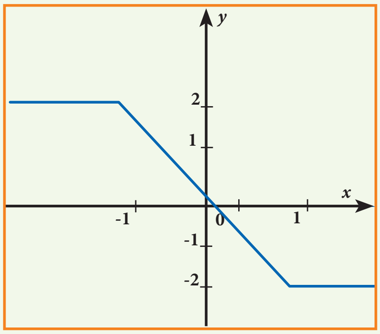
A partir de la gráfica de la función $y = f(x)$, obtén la gráfica de la nueva función, describiendo los efectos gráficos.

1. 

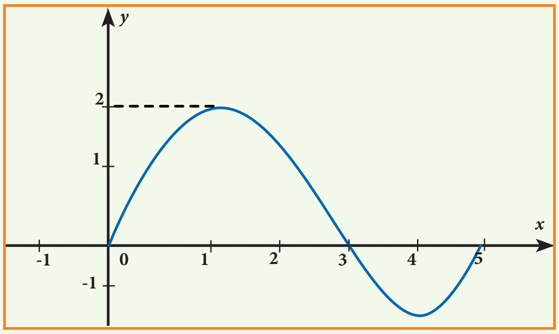
a) $f(x)+2$
b) $f(x+1)$
c) $2f(x)$
d) $f(-x)$

2. 

a) $f(x)-1$
b) $f(x-3)$
c) $\frac{1}{3}f(x)$
d) $f(-x)$

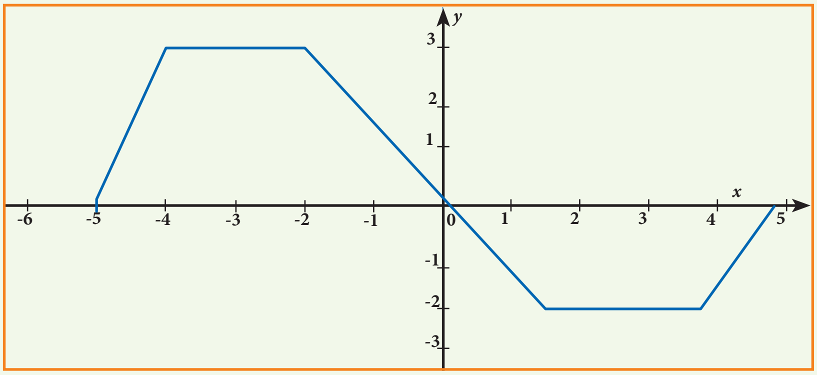
3. 

a) $-f(x)+1$
b) $f(x+3)-2$
c) $-f(4x)$
d) $\frac{1}{2}f(-x)$

4. 

a) $\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}x\right)$
b) $f(-x)-1$
c) $-f(x-3)$
d) $f(2(x-1))$

A partir de la gráfica de la función $y = f(x)$, obtén la gráfica de la nueva función, describiendo los efectos gráficos.



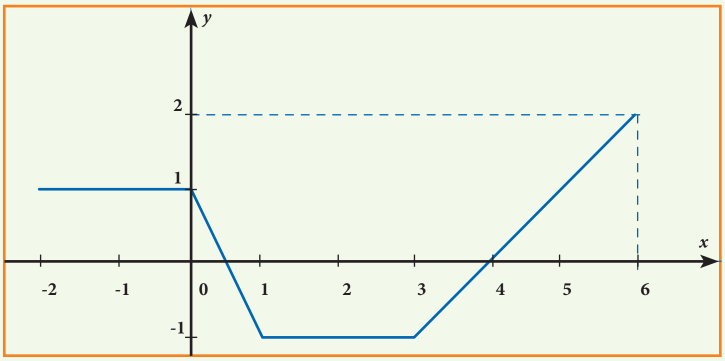
5. $-f(-x)-4$

6. $-\frac{1}{3}f(x+5)$

7. $f(-2x)+3$

8. $f\left(-\frac{1}{3}x+6\right)$

En los problemas 9 al 12 utiliza la siguiente figura para trazar la gráfica de la función indicada.



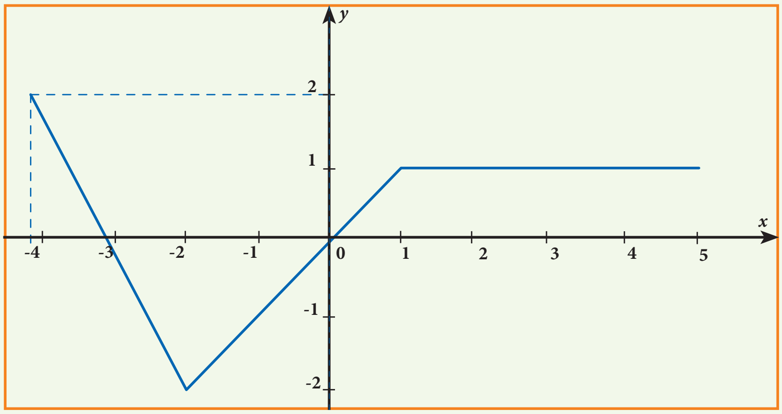
9. $f(-2x-4)+1$

10. $-3f(x-2)-2$

11. $-\frac{1}{2}f(-x+5)$

12. $1+2f\left(\frac{1}{3}x+9\right)$

En los problemas 13 al 16 utilice la siguiente figura para trazar la gráfica de la función indicada.



13. $5-1f(-x+4)$

14. $-1.5f(-2x)-2$

15. $3-\frac{1}{2}f\left(-\frac{1}{2}x-6\right)$

16. $-2f\left(3-\frac{1}{3}x\right)-4$

17. Describe los efectos gráficos en la nueva función si $y=\ln x$.

a) $y=\ln(-x-5)$

b) $y=\frac{1}{2}\ln(3x)$

c) $y=-\ln(x+8)-4$

18. Describe los efectos gráficos en la nueva función si $y=x^3$.

a) $y=\frac{1}{3}(x+5)^3$

b) $y=(3x)^3+2$

c) $y=-5(x-4)^3$

19. Describe los efectos gráficos en la nueva función si $y=(5.7)^x$.

a) $y=4(5.7)^{x/2}$

b) $y=-(5.7)^{x+4}$

c) $y=(5.7)^{-3x}+6$

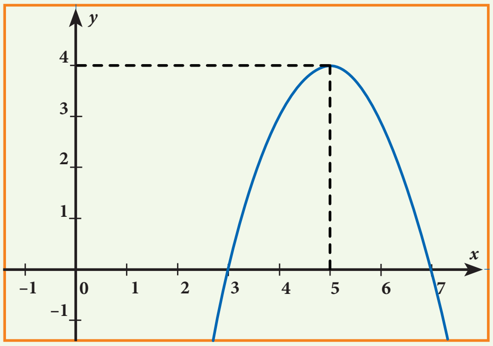
20. Describe los efectos gráficos en la nueva función si $y=(x^4+1)(x+2)$.

a) $y=3\left[\left(\frac{1}{4}x\right)^4+1\right]\left[\left(\frac{1}{4}x\right)+2\right]$

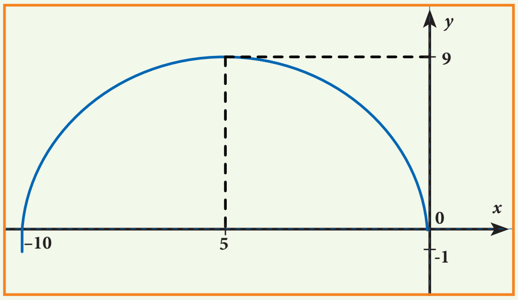
b) $y=-\left[(x+1)^4+1\right]\left[(x+1)+2\right]$

c) $y=\left[(-2x)^4+1\right]\left[(-2x)+2\right]+5$

21. Utilizando la gráfica de $y=x^2$, menciona los efectos geométricos necesarios para obtener la siguiente gráfica.

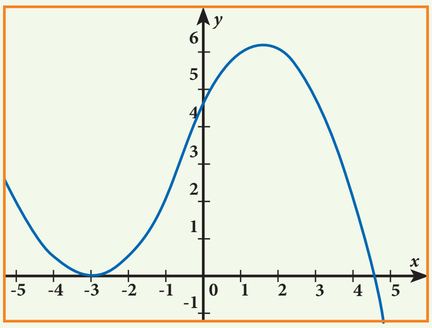


22. Utilizando la gráfica de $y=\sqrt{25-x^2}$, menciona los efectos geométricos necesarios para obtener la siguiente gráfica.



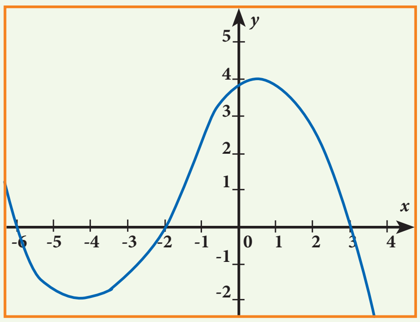
1)

a)



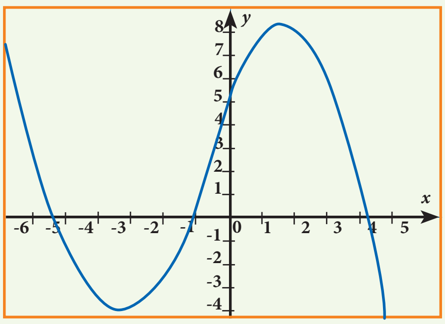
$f(x)+2$

b)



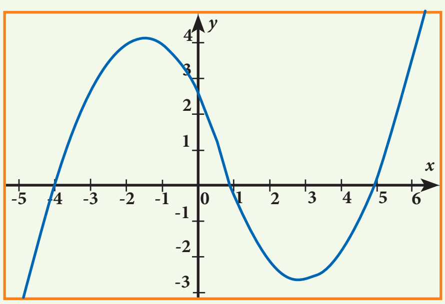
$f(x+1)$

c)



$2f(x)$

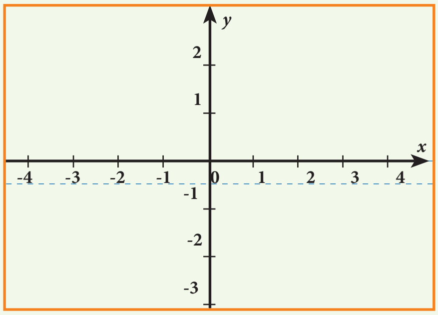
d)



$f(-x)$

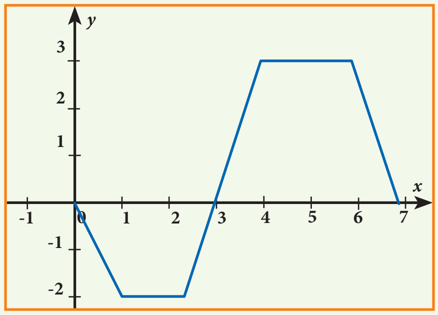
2)

a)



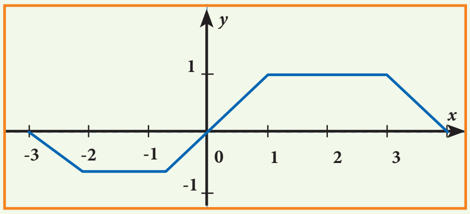
$f(x)-1$

b)



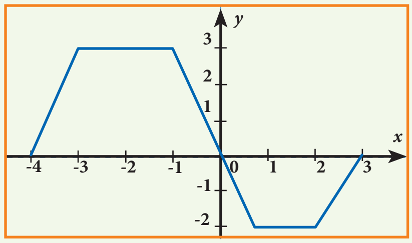
$f(x-3)$

c)



$\frac{1}{3}f(x)$

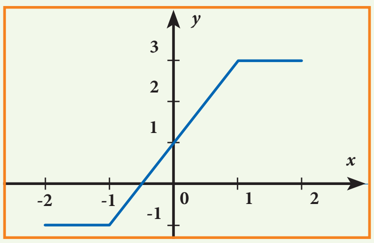
d)



$f(-x)$

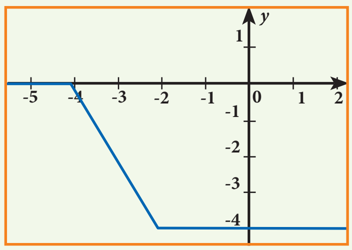
3)

a)



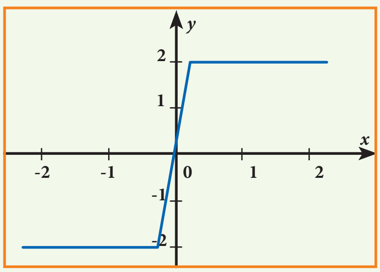
$-f(x)+1$

b)



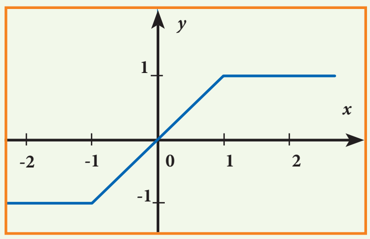
$f(x+3)-2$

c)



$-f(4x)$

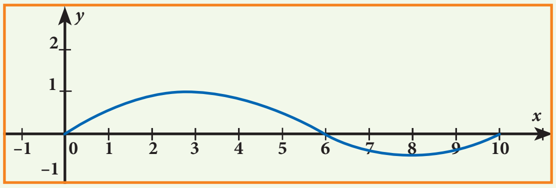
d)



$\frac{1}{2}f(-x)$

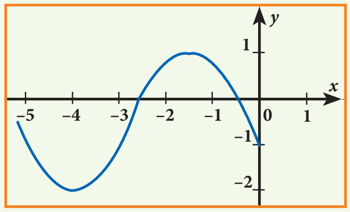
4)

a)



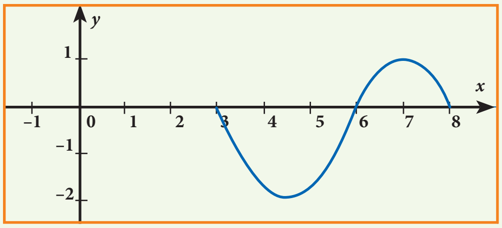
$$\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}x\right)$$

b)



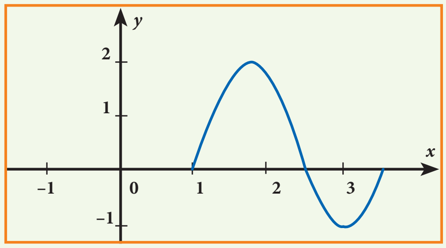
$$f(-x)-1$$

c)



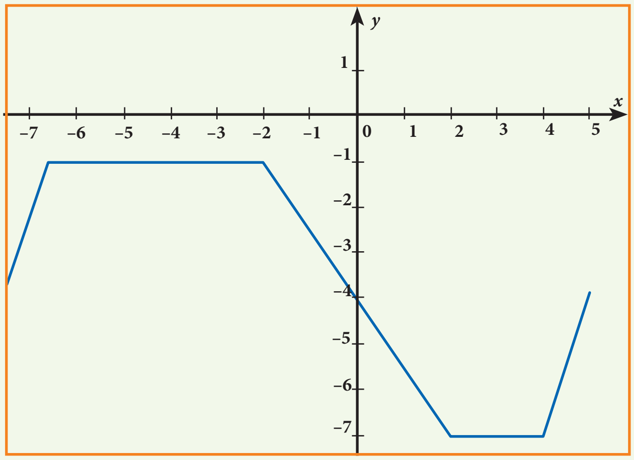
$$-f(x-3)$$

d)



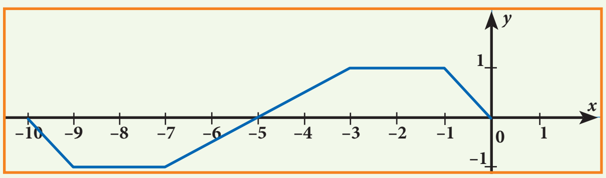
$$f(2(x-1))=f(2x-2)$$

5)



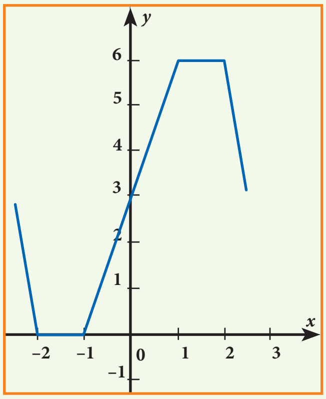
$$-f(-x)-4$$

6)



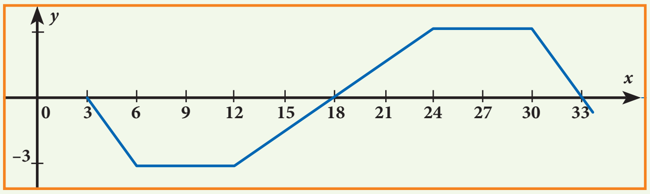
$$-\frac{1}{3}f(x+5)$$

7)



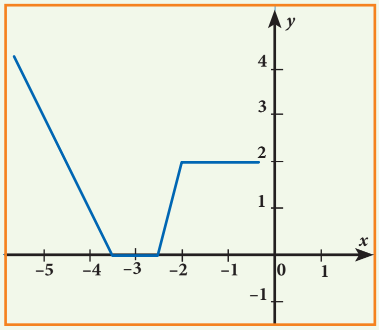
$f(-2x)+3$

8)



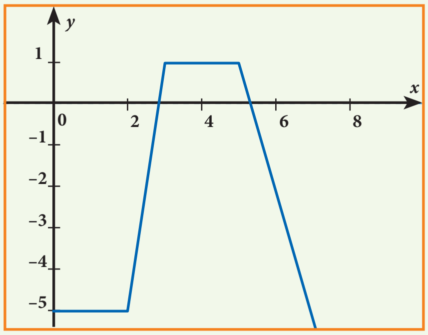
$f\left(-\frac{1}{3}x\right)+6$

9)

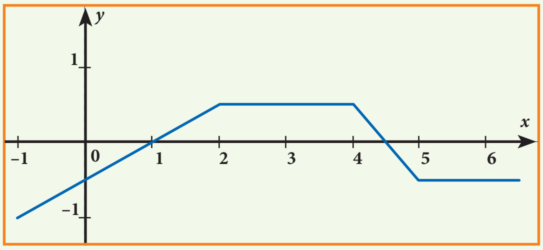


$f(-2x-4)+1$

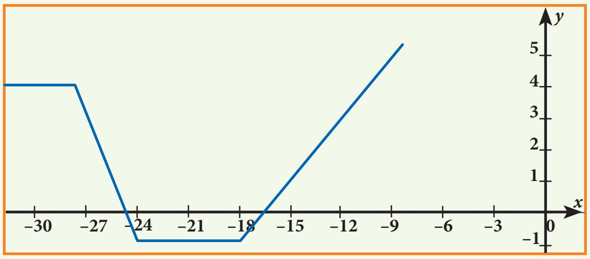
10)



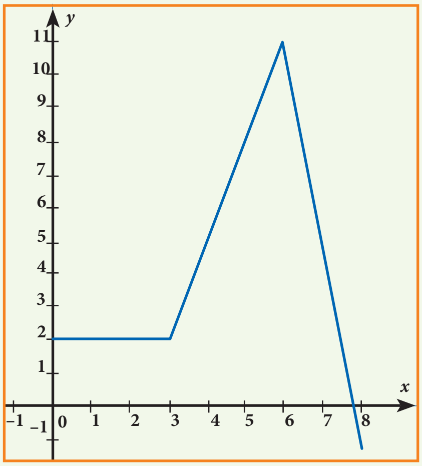
$-3f(x-2)-2$

11) 

$$-\frac{1}{2}f(-x+5)$$

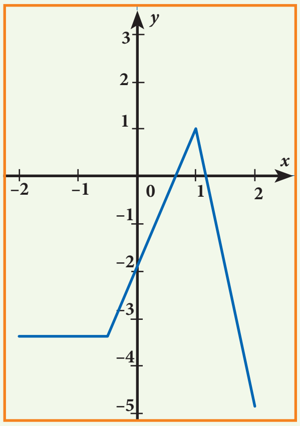
12) 

$$1+2f\left(\frac{1}{3}x+9\right)$$

13) 

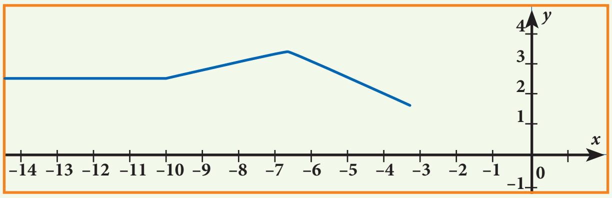
$$5-3f(-x+4)$$

14)



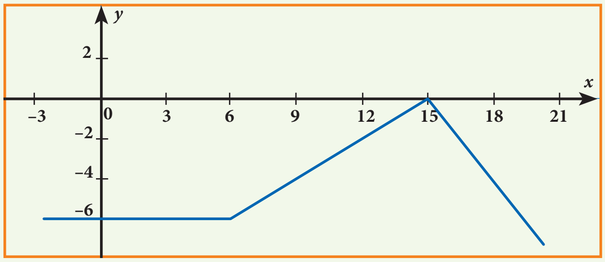
$$-1.5\,f(-2x)-2$$

15)



$$3-\frac{1}{2}f\left(-\frac{1}{2}x-6\right)$$

16)



$$-2f\left(3-\frac{1}{3}x\right)-4$$

17)

a) Primero se refleja sobre el eje y y después se desplaza 5 unidades a la izquierda.

b) Se encoge horizontalmente a la tercera parte y después se encoge verticalmente a la mitad.

c) Primero se desplaza 8 unidades a la izquierda, después se invierte verticalmente (refleja sobre el eje x) y, por último, baja 4 unidades.

18)

a) Se desplaza 5 unidades a la izquierda y después se encoge verticalmente $\frac{1}{3}$.

b) Se encoge horizontalmente la tercera parte y después sube 2 unidades.

c) Se desplaza 4 unidades a la derecha, luego estira verticalmente 5 veces y, por último, se invierte verticalmente (refleja sobre el eje x).

19)

a) Se estira horizontalmente al doble y luego se estira verticalmente 4 veces.

b) Se desplaza 4 unidades a la izquierda y luego se invierte verticalmente (refleja sobre el eje x).

c) Se invierte horizontalmente (se refleja sobre el eje y), luego se encoge horizontalmente la tercera parte, y por último sube 6 unidades.

20)

a) Se estira horizontalmente 4 veces y luego se estira verticalmente 3 veces.

b) Se desplaza una unidad a la izquierda y luego se invierte verticalmente (refleja sobre el eje x).

Derivada de otras funciones trigonométricas

Recuerda que la combinación de las funciones seno y coseno dan como resultado otras funciones trigonométricas, estas nuevas funciones también se pueden derivar, veamos cuál es la fórmula para derivarlas:

Funciones básicas

1. Función tangente: si $y = \tan x$, entonces $y' = \sec^2 x$
2. Función cotangente: si $y = \cot x$, entonces $y' = -\csc^2 x$
3. Función secante: si $y = \sec x$, entonces $y' = \sec x \cdot \tan x$
4. Función cosecante: si $y = \csc x$, entonces $y' = -\csc x \cdot \cot x$

En caso de que se trate de una *función compuesta* la diferencia en la derivada es que al final se multiplica por la derivada de la función argumento, las fórmulas son:

1. Función tangente: si $y = \tan (f(x)$, entonces $y' = \sec^2 (f(x)) \cdot f'(x)$
2. Función cotangente: si $y = \cot (f(x)$, entonces $y' = -\csc^2 (f(x)) \cdot f'(x)$
3. Función secante: si $y = \sec (f(x)$, entonces $y' = -\sec (f(x)) \cdot \tan (f(x)) \cdot f'(x)$
4. Función cosecante: si $y = \csc (f(x))$, entonces $y' = -\csc (f(x)) \cdot \cot (f(x)) \cdot f'(x)$

Ejemplo 1 Obtén la derivada de la función $y = \tan(\ln (2x + 1))$.

Solución Paso 1: identifica la fórmula que debes utilizar para derivar: Fórmula 1 compuesta.

Paso 2: identifica la función argumento $f(x)$ y derívala con la fórmula correspondiente.

En este caso la función argumento es: $f(x) = \ln (2x + 1)$ y su derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{2x+1} \cdot 2 = \frac{2}{2x+1}.$$

Paso 3: utiliza la fórmula que indicaste en el primer paso, para obtener la derivada de la función tangente:

$$y' = \sec^2 (\ln (2x+1)) \cdot \frac{2}{2x+1}.$$

Ejemplo 2 Obtén la derivada de la fución $y = \csc (\operatorname{sen} x^2)$.

Solución Paso 1: identifica la fórmula que debes utilizar para derivar: Fórmula 4 compuesta.

Paso 2: identifica la función argumento $f(x)$ y derívala con la fórmula correspondiente.

En este caso la función argumento es: $f(x) = \operatorname{sen} x^2$ y su derivada es

$$f'(x) = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cdot \cos x^2.$$

Paso 3: utiliza la fórmula que indicaste en el primer paso, para obtener la derivada de la función cosecante:

$$y' = -\csc (\operatorname{sen} x^2) \cot (\operatorname{sen} x^2) \cdot 2x \cos x^2,$$

que podemos escribir de manera ordenada como $y' = -2x \cos x^2 \cdot \csc (\operatorname{sen} x^2) \cdot \cot (\operatorname{sen} x^2)$.

¡A trabajar!

Obtén la derivada de las funciones:

1. $y = \cot(e^{-2x})$

Paso 1: ¿qué fórmula vas a utilizar? ____________________.

Paso 2: ¿cuál es la función argumento $f(x)$? ____________________

¿Y la derivada de la función argumento $f'(x)$?

Paso 3: dar la derivada de la función original.

$y' =$

Ejemplo 3 $y = \sec(\tan(\ln x))$

Solución Paso 1: ¿qué fórmula vas a utilizar?

Paso 2: ¿cuál es la función argumento $f(x)$? ____________________.

¿Y la derivada de la función argumento $f'(x)$?

Paso 3: da la derivada de la función original.

$y' =$

Conjunto de ejercicios Funciones trigonométricas

Obtén la derivada de las siguientes funciones.

1. $y = \tan^3\left(x^2 + 1\right)$
2. $y = \csc\left(x\right)\left(\ln x\right)$
3. $y = \dfrac{\csc\left(x\right)}{x}$
4. $y = \sqrt{(\cot x)}$
5. $y = \csc x\left(\ln x\right)$
6. $y = \sec(e^x)\tan(e^x)$
7. $y = \cot\left(\sqrt{x}\right)$
8. $y = x + \operatorname{sen}\left(x\right)$
9. $y = 8^{\sqrt{\quad (x)}}$
10. $y = e^{\csc(5^x)}$

Respuestas

1. $y' = 6x\tan^2\left(x^2+1\right)\sec\left(x^2+1\right)$
2. $y' = \dfrac{\sec\left(\ln x\right)\tan\left(\ln x\right)}{x}$
3. $y' = -\dfrac{\csc x\left(x\cot x - 1\right)}{x^2}$
4. $y' = -\dfrac{\csc^2 x}{2\sqrt{\cot x}}$
5. $y' = -\dfrac{\csc x}{x} - \left(\ln x\right)\left(\csc x\cot x\right)$
6. $y' = e^x\sec e^x\left(\sec^2 e^x + \tan^2 e^x\right)$
7. $y' = -\dfrac{\csc^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
8. $y' = 1 + \sec x\tan x$
9. $y' = \dfrac{8^{\sqrt{\tan x}}\left(\ln 8\right)\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$
10. $y' = -e^{\csc\left(5^x\right)}\left(5^x\ln 5\right)\csc 5^x\cot 5^x$

Derivada de funciones trigonométricas inversas

Recuerda que las funciones trigonométricas tienen inversa al restringirlas en su dominio, estas funciones también se pueden derivar; las fórmulas son las siguientes.

Funciones básicas

1. Función seno inverso: si $y = \text{sen}^{-1} x$, entonces $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. Función coseno inverso: si $y = \cos^{-1} x$, entonces $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. Función tangente inversa: si $y = \tan^{-1} x$, entonces $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
4. Función cotangente inversa: si $y = \cot^{-1} x$, entonces $y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
5. Función secante inversa: si $y = \sec^{-1} x$, entonces $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
6. Función cosecante inversa: si $y = \csc^{-1} x$, entonces $y' = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

En caso de que se trate de una *función compuesta*, la diferencia en la derivada es que al final se multiplica por la derivada de la función argumento, las fórmulas son las siguientes.

1. Función seno inverso: si $y = \text{sen}^{-1} (f(x))$, entonces $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \cdot f'(x)$
2. Función coseno inverso: si $y = \cos^{-1}(f(x))$, entonces $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(f(x))^2}} \cdot f'(x)$
3. Función tangente inversa: si $y = \tan^{-1} (f(x))$, entonces $y' = \dfrac{1}{1+(f(x))^2} \cdot f'(x)$
4. Función cotangente inversa: si $y = \cot^{-1} (f(x))$, entonces $y' = -\dfrac{1}{1+(f(x))^2} \cdot f'(x)$
5. Función secante inversa: si $y = \sec^{-1} (f(x))$, entonces $y' = \dfrac{1}{f(x)\sqrt{(f(x))^2-1}} \cdot f'(x)$
6. Función cosecante inversa: si $y = \csc^{-1} (f(x))$, entonces $y' = -\dfrac{1}{f(x)\sqrt{(f(x))^2-1}} \cdot f'(x)$

Ejemplos Obtén la derivada de las funciones:

1. $y = \tan^{-1} (x^2 + 1)$.

Solución Paso 1: identifica la fórmula que debes utilizar para derivar: Fórmula 3 compuesta.

Paso 2: identifica la función argumento $f(x)$ y derívala con la fórmula correspondiente.

En este caso la función argumento es: $f(x) = x^2 + 1$, y su derivada es $f'(x) = 2x$.

Paso 3: utiliza la fórmula que indicaste en el primer paso para obtener la derivada de la función tangente inversa:

$y' = \dfrac{1}{1+(x^2+1)^2} \cdot 2x$ desarrollando el binomio al cuadrado y simplificando el denominador la respuesta queda expresada como

$$y' = \frac{2x}{x^4+2x^2+2}.$$

2. $y = \text{sen}^{-1}(\ln(2x))$

Solución Paso 1: identifica la fórmula que debes utilizar para derivar: Fórmula 1 compuesta.

Paso 2: identifica la función argumento $f(x)$ y derívala con la fórmula correspondiente.

En este caso la función argumento es: $f(x) = \ln(2x)$ y su derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}.$$

Paso 3: utiliza la fórmula que indicaste en el paso 1 para obtener la derivada de la función seno inverso:

$y' \dfrac{1}{\sqrt{1+(\ln(2x))^2}} \cdot \dfrac{1}{x}$ que podemos escribir de forma simplificada como $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{1-(\ln(2x))^2}}$.

¡A trabajar!

Obtén la derivada de las funciones:

1. $y = \cos^{-1}(e^{-2x})$

Paso 1: ¿qué fórmula vas a utilizar? ________________________

Paso 2: ¿cuál es la función argumento $f(x)$? = ________________________

¿Y la derivada de la función argumento $f'(x)$? ________________________

Paso 3: da la derivada de la función original

$y' =$

2. $y = \sec^{-1}(\tan(x))$

Paso 1: ¿qué fórmula vas a utilizar? ________________________

Paso 2: ¿cuál es la función argumento $f(x)$? = ________________________

Y la derivada de la función argumento $f'(x)$ = ________________________

Paso 3: da la derivada de la función original

$y' =$

Nota

Las funciones trigonométricas inversas también pueden denotarse como

- $\text{sen}^{-1} x = \text{arc}(\text{sen } x)$
- $\cos^{-1} x = \text{arc}(\cos x)$
- $\tan^{-1} x = \text{arc}(\tan x)$
- $\cot^{-1} x = \text{arc}(\cot x)$
- $\sec^{-1} x = \text{arc}(\sec x)$
- $\csc^{-1} x = \text{arc}(\csc x)$

Conjunto de ejercicios
Función trigonométrica inversa

Obtén la derivada de las siguientes funciones.

1. $y = \tan^{-1}(e^x)$
2. $y = \cot(1 + x^2)$
3. $y = \sec(\ln(x))$
4. $y = 2^{\tan^{-1}(x)}$
5. $y = \csc(x^2)$
6. $y = x + \tan^{-1}(x)$
7. $y = \sqrt{\sec^{-1}(x)}$
8. $y = \dfrac{1 + \tan^{-1}(x)}{\cot^{-1}(x)}$
9. $y = \dfrac{\sec^{-1}(x)}{x}$
10. $y = \dfrac{x^2}{\csc^{-1}(x^2)}$

Respuestas

1. $y' = \dfrac{e^x}{1 + e^{2x}}$
2. $y' = -\dfrac{2x}{1 + (1 + x^2)^2}$
3. $y' = \dfrac{1}{x \ln x \sqrt{\ln^2 x - 1}}$
4. $y' = \dfrac{2^{\tan^{-1} x} \ln 2}{1 + x^2}$
5. $y' = \dfrac{-2}{x\sqrt{x^4 - 1}}$
6. $y' = \dfrac{2 + x^2}{1 + x^2}$
7. $y' = \dfrac{1}{2x\sqrt{(\sec^{-1} x)(x^2 - 1)}}$
8. $y' = \dfrac{\cot^{-1} x + 1 + \tan^{-1} x}{(1 + x^2)(\cot^{-1} x)^2}$
9. $y' = \dfrac{1 - (\sec^{-1} x)\sqrt{x^2 - 1}}{x^2\sqrt{x^2 - 1}}$
10. $y' = \dfrac{2x\left((\csc^{-1} x^2)\sqrt{x^4 - 1} + 1\right)}{\sqrt{x^4 - 1}\,(\csc^{-1} x^2)^2}$

Las tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas definen al profesor como un facilitador del proceso de aprendizaje y al estudiante como un participante activo; por otra parte es evidente la necesidad de formar ciudadanos reflexivos y bien informados capaces de afrontar los retos que plantea una sociedad compleja y en constante cambio, la competencia matemática hace referencia a esta capacidad de los estudiantes para analizar, reflexionar y comunicarse de manera eficaz al plantear, resolver e interpretar problemas matemáticos en diferentes situaciones o contextos.

Esta obra presenta una propuesta innovadora en el proceso de enseñanza y el aprendizaje del cálculo diferencial en funciones de una variable, necesarios para un primer curso de matemáticas universitarias en donde se promueve la competencia matemática y el proceso de matematización.

El enfoque que se maneja es un aprendizaje constructivista y significativo que ayuda tanto al profesor como al estudiante a desempeñar eficientemente sus nuevos roles en este proceso, la principal característica es la participación activa del estudiante durante toda la sesión de clase; enfatiza la construcción de los conceptos matemáticos y propone una serie de problemas que abordan situaciones de la vida real para resolver en clase, los cuales incluyen una secuencia didáctica basada en la técnica de la pregunta, que guían al estudiante en la resolución del problema. Este enfoque favorece habilidades y actitudes como la reflexión, el razonamiento y el desarrollo de habilidades del pensamiento.

En el libro se enfatiza la modelación matemática y la interpretación de resultados, logrando un aprendizaje significativo; asimismo, fomenta el desarrollo de habilidades para trabajar en equipo y las investigaciones con datos reales, la búsqueda de información, el análisis y la reflexión.

CENGAGE Learning®

Visite nuestro sitio en http://latinoamerica.cengage.com

ISBN-13: 978-6074818888-8
ISBN-10: 607481888-6

9 786074 818888