- Silverio Mera Luna
- Moisés Salas de los Santos
- Ignacio Elizalde Martínez
- Violeta Yasmín Mena Cervantes
- Román Ramírez López
- Rogelio Deheza Cruz

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

McGraw Hill Education

Cálculo diferencial e integral

Cálculo diferencial e integral

Silverio Mera Luna
Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Ingeniería
Química e Industrias Extractivas
(ESIQIE), Zacatenco

Moisés Salas de los Santos
Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Ingeniería
Química e Industrias Extractivas
(ESIQIE), Zacatenco

Violeta Yasmín Mena Cervantes
Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Ingeniería
Química e Industrias Extractivas
(ESIQIE), Zacatenco

Ignacio Elizalde Martínez
Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Ingeniería
Química e Industrias Extractivas
(ESIQIE), Zacatenco

Rogelio Deheza Cruz
Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Ingeniería
Química e Industrias Extractivas
(ESIQIE), Zacatenco

Román Ramírez López
Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Ingeniería
Química e Industrias Extractivas
(ESIQIE), Zacatenco

Revisión técnica

Carlos Antonio Becerril Gordillo
Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME), Zacatenco

Mc Graw Hill Education

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • SAO PAULO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Director general México: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor sponsor: Pablo Roig Vázquez
Coordinadora editorial: Marcela Rocha Martínez
Editora de desarrollo: Karen Estrada Arriaga
Supervisor de producción: Zeferino García García

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A,
Pisos 16 y 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN: 978-607-15-1077-8

0123456789 2356789014

Impreso en México *Printed in Mexico*

Contenido

Acerca de los autores

Silverio Mera Luna es ingeniero egresado de la Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas (ESIQIE) del Instituto Politécnico Nacional (IPN). Además, cuenta con una maestría en ciencias en la Escuela Superior de Física y Matemáticas (ESFM) de dicha institución.

Ha impartido clases de precálculo, cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales y métodos numéricos, entre otras, en la ESIQIE y en la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería en Biotecnología (UPIBI) del IPN.

Moisés Salas de los Santos participó en la Olimpiada de Matemáticas en la fase estatal y nacional en 1993. Es licenciado en matemáticas del área estadística por la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG). Cuenta con una maestría en el área de estadística por el Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas (IIMAS) de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). Actualmente cursa una maestría en Ingeniería Mecánica en el área energética de la Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME) del IPN.

Trabajó en el departamento de actuaría y finanzas públicas del Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Trabajadores del Estado (ISSSTE) como analista de modelos matemáticos financieros y actuariales y, además, participó en el desarrollo del modelo de tasas de mortalidad para la base de datos de la población de dicha institución aplicando un modelo de regresión logístico.

Ignacio Elizalde Martínez ha sido profesor de matemáticas, fenómenos de transporte, computación e ingeniería de reactores en la ESIQIE del IPN desde 2005. Su experiencia docente abarca desde nivel primaria hasta estudios superiores impartiendo química. Cuenta con una licenciatura en ingeniería química industrial por la ESIQIE, con una especialidad en tratamiento de crudo maya por el Instituto Mexicano del Petróleo (IMP), así como con una maestría y un doctorado en ingeniería por la Facultad de Química de la UNAM.

Además, realizó una estancia posdoctoral en el IMP donde actualmente desempeña labores de investigación sobre modelado de reactores químicos de hidrotratamiento de residuos y crudos pesados de petróleo.

Ha publicado 11 artículos de investigación sobre modelado de reactores químicos y catálisis, y ha participado en foros y simposios nacionales e internacionales. Asimismo, es miembro del Sistema Nacional de Investigadores (SNI) nivel I.

Violeta Yasmín Mena Cervantes ha sido profesora de la Academia de Matemáticas de la ESIQIE desde 2009, en donde ha impartido las asignaturas de precálculo, calculo diferencial e integral y ecuaciones diferenciales. Cuenta con una licenciatura en ingeniería química industrial por el IPN, así como con una maestría y un doctorado en ciencias por el IMP con especialización en química aplicada a la industria petrolera. En la actualidad es miembro del SNI nivel I.

Román Ramírez López es profesor investigador en la ESIQIE desde hace más de 19 años. Ha impartido las materias de precálculo, cálculo diferencial e integral, matemáticas superiores, ecuaciones diferenciales aplicadas, matemáticas I y II, ingeniería de reactores I y II, cinética química y catálisis, ingeniería de procesos I, diseño básico de procesos, balances de materia y energía y fundamentos de fenómenos de transporte. Cuenta con una licenciatura en ingeniería química industrial, así como con una maestría en ingeniería química por la ESIQIE. Además, obtuvo el grado de doctor en ciencias en ingeniería química por la Universidad Autónoma Metropolitana (UAM).

Es coordinador y expositor del seminario de actualización con opción a titulación "Diseño, simulación y control de reactores químicos" impartido en la ESIQIE.

Rogelio Deheza Cruz ha sido profesor de termodinámica básica y matemáticas en la ESIQIE del IPN durante los últimos 10 años. Tiene estudios de licenciatura en química farmacéutica industrial, además de diplomados en formación y actualización docente para un nuevo modelo educativo y en derechos humanos, ambos impartidos por el IPN.

Asimismo, publicó el artículo "Fibrosis and glycogen stores depletion induced by prolonged biliary obstruction in the rat are ameliorated by metadoxine" para la revista *Liver Int*. en 2003.

Prefacio

Para el estudio de cálculo diferencial e integral se han escrito múltiples libros de texto, algunos con formalidad absoluta y otros con base en la resolución de ejemplos paso a paso. En el presente texto pretendemos dar una base teórica-conceptual y aplicarla en la solución paso a paso de múltiples ejemplos comentados.

En el capítulo 1 se abordan los límites y su aplicación para comprender el comportamiento de las funciones en la cercanía de valores especiales como los que producen cero entre cero ($\frac{0}{0}$) y una constante diferente de cero entre cero ($\frac{k}{0}$), así como el tema de continuidad y el procedimiento a seguir para que una función sea continua, siempre y cuando esto sea posible; el capítulo termina con la definición de *derivada*, la cual no se podría detallar sin antes abordar el concepto de *límite*.

En el capítulo 2 buscamos que el lector de esta obra aprenda a derivar, para lo cual proponemos múltiples ejercicios resueltos paso a paso con ayuda al momento y, posteriormente, deseamos arraigar el concepto de la derivada con aplicaciones, las cuales no se limitan al área de ingeniería química sino que son de carácter más general deseando con ello que este texto sea útil a personas que se desempeñan en diversas áreas del conocimiento. Después desarrollamos un tema de gran relevancia: el análisis de función. Aquí consideramos que esta obra presenta una gran diferencia con otras relacionadas, ya que, si bien es cierto que un gran número de libros tratan este tema, lo hacen a lo largo de casi todo el libro. En el mejor de los casos, el lector se da cuenta que debe estudiar libros muy extensos casi en su totalidad para aprender a analizar funciones; en cambio, en la presente obra, el tema de análisis de función se condensa y se aborda en un solo apartado.

En el capítulo 3 abordamos el cálculo integral y sus aplicaciones. Iniciamos enfatizando el concepto de *antiderivada* y deseamos que se desarrolle cierta capacidad de abstracción enfocada a las integrales al hacer hincapié en el diferencial adecuado. En este punto presentamos no solo la utilización de fórmulas de integración sino la explicación de estas, lo cual difícilmente encontramos en la mayoría de los textos y las abordamos nuevamente a partir de múltiples ejemplos desarrollados; repetimos esta dinámica en las técnicas de integración. Finalizamos el último capítulo con las aplicaciones más comunes de la integral.

Complementos

Esta edición cuenta con varios complementos en línea. Para mayor información sobre este material de soporte, póngase en contacto con su representante local de McGraw-Hill.

Capítulo 1

Límites

Sumario

Introducción

El comportamiento de $f(x)$ alrededor de valores en los cuales no puede evaluarse sólo se podía observar en la gráfica de una función o en una tabla de valores; en estas, dicho comportamiento era diverso y únicamente pudo determinarse de forma analítica, hasta la llegada del concepto de *límite* que, aunque tiene otras aplicaciones o enfoques, se comenzará con la mencionada.

Suponga que desea dibujar la gráfica de la función dada por:

$$f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}, \quad x \neq 2$$

Para todos los valores distintos de $x = 2$ es posible emplear las técnicas comunes en la representación de curvas; no obstante, en $x = 2$ no está claro qué valor se logra. Para obtener una idea del comportamiento de la gráfica de f cerca de $x = 2$, es posible usar dos conjuntos de valores de x: uno que se aproxime a 2 por la izquierda y otro que se aproxime a 2 por la derecha.

En la siguiente tabla se muestra el comportamiento tabular de los valores de x próximos a 2:

Tabla 1.1

Valores de $f(x)$ cuando x está en la cercanía de 2.

x se aproxima 2 por la izquierda → ← x se aproxima 2 por la derecha

x	1.75	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.35
$f(x)$	10.562	11.410	11.940	11.994	?	12.006	12.060	12.61	14.222

$f(x)$ se aproxima a 12 → ← $f(x)$ se aproxima a 12

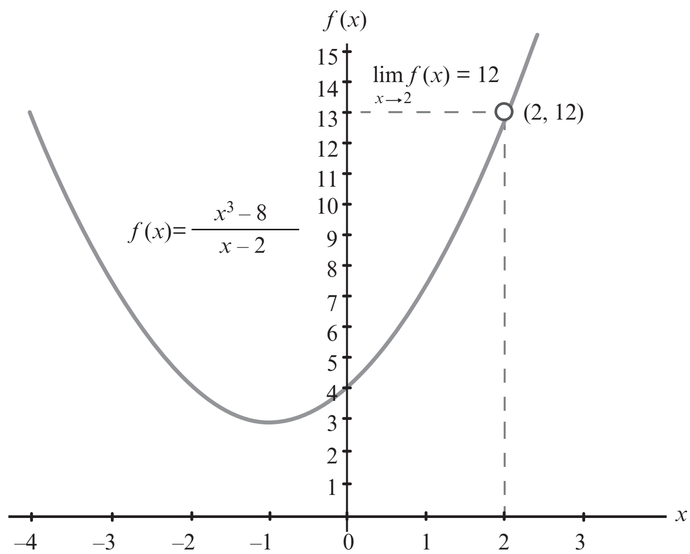


Figura 1.1. Indeterminación (en la gráfica se percibe a manera de hueco).

Con ayuda de la tabulación nos damos cuenta que si x se acerca a 2 por ambos lados, la variable dependiente se acerca a 12, por lo que el límite de la variable dependiente es igual a 12, cuando la variable independiente tiende a 2.

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 12$$

1.1. Definición informal de *límite*

La función f tiende hacia l cuando la variable independiente x tiende a c, $f(x)$ está tan cerca de l como se requiera, haciendo que x esté suficientemente cerca de c, pero aún siendo distinto de c.

1.1.1. Idea intuitiva de límite usando diferentes representaciones del límite de una función

Primero veamos algunos ejemplos numéricos para tener una idea más clara de la definición formal del límite:

Ejemplo 1.1. Estimación numérica de un límite

Evalúe la función $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$ en varios puntos cercanos a $x=0$ y use el resultado para estimar el límite:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$$

Solución: En la siguiente tabla se registran los valores de $f(x)$ para diversos valores de x cercanos a 0.

x se aproxima a 0 por la izquierda → ← x se aproxima a 0 por la derecha

x	-0.01	-0.001	-0.0001	0	0.0001	0.001	0.01
$f(x)$	3.9974	3.9997	3.9999	?	4.0000	4.0002	4.0024

$f(x)$ se aproxima a 4 → ← $f(x)$ se aproxima a 4

Tabla 1.2
Valores de $f(x)$, cuando x está en la cercanía de 0.

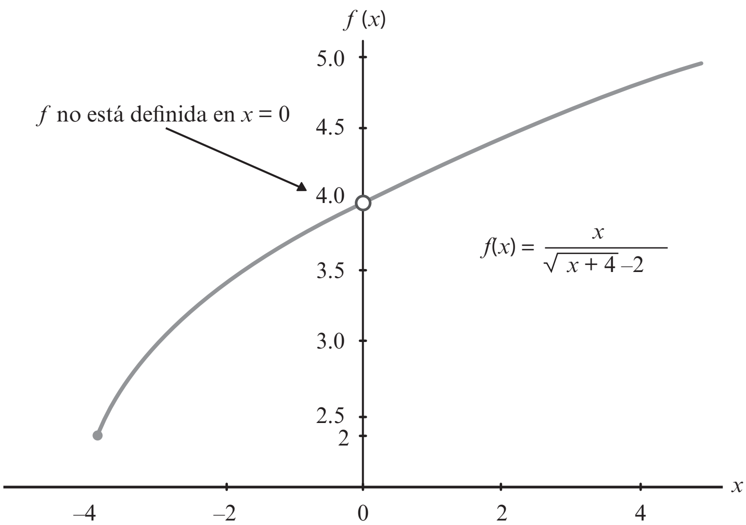


Figura 1.2. Indeterminación (en la gráfica se percibe a manera de hueco).

Ejercicios 1.1. Estimación numérica de un límite

En los ejercicios 1 a 6 verifique la tabla y utilice el resultado para estimar el límite (puede haber variaciones por los decimales).

1. $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{x^2-3x-4}=\frac{1}{5}=0.2$

x	3	3.5	3.9	3.99	3.999	4	4.001	4.01	4.1	4.5	5
$\frac{x-4}{x^2-3x-4}$	0.25	0.2222	0.2041	0.2004	0.2		0.2	0.1996	0.19608	0.18182	0.16667

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x}=\frac{1}{2\sqrt{6}}\approx 0.2041$

x	–1	–0.5	–0.1	–0.01	–0.001	0	0.001	0.01	0.1	0.5	1
$\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{x}$	0.2134	0.2086	0.205	0.2042	0.2041		0.2041	0.204	0.20328	0.20004	0.19626

3. $\lim_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{4-x}-3}{x+5}=-\dfrac{1}{6}\approx -0.166$

x	−6	−5.5	−5.1	−5.01	−5.001	−5	−4.999	−4.99	−4.9	−4.5	−4
$\dfrac{\sqrt{4-x}-3}{x+5}$	−0.162	−0.164	−0.166	−0.167	−0.167		−0.1667	−0.167	−0.1671	−0.169	−0.1716

4. $\lim_{x\to 3}\dfrac{\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{4}}{x-3}\approx -0.0625$

x	4	3.5	3.1	3.01	3.001	3	2.999	2.99	2.9	2.5	2
$\dfrac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}}{x-3}$	−0.05	−0.056	−0.061	−0.062	−0.062		−0.0625	−0.063	−0.0641	−0.0714	−0.0833

5. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x\sqrt{3}}{x}=\sqrt{3}\approx 1.732$

x	−1	−0.5	−0.1	−0.01	−0.001	0	0.001	0.01	0.1	0.5	1
$\dfrac{\operatorname{sen} x\sqrt{3}}{x}$	0.987026645	1.5235	1.7234	1.732	1.732		1.732	1.732	1.7234	1.52352	0.98703

6. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)-1}{x}=0$

x	−1	−0.5	−0.1	−0.01	−0.001	0	0.001	0.01	0.1	0.5	1
$\dfrac{\cos(x)-1}{x}$	0.459697694	0.2448	0.05	0.005	0.0005		−0.0005	−0.005	−0.05	−0.2448	−0.4597

En los ejercicios 7 a 12, verifique la tabla de valores para la función y utilice el resultado para estimar el límite. Esboce la gráfica a mano o use alguna herramienta computacional para confirmar el resultado.

7. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-6x+5}=-0.25$

x	0.0000	0.5000	0.9000	0.9900	0.9990	1.0	1.001	1.010	1.100	1.5	2.00
$\dfrac{x-1}{x^2-6x+5}$	−0.2000	−0.2222	−0.2439	−0.2494	−0.2499		−0.2501	−0.2506	−0.2564	−0.2857	−0.3333

8. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}=1.2$

x	2	2.5	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1	3.5	4
$\dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}$	1.25	1.2222	1.2041	1.2004	1.2		1.2	1.1996	1.196	1.182	1.167

9. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x^2+8x+15} = 0.5$

x	–4	–3.5	–3.1	–3.01	–3.001	–3	–2.999	–2.99	–2.9	–2.5	–2
$\dfrac{x+3}{x^2+8x+15}$	1	0.6667	0.5263	0.5025	0.5003		0.4998	0.4975	0.476	0.4	0.333

10. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x-3} = 27$

x	2	2.5	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1	3.5	4
$\dfrac{x^3-27}{x-3}$	19	22.75	26.11	26.91	26.991		27.009	27.09	27.91	31.75	37

11. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x^6-64} = \dfrac{1}{6} \approx 0.166$

x	1	1.5	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1	2.5	3
$\dfrac{x^4-16}{x^6-64}$	0.2381	0.2079	0.1751	0.1675	0.1668		0.1666	0.1658	0.158	0.128	0.098

12. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\tan 2x} = \dfrac{3}{2} = 1.5$

x	–1	–0.5	–0.1	–0.01	–0.001	0	0.001	0.01	0.1	0.5	1
$\dfrac{\tan 3x}{\tan 2x}$	0.0652	9.0544	1.526	1.5003	1.5		1.5	1.5003	1.526	9.054	0.065

Nota: Aunque también puede suceder que el límite no exista (lo cual se tratará a detalle más adelante), a continuación se mencionará solamente el comportamiento de $f(x)$ para que el límite no exista.

Comportamientos asociados con la ausencia de un límite

1. $f(x)$ se aproxima a números diferentes por la derecha de c que cuando lo hace por la izquierda.
2. $f(x)$ aumenta o disminuye sin límite a medida que x se aproxima a c.
3. $f(x)$ oscila entre dos valores fijos a medida que x se aproxima a c.

1.2. Límite de una función

La función f tiende hacia el límite L, a medida que x se aproxima a c, si para todo número $\varepsilon > 0$ es posible que $|f(x) - L| < \varepsilon$, lo cual permite que $|x - c|$ sea suficientemente pequeño y $x \neq c$.

A simple vista, la descripción anterior parece ser muy técnica, sin embargo es informal porque aún hay que conferir un significado más preciso de la frase siguiente:

"$f(x)$ se acerca arbitrariamente a L".

Y más aún:

"x se aproxima a c".

Si $-\varepsilon$ (minúscula de la letra griega épsilon) es la representación de un número positivo (muy pequeño), entonces la frase "$f(x)$ se acerca arbitrariamente a L" significa que $f(x)$ pertenece al intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Al usar la noción de valor absoluto, es posible escribir esto de la forma siguiente:

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

De la misma manera, la frase "x se aproxima a c" significa que existe un número positivo δ tal que x pertenece al intervalo $(c - \delta, c)$, o bien al intervalo $(c, c + \delta)$; por tanto, puede expresarse con precisión mediante la doble desigualdad:

$$0 < |x - c| < \delta$$

1.2.1. Definición formal de *límite*

A partir de la descripción informal de límite, podemos obtener la definición formal, por lo cual se dice que si $f(x)$ se acerca de manera arbitraria a un número L a medida que x se aproxima a c por ambos lados, el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c es L, y se escribe:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Nota: Agustin-Louis Cauchy fue el primero en asignar un significado matemático riguroso a ambas frases. Su definición $\varepsilon - \delta$ de límite es la que se usa en la actualidad.

Definición de límite

Si la función f tiende hacia el límite L en la cercanía de c significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Algunos autores utilizan "en la cercanía de a"; en el presente texto utilizaremos ambas $x \to c$ o $x \to a$.

Esta es una de las definiciones de mayor importancia y debe ser razonada y comprendida por el alumno, ya que le será de mucha utilidad, sobre todo si desea entender de manera más fácil la demostración de teoremas importantes en el cálculo diferencial, ecuaciones diferenciales, etcétera.

A continuación se practicará la definición anterior con algunos ejemplos:

Ejemplo 1.2. **Con épsilon, delta**

Determine δ para un ε dado.

Dado el $\lim_{x \to 3} (2x - 5) = 1$, encuentre δ tal que $|(2x - 5) - 1| < 0.01$, siempre que $0 < |x - 3| < \delta$.

Solución: En este problema se trabaja con un valor de $\varepsilon = 0.01$. Para encontrar un δ apropiado, se observa que:

$$|(2x - 5) - 1| = |2x - 6| = 2\,|x - 3|$$

Como la desigualdad $|(2x - 5) - 1| < 0.01$ es equivalente a $2|x - 3| < 0.01$, es posible escoger $\delta = \frac{1}{2}(0.01) = 0.005$ la cual funciona porque:

$$0 < |x - 3| < 0.005$$

Lo que implica que:

$$|(2x - 5) - 1| = 2|x - 3| < 2\,(0.005) = 0.01$$

Ejemplo 1.3. Aplicación de la definición $\varepsilon - \delta$ de límite

Utilice la definición $\varepsilon - \delta$ de límite para demostrar que:

$$\lim_{x\to 2}(6x-2)=10$$

Solución: Es necesario mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que $|(6x - 2) - 10| < \varepsilon$, siempre que $0 < |x - 2| < \delta$. Puesto que la elección de δ depende de ε, es necesario establecer una relación entre los valores absolutos $|(6x - 2) - 10|$ y $|x - 2|$.

$$|(6x - 2) - 10| = |6x - 12| = 6|x - 2|$$

De tal manera que para cada $\varepsilon > 0$ dado, es posible tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$. Esta opción funciona porque:

$$0<|x-2|<\delta=\frac{\varepsilon}{6}$$

Lo cual implica que:

$$|(6x-2)-10|=6|x-2|<6\left(\frac{\varepsilon}{6}\right)=\varepsilon$$

Es momento de practicar los conceptos vistos hasta el momento.

Ejercicios 1.2. Determinación de límites mediante $\varepsilon - \delta$

En los ejercicios 1 a 6 encuentre el límite L, luego utilice la definición $\varepsilon - \delta$ de límite para demostrar que el límite es L.

1. $\lim_{x\to 4}(x+5)=9$
2. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{3}x+10\right)=\frac{31}{3}$
3. $\lim_{x\to -1}(2x+8)=6$
4. $\lim_{x\to 6}\sqrt{x-2}=2$
5. $\lim_{x\to -4}\left(\frac{3}{4}x+7\right)=4$
6. $\lim_{x\to 4}|x+5|=9$

1.2.2. Leyes de los límites

En seguida se presentan los teoremas que se utilizarán al resolver límites analíticamente:

Teorema 1.1 Límites básicos

Si b y c son números reales y n un número entero positivo:

1. $\lim_{x\to c} b = b$
2. $\lim_{x\to c} x = c$
3. $\lim_{x\to c} x^n = c^n$

Ejemplo 1.4. Evaluación de límites básicos utilizando los teoremas anteriores

Observe el límite solicitado y aplique el teorema correspondiente:

a) $\lim_{x\to 2} 5 = 5$ *b*) $\lim_{x\to -4} x = -4$ *c*) $\lim_{x\to 2} x^2 = 2^2 = 4$

En el cuadro siguiente se describen las propiedades de los límites, las cuales se utilizarán en la resolución de ejemplos más elaborados que los anteriores.

Teorema 1.2 Propiedades de los límites

Si b es un número real, n un número entero positivo, f y g son funciones con los límites siguientes:

$\lim_{x\to c} f(x) = L$ y $\lim_{x\to c} g(x) = K$

1. **Múltiplo escalar:** $\lim_{x\to c}[bf(x)] = b \cdot \lim_{x\to c}[f(x)] = bL$
2. **Suma o diferencia:** $\lim_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \pm \lim_{x\to c} g(x) = L \pm K$
3. **Producto:** $\lim_{x\to c}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x) = L \cdot K$
4. **Cociente:** $\lim_{x\to c}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \dfrac{L}{K}$, siempre que $K \neq 0$
5. **Potencias:** $\lim_{x\to c}[f(x)]^n = L^n$

A continuación aplicaremos uno o varios teoremas en los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1.5. Límite de un polinomio

Aplique el teorema correspondiente para calcular el límite; parta de la operación más externa a la más interna.

$$\lim_{x\to 2}(5x^3 + 1)$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}(5x^3+1) &= \lim_{x\to 2} 5x^3 + \lim_{x\to 2} 1 && \text{Propiedad 2}\\
&= 5\left(\lim_{x\to 2} x^3\right) + \lim_{x\to 2} 1 && \text{Propiedad 1}\\
&= 5(2^3) + 1 && \text{Propiedad 5}\\
&= 41
\end{aligned}$$

En el ejemplo anterior se observa que el límite (cuando $x \to 2$) de la función polinomial $p(x) = 5x^3 + 1$ es simplemente el valor de p en $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2} p(x) = p(2) = 5\left(2^3\right) + 1 = 41$$

> **Nota:** Esta técnica de sustitución directa es válida para todas las funciones polinomiales, ya que en estas no hay denominadores que puedan anularse en el punto a considerar.

Es posible encontrar funciones racionales que cuentan con un polinomio tanto en el numerador como en el denominador, y que en esta primera instancia no generen una indeterminación (división entre cero), en este caso se utilizará el teorema siguiente:

Teorema 1.3 Límites de las funciones polinomiales y racionales

Si p es una función polinomial y a un número real, entonces:

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$$

Si r es una función racional dada por $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ y a un número real tal que $q(a) \neq 0$, entonces:

$$\lim_{x \to a} r(x) = r(a) = \frac{p(a)}{q(a)}$$

Ahora se aplica el teorema anterior en los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1.6. Límite de una función racional

Calcule el límite $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 + x + 2}{x + 2}$.

Solución: Puesto que el denominador no es 0 cuando $x = 1$, es posible aplicar el teorema 1.3 para obtener:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x + 2}{x + 2} = \frac{1^3 + 1 + 2}{1 + 2} = \frac{4}{3}$$

Las funciones polinomiales y racionales se consideran dos de los tres tipos básicos de funciones algebraicas; el tercero corresponde a las funciones con radicales, las cuales pueden abordarse con el teorema siguiente (es necesario tener cuidado con sus condiciones):

Teorema 1.4 Límites de una función radical

El siguiente teorema es válido si n es un entero positivo y para todo a si n es impar, o bien, para todo $a > 0$ si n es par:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

El siguiente teorema muestra cómo tratar el límite de una función compuesta.

Teorema 1.5 Límites de una función compuesta

Si f y g son funciones tales que $\lim_{x \to a} g(x) = L$ y $\lim_{x \to L} f(x) = f(L)$ entonces:

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(L)$$

Practique los teoremas anteriores con los ejercicios siguientes:

Ejercicios 1.3. Límites de polinomios y radicales

Calcule los límites siguientes:

1. $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$

2. $\lim_{x\to -2} x^3 = -8$

3. $\lim_{x\to -2} \left(2x^2 + 8x\right) = -8$

4. $\lim_{x\to 0} (2x - 5) = -5$

5. $\lim_{x\to -3} \left(x^2 - 3x - 5\right) = 13$

6. $\lim_{x\to 2} \left(2x^3 + 3x - 5\right) = 17$

7. $\lim_{x\to 3} (x-3)^2 = 0$

8. $\lim_{x\to 2} \left(-x^2 - 7\right) = -11$

9. $\lim_{x\to 5} \sqrt{x-2} = \sqrt{3}$

10. $\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{x+6} = 2$

11. $\lim_{x\to 3} \dfrac{4x}{x^2+6} = \dfrac{4}{5}$

12. $\lim_{x\to 3} \dfrac{2x-5}{x^2+10} = \dfrac{1}{19}$

Los siguientes ejercicios son relevantes porque son más conceptuales y, por lo tanto, requieren mayor grado de abstracción:

13. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que

$\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ y $\lim_{x\to 2} g(x) = -3$

a) ¿Podemos determinar $f(2)$ y $g(2)$?

b) Determine los siguientes límites:

$\lim_{x\to 2} (fg)(x) = -15$

$\lim_{x\to 2} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = -\dfrac{5}{3}$

$\lim_{x\to 2} (f+g)(x) = 2$

14. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones tales que:

$\lim_{x\to -2} f(x) = 3$

$\lim_{x\to -2} g(x) = 0$

Calcule el límite de:

$$\lim_{x\to -2} \frac{(2f + g^2)}{(3g + 4f^2g + 1)} = \frac{6}{1} = 6$$

De las funciones que se presentan en cada caso, determine los límites indicados:

15. $f(x) = 5 - x,\ g(x) = x^2 - 1$

a) $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$

b) $\lim_{x\to -2} g(x) = 3$

16. $f(x) = x - 3,\ g(x) = 2x^3$

a) $\lim_{x\to 1} f(x) = -2$

b) $\lim_{x\to 1} f(g(x)) = -1$

17. $f(x) = 2 - x^2,\ g(x) = \sqrt{x+3}$

a) $\lim_{x\to 3} g(x) = \sqrt{6}$

b) $\lim_{x\to 1} g(g(x)) = \sqrt{5}$

18. $f(x) = 2x^2 + 4x - 2,\ g(x) = \sqrt[3]{x+4}$

a) $\lim_{x\to -2} g(x) = \sqrt[3]{2}$

b) $\lim_{x\to -3} g(f(x)) = 2$

En los ejercicios 19 y 20 utilice la información dada para evaluar los límites.

19. Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = -2 \text{ y } \lim_{x\to a} g(x) = 3$$

Verifique

a) $\lim_{x\to a}[3g(x)] = 9$

b) $\lim_{x\to a}[f(x) - 3g(x)] = -11$

c) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = -6$

d) $\lim_{x\to a}\left[\frac{6f(x)}{g(x)}\right] = -4$

20. Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = 7$$

Verifique

a) $\lim_{x\to a} k\sqrt[3]{f(x)} = k(7)^{1/3}$

b) $\lim_{x\to a}\frac{2f(x)}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$

c) $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)} = \sqrt{7}$

1.2.3. Determinación algebraica del límite

El teorema 1.3 tenía la condición de que $q(a) \neq 0$; ahora analizaremos cuando $q(a) = 0$ y $p(a) = 0$; es decir, en el cálculo de límites se presentan algunas situaciones especiales y una de ellas es $\frac{0}{0}$. En las funciones algebraicas racionales es posible simplificar mediante la racionalización y/o la factorización para llegar a una función *equivalente* a la original, salvo en un punto, pero en las funciones *equivalentes* (a las que lleguemos) sí podemos calcular el límite requerido.

El siguiente teorema es fundamental para calcular el límite en funciones algebraicas que presentan la indeterminación $\frac{0}{0}$.

Teorema 1.6 Funciones que coinciden en todo, salvo en un punto

Sea a un número real y $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq a$ en un intervalo abierto que contiene a a. Si existe el límite de $g(x)$ cuando x se aproxima a a, entonces también existe el límite de $f(x)$ y

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

El siguiente ejemplo muestra la técnica de cancelación (simplificación) de factores, tanto en el numerador como en el denominador, en funciones racionales y alrededor de valores que ocasionan $\frac{0}{0}$.

Ejemplo 1.7. Límites racionales con indeterminación

Determine el límite de la función siguiente cuando x tiende a 2: $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$

Lo anterior quedaría planteado como

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to 2}\frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

Si se sustituye según el teorema 1.3, el primer ejemplo de este capítulo, presenta indeterminación:

$$\frac{0}{0}$$

Solución:

Si $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$ entonces $\lim_{x\to 2}\frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x\to 2} f(x)$.

Si se factorizan y se simplifican términos, f puede reescribirse de la manera siguiente:

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}} = \overbrace{x^2+2x+4}^{\substack{\text{Función}\\ \text{equivalente}\\ g(x)=f(x)\\ \text{Si } x\neq 2}} = g(x)$$

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} x^2+2x+4 = 12$$

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 12$$

Empleando el teorema 1.6:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} g(x) = 12$$

Aquí es posible observar que para todos los valores de x distintos de $x = 2$, las funciones f y g coinciden (según se muestra en las figuras 1.3 y 1.4). Puesto que el límite $\lim_{x\to 2} g(x)$ existe, es posible aplicar el teorema 1.6 y concluir que f y g tienen el mismo límite si $x \to 2$.

$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)}$	Factorización.
$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}}$	Cancelación de factores idénticos o factores comunes.
$= \lim_{x\to 2} x^2+2x+4$	Aplicación de teorema anterior.
$= 2^2+4+4$	Sustitución directa.
$= 12$	Simplificación.

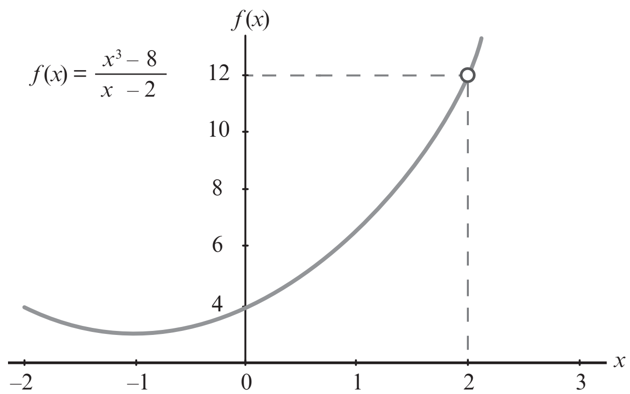


Figura 1.3. Gráfica con una indeterminación de hueco en $x = 2$.

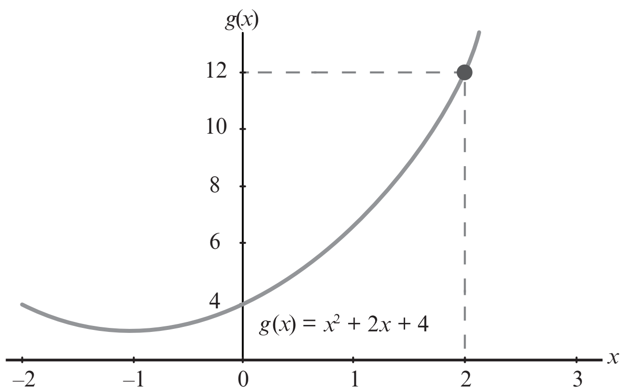


Figura 1.4. Gráfica sin hueco en $x = 2$.

Estrategias para el cálculo de límites

1. Aprender a reconocer cuáles son los límites que pueden evaluarse por medio de la sustitución directa.
2. Si el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a no puede evaluarse por sustitución directa, tratar de encontrar una función g que coincida con f para todo x distinto de $x = a$ (seleccionar una g tal que el límite de $g(x)$ pueda evaluarse por medio de la sustitución directa).
3. Aplicar el teorema 1.6 para concluir de manera analítica:
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$$
4. Utilizar un gráfico o una tabla para respaldar la conclusión.

Técnica de cancelación y racionalización

En el siguiente par de ejemplos se presentan dos de las técnicas más usuales para encontrar la función equivalente $g(x)$, la cual permite calcular límites.

Ejemplo 1.8. Técnica de cancelación (simplificación)

Encuentre el límite $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x-3}$.

Solución: Aunque es una función racional, *no es posible* aplicar el teorema 1.3 (como en los primeros ejemplos), debido a que el límite del denominador es 0.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x-3} \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+x-12\right)=0 \\ \text{La sustitución directa falla en este caso.} \\ \lim\limits_{x\to 3}(x-3)=0 \end{cases}$$

Aquí, el límite del numerador y del denominador es 0 en ambos casos, lo cual significa que tanto el numerador como el denominador tienen como factor común $(x-3)$. Por tanto, para todo $x\neq 3$ se cancela este factor, por ello es posible obtener el límite de la manera siguiente:

$$f(x)=\frac{x^2+x-12}{x-3}=\frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)}=x+4=g(x),\quad x\neq 3$$

Si se emplea el teorema 1.6 y luego el teorema 1.3, es posible calcular el límite de la forma siguiente:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+4)=7$$

Este resultado se observa con mayor claridad en la figura siguiente; observe que la función f coincide con la de la función $g(x)=x+4$, sólo que la gráfica de la función f tiene un hueco en el punto $(3, 7)$, y la gráfica de $g(x)$ no presenta dicho hueco:

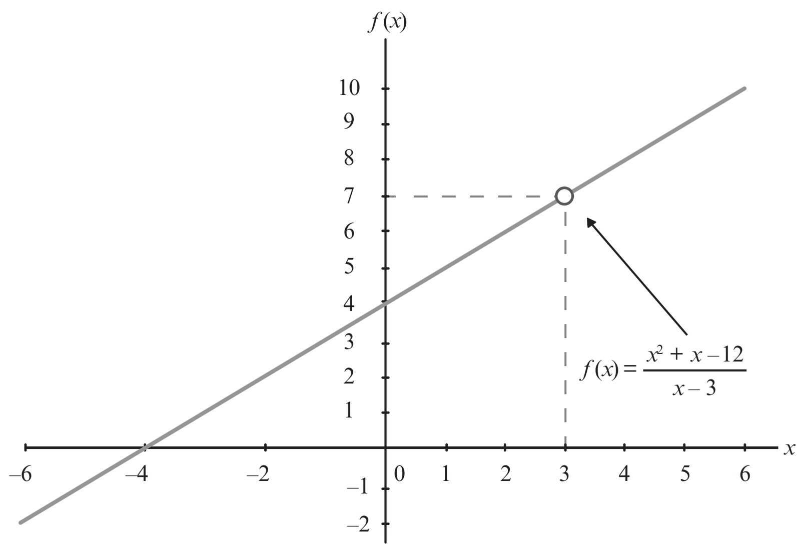


Figura 1.5. Gráfica con una indeterminación de hueco en $x = 3$.

En el siguiente ejemplo se muestra la técnica de racionalización en límites algebraicos.

Ejemplo 1.9. Racionalización

Encuentre el límite de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$

Solución: Al utilizar la sustitución directa observamos lo siguiente.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} \quad \begin{array}{l} \nearrow \ \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x+9}-3=0 \\ \quad \text{La sustitución directa falla en este caso.} \\ \searrow \ \lim\limits_{x\to 0} x=0 \end{array}$$

En este caso, es posible reescribir la fracción racional de esta forma:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x} &= \left(\frac{\sqrt{x+9}-3}{x}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x+9}+3}{\sqrt{x+9}+3}\right) \\ &= \frac{x+9-9}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)} \\ &= \frac{x}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+9}+3} \quad x\neq 0 \end{aligned}$$

Empleando el teorema anterior (1.6), es posible calcular el límite de la manera siguiente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+9}+3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$$

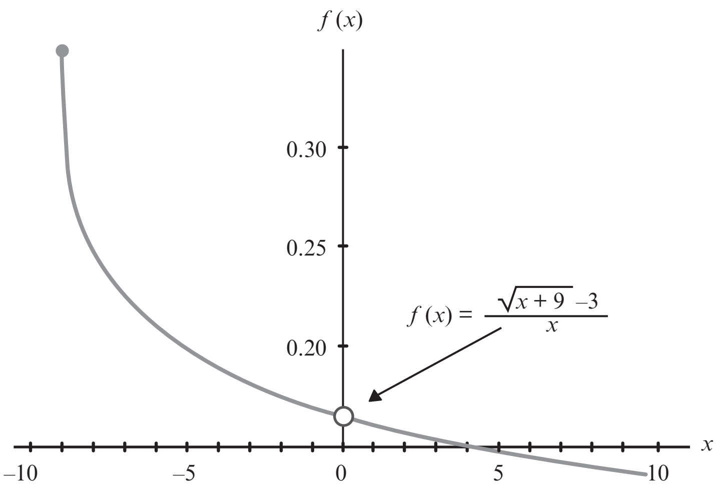


Figura 1.6. Gráfica con indeterminación de hueco en $x=0$.

Es momento de practicar las técnicas de cancelación (simplificación de factores) y racionalización a través de los siguientes ejercicios:

Ejercicios 1.4. Límites con indeterminación

Factorice y simplifique o bien racionalice, según se requiera, para verificar los siguientes límites.

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=-6$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}=\dfrac{5}{4}$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+5x+4}=\dfrac{-2}{3}$

4. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x^3-8}=\dfrac{8}{3}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+4x-5}=\dfrac{-2}{3}$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+4x-8}{x^3-8}=\dfrac{2}{3}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x^2+2x}{x^4+x^2-6x+4}=\dfrac{3}{7}$

8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-6x^2+14x-15}{x^5-27x^2}=\dfrac{5}{243}$

9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^4+3(x-2)^2+x^2-4}{x^3-8}=\dfrac{1}{3}$

10. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+3x^4-x^3-11x^2-12x-4}{x^5+3x^4+x^3-5x^2-6x-2}=3$

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[6]{x}-1}{x-1}=\dfrac{1}{6}$

12. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^{14}+x^2-2}{x^{12}+4x^8+x^2-6}=\dfrac{8}{23}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=\dfrac{1}{6}$

14. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}}{x-3}=\dfrac{1}{2}$

15. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{14+x}-\sqrt{18-x}}{\sqrt{2+x}-2}$

16. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+9}-\sqrt{2x^2-10x-3}}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{4x^2-2}}=0$

17. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\dfrac{1}{3},\quad \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=3$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+64}-4}{x}=\dfrac{1}{48}$

19. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}=\dfrac{4}{3}$

20. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{17+5x}-\sqrt[3]{23+2x}}{x^4+2x-20}=\dfrac{1}{306}$

21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+5x-5}-\sqrt[3]{4x^2+3x-6}}{\sqrt{x^2+10x+5}-\sqrt{x^2+18x-3}}=\dfrac{4}{3}$

22. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x+25}-\sqrt[4]{82-x}}{\sqrt{10-x}-3}=\dfrac{-1}{2}$

Con base en los últimos ejercicios, calcule los siguientes límites e indique cuál procedimiento utilizó para llegar al resultado:

23. *a*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[5]{x}-1}{x-1}=\dfrac{1}{5}$ *b*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[7]{x}-1}{x-1}=\dfrac{1}{7}$

24. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=-\dfrac{1}{56}$

25. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right)=\dfrac{3}{2}$

26. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}=-\dfrac{1}{3}$

27. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+7}-\sqrt{2x^2+10x-3}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x^2-1}}=\dfrac{11}{12}\sqrt{2}$

28. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{13+x}-\sqrt{10+2x}}{\sqrt{19+2x}-5}=-\dfrac{5}{8}$

1.2.4. Límites trigonométricos

Dentro de las funciones no algebraicas, las trigonométricas ocupan un lugar muy importante entre la gran diversidad de aplicaciones que existen, por lo cual no pueden faltar y se presentan a continuación:

Teorema 1.7 Propiedades de los límites trigonométricos

Si c es un número real en el dominio de la función trigonométrica indicada, entonces se cumplen las propiedades siguientes:

1. $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{sen} x=\operatorname{sen} a$

2. $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$

3. $\lim_{x\to a} \tan x = \tan a$

4. $\lim_{x\to a} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} a$

5. $\lim_{x\to a} \sec x = \sec a$

6. $\lim_{x\to a} \csc x = \csc a$

Una herramienta de gran utilidad al calcular límites trigonométricos es conocer algunas propiedades o características importantes; dos de ellas se mencionan a continuación:

Dos límites trigonométricos especiales

Los siguientes dos límites trigonométricos se destacan debido a que muchos de los problemas se reducen a éstos:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

En los ejemplos siguientes se practica con límites trigonométricos y se aplican los teoremas mencionados:

Ejemplo 1.10. Límites trigonométricos

Calcule el límite siguiente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)}$$

Solución: Si se sustituye de forma directa caemos en la indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.

Para evitar lo anterior:

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)}$ Recíproco de la expresión de la que queremos calcular el límite.

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}$ Calculamos el límite del numerador y el límite del denominador.

$\frac{\lim_{x\to 0} 1}{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}$ El límite del denominador es el límite visto en el cuadro anterior.

$\frac{1}{1} = 1$

Ejemplo 1.11. Límites trigonométricos

Calcule el límite siguiente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x)}{x}$$

Solución: Si sustituimos de forma directa, obtenemos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.

Primero hagamos que $y = 4x$, lo que implica que si $x \to 0$ entonces $y \to 0$.

Ahora sustituimos en $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x)}{x}$.

Quedando:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4x)}{x}=\lim_{x\to 0}4\left(\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x}\right)=4\left(\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}\right)=4$$

Nota: El alumno debe prestar atención a las situaciones anteriores (ejemplos 1.10 y 1.11), ya que se presentarán con frecuencia en límites trigonométricos.

Practiquemos más límites trigonométricos con cambio de variable para reducirlos a formas conocidas.

Ejemplo 1.12. Límites trigonométricos

Calcule el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{2x}$$

Solución: Si se sustituye de forma directa, se obtiene una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.

Al igual que en el ejercicio 1.9, se cambia la variable $y=5x,\ x\to 0\Rightarrow y\to 0$.

Al realizar este cambio de variable en

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{2x}$$

se reduce a una forma conocida:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5}{2}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x}=\frac{5}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}=\frac{5}{2}(1)=\frac{5}{2}$$

En forma general, el tipo de límites anteriores se muestra en seguida:

Ejemplo 1.13. Límites trigonométricos

Calcule el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(mx)}{nx}$$

Solución: Si se sustituye de forma directa, obtenemos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.

Al igual que en el ejercicio 1.9, se cambia la variable $y=mx,\ x\to 0\Rightarrow y\to 0$.

Al realizar este cambio de variable en

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(mx)}{nx}$$

se reduce a una forma conocida:

$$\lim_{x\to 0}\frac{m}{n}\frac{\operatorname{sen}(mx)}{mx}=\frac{m}{n}\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}=\frac{m}{n}(1)=\frac{m}{n}$$

Ejemplo 1.14. Límites trigonométricos

Calcule el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(2x)}$$

Solución: Si se sustituye de forma directa, obtenemos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.

Ahora es necesario realizar un doble cambio de variable, el cual se indica a continuación:

$$y=3x;\ \ x\to 0,\ \ y\to 0,\ z=2x;\ \ x\to 0,\ z\to 0$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(2x)}\frac{x}{x}$	Tanto numerador como denominador se multiplican por x.
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}}$	Tanto numerador como denominador se acomodan en expresiones que ya se han estudiado.
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}}{2\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2x}}$	Como en el ejemplo 1.9.
$\frac{3}{2}\frac{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}}{\lim\limits_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen}(z)}{z}}$	Ahora se realiza la doble sustitución que se propuso anteriormente.
$\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{3}{2}$	Es el resultado solicitado.

Ejemplo 1.15. Límites trigonométricos

Calcule el límite siguiente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(mx)}{\operatorname{sen}(nx)}$$

Solución: Si se sustituye de forma directa, obtenemos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.

Ahora, es necesario un doble cambio de variable, el cual se indica a continuación:

$$y=mx; x\to 0, y\to 0,\ z=nx; x\to 0, z\to 0$$

Después se multiplican tanto numerador como denominador por x, a fin de arreglarlos en las expresiones que ya se trabajaron, como en el ejemplo 1.9. Por último, se analiza la doble sustitución antes propuesta.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(mx)}{\operatorname{sen}(nx)}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}(mx)}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(nx)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{m\frac{\operatorname{sen}(mx)}{mx}}{n\frac{\operatorname{sen}(nx)}{nx}}=\frac{m}{n}\frac{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(y)}{y}}{\lim\limits_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen}(z)}{z}}=\frac{m}{n}\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{m}{n}$$

Ejemplo 1.16. Límites trigonométricos

Calcule el límite siguiente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{x}$$ Utilizando la identidad trigonométrica $\tan(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x\cdot\cos(x)}$$ Se multiplican medios por medios y extremos por extremos.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$ Se acomoda en un producto.

$$=\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}}^{\text{Límite que no presenta indeterminación}}\cdot\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}^{\text{Límite manejado en el presente tema}}=1\cdot 1=1$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)}{x}=1$

Ejemplo 1.17. Límites trigonométricos

Calcule el límite siguiente:

$$\lim_{a\to 1}\frac{\tan\left(a^2-1\right)}{a^2-1}$$

Solución: Si se sustituye de forma directa, obtenemos una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.

El cambio de variable sugerido es:

$$w=a^2-1,\ a\to 1,\ w\to 0;$$

$$\lim_{a\to 1}\frac{\tan\left(a^2-1\right)}{a^2-1}$$ Se realiza el cambio de variable sugerido.

$$\lim_{w\to 0}\frac{\tan(w)}{w}=1$$ Llegamos al límite del ejemplo 1.16, del cual ya se conoce su resultado.

Por tanto: $$\lim_{a\to 1}\frac{\tan\left(a^2-1\right)}{a^2-1}=1$$

Practique los límites trigonométricos con los ejercicios siguientes:

Ejercicios 1.5. Límites trigonométricos

Verifique el límite de las funciones trigonométricas:

1. $\lim\limits_{x\to\pi/3} \operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660$
2. $\lim\limits_{x\to\pi} \tan x = 0$
3. $\lim\limits_{x\to\pi} \cos \dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{2}$
4. $\lim\limits_{x\to\pi} \operatorname{sen} \dfrac{x}{2} = 1$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \sec nx = 1$
6. $\lim\limits_{x\to\pi} \cos 4x = 1$
7. $\lim\limits_{x\to 5\pi/3} \cos x = \dfrac{1}{2}$
8. $\lim\limits_{x\to 5\pi/3} \operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
9. $\lim\limits_{x\to 3} \tan \dfrac{\pi x}{4} = -1$
10. $\lim\limits_{x\to 7} \sec \dfrac{\pi x}{6} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} \approx -1.154$

De existir, verifique el límite de las funciones trigonométricas siguientes:

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} nx}{nx} = 1$
12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 6x}{8x} = \dfrac{3}{4}$
13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 9x} = \dfrac{2}{9}$
14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\operatorname{sen} 2x} = 1$
15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{sen} 2x} = 0$
16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{\tan^3 (3x)} = \dfrac{1}{27}$
17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{\operatorname{sen}^2 2x} = \dfrac{9}{8}$
18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2 4x}{1-\cos 5x} = \dfrac{32}{25}$
19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9x - \operatorname{sen} x}{8x - \operatorname{sen} 4x} = 2$
20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8x - \operatorname{sen} 2x}{5x + \operatorname{sen} 7x} = \dfrac{1}{2}$

1.2.5. Límites unilaterales

En ocasiones interesa conocer el comportamiento numérico de la variable dependiente $f(x)$ cuando x se aproxima a un valor a, por uno de los lados (izquierdo o derecho) de ese valor (como si los puntos de la recta de los números reales tuvieran dos lados: derecho e izquierdo).

Por la izquierda se encuentran los números reales menores que a, mientras que por la derecha están los números reales mayores que a.

Se dice que cuando x tiende a a por la derecha, el límite de la función $f(x)$ es M, lo cual se escribe:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = M$$

De manera rigurosa:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = M \quad \text{si dado } \varepsilon > 0 \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que}$$

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - M| < \varepsilon$$

Se dice que cuando x tiende a a por la izquierda el límite de la función $f(x)$ es L, lo cual se escribe:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

De manera rigurosa:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \quad \text{si dado } \varepsilon > 0 \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que}$$

$$0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Los valores de $f(x)$ pueden acercarse a un mismo valor L cuando x tiende a a por ambos lados (izquierda y derecha), es decir, cuando los límites unilaterales $\lim_{x\to a^+} f(x) = M$ y $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ sean iguales a $\lim_{x\to a} f(x) = L$ (si $L = M$), le llamaremos *límite bilateral* o *límite*.

El límite bilateral $\lim_{x\to a} f(x) = L$ existe si, y solo si, los límites unilaterales $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ existen y son iguales.

A continuación se practicará la definición de límites unilaterales con los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1.18. Límites unilaterales

Para la función $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Determine los límites unilaterales $\lim_{x\to a^+} f(x) = M$ y $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ y, de existir, el límite bilateral $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

Solución: Primero se resuelve gráficamente, es decir, se grafica la función:

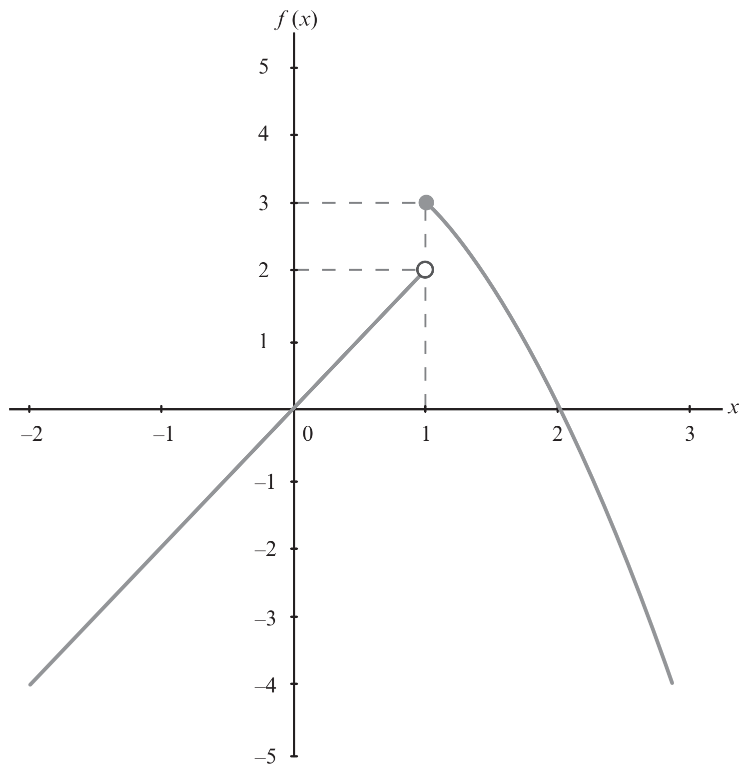


Figura 1.7. En la gráfica se observa que el límite por la izquierda es 2, mientras que por la derecha es 3.

En la figura 1.7 se observa que el límite de la función es, por la izquierda, 2; mientras que por la derecha, el límite es 3; al ser diferentes según la gráfica, el límite bilateral no existe.

Ahora se hace de forma analítica y debe coincidir con lo que se observó en la figura:

Límite por la izquierda:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-,\, x<1} f(x) = \lim_{x\to 1^-,\, x<1} (2x) = (1) = 1$$

Límite por la derecha:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+,\, x>1} f(x) = \lim_{x\to 1^+,\, x>1} \left(-x^2+4\right) = -(1)^2+4 = 3$$

Ya que los límites unilaterales son diferentes, el bilateral $\lim_{x\to 1} f(x)$, no existe.

Ejemplo 1.19. **Límites unilaterales**

Para la función $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x<3 \\ 7-x & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$

Determine los límites unilaterales $\lim_{x\to a^+} f(x) = M$ y $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$, así como el límite bilateral $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si es que existen.

Solución: Si primero se resuelve gráficamente, es decir, se grafica la función, tenemos que:

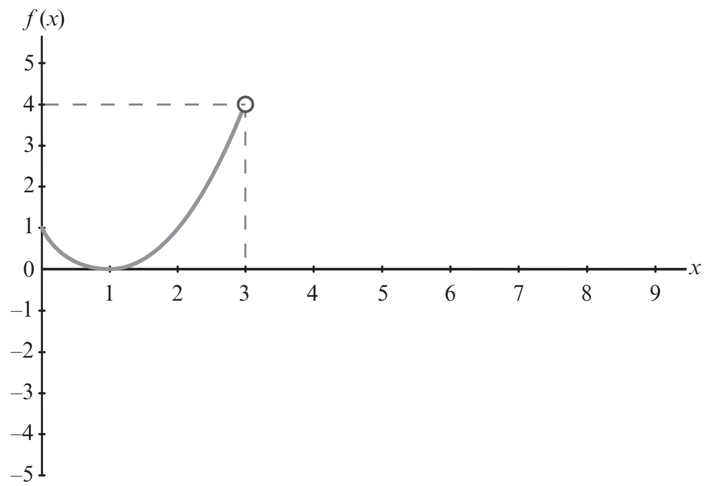


Figura 1.8*a*). Acercándose al 3 por la izquierda, el límite es 4.

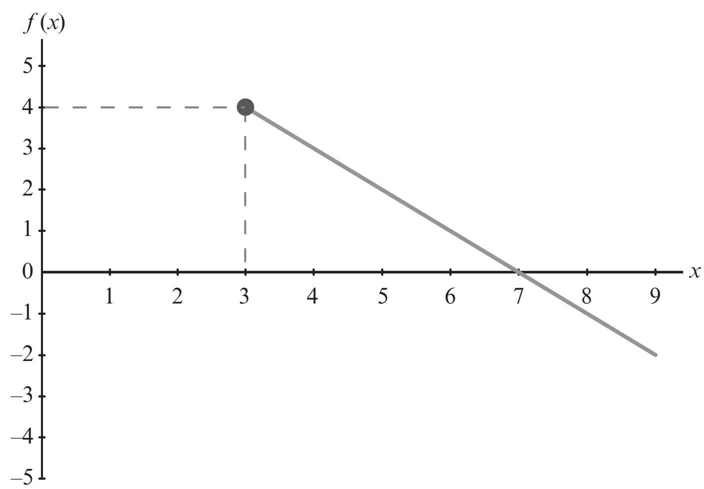


Figura 1.8*b*). Acercándose al 3 por la derecha, el límite es 4.

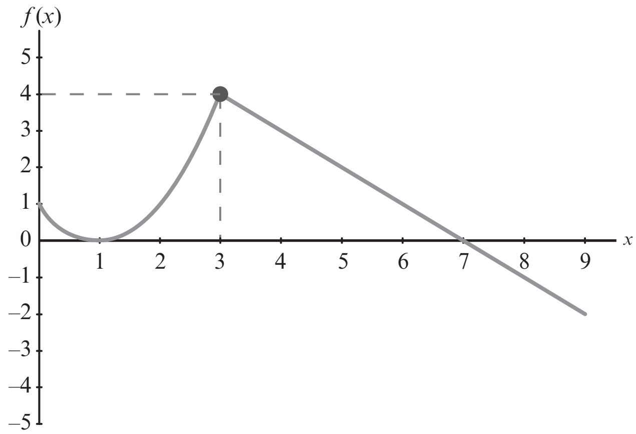


Figura 1.8*c*). Acercándose por ambos lados a 3, el límite es 4.

En la figura 1.8*a*) se observa que el límite por la izquierda es 4; el que va por la derecha es también 4; por ser iguales, el límite bilateral existe, y es también 4.

Ahora se resuelve de forma analítica:

Determine los límites unilaterales $\lim_{x\to a^+} f(x)=M$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$ y, si existe, el límite bilateral $\lim_{x\to a} f(x)=L$:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+,\, x>3} f(x)=\lim_{x\to 3^+,\, x>3}(7-x)=7-3=4$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-,\, x<3} f(x)=\lim_{x\to 3^-,\, x<3}(x-1)^2=(3-1)^2=4$$

Ya que los límites unilaterales son iguales, se concluye que el límite bilateral existe y que $\lim_{x\to 3} f(x)=4$.

Para comprender el tema de límites unilaterales y límite bilateral se recomienda resolver los ejercicios siguientes:

Ejercicios 1.6. Límites unilaterales

Para las funciones siguientes verifique los límites unilaterales:

$\lim_{x\to a^-} f(x)=L$, $\lim_{x\to a^+} f(x)=M$ y el límite bilateral $\lim_{x\to a} f(x)=L$, si existe.

1. $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } x<2 \\ 3x-2 & \text{si } x>2 \end{cases}$ en $a=2$

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=4$

$\lim_{x\to 2^+} f(x)=4$

$\lim_{x\to 2} f(x)=4$

2. $f(x)=\begin{cases} 2x^2 & \text{si } x<0 \\ 4x & \text{si } x\ge 0 \end{cases}$ en $a=0$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$

$\lim_{x\to 0} f(x)=0$

3. $f(x)=\begin{cases} x^2+3x-4 & \text{si } x\le 1 \\ x^2-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$ en $a=1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=0$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=0$

$\lim_{x\to 1} f(x)=0$

4. $f(x)=\begin{cases} 5x+2 & \text{si } x<-1 \\ -3 & \text{si } x>-1 \end{cases}$ en $a=-1$

$\lim_{x\to -1^-} f(x)=-3$

$\lim_{x\to -1^+} f(x)=-3$

$\lim_{x\to -1} f(x)=-3$

5. $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x<-3 \\ 5 & \text{si } x=-3 \\ -4x & \text{si } x>-3 \end{cases}$ en $a=-3$

$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)=9$

$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)=12$

$\lim\limits_{x\to -3} f(x)=$ No existe

6. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^4-16}{x^2-4} & \text{si } x\neq \pm 2 \\ -8 & \text{si } x=-2 \\ 8 & \text{si } x=2 \end{cases}$ en $a=\pm 2$

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=8$

$\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=8$

$\lim\limits_{x\to -2} f(x)=8$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=8$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=8$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=8$

1.2.6. Límites infinitos y asíntotas verticales

Ya vimos la forma de indeterminación $\frac{0}{0}$. En este tema se presentará lo que sucede cuando el denominador se vuelve cero, pero el numerador no, por lo que no es posible recurrir a la simplificación, cancelación o racionalización, como se hizo antes.

A continuación se considera la función $f(x)=\frac{1}{x^2}$ y se investiga lo que sucede con sus valores cuando la x se encuentra cerca de cero.

Tabla 1.3

Valores cuando x se acerca por la izquierda a cero.

x	–1	–0.5	–0.1	–0.01	–0.001
$f(x)$	–1	4	100	10 000	1 000 000

Tabla 1.4

Valores cuando x se acerca por la derecha a cero.

x	1	0.5	0.1	0.01	0.001
$f(x)$	1	4	100	10 000	1 000 000

La figura siguiente ayuda a entender su comportamiento:

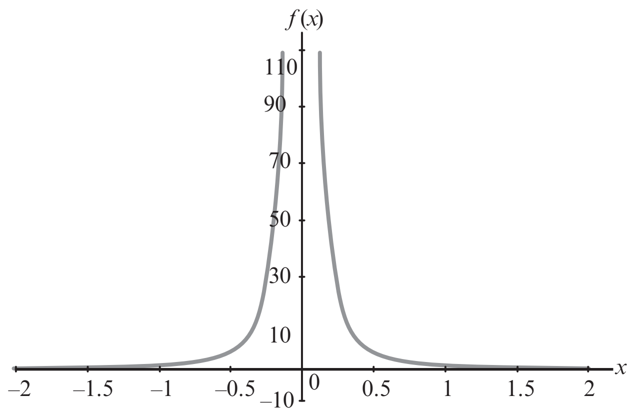


Figura 1.9. Tanto el límite por la izquierda de *f(x)* como el que va por la derecha crecen sin cota alrededor de $x=0$.

En cuanto al comportamiento anterior, cabe señalar que esta función tiende a infinito cuando x tiende a cero. Lo anterior se escribe así:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$$

En general, se dice que la función $f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a a y se escribe como $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, el cual se dice que es un *límite infinito*.

Definición de límite infinito

De manera rigurosa, esta idea queda escrita según se muestra a continuación: la función $f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a a, lo cual se escribe como $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, si dado cualquier $M>0$ existe un $\delta>0$ tal que $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)|>M$.

¿En qué tipos de funciones es posible que se presenten límites infinitos? La situación más común está dada por el siguiente planteamiento con el respectivo resultado, el cual es de carácter general:

Sea $f(x)$ una función tal que $f(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, si

$$\lim_{x\to a} f_1(x)=k\neq 0 \text{ y } \lim_{x\to a} f_2(x)=0. \text{ Entonces } \lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\infty$$

A continuación se practica lo referido en el cuadro anterior con los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1.20. Límites infinitos

Calcule el límite siguiente:

Para $f(x)=\dfrac{1}{x}$ calcule $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\frac{\lim_{x\to 0}1}{\lim_{x\to 0}x}=\frac{1}{0}=\infty$$

El numerador tiende a 1 cuando x tiende a 0 mientras que el denominador tiende a 0 cuando x también tiende a 0.

El ejemplo anterior obliga a ser más precisos con el símbolo de infinito. Se indica con $+\infty$ el resultado de un límite infinito cuando $f(x)$ toma valores cada vez mayores (positivos) cuando x tiende a a. Por otra parte, se señala con $-\infty$ el resultado de un límite infinito cuando $f(x)$ toma valores negativos cada vez mayores en un valor absoluto. A continuación se observa en una tabla el comportamiento del ejemplo anterior cuando x tiende a 0 por el lado de los números negativos o $x\to 0^-$.

	x	–2	–1	–0.5	–0.1	–0.01	–0.001
Numerador	**1**	1	1	1	1	1	1
Denominador	x	–2	–1	–0.5	–0.1	–0.01	–0.001
	$f(x)=\dfrac{1}{x}$	–0.5	–1	–2	–10	–100	–1 000

Tabla 1.5

Valores del numerador, denominador y la función $f(x)=\frac{1}{x}$ cuando la variable independiente se acerca a cero por la izquierda.

En la tabla anterior se observa que si x tiende a cero por la izquierda, el numerador es 1; asimismo, el denominador tiende a cero pero toma valores negativos. Por lo anterior, el signo del cociente es negativo y la función tiende a $-\infty$. Para el presente ejemplo diríamos que el límite unilateral por la izquierda es $-\infty$, lo cual queda escrito así:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$$

Observemos en una tabla el comportamiento del ejemplo anterior cuando x tiende a 0 por el lado de los números positivos o $x \to 0^+$.

Tabla 1.6

Valores del numerador, denominador y la función $f(x) = \frac{1}{x}$, cuando la variable independiente se acerca a cero por la derecha.

	x	2	1	0.5	0.1	0.01	0.001
Numerador	1	1	1	1	1	1	1
Denominador	x	2	1	0.5	0.1	0.01	0.001
	$f(x) = \frac{1}{x}$	0.5	1	2	10	100	1 000

En la tabla anterior se observa que si x tiende a cero por la derecha, el numerador es 1 y el denominador tiende a cero tomando valores positivos. Por lo anterior, el signo del cociente es positivo y la función tiende a $+\infty$. Para este ejemplo puede decirse que el límite unilateral por la derecha es $+\infty$, lo cual queda escrito según se muestra a continuación:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

La gráfica de $f(x)\frac{1}{x}$ ayuda a entender el comportamiento numérico de la variable dependiente cuando x tiende a 0.

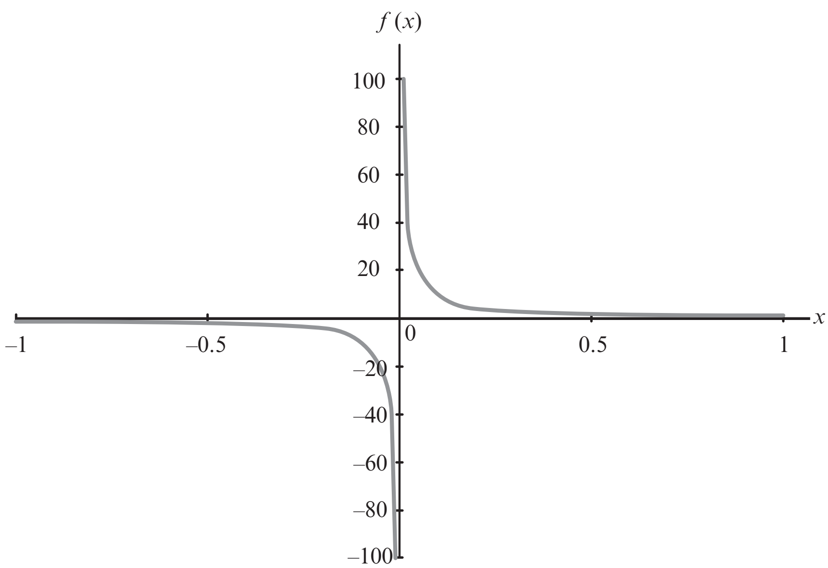


Figura 1.10. Si la x acerca a 0 por la izquierda, los valores de la función se alejan de cero, hacia abajo. Y si x se acerca por la derecha, los valores de la variable dependiente se alejan de cero, hacia arriba.

A continuación se practica con funciones más elaboradas:

Ejemplo 1.21. Límites infinitos

Para $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}$

En caso de existir, determine el límite:

$$\lim_{x \to -3} f(x)$$

Solución:

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{\lim_{x \to -3}(x-3)}{\lim_{x \to -3}\left(x^2-9\right)} = \frac{-6}{0} = \infty$$

porque el numerador $x - 3$ tiende a -6 cuando x tiende a -3, mientras que el denominador tiende a cero cuando x tiende a -3. Pero, ¿será $+\infty$ o $-\infty$? Para responder esta pregunta es necesario analizar el símbolo de infinito, como se realizó en el ejemplo anterior.

Primero, se hará mediante la tabla siguiente:

x	–4	–3.5	–3.1	–3.01	–3.001	–3.0001
Numerador $(x-3)$	–7	–6.5	–6.1	–6.01	–6.001	–6.0001
Denominador (x^2-9)	7	3.25	0.61	0.0601	0.006001	0.0006
$f(x)$	–1	–2	–10	–100	–1 000	–10 000

Tabla 1.7

Tabulación de valores para la función $f(x)=\frac{x-3}{x^2-9}$, $x\to -3^-$.

En la tabla anterior se observa que si x tiende a –3 por la izquierda, el numerador tiende a –6 pero toma valores negativos, mientras que el denominador tiende a cero pero toma valores positivos, por lo cual el signo del cociente es negativo y la función tiende a $-\infty$. Para este ejemplo se dice que el límite unilateral por la izquierda es $-\infty$, lo cual queda escrito de la forma siguiente:

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{x-3}{x^2-9}=-\infty$$

Ahora, en una tabla se observa el comportamiento cuando x tiende a –3 por el lado de los números positivos (por la derecha), según se muestra en la tabla siguiente:

x	–2	–2.5	–2.9	–2.99	–2.999	–2.9999
Numerador $(x-3)$	–5	–5.5	–5.9	–5.99	–5.999	–5.9999
Denominador (x^2-9)	–5	–2.75	–0.59	–0.0599	–0.005999	–0.0006
$f(x)$	1	2	10	100	1 000	10 000

Tabla 1.8

Tabulación de valores para la función $f(x)=\frac{x-3}{x^2-9}$ cuando x se acerca a –3 por la derecha.

En la tabla anterior se observa que si x tiende a –3 por la derecha, el numerador tiende a –4 y toma valores negativos; a su vez, el denominador tiende a cero y toma valores negativos, lo cual es signo de que el cociente es positivo y la función tiende a $+\infty$. Para este ejemplo se dice que el límite unilateral por la derecha es $+\infty$, lo cual queda escrito así:

$$\lim_{x\to -3^+}\frac{x-3}{x^2-9}=+\infty$$

La gráfica de $f(x)=\frac{x-3}{x^2-9}$ ayuda a entender este comportamiento. Cabe recordar que también hay una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ que gráficamente se representa con un hueco en $x=3$ y que posteriormente (en el tema de continuidad) también llamaremos *discontinuidad de hueco*.

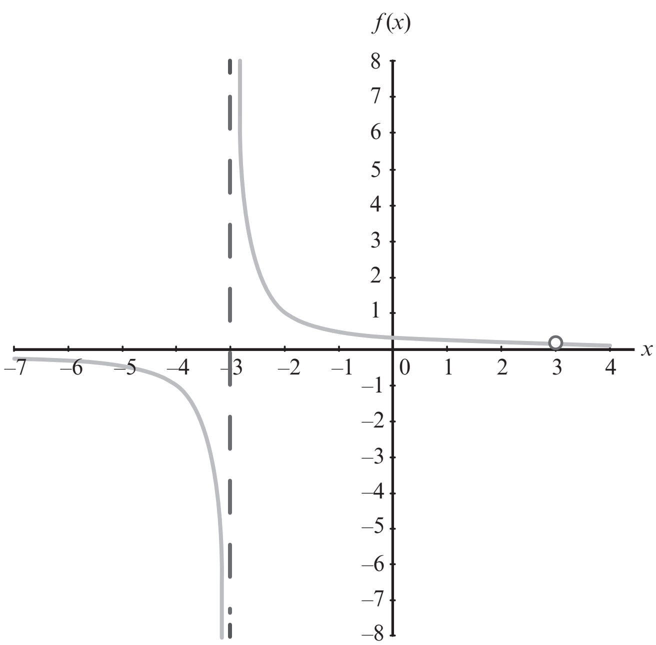


Figura 1.11. Si x acerca a –3, la variable dependiente se aleja del cero, hacia abajo; cuando x se acerca a –3 por la derecha, la variable dependiente se aleja del cero, hacia arriba.

Es importante notar que si la variable independiente se acerca por la izquierda y la curva tiende a $-\infty$, no forzosamente significa que si la variable independiente se acerca por la derecha entonces la curva debe tender ahora hacia $+\infty$, el comportamiento no tiene que ser alternado. Como vimos en la función $f(x)=\frac{1}{x^2}$ y se muestra en el siguiente ejemplo. Observe el exponente del denominador.

Ejemplo 1.22. Límites infinitos

Para $f(x)=\dfrac{x-3}{(x-1)^2}$

Determine el límite:

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

Solución:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{(x-1)^2}=\infty,\quad \text{pero } ¿+\infty \text{ o } -\infty?$$

A continuación se analiza el símbolo de infinito, según se ha hecho hasta ahora:

Tabla 1.9 Valores del numerador, denominador y la función $f(x)=\frac{x-3}{(x-1)^2}$, cuando la variable independiente se acerca a 1 por la izquierda.

	x	0	0.5	0.9	0.99	0.999	0.9999
Numerador	$x-3$	−3	−2.5	−2.1	−2.01	−2.001	−2.0001
Denominador	$(x-1)^2$	1	0.25	0.01	0.0001	0.000001	1E−08
	$f(x)=\frac{x-3}{(x-1)^2}$	−3	−10	−210	−20 100	−2 001 000	−2E+08

De acuerdo con la tabla anterior, si x tiende a 1 por la izquierda, el numerador tiende a −2 pero toma valores negativos, mientras que el denominador tiende a cero y toma valores positivos, por lo cual el signo del cociente es negativo y la función tiende a $-\infty$. Para este ejemplo puede decirse que el límite unilateral por la izquierda es $-\infty$, lo cual queda escrito como se muestra a continuación:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x-3}{(x-1)^2}=-\infty$$

Ahora, en la siguiente tabla se observa el comportamiento cuando x tiende a 1 por el lado de los números positivos.

Tabla 1.10 Valores del numerador, denominador y la función $f(x)=\frac{x-3}{(x-1)^2}$, cuando la variable independiente se acerca a 1 por la derecha.

	x	2	1.5	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001
Numerador	$x-3$	−1	−1.5	−1.9	−1.99	−1.999	−1.9999	−1.99999
Denominador	$(x-1)^2$	1	0.25	0.01	0.0001	1E−06	1E−08	1E−10
	$f(x)=\frac{x-3}{(x-1)^2}$	−1	−6	−190	−19 900	1 999 000	−2E+08	−2E+10

Según la tabla anterior, se observa que si x tiende a 1 por la derecha, el numerador tiende a −2 pero toma valores negativos, mientras que el denominador tiende a cero y toma valores positivos, por lo cual el signo del cociente es negativo y la función tiende a $-\infty$. Para el presente ejemplo se dice que el límite unilateral por la derecha también es $-\infty$, lo cual queda escrito como se muestra a continuación:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-3}{(x-1)^2}=-\infty$$

En este caso, puede concluirse que el límite bilateral es:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-3}{(x-1)^2}=-\infty$$

Es importante señalar que, en realidad, el límite bilateral no existe, pues aunque los límites unilaterales por la izquierda y la derecha son iguales, no se cumple con la condición de que deben existir en el conjunto de los números reales, pero el resultado anterior permite entender el comportamiento de los valores de la variable dependiente cuando la variable independiente toma valores cercanos a 1.

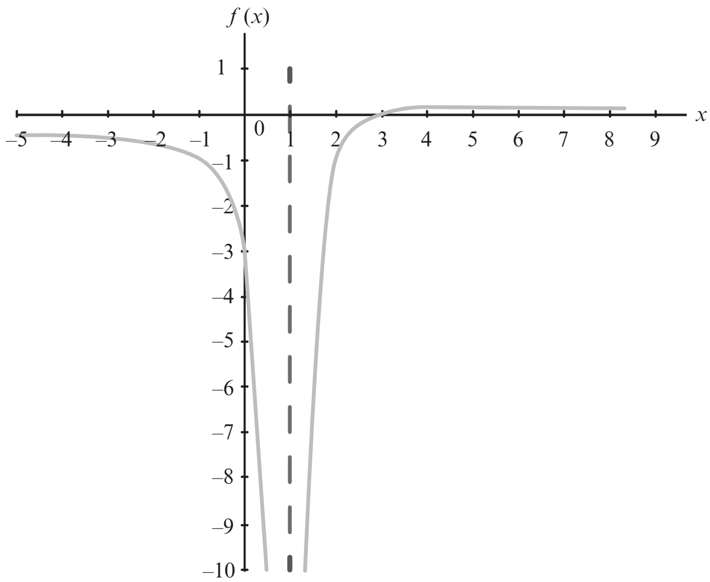


Figura 1.12. En ambos límites unilaterales (por la izquierda y la derecha) los valores de la variable dependiente se alejan de cero, hacia abajo.

Con los siguientes ejercicios se practicarán los límites infinitos.

Ejercicios 1.7. **Límites infinitos**

Verifique los límites infinitos siguientes:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{(x-3)^4}=\infty$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+7x-8}{x^2-2x+1}=\pm\infty$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+3x^2+8x+3}{x^2}=\infty$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x}{x^3-1}=\pm\infty$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^5-2x^4+3x^2-7x-5}{3x^3-11x^2+8x+4}=-\infty$

Asíntotas verticales

Una asíntota vertical es una recta $x=a$ para la cual se cumple $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ o $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$, recordando que:

Sea $f(x)$ una función tal que $f(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$, si

$$\lim_{x\to a} f_1(x)=k\neq 0 \text{ y } \lim_{x\to a} f_2(x)=0. \text{ Entonces } \lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\infty$$

Para determinar la asíntota vertical, si existe, aplique ahora la idea anterior en los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1.23. Asíntotas verticales

Determine las asíntotas verticales, si las hay, de la función $f(x)=\dfrac{5x^2+6}{x^2-1}$.

Solución: Se trata de una función racional que puede verse como:

$$f(x)=\frac{5x^2+6}{x^2-1}=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

Donde $f_1(x)=5x^2+6$ y $f_2(x)=x^2-1$.

Encontramos los valores donde se anula el denominador, planteando la ecuación respectiva:

$$f_2(x)=0$$
$$x^2-1=0$$
$$x_1=1$$
$$x_2=-1$$

Para que los valores anteriores sean las asíntotas deben cumplir con lo siguiente:

$\lim_{x\to a} f_1(x)=k\neq 0$ y $f_2(x)$ una función tal que $\lim_{x\to a} f_2(x)=0$.

Entonces $\lim_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\infty$

Primero, $x_1=1$

$$\lim_{x\to 1} f_1(x)=\lim_{x\to 1}\left(5x^2+6\right)=11\neq 0 \text{ y } \lim_{x\to 1} f_2(x)=\lim_{x\to 1}\left(x^2-1\right)=0 \quad \therefore \quad \lim_{x\to 1}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\infty$$

Por lo que $x_1=1$ es una asíntota vertical.

Segundo, $x_2=-1$

$$\lim_{x\to -1} f_1(x)=\lim_{x\to -1}\left(5x^2+6\right)=11\neq 0 \text{ y } \lim_{x\to -1} f_2(x)=\lim_{x\to -1}\left(x^2-1\right)=0 \quad \therefore \quad \lim_{x\to -1}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\infty$$

Por lo que $x_2=-1$ es una asíntota vertical.

A continuación se muestra la gráfica de $f(x)=\dfrac{5x^2+6}{x^2-1}$

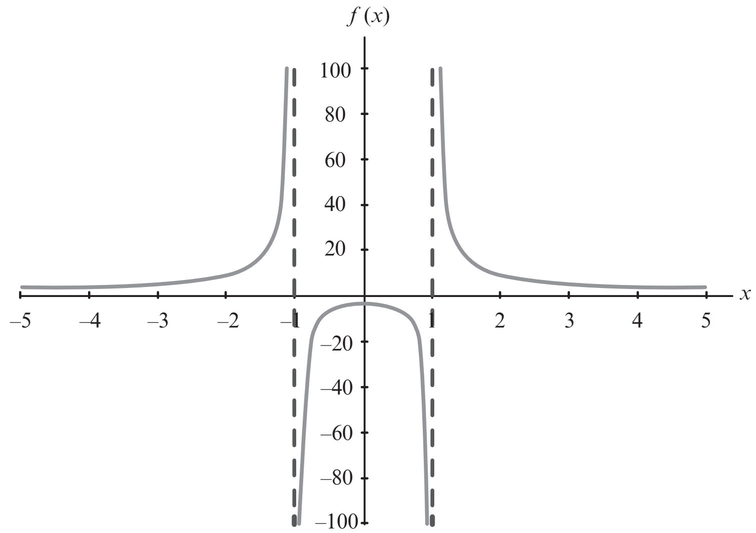


Figura 1.13. En la gráfica se observa que tanto en $x = -1$ como en $x = 1$ se cumple la condición para que existan asíntotas verticales.

No para todos los valores que anulen el denominador existe asíntota vertical, como se muestra en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 1.24. **Asíntotas verticales**

Determine las asíntotas verticales, si las hay, de la función $f(x) = \dfrac{2x^2 - 12x + 16}{x^2 - 5x + 6}$

Solución: Se trata de una función racional que puede verse como:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 12x + 16}{x^2 - 5x + 6} = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

donde $f_1(x) = 2x^2 - 12x + 16$ y $f_2(x) = x^2 - 5x + 6$

Se encuentran los valores donde se anula el denominador, y se plantea la ecuación respectiva:

$$f_2(x) = 0$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$x_1 = 2$$
$$x_2 = 3$$

Para que los valores anteriores sean asíntotas verticales deben cumplir con lo siguiente:

$\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = k \neq 0$ y $f_2(x)$ una función tal que $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = 0$. Entonces $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty$

Primero, $x_1 = 2$

$$\lim_{x \to 2} f_1(x) = \lim_{x \to 2}\left(2x^2 - 12x + 16\right) = 0 \text{ y } \lim_{x \to 2} f_2(x) = \lim_{x \to 2}\left(x^2 - 5x + 6\right) = 0$$

Por lo que $x_1 = 2$ no es una asíntota vertical, de hecho es un caso ya visto, $\frac{0}{0}$, una indeterminación de hueco.

Segundo, $x_2 = 3$

$$\lim_{x \to 3} f_1(x) = \lim_{x \to 3}\left(2x^2 - 12x + 16\right) = -2 \neq 0 \text{ y } \lim_{x \to 3} f_2(x) = \lim_{x \to 3}\left(x^2 - 5x + 6\right) = 0 \quad \therefore \quad \lim_{x \to 3} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \pm\infty$$

Por lo que $x_2 = 3$ sí es una asíntota vertical.

La gráfica de $f(x) = \dfrac{2x^2 - 12x + 16}{x^2 - 5x + 6}$ es la siguiente:

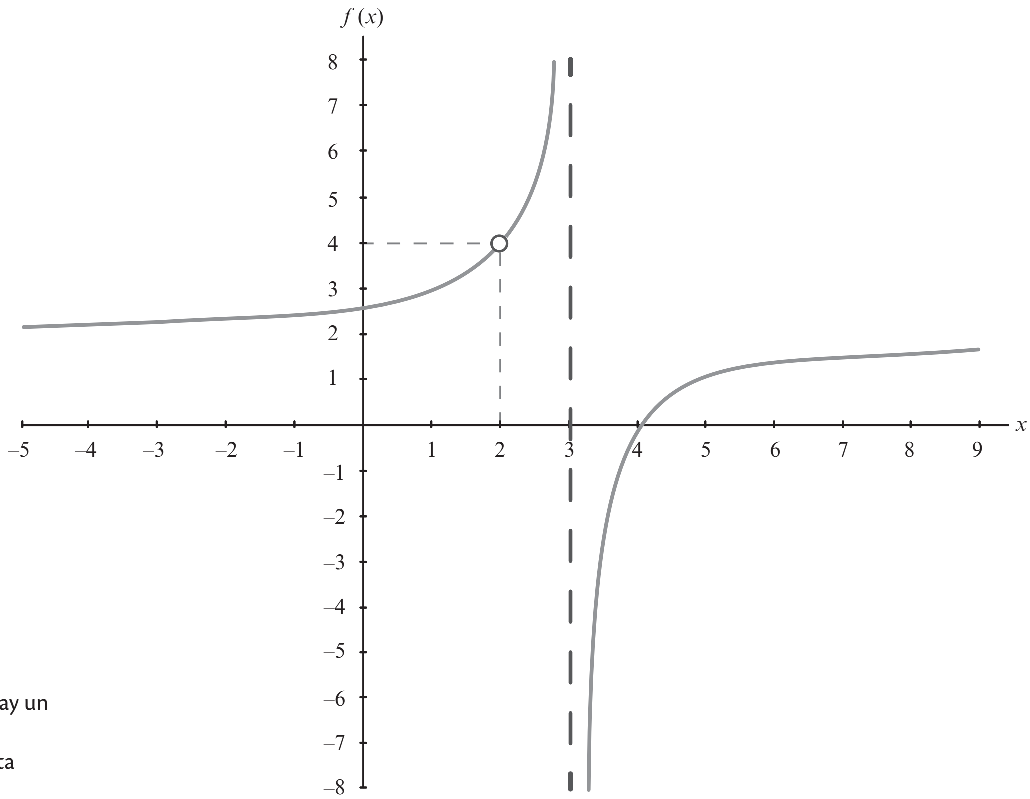


Figura 1.14. Es posible observar que en $x = 2$ sólo hay un hueco, mientras que en $x = 3$ se presenta una asíntota vertical.

Para los siguientes ejercicios se requiere aplicar lo visto en el tema previo, a fin de determinar una o varias asíntotas verticales, si es que existen.

Ejercicios 1.8. Asíntotas verticales

Determine las asíntotas verticales de las funciones siguientes; si no existen, indique por qué:

1. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ **Respuesta:** $x - 2 = 0$, $x + 2 = 0$

2. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 6x + 8}$ **Respuesta:** $x - 4 = 0$, $x - 2 = 0$

3. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$

No hay asíntotas verticales porque no se cumple

$$\frac{\lim\limits_{x \to a} x}{\lim\limits_{x \to a} (x^2 + 2)} = \frac{\text{cte} \neq 0}{0}$$

4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{2x^2 + 2x + 2}$

No hay asíntotas verticales porque no se cumple

$$\frac{\lim\limits_{x \to a} x}{\lim\limits_{x \to a} (x^2 + 2)} = \frac{\text{cte} \neq 0}{0}$$

5. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3 - 8}$ **Respuesta:** $x - 2 = 0$

6. $f(x) = \dfrac{2x^4 + 2x^2 + 2}{2x^3 + 2}$ **Respuesta:** $x + 1 = 0$

1.2.7. Límites en el infinito y asíntotas horizontales

Si se parte sabiendo que la función $f(x)=\frac{1}{x}$, tiende a $\pm\infty$ si $x\to 0$ cabe interesarse ahora en el comportamiento de $f(x)$ cuando x toma valores muy grandes, ya sea en sentido positivo o negativo. Observe la tabla siguiente:

a)

x	1	10	100	10 000	100 000 000	1.00E+16
$f(x)=\frac{1}{x}$	1	0.1	0.01	0.0001	1E–08	1.00E–16

b)

x	–1	–10	–100	–1 000	–1 000 000	–1.00E+12
$f(x)=\frac{1}{x}$	–1	–0.1	–0.01	–0.001	–0.000001	–1.00E–12

Tabla 1.11

a) y *b*). Valores de $f(x)$ para cuando la variable independiente toma valores muy grandes, positivos y negativos, respectivamente.

Se percibe que a medida que los valores de x aumentan, los de $f(x)$ se acercan a cero.

Es posible referir este hecho diciendo que si x tiende a ∞, entonces la función $f(x)=\frac{1}{x}$ tiende a cero, lo que se expresa como:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

En general, se dice que la función $f(x)$ tiende al límite L cuando x tiende a infinito si, a medida que el valor de x se hace más grande, el valor de $f(x)$ se encuentra más próximo a L, lo cual se expresa de la forma siguiente:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=L$$

Si dado cualquier $\varepsilon>0$ existe un $M>0$ tal que:

$$x>M \quad (\text{o } x<-M)\Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

Teorema 1.8

Sea n un número natural y sea k una constante.

Entonces la función $f(x)=\frac{k}{x^n}$ tiende a cero cuando x tiende a infinito. Es decir:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{k}{x^n}=0$$

Es posible entender con facilidad el teorema anterior si se parte de que en el cociente $\frac{k}{x^n}$ el numerador es una constante; mientras que el denominador es una cantidad que se vuelve cada vez mayor y el resultado de la división es cada vez más cercano a cero.

Ejemplo 1.25. Límites en el infinito

Calcule el límite $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+7}{2x^3+3x^2-11x+13}$

Solución: Se divide tanto el numerador como el denominador entre la potencia más grande de x que, en este ejemplo, es x^3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+7}{2x^3+3x^2-11x+13}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+5x+7}{x^3}}{\frac{2x^3+3x^2-11x+13}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{2+\frac{3}{x}-\frac{11}{x^2}+\frac{13}{x}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}-\frac{11}{x^2}+\frac{13}{x}\right)}$$

Por el teorema anterior $$\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}-\frac{11}{x^2}+\frac{13}{x}\right)}=\frac{0+0+0}{2+0+0+0}=\frac{0}{2}=0$$

Ejemplo 1.26. Límites en el infinito

Calcule el límite $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^6+3x^3+6x^2-3x+5}{7x^6-x^5+19x+6}$

Solución: Se divide tanto el numerador como el denominador entre la potencia más grande de x que, en este ejemplo, es x^6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^6+3x^3+6x^2-3x+5}{7x^6-x^5+19x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^6+3x^3+6x^2-3x+5}{x^6}}{\frac{7x^6-x^5+19x+6}{x^6}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^3}+\frac{6}{x^4}-\frac{3}{x^5}+\frac{5}{x^6}}{7-\frac{1}{x}+\frac{19}{x^5}+\frac{6}{x^6}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x^3}+\frac{6}{x^4}-\frac{3}{x^5}+\frac{5}{x^6}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7-\frac{1}{x}+\frac{19}{x^5}+\frac{6}{x^6}\right)}$$ Por el teorema anterior: $$\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x^3}+\frac{6}{x^4}-\frac{3}{x^5}+\frac{5}{x^6}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7-\frac{1}{x}+\frac{19}{x^5}+\frac{6}{x^6}\right)}$$

$$=\frac{2+0+0+0+0}{7-0+0+0}=\frac{2}{7}$$

En resumen, los resultados de los dos casos anteriores de límites al infinito para funciones racionales $f(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ son:

Si $f_1(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

$f_2(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}0 & \text{si} \quad n<m\\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si} \quad n=m\end{cases} \quad \text{para } a\neq 0,\ b\neq 0$$

Ejercicios 1.9. Límites en el infinito

Verifique los límites siguientes:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+4x+1}{x^2+2x+1}=\infty$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-3x^2+x+2}{x^4+5x+1}=0$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x+3}{2x^3+5x^2+3x+1}=1$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^5+6x^4-9x-3}{x^3-1}=\infty$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^8+4x^4-3x}{3x^8+4x^4+9}=\frac{5}{3}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+3x^2-9x+2}{x^6-7x^7+3x^3}=0$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2+x^2}+5x}{\sqrt[3]{x^5+x-7}+\sqrt{x^2-4x-1}}=0$

Asíntotas horizontales

Si se tiene una función racional y se quiere calcular el límite de la función es necesario considerar algunos aspectos que pueden ser útiles al realizar el cálculo de límites. Para el caso de las asíntotas horizontales se deben considerar dos casos especiales, sea $f(x)$ una función racional:

$$f(x)=\frac{a_n x^a + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$$

Los casos son los siguientes:

1. Cuando el grado del polinomio en el numerador es menor que el del polinomio en el denominador, es decir $n<m$.
2. Cuando ambos polinomios tienen el mismo grado, es decir $n=m$.

Caso I

Una asíntota horizontal es una recta $y=L$ o $f_3(x)$, tal que para todo $L\in\mathbb{R}$, para la cual se cumple:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L \quad \text{o} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$

Cabe retomar lo escrito antes:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=0$ si $< m \ \therefore\ L=0 \ \therefore$ la asíntota horizontal sería la función constante $y=0$ o $f_3(x)=0$.

Ejemplo 1.27. Muestra de asíntota horizontal

De existir, determine la asíntota horizontal para: $f(x)=\dfrac{3x^4-6x^2-7}{5x^8+7x^4-7}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-6x^2-7}{5x^8+7x^4-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^4-6x^2-7}{x^8}}{\dfrac{5x^8+7x^4-7}{x^8}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{6}{x^6}-\dfrac{7}{x^8}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\dfrac{7}{x^4}-\dfrac{7}{x^8}\right)}=\frac{0+0+0}{5+0+0}=\frac{0}{5}=0$$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \ \therefore L=0$, la asíntota horizontal es la función constante $y=0$ o $f_3(x)=0$, el eje de las abscisas es la asíntota.

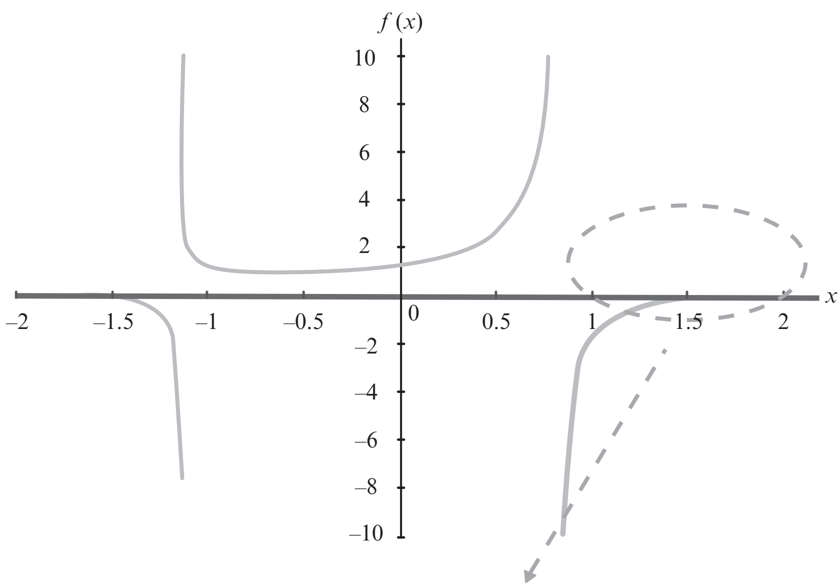


Figura 1.15. En primera instancia, la gráfica muestra que la curva se acerca por arriba al eje de las abscisas, lo cual se corrige con un acercamiento al área de interés.

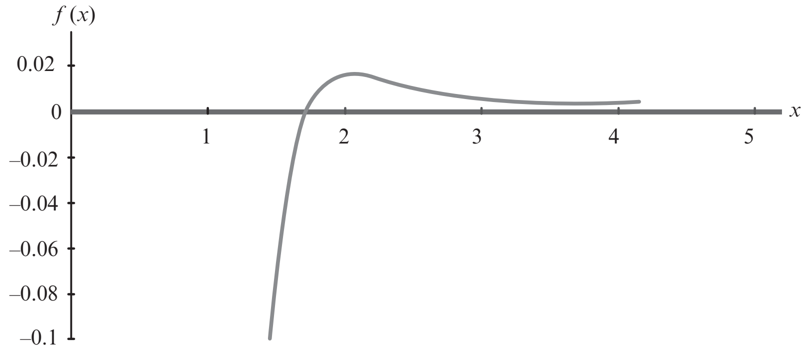


Figura 1.16. En este acercamiento se percibe claramente que la curva cruza el eje de las abscisas y luego baja para aproximarse nuevamente al eje horizontal, pero esta vez por arriba. Es importante señalar que una asíntota horizontal puede atravesarse.

Caso II

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\dfrac{a_n}{b_m}$ si $n=m\ \therefore\ L=\dfrac{a_n}{b_m}\ \therefore$ la asíntota horizontal sería la función constante $y=\dfrac{a_n}{b_m}$ o $f_3(x)=\dfrac{a_n}{b_m}$

Veamos un ejemplo de esto.

Ejemplo 1.28. Asíntota horizontal diferente al eje de las abscisas

De existir, determine la asíntota horizontal para $f(x)=\dfrac{2x^2-12x+16}{x^2-5x+6}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-12x+16}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2-12x+16}{x^2}}{\dfrac{x^2-5x+6}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\dfrac{12}{x}+\dfrac{16}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{x^2}\right)}=\frac{2-0+0}{1-0+0}=\frac{2}{1}=2$$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2\therefore L=2$, la asíntota horizontal es la función constante $y=2$ o $f_3(x)=2$.

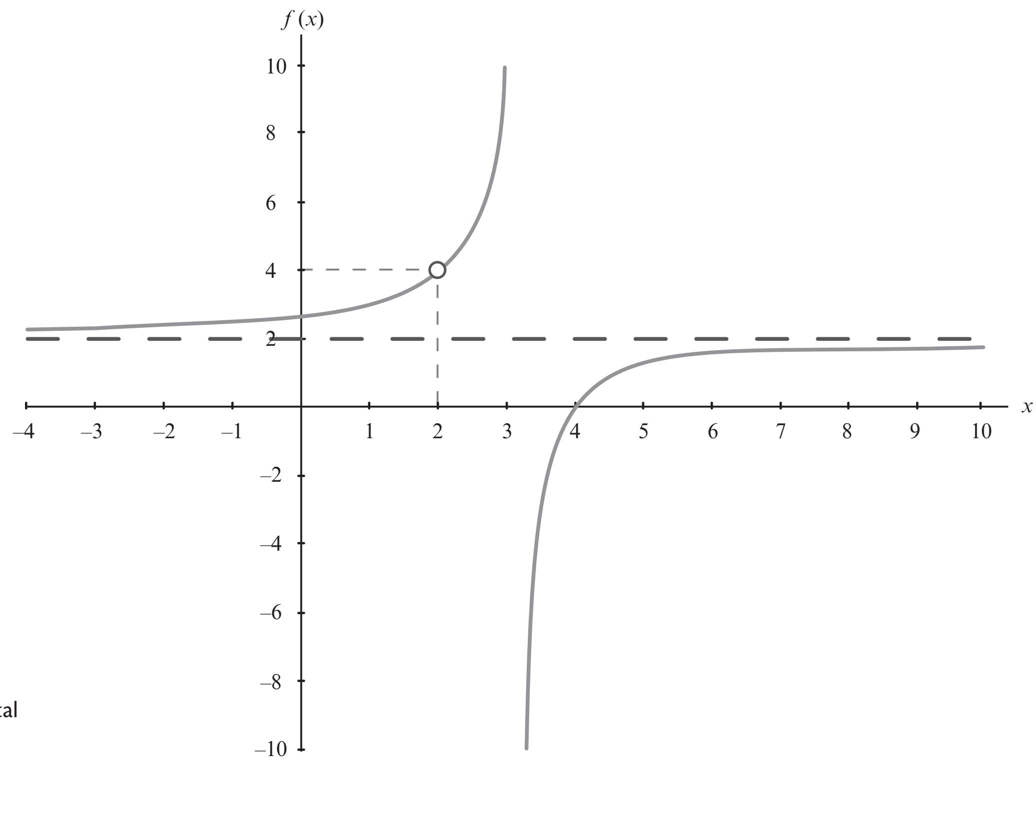


Figura 1.17 La gráfica muestra la asíntota horizontal $f_3(x)=2$.

Ejemplo 1.29. Asíntotas horizontales

Si la hay, determine la asíntota horizontal para $f(x)=\dfrac{5x^2-10x+1}{3x^2+4x+5}$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-10x+1}{3x^2+4x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5x^3-10x+1}{x^3}}{\dfrac{3x^3+4x+5}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-\dfrac{10}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}\right)}=\frac{5-0+0}{3-0+0}=\frac{5}{3}$$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{5}{3}\quad \therefore\ L=\dfrac{5}{3}$, la asíntota horizontal es la función constante $y=\dfrac{5}{3}$ o $f_3(x)=\dfrac{5}{3}$

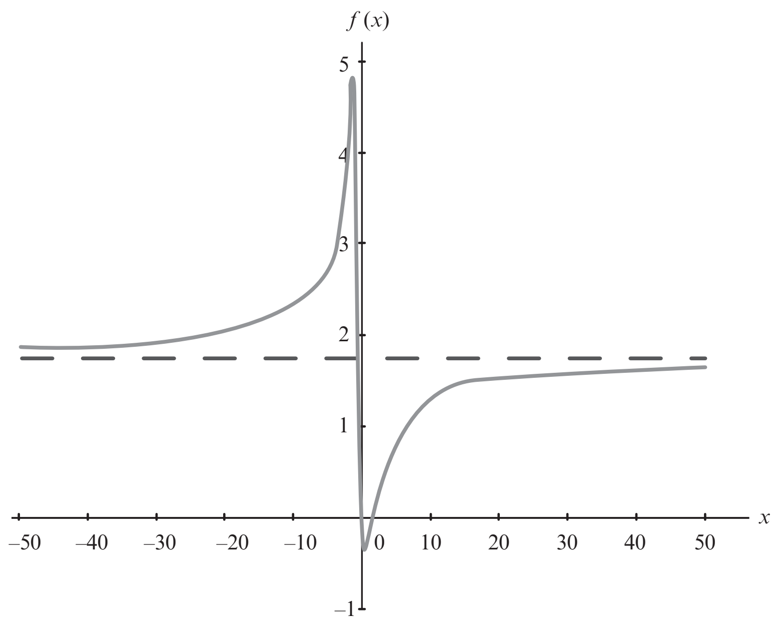


Figura 1.18. La gráfica muestra que la asíntota horizontal es $f_3(x)=\frac{5}{3}$ y, como ya se vio, la curva de la función la atraviesa.

Ejercicios 1.10. Asíntotas horizontales

De existir, determine la asíntota horizontal para las funciones siguientes:

Función	Respuesta	Función	Respuesta
1. $f(x)=\dfrac{x^3+5x-x}{x^3+6x}$	$y-1=0$	**4.** $f(x)=\dfrac{6x^3+5x+3}{3x^3-6x^2+8x-1}$	$y-2=0$
2. $f(x)=\dfrac{x-6}{x^3+1}$	$y=0$	**5.** $f(x)=\dfrac{x^2+7x-8}{3x^5-5x^3-7x-2}$	$y=0$
3. $f(x)=\dfrac{7x^2-9x+3}{5x^2+8x}$	$y-\dfrac{7}{5}=0$	**6.** $f(x)=\dfrac{4x^7-5}{9x^7+6x^3+2x}$	$y-\dfrac{4}{9}=0$

1.2.8. Límites infinitos en el infinito

En apartados previos se observó lo que sucede cuando el grado del polinomio en la posición del numerador es menor que el grado del polinomio en la posición del denominador, y cuando el grado de ambos es igual. Ahora se verá lo que sucede cuando el grado del polinomio en la posición de numerador es mayor que el grado del polinomio en la posición del denominador.

Ejemplo 1.30. Límites infinitos en el infinito

Determine el límite de $f(x)$ cuando x tiende a infinito:

$$f(x)=\frac{7x^7+6x^3+7x^2-11x-4}{2x^4+5x^3+4x-3}$$

Solución: Se divide tanto el numerador como el denominador entre la potencia más grande de x, que en este ejemplo es x^7.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^7+6x^3+7x^2-11x-4}{2x^4+5x^3+4x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7x^7+6x^3+7x^2-11x-4}{x^7}}{\dfrac{2x^4+5x^3+4x-3}{x^7}}=\lim_{x\to\infty}\frac{7+\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{7}{x^5}-\dfrac{11}{x^6}+\dfrac{4}{x^7}}{\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{5}{x^4}+\dfrac{4}{x^6}-\dfrac{3}{x^7}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(7+\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{7}{x^5}-\dfrac{11}{x^6}+\dfrac{4}{x^7}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{5}{x^4}+\dfrac{4}{x^6}-\dfrac{3}{x^7}\right)}$$

Por el teorema anterior

$$\frac{7+0+0-0+0}{0+0+0-0}=\frac{7}{0}=\infty$$

El límite no es un número L al cual tiende $f(x)$, por tanto, lo llamamos *límite infinito en el infinito*.

Ejemplo 1.31. Límite infinito en el infinito

Determine el límite de $f(x)$ cuando x tiende a infinito:

$$f(x)=\frac{4x^7+3x^3+4x^2-8x-1}{3x^4+6x^3+5x-4}$$

Solución: Se divide tanto el numerador como el denominador entre la potencia más grande de x, que en este ejemplo es x^7.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^7+3x^3+4x^2-8x-1}{3x^4+6x^3+5x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{4x^7+3x^3+4x^2-8x-1}{x^7}}{\dfrac{3x^4+6x^3+5x-4}{x^7}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\dfrac{3}{x^4}+\dfrac{4}{x^5}-\dfrac{8}{x^6}-\dfrac{1}{x^7}}{\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{5}{x^6}-\dfrac{4}{x^7}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\dfrac{3}{x^4}+\dfrac{4}{x^5}-\dfrac{8}{x^6}-\dfrac{1}{x^7}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{6}{x^4}+\dfrac{5}{x^6}-\dfrac{4}{x^7}\right)}$$

Por el teorema anterior

$$\frac{4+0+0-0+0}{0+0+0-0}=\frac{4}{0}=\infty$$

El límite no es un número L al cual tiende $f(x)$.

Ahora, es posible plantear:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\infty \text{ si } n>m, \text{ para } a_n\neq 0 \text{ y } b_m\neq 0.$$

Ejercicios 1.11. Límites infinitos en el infinito

Determine $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ para la siguientes funciones:

1. $f(x)=\dfrac{x^3-2}{x+4}=\infty$
2. $f(x)=\dfrac{x^6-5x^3-8x}{x^2-5}=\infty$
3. $f(x)=\dfrac{x^3+1}{9x^4+2x-5}=0$
4. $f(x)=\dfrac{2x-7}{9}=\infty$
5. $f(x)=\dfrac{x^7-6x^6-9x^2+5}{x^3-5x}=\infty$

1.2.9. Asíntotas oblicuas

Una situación de especial importancia en las funciones racionales es cuando el grado del polinomio numerador es mayor que el del polinomio denominador, pero solo en una unidad. Esto puede ejemplificarse con la siguiente función, la cual se analizará con más detalle en el ejemplo siguiente:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-4}$$

Observe que el polinomio numerador tiene grado dos y el polinomio denominador tiene grado uno, lo cual cumple con las condiciones que se buscan analizar. Siempre que se tenga una situación de este tipo, se encuentra lo que se conoce como *asíntota oblicua*.

Una asíntota oblicua es la recta $mx+b$ con $m\neq 0$ para la cual, conforme x se aleja del origen, la diferencia entre $f(x)$ y $mx+b$ tiende a cero; esto se expresa así:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(mx+b)]=0$$

Ejemplo 1.32. Asíntotas oblicuas

De existir, determine la asíntota oblicua para: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-4}$

Solución: Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador en una unidad, sí existe una asíntota oblicua. Para determinarla se realiza lo siguiente:

Al dividir los polinomios queda:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-4}=x+4+\frac{17}{x-4}$$

Si $x\to\infty$ entonces $\dfrac{17}{x-4}\to 0$ $\to 0$ y, por tanto, $f(x)\to(x+4)$

La recta $f_3(x)=x+4$ satisface la condición siguiente:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+1}{x-4}-(mx+b)\right]=0$$

Se procede con la verificación:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+1}{x-4}-(x+4)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+1}{x-4}-\frac{(x+4)(x-4)}{x-4}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+1}{x-4}-\frac{x^2-16}{x-4}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+1-x^2+16}{x-4}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{17}{x-4}=0$$

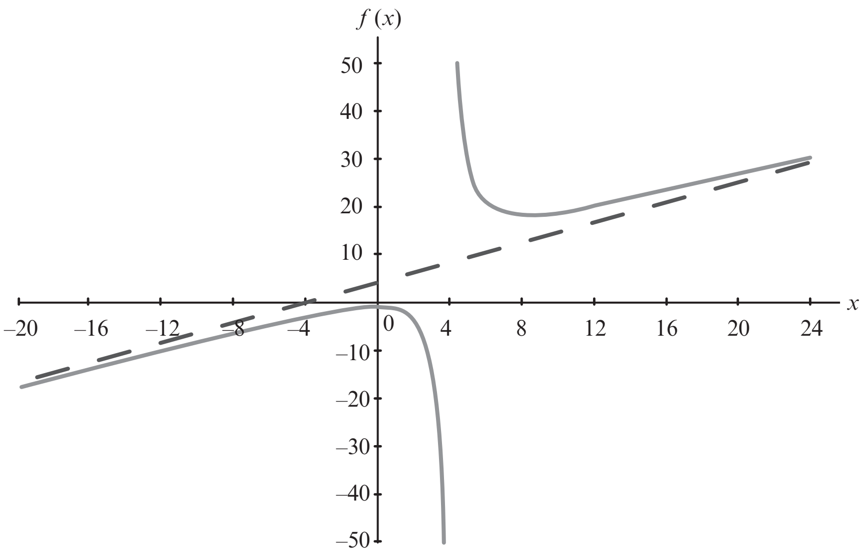


Figura 1.19 En la gráfica se observa que si x toma valores cada vez mayores (tanto positivos como negativos), la curva de la función se acerca cada vez más a la recta $f_3(x) = x + 4$.

Ejemplo 1.33. Asíntotas oblicuas

Si la hay, determine la asíntota oblicua para $f(x) = \dfrac{x^3 + x + 4}{x^2 - 4}$

Solución: Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador en la unidad, sí existe asíntota oblicua. Para determinarla se procede como se muestra a continuación:

Primero, se dividen los polinomios, y quedan:

$$f(x) = \frac{x^3 + x + 4}{x^2 - 4} = x + \frac{5x + 4}{x^2 - 4}$$

Si $x \to \infty$ entonces $\dfrac{5x+4}{x^2-4} \to 0$ y, por tanto, $f(x) \to x$.

La recta $f_3(x) = x$ satisface la condición

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3 + x + 4}{x^2 - 4} - (mx + b) \right] = 0$$

Se procede con la verificación:

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3 + x + 4}{x^2 - 4} - x \right] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3 + x + 4}{x^2 - 4} - \frac{x\left(x^2 - 4\right)}{x^2 - 4} \right] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3 + x + 4}{x^2 - 4} - \frac{x^3 - 4x}{x^2 - 4} \right]$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^3 + x + 4 - x^3 + 4x}{x^2 - 4} \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{5x + 4}{x^2 - 4} = 0$$

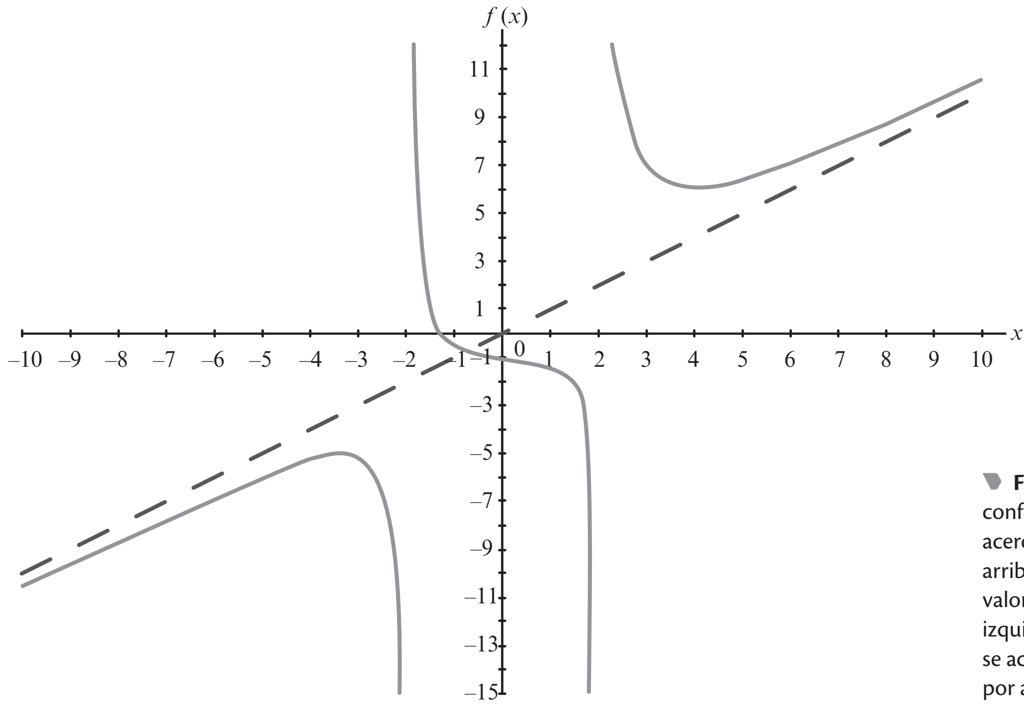


Figura 1.20. Se percibe que, conforme x crece, la curva se acerca a la recta $f_3(x) = x$ por arriba de la recta, pero si la x toma valores que tiendan hacia la izquierda (más negativos), la curva se acerca más a la recta $f_3(x) = x$ por abajo.

Ejemplo 1.34. **Asíntota oblicua**

Si la hay, determine la asíntota oblicua para $f(x) = \dfrac{x^3 - x + 4}{x^2 - 1}$

Solución: Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador en la unidad, sí existe asíntota oblicua. Para determinarla se procede como se muestra a continuación:

Primero, se dividen los polinomios, y quedan:

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 4}{x^2 - 1} = x + \frac{4}{x^2 - 1}$$

Si $x \to \infty$ entonces $\dfrac{4}{x^2 - 1} \to 0$ y, por tanto, $f(x) \to x$

La recta $f_3(x) = x$ satisface la condición

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3 - x + 4}{x^2 - 1} - (mx + b)\right] = 0$$

Se procede con la verificación:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3 - x + 4}{x^2 - 1} - x\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3 - x + 4}{x^2 - 1} - \frac{x\left(x^2 - 1\right)}{x^2 - 1}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3 - x + 4}{x^2 - 1} - \frac{x^3 - x}{x^2 - 1}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3 - x + 4 - x^3 + x}{x^2 - 4}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2 - 1} = 0$$

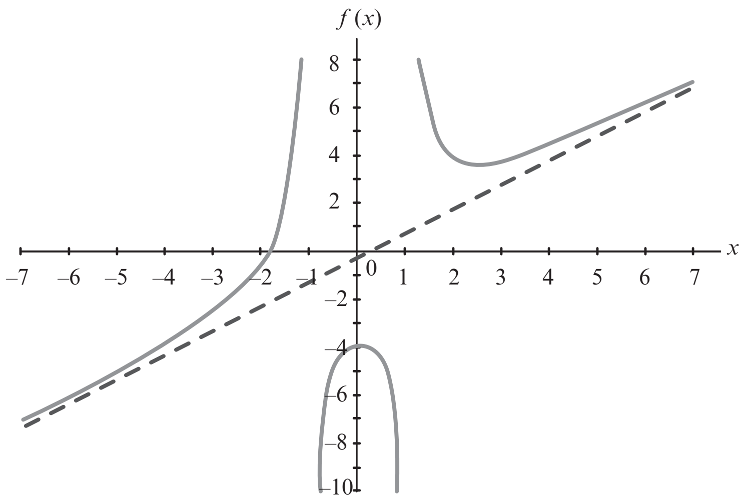


Figura 1.21. En esta gráfica si $x \to +\infty$ o si $x \to -\infty$ $f(x) \to f_3(x) = x$, pero en ambas situaciones se acerca por arriba de la asíntota.

Ejemplo 1.35. Asíntota oblicua

De existir, determine la asíntota oblicua para $f(x) = \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 9}$

Solución: Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador en más de la unidad, no existe asíntota oblicua, como se muestra en la gráfica de la siguiente figura.

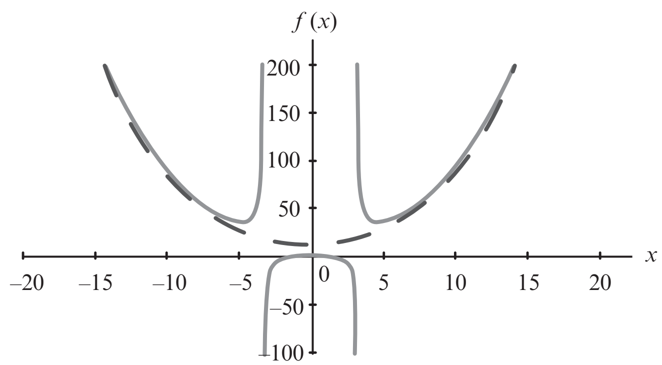


Figura 1.22. En la gráfica de $f(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 9}$ se observa que si x se aleja del cero, la curva se acerca cada vez más a una parábola.

Como se observa, además de las rectas verticales, horizontales y oblicuas, hay otros tipos de asíntotas, las cuales no se tratarán en este curso.

Ejercicios 1.12. Asíntota oblicua

De existir, determine la asíntota oblicua para cada función de las que se presentan a continuación:

Función	Respuesta	Función	Respuesta
1. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$	$y = x + 1$	**4.** $f(x) = \dfrac{-2x^3 - 3x + 2}{x^2 + x - 1}$	$y = -2x + 2$
2. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 3}{x - 1}$	$y = x + 2$	**5.** $f(x) = \dfrac{x^4 - x^2 + 1}{x^3 - 1}$	$y = x$
3. $f(x) = \dfrac{2x^4 + 3x - 4}{x^3 + 2x - 3}$	$y = 2x$		

1.3. Continuidad

Está muy relacionada con el aspecto gráfico, y es una característica más para conocer acerca del comportamiento de las funciones. Este concepto se definirá matemáticamente más adelante, mientras tanto trabajaremos con la idea intuitiva de continuidad.

1.3.1. Idea intuitiva de continuidad

Tener al menos una idea intuitiva de continuidad es útil, al menos para saber si la variable dependiente existe para algún valor de la variable independiente o para un conjunto de valores de ésta.

> Una función $f(x)$ es continua si es posible realizar una gráfica sin despegar el instrumento de trazado de la superficie u observar espacios en medio de dos puntos de la gráfica de la función.

1.3.2. Continuidad en un punto

Para que una función sea continua en un punto no debe presentarse alguna de las tres situaciones siguientes:

1. Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

La gráfica no existe en $x = 3$ porque no hay un valor para la variable dependiente (al menos en el conjunto de los números reales), por tanto no puede formarse una pareja coordenada para ser ubicada en el plano cartesiano, por lo que no es posible hacer un trazado ininterrumpido y decimos que la función no es continua en ese punto.

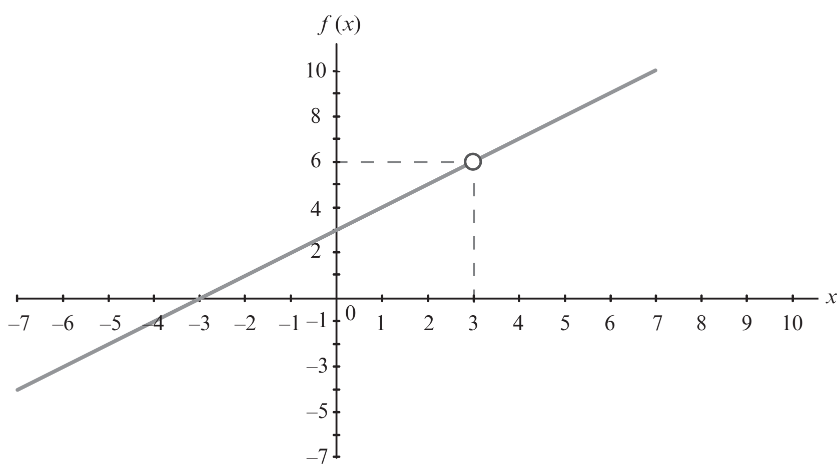


Figura 1.23. Se observa una interrupción de hueco en el trazo de la gráfica, lo cual hace que la función sea discontinua para $x = 3$; aunque el límite por la izquierda es igual al límite por la derecha, la función no existe en $x = 3$.

2. Para la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x < 2 \\ -x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

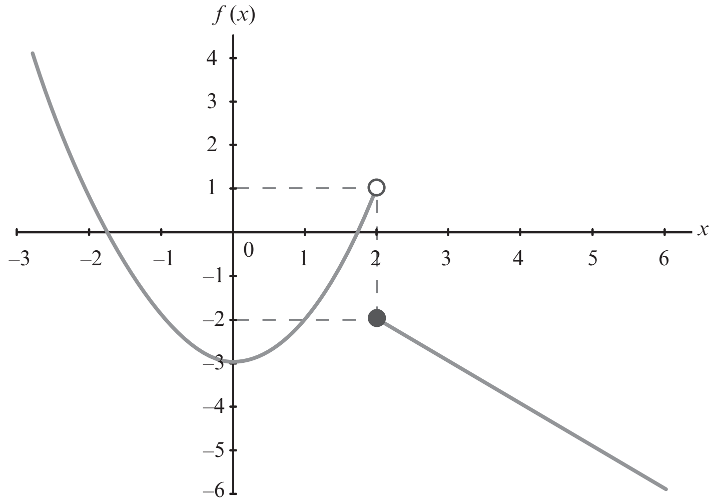


Figura 1.24 La gráfica muestra un salto en su trazo, por lo que la función es discontinua en $x = 2$; el límite por la izquierda es diferente al límite que va por la derecha.

La gráfica de la figura 1.24 presenta un salto en $x = 2$ porque no existe el límite bilateral, pues $\lim\limits_{x\to 2^{-1}} f(x) = 1$, mientras que $\lim\limits_{x\to 2^{+}} f(x) = -2$.

3. Para la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Se procede a realizar su gráfica:

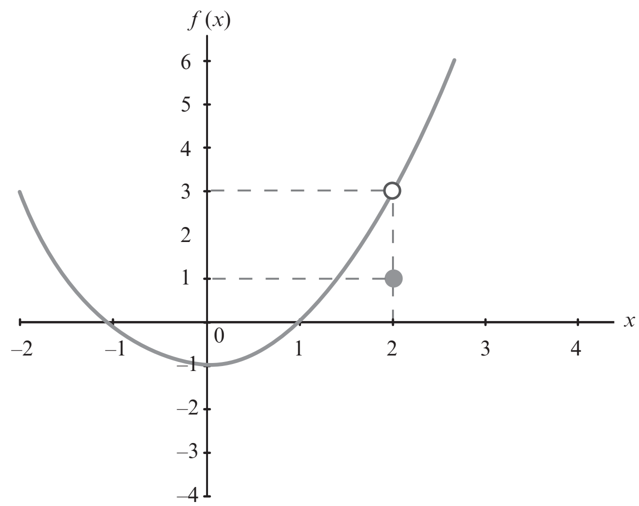


Figura 1.25 Se observa que si se acerca por la izquierda de $x = 2$, la variable dependiente toma el mismo valor que si lo hace por la derecha de $x = 2$, pero ese valor es diferente a la función evaluada en $x = 2$.

La gráfica de la figura 1.25 no presenta ninguna de las dos situaciones anteriores, ya que esta existe en $x = 2$ y también el límite bilateral para $f(x)$ cuando $x \to 2$. Pero ambos son diferentes.

Una función es continua en $x = a$ si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. $f(a)$ existe.
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe.
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Ejemplo 1.36. Continuidad

Ahora, analice la continuidad de $f(x)=\dfrac{2}{x^2+4}$

Solución: El dominio de la función es el conjunto de los números reales, excepto aquellos valores de x que anulen el denominador. Como $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales, el dominio de $f(x)$ en este ejemplo es el conjunto de los números reales; además, describe el mismo comportamiento matemático para todos los valores de su dominio; es decir, no es una función definida en secciones. Se concluye que esta función es continua en todo punto $x = a \in \mathbb{R}$.

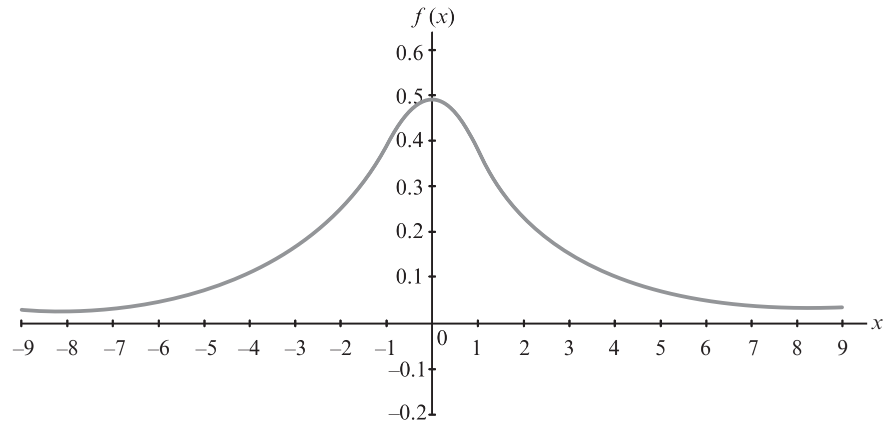


Figura 1.26. En esta gráfica se observa una curva continua en todos los valores de la variable independiente.

Ejemplo 1.37. Continuidad

Analice la continuidad de $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-2x-8}$

Solución: El denominador vale cero para $x_1 = –2$ y $x_2 = 4$, por lo que el dominio de esta función es $\mathbb{R} \neq \{–2, 4\}$. Se concluye que la función es continua para todos los puntos del dominio $\mathbb{R} \neq \{–2, 4\}$. Observe que la función no tiene una pareja coordenada que pertenezca al conjunto de los números reales porque se presenta una división entre cero en $x = 2$ y $x = 4$, por lo que esta función no es continua en $x = –2$ y $x = 4$.

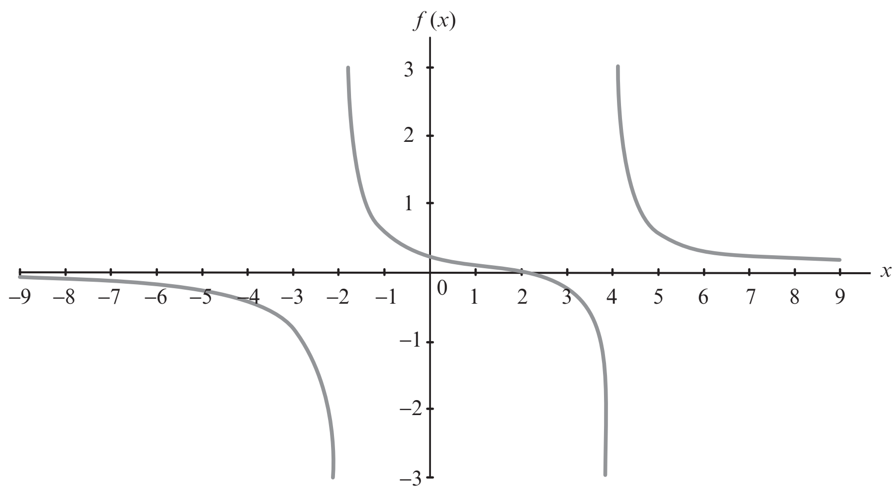


Figura 1.27. Los números −2 y 4 están fuera del dominio de la función y la gráfica muestra discontinuidad en dichos valores.

Ejemplo 1.38. Continuidad

Dada $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & \text{si } x\le 0\\ x+2 & \text{si } x>0\end{cases}$, determine si es continua en $x = 0$.

Solución:

1. $f(a)=1$ Cumple con la primera condición.

2. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=2$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ No cumple con la segunda condición, no es continua en $x=0$.

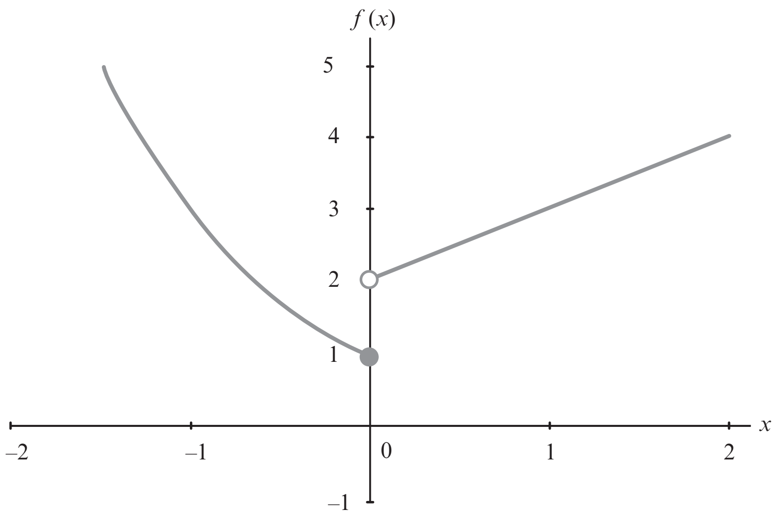


Figura 1.28. Según la gráfica, la curva presenta una discontinuidad de salto en $x=0$, ya que los límites unilaterales son diferentes.

Ejemplo 1.39. Continuidad

Para $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{si } x\neq 3 \\ A & \text{si } x=3 \end{cases}$

Determine si existe un número real A que haga a $f(x)$ continua en $x=3$.

Solución:

1. $f(a)$ existe

$f(3)=A$ existe en $\mathbb{R}$

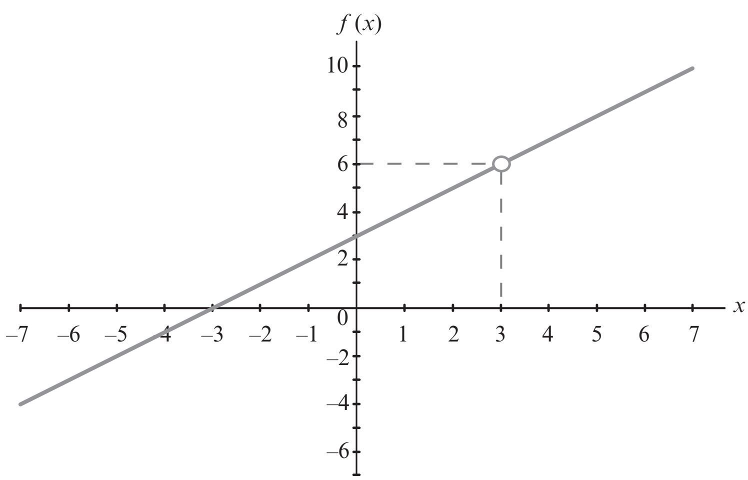


Figura 1.29*a*). Gráfica de $f(x)$ sin un valor para A.

Cumple con la primera condición.

2. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-9}{x-3}$$

$$6 = 6$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 6$$

El límite bilateral existe, por lo que se cumple con la segunda condición de continuidad.

3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$$

$$6 = A$$

Se cumple con la tercera condición si $A = 6$.

Para que la función sea continua en $x = 3$, A debe ser igual a 6.

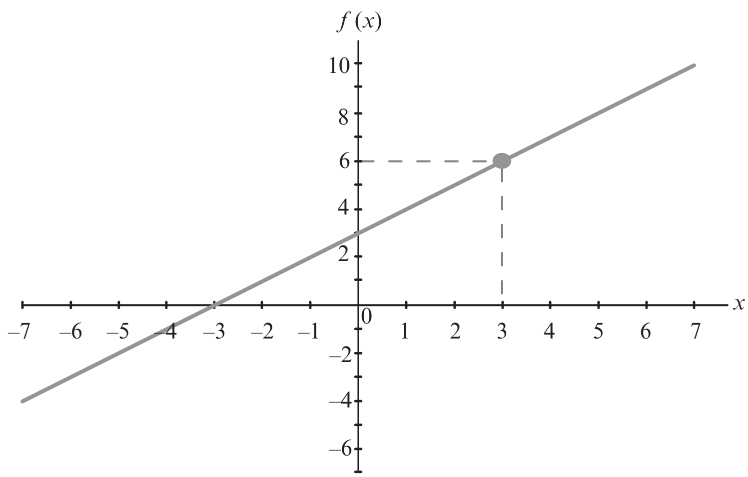


Figura 1.29*b*). Si $A = 6$ consigue el trazo de la función sin que presente interrupciones.

Ejemplo 1.40. **Continuidad**

Para $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ A & \text{si } x = 2 \end{cases}$

Determine si existe un número real A que haga a $f(x)$ en $x = 2$.

Solución:

1. $f(a) = \text{existe}$

$f(2) = A$ existe en $\mathbb{R}$

Si A es un número real, se cumple con la primera condición de continuidad.

2. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{2}{x-2}$$

$$-\infty \neq +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

El límite bilateral no existe y no se cumple con la segunda condición. Recuerde que los límites unilaterales deben existir en el conjunto de los números reales.

No es posible asignar un número $\mathbb{R}$ a A para que la función sea continua $x = 2$.

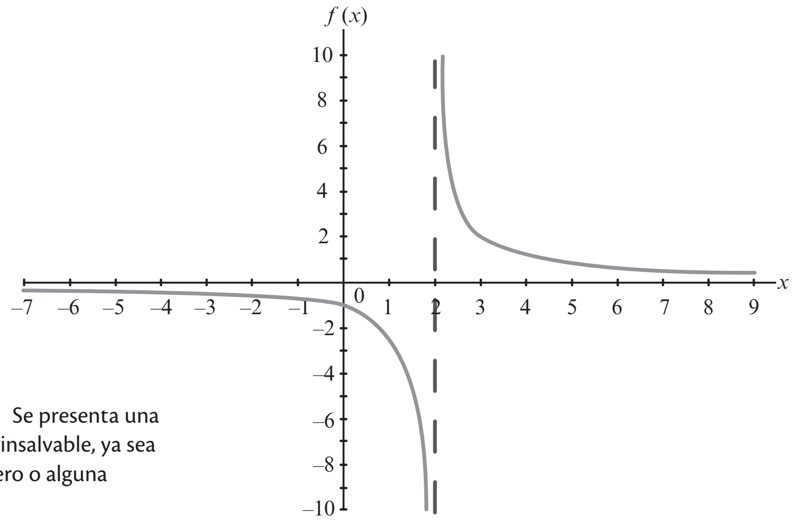


Figura 1.30. Se presenta una discontinuidad insalvable, ya sea por algún número o alguna función.

Ejemplo 1.41. Continuidad

Para $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & \text{si } x \leq 0 \\ A - 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Determine si existe un número real A que haga a $f(x)$ en $x = 0$.

Solución:

1. $f(a)$ existe

$f(0) = 5$ existe en $\mathbb{R}$

Se cumple la primera condición de continuidad.

2. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^-} (x^2 + 5) = \lim_{x\to 0^+} (A - 2x)$$

$$5 = A - 0$$

$$5 = A$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 5$$

Si $A = 5$, el límite bilateral existe, por tanto se cumple con la segunda condición de continuidad.

3. $\lim_{x\to 0} f(x) = f(a)$

$5 = 5$

Se cumple con la tercera condición de continuidad.

Para que la función sea continua en $x = 0$, A debe ser igual a 5.

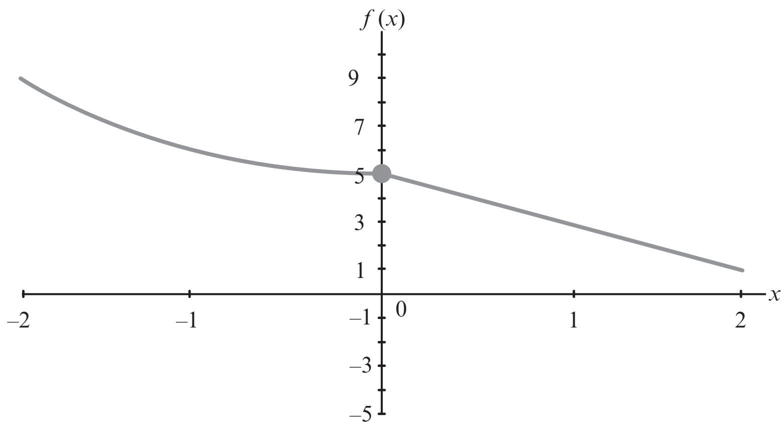


Figura 1.31. Gráfica de $f(x) = \begin{cases} x^2+5 & \text{si } x \le 0 \\ A-2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ con $A = 5$.

Ejemplo 1.42. **Continuidad**

Para $f(x) = \begin{cases} -3x^2+4 & \text{si } x < -1 \\ Ax+B & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ x^2+x+5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Determine cuánto debe valer A y B que esta función sea continua en $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

Para continuidad en $x = -1$	Para continuidad en $x = 1$
1. $f(a)$ existe $f(-1) = -A + B$	$f(a)$ existe $f(1) = A + B$
2. $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$ $\lim_{x\to -1^-} \left(-3x^2+4\right) = \lim_{x\to -1^+} (Ax+B)$ $1 = -A + B$	$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$ $\lim_{x\to 1^-} (Ax+B) = \lim_{x\to 1^+} \left(x^2+x+5\right)$ $A + B = 7$

Se resuelve el sistema de ecuaciones:

$A = 3$ y $B = 4$

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$ $\lim_{x\to -1^-} \left(-3x^2+4\right) = \lim_{x\to -1^+} (3x+4)$ $1 = 1$	$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$ $\lim_{x\to 1^-} (3x+4) = \lim_{x\to 1^+} \left(x^2+x+5\right)$ $7 = 7$
El límite bilateral $\lim_{x\to -1} f(x)$ existe si $A = 3$ y $B = 4$	El límite bilateral $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe si $A = 3$ y $B = 4$

3.

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$$
$$\lim_{x \to -1} \left(-3x^2 + 4\right) = -A + B$$
$$1 = -3 + 4$$
$$1 = 1$$

Se cumple con la tercera condición si

$A = 3$ y $B = 4$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$
$$\lim_{x \to 1} (3x + 4) = A + B$$
$$7 = 3 + 4$$
$$7 = 7$$

Se cumple con la tercera condición si

$A = 3$ y $B = 4$.

Hay continuidad para $f(x)$ en $x = -1$ y $x = 1$ si $A = 3$ y $B = 4$.

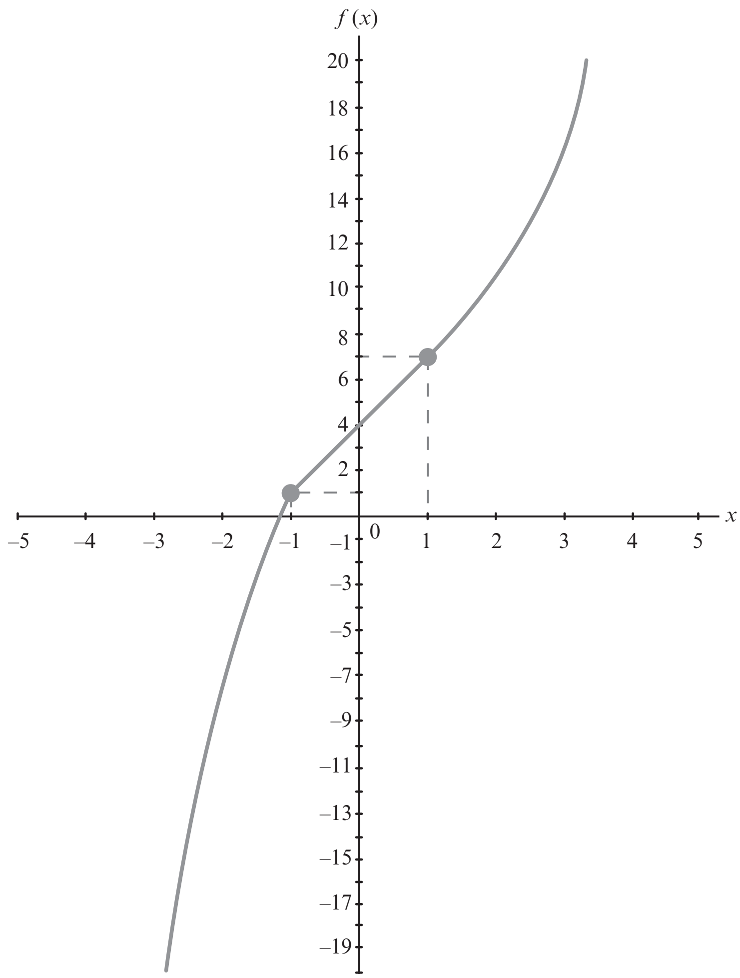


Figura 1.32. En la gráfica se observa cómo unir dos funciones de segundo grado mediante una función lineal para que la curva sea continua para todo el dominio de la función.

Mediante las condiciones de continuidad se resolverán los ejercicios siguientes:

Ejercicios 1.13. **Continuidad**

Determine si $f(x)$ es continua en el punto indicado.

1. $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si} \quad x < 2 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$ en $x = 2$

Respuesta: No es continua, no existe.

2. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x^2 + 3x & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$ en $x = -1$

Respuesta: Continua.

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x<0\\ 2x^2 & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$ en $x=0$

Respuesta: Continua.

4. $f(x)=\begin{cases}3x & \text{si} \quad x\leq 0\\ x^2-1 & \text{si} \quad x>0\end{cases}$ en $x=0$

Respuesta: No hay continuidad en $x=0$.

5. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si} \quad x\neq 2\\ 3 & \text{si} \quad x=2\end{cases}$ en $x=2$

Respuesta: No hay continuidad en $x=2$.

6. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{-x}-2}{x+4} & \text{si} \quad x<-4\\ 2x+A & \text{si} \quad x\geq -4\end{cases}$ en $x=-1$

Respuesta: No hay continuidad en $x=1$.

Determine el valor de A y/o B para que la función sea continua en los puntos indicados:

7. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{-x}-2}{x+4} & \text{si} \quad x<-4\\ 2x+A & \text{si} \quad x\geq -4\end{cases}$ en $x=-1$

Respuesta: No hay continuidad.

8. $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x<0\\ 2x^2-A & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$ en $x=0$

Respuesta: $A=-1$

9. $f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{si} \quad x<0\\ 3x+A & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$ en $x=0$

Respuesta: $A=-1$

10. $f(x)=\begin{cases}3x-A & \text{si} \quad x<0\\ x^2-x+1 & \text{si} \quad x\geq 0\end{cases}$ en $x=0$

Respuesta: $A=-1$

11. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-x^3-2x^2+x-2}{x-2} & \text{si} \quad x\neq 2\\ 26A & \text{si} \quad x=2\end{cases}$ en $x=2$

Respuesta: $A=1/2$

12. $f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{si} \quad x\leq -1\\ Ax+B & \text{si} \quad -1<x\leq 2\\ 4x-2 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$ en $x=-1$ y en $x=2$

Respuesta: $A=3$, $B=0$

13. $f(x)=\begin{cases}3x+A & \text{si} \quad x<-1\\ x^2 & \text{si} \quad -1\leq x\leq 3\\ 2x+B & \text{si} \quad x>3\end{cases}$ en $x=-1, 3$

Respuesta: $A=4$, $B=3$

14. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x} & \text{si} \quad x<-2\\ Ax+B & \text{si} \quad -2\leq x\leq 1\\ 2^x & \text{si} \quad x>1\end{cases}$ en $x=-2, 1$

Respuesta: $A=1$, $B=1$

15. $f(x)=\begin{cases}A+x & \text{si} \quad x\leq -1\\ \dfrac{x^6-1}{x^4-1} & \text{si} \quad -1<x<1\\ B+3x & \text{si} \quad x\geq 1\end{cases}$ en $x=\pm 1$

Respuesta: $A=3/2$, $B=-3/2$

16. $f(x)=\begin{cases}x^2+x+2 & \text{si} \quad x<-1\\ Ax+B & \text{si} \quad -1\leq x\leq 1\\ 3x-5 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$ en $x=\pm 1$

Respuesta: $A=-2$, $B=0$

1.4. Derivada

Antes del cálculo diferencial se tenían dos grandes problemas sin resolver: la recta tangente a la curva de una función y la velocidad instantánea. Ambos problemas, de naturaleza distinta, convergen en lo mismo al analizar de forma gráfica el movimiento de un cuerpo con respecto del tiempo como se muestra en las siguientes figuras.

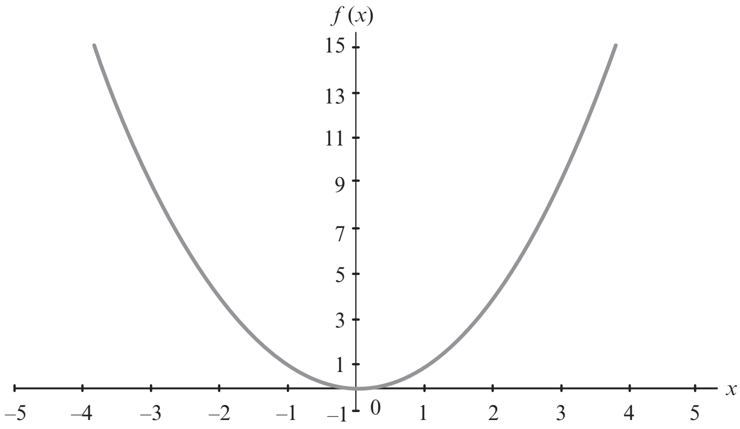


Figura 1.33a). Curva de $f(x) = x^2$.

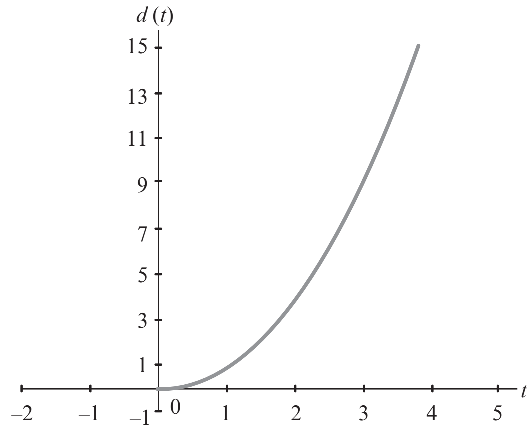


Figura 1.33b). Curva de $d(t) = t^2$ movimiento de un cuerpo, con la distancia en metros y el tiempo en segundos.

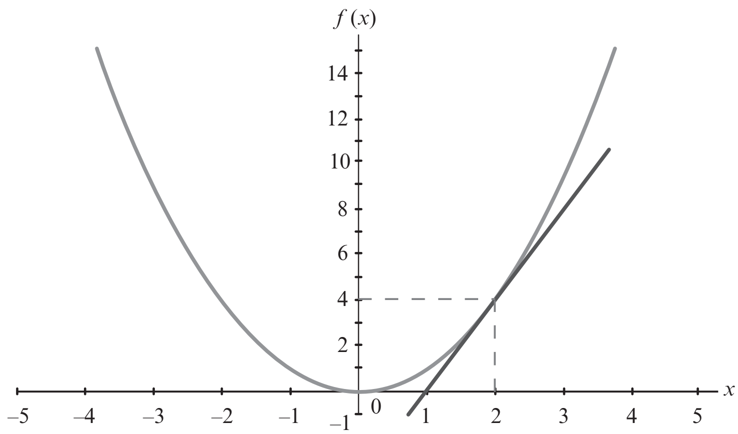


Figura 1.34a). Curva de $f(x) = x^2$, con recta tangente en $x = 2$.

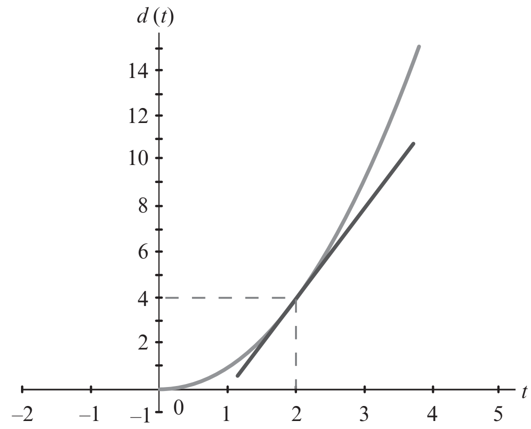


Figura 1.34b). Curva de $d(t) = t^2$ movimiento de un cuerpo, con la distancia en metros y el tiempo en segundos, con una recta tangente a los 2 segundos.

En ambos casos, el problema era encontrar el valor de la pendiente en un solo punto. En el caso geométrico la fórmula de la pendiente es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y al tratarse de un solo punto el valor de $x_2 = x_1$ y $y_2 = y_1$ se llega a una división de cero entre cero $m = \frac{y_2 - y_2}{x_2 - x_2} = \frac{y_1 - y_1}{x_1 - x_1} = \frac{0}{0}$. En el caso de la velocidad la fórmula es $v = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$, pero al desear la velocidad en un instante y no en un intervalo de tiempo (al considerar un intervalo se calcula la velocidad promedio) $t_2 = t_1$ y nuevamente se presenta una operación que no tiene solución en el conjunto de los números reales.

1.4.1. El problema de la tangente y la velocidad

Como ya establecimos previamente, el problema era calcular el valor de la pendiente, situación que se resolvió aplicando el concepto de límite; primero lo aplicaremos en el problema de la recta tangente. Si tenemos una función continua en el intervalo I de valores de su dominio y $a \in I$ y $b \in I$, como se muestra en la siguiente figura:

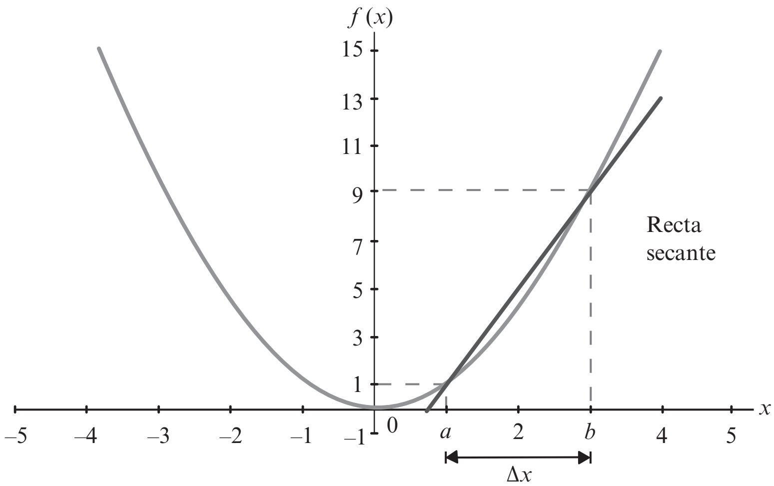


Figura 1.35. Función con una recta secante $(a, f(a))$ $(b, f(b))$.

En este momento podemos calcular la pendiente de la recta secante, mediante:

$$m_{\substack{\text{recta}\\ \text{secante}}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Con el cálculo de la expresión anterior no hay problema matemático; ahora, si b se acerca a a, como se muestra en la siguiente figura:

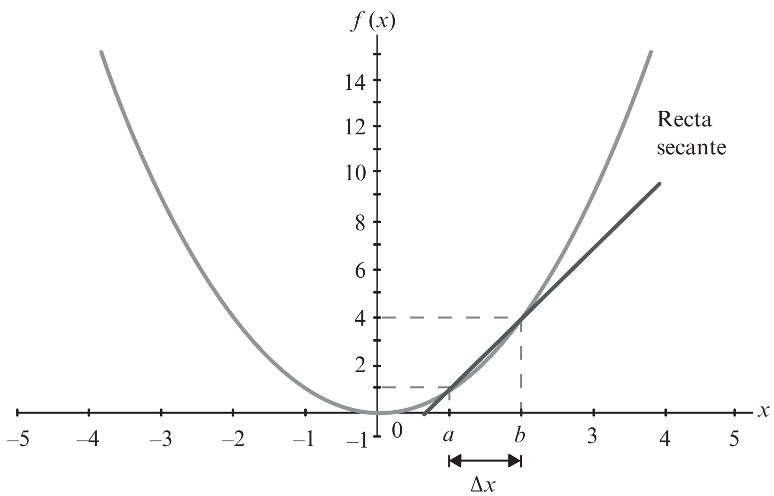


Figura 1.36. Función con una recta secante $(a, f(a))$ $(b, f(b))$.

conforme $b \to a$, entonces $\Delta x \to 0$ para evitar el error matemático de dividir entre cero (puesto que $x \neq 0$). Se plantea el límite de la pendiente de la recta secante cuando $b \to a$ o $\Delta x \to 0$

si

$$m_{\substack{\text{recta}\\ \text{secante}}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\lim_{b \to a}\left(m_{\substack{\text{recta}\\ \text{secante}}}\right) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m_{\substack{\text{recta}\\ \text{tangente}}}$$

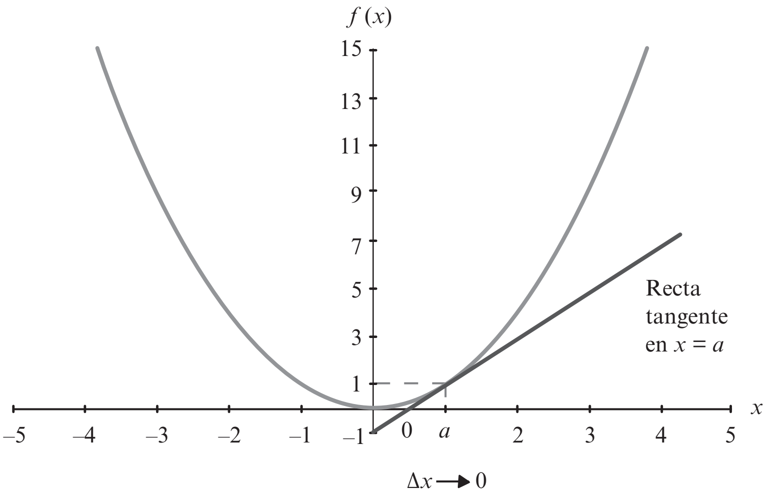


Figura 1.37. Curva de la función $f(x)$ con recta tangente en $x = a$.

La determinación del límite anterior se realizará más adelante, pero este es buen momento para analizar sus componentes:

$f(b)-f(a)$	Variación o cambio de la variable dependiente.
$b-a$	Variación o cambio de la variable independiente.
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$	Razón del cambio de la variable dependiente respecto al cambio de la variable independiente.
$\lim\limits_{b\to a}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$	Límite de la razón de cambio de la variable dependiente respecto a la variable independiente, cuando el cambio de la variable independiente tiende a cero.

Ahora realizaremos lo mismo para el problema de velocidad instantánea (velocidad en un instante del tiempo).

Si un móvil se desplaza de $d(a)$ a $d(b)$ y lo realiza en $\Delta t = b - a$ puede representarse gráficamente como se muestra a continuación:

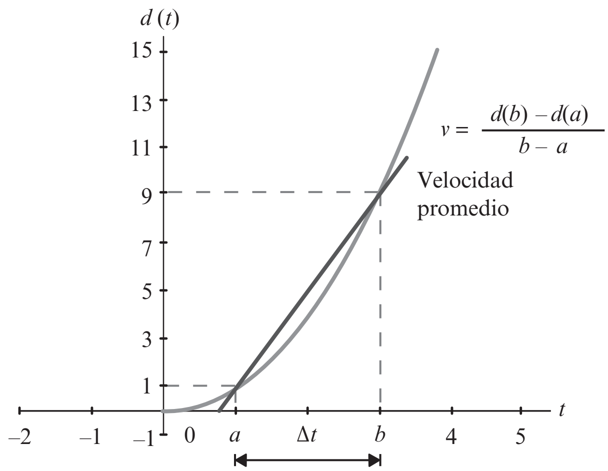


Figura 1.38. La pendiente de la recta secante es la velocidad promedio del móvil.

La velocidad promedio en que realizó el movimiento es:

$$v_{\text{media}} = \frac{d(b)-d(a)}{b-a}$$

Observamos que la expresión matemática es igual a la del cálculo de la pendiente de la recta secante.

Si el tiempo b se acerca al tiempo a, el Δt disminuye.

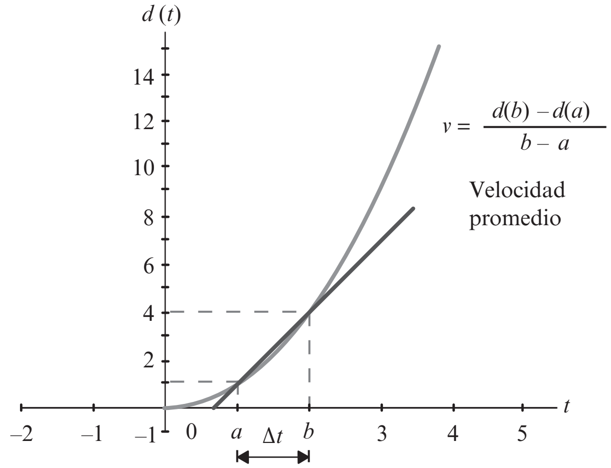


Figura 1.39. Aunque el intervalo de tiempo sea menor, sigue siendo un intervalo y, por tanto, la velocidad sigue siendo velocidad promedio.

Ahora, si hacemos que $b \to a$ entonces $\Delta t \to 0$. Así evitamos el error de dividir entre cero, puesto que $\Delta t \neq 0$ si determinamos el límite de la velocidad media cuando $b \to a$ o $\Delta t \to 0$

$$v_{\text{media}} = \frac{d(b)-d(a)}{b-a}$$

$$\lim_{b\to a}(v_{\text{media}}) = \lim_{b\to a}\frac{d(b)-d(a)}{b-a} = v_{\text{instantánea}}$$

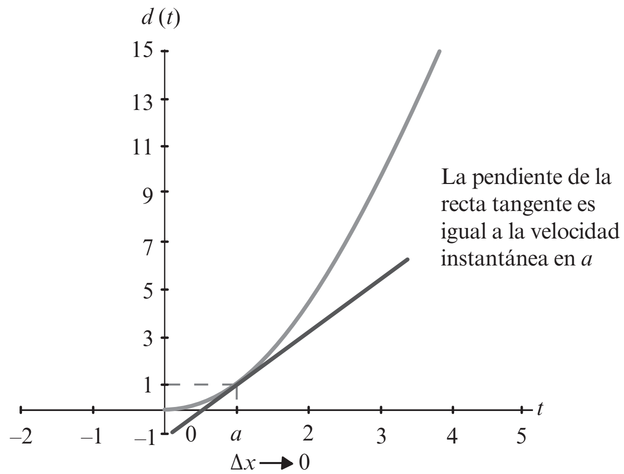


Figura 1.40. Si a la velocidad promedio se le determina el límite cuando $b \to a$ se obtiene la velocidad instantánea en un momento a del tiempo.

Llegando a la misma solución para ambos problemas.

Ejemplo 1.43. De recta tangente

Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 + 2$ en $x = 1$.

Solución:

1. Damos una variación a x, la cual simbolizamos con Δx y repercute en una variación en $f(x)$:

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 + 2$$

Desarrollamos

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 + 2$$
$$f(x+\Delta x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2$$

2. Determinamos la variación, restando la función inicial a la última expresión.

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+2 \\ -\ f(x) &= -\left(x^2+2\right) \\ f(x+\Delta x)-f(x) &= \cancel{x^2}+2x\Delta x+\Delta x^2 \cancel{+2} - \cancel{x^2} \cancel{-2} \\ f(x+\Delta x)-f(x) &= 2x\Delta x+\Delta x^2 \end{aligned}$$

3. Dividimos ambos lados entre Δx para establecer la razón de las variaciones.

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}$$

Simplificamos

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{2x\cancel{\Delta x}+\Delta x^{\cancel{2}}}{\cancel{\Delta x}}$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=2x+\Delta x$$

4. Determinamos el límite a ambos lados de la igualdad cuando $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x=m_{\substack{\text{recta}\\ \text{tangente}}}$$

Si $x=1,\ m_{\substack{\text{recta}\\ \text{tangente}}}=2(1)=2.$

Sólo nos falta un punto; nuevamente, si $x = 1$ la función evaluada en ese valor, nos dará la ordenada del punto requerido: $f(1) = (1)^2 + 2 = 3$, el punto es (1, 3). Por tanto,

$$\begin{aligned} y &= m(x-x_1)+y_1 \\ y &= 2(x-1)+3 \\ y &= 2x-2+3 \\ y &= 2x+1 \end{aligned}$$

es la ecuación de la recta tangente de la curva de la función $f(x) = x^2 + 2$ en $x = 1$.

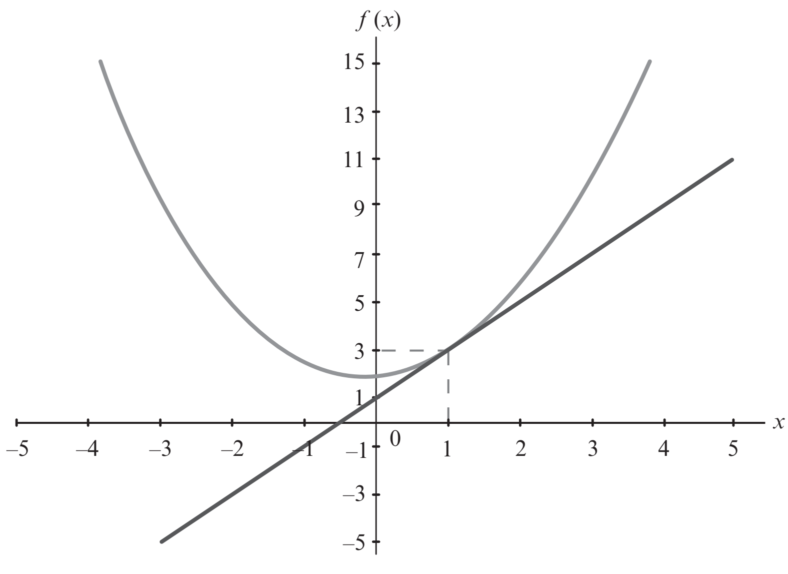


Figura 1.41. Gráfica de una función $f(x) = x^2 + 2$ y una recta tangente en cierto punto de la curva.

1.4.2. Definición de la derivada

La derivada o la función derivada (porque al derivar una función obtenemos una nueva función) es el límite que establecimos en la sección anterior.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$$

Es decir, la derivada es el límite de la razón del cambio de la variable dependiente respecto al cambio de la variable independiente cuando este último tiende a cero.

Las notaciones que más comúnmente se utilizan para denotar a la derivada de una función son:

$$\frac{df}{dx} \text{ o } f'(x)$$

O, en su defecto, si

$$y = f(x)$$
$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

siempre y cuando la función sea continua y la gráfica de dicha función sea una curva suave.

Para comprender mejor este concepto matemático realicemos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.44. Derivada por definición

Determine la derivada de $f(x) = x^2 + 5x - 3$.

Solución: Como se mencionó antes, el procedimiento consta de cuatro pasos:

1. Damos una variación a x, la cual simbolizamos con Δx y repercute en una variación en la variable dependiente $f(x)$:

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 + 5(x+\Delta x) - 3$$

Desarrollamos

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 + 5(x+\Delta x) - 3$$
$$f(x+\Delta x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 5x + 5\Delta x - 3$$

2. Determinamos la variación de $f(x)$, restando la función inicial a la última expresión.

$$f(x+\Delta x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 5x + 5\Delta x - 3$$
$$-\, f(x) = -(x^2 + 5x - 3)$$
$$f(x+\Delta x) - f(x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 \cancel{+5x} + 5\Delta x \cancel{-3} - \cancel{x^2} \cancel{-5x} \cancel{+3}$$
$$f(x+\Delta x) - f(x) = 2x\Delta x + \Delta x^2 + 5\Delta x$$

3. Dividimos ambos lados entre Δx para establecer la razón de las variaciones.

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 + 5\Delta x}{\Delta x}$$

Simplificamos

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2x\cancel{\Delta x} + \Delta x^{\cancel{2}} + 5\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}$$
$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 5$$

4. Determinamos el límite a ambos lados de la igualdad cuando $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x+5)=2x+5=\frac{df}{dx}=f'(x)$$

Ejemplo 1.45. Derivada por definición

Determine la derivada de $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$.

Solución:

1. Damos una variación a x, la cual simbolizamos con Δx y repercute en una variación en la variable $f(x)$:

$$f(x+\Delta x)=\frac{1}{x+\Delta x-2}$$

2. Determinamos la variación de $f(x)$, restando la función inicial a la última expresión.

$$f(x+\Delta x)=\frac{1}{x+\Delta x-2}$$
$$-f(x)=-\frac{1}{x-2}$$
$$f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{1}{x+\Delta x-2}-\frac{1}{x-2}=\frac{(x-2)-(x+\Delta x-2)}{(x+\Delta x-2)(x-2)}=\frac{\cancel{x}\cancel{-2}\cancel{-x}-\Delta x\cancel{+2}}{(x+\Delta x-2)(x-2)}$$
$$f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x-2)(x-2)}$$

3. Dividimos ambos lados entre Δx para establecer la razón de las variaciones.

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{\Delta x(x+\Delta x-2)(x-2)}$$

Simplificamos

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{-\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}(x+\Delta x-2)(x-2)}$$
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{-1}{(x+\Delta x-2)(x-2)}$$

4. Determinamos el límite a ambos lados de la igualdad cuando $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(x+\Delta x-2)(x-2)}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{-1}{(x-2)(x-2)}=\frac{-1}{(x-2)^2}=\frac{df}{dx}=f'(x)$$

Ejemplo 1.46. Derivada por definición

Calcule la derivada de $f(x)=\sqrt{x+2}$

Solución:

1. Damos una variación a x, la cual simbolizamos con Δx, llegando a una posición final $(x+\Delta x)$ y repercutiendo en que la variable dependiente $f(x)$ también llegue a una posición final $f(x+\Delta x)$:

$$f(x+\Delta x)=\sqrt{x+\Delta x+2}$$

2. Determinamos la variación de $f(x)$, restando la función inicial a la última expresión.

$$f(x+\Delta x)=\sqrt{x+\Delta x+2}$$
$$-f(x)=-\sqrt{x+2}$$
$$f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{x+\Delta x+2}-\sqrt{x+2}$$

Multiplicamos por el conjugado para racionalizar (simplificar).

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{x+\Delta x+2}-\sqrt{x+2}\times\frac{\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}}$$
$$f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{(x+\Delta x+2)-(x+2)}{\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}}$$
$$f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{\cancel{x}+\Delta x\cancel{+2}\cancel{-x}\cancel{-2}}{\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}}$$
$$f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}}$$

3. Dividimos ambos lados entre Δx para establecer la razón de las variaciones.

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}\right)}$$

Simplificamos

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\left(\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}\right)}$$
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}}$$

4. Determinamos el límite a ambos lados de la igualdad cuando $\Delta x\to 0$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+2}+\sqrt{x+2}}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+2}}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}=\frac{df}{dx}=f'(x)$$

Ejercicios 1.14. **Derivada por definición**

Determine la derivada de las funciones siguientes mediante la definición de la derivada:

1. $f(x)=3x^2+2x-7$

Respuesta: $f'(x)=6x+2$

2. $f(x)=\dfrac{5x-2}{x-3}$

Respuesta: $f'(x)=\dfrac{-13}{(x-3)^2}$

3. $f(z)=\sqrt{5-3z}$

Respuesta: $f'(z)=\dfrac{-3}{2\sqrt{5-3z}}$

4. $f(x)=(x-2)^3$

Respuesta: $f'(x)=3(x-2)^2$

5. $f(x)=\dfrac{3x}{2x+3}$

Respuesta: $f'(x)=\dfrac{9}{(2x+3)^2}$

6. $f(t)=\dfrac{2t+1}{t-3}$

Respuesta: $f'(t)=\dfrac{2t-1}{t-3}$

7. $f(z)=\sqrt{5-3z}$

Respuesta: $f'(z)=\dfrac{3}{2\sqrt{5+3z}}$

8. $f(x)=\dfrac{2+x}{x^3}$

Respuesta: $f'(x)=\dfrac{-2(x+3)}{x^4}$

Capítulo 2

La derivada y sus aplicaciones

Sumario

Introducción

En el capítulo anterior definimos la derivada de una función a través de la *regla de los cuatro pasos.* En este capítulo estudiaremos el cálculo (note el uso del artículo "el"; de cualquier manera, puede emplearse el término *cálculo*). Es innecesario enfatizar que esta disciplina es parte central de las ciencias físicas y un recurso tan importante que ningún estudiante puede permitirse el lujo de no ser eficiente en ésta. El objetivo de este capítulo y el siguiente es encontrar un punto intermedio entre un tratamiento completamente formal y el solo saber hacer por imitación. Para proporcionar este grado de comprensión es necesario que el lenguaje sea más preciso que el utilizado en el capítulo anterior, lo cual significa, principalmente, que usted se familiarizará otra vez con el uso de teoremas y el concepto de *límite*, ya que este es la base del cálculo diferencial. En el apartado siguiente presentamos algunos de los teoremas más importantes para el cálculo de derivadas.

2.1. Teoremas de derivación

Los siguientes teoremas se utilizan para derivar funciones algebraicas, y son el resultado de la aplicación de la definición de la derivada o derivación por los cuatro pasos a funciones elementales frecuentes.

Teorema 2.1 Derivadas de funciones algebraicas

Para cualquier número $n \neq 0$

$\dfrac{dc}{dx} = 0$	Derivada de una constante
$\dfrac{dx}{dx} = 1$	Derivada de la función identidad
$\dfrac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$	Derivada de la función potencia

En otras ocasiones, las funciones a derivar no son tan básicas porque se constituyen de más elementos matemáticos, pero la estructura que los agrupa (potencia, suma, producto y/o cociente) es recurrente en funciones matemáticas. A continuación mostramos las derivadas de funciones con la estructura mencionada:

Teorema 2.2 Derivación básica

Si $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en x, y si c es cualquier constante, entonces:

1.	$\dfrac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \dfrac{df(x)}{dx} + \dfrac{dg(x)}{dx}$	Suma
2.	$\dfrac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \dfrac{df(x)}{dx} - \dfrac{dg(x)}{dx}$	Diferencia
3.	$\dfrac{d}{dx}[cf(x)] = c\dfrac{df(x)}{dx}$	Producto de una constante c por una función f
4.	$\dfrac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f(x)\dfrac{dg(x)}{dx} + g(x)\dfrac{df(x)}{dx}$	Producto de funciones
5.	$\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)\dfrac{df(x)}{dx} - f(x)\dfrac{dg(x)}{dx}}{[g(x)]^2}$ Si $g(x) \neq 0$	Cociente de funciones

Es común que en la resolución de derivadas se emplee más de un teorema de derivación básica.

2.1.1. Derivadas de funciones algebraicas

En esta sección emplearemos los teoremas 2.1 y 2.2 para derivar funciones algebraicas cuya complejidad aumenta gradualmente sin llegar a ser extrema. Más adelante abordaremos la regla de la cadena o derivación de funciones compuestas, la cual ayuda a resolver la derivada de funciones más elaboradas.

Ejemplo 2.1. Derivadas de funciones algebraicas

Derive:

$$f(x) = x^4$$

Solución: Usando la derivada de la función potencia $\frac{df(x)}{dx} = \frac{dx^4}{dx} = 4x^3$

Utilizando los teoremas de derivación de suma, resta, multiplicación y división, así como del producto de una constante por una función y las fórmulas de derivación de funciones algebraicas, derive:

Ejemplo 2.2. Derivadas de funciones algebraicas

Derive las siguientes funciones algebraicas aplicando los teoremas 2.1 o 2.2, según corresponda:

1. $f(x) = 4x^3$
2. $f(x) = x^5 + x^2 - 1$
3. $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$
4. $f(x) = \frac{1}{x}$
5. $f(x) = x^2\sqrt{x}$

Solución:

1. En este caso observamos que $f(x)$ es, en realidad, una función compuesta formada por una constante 4 y una función potencia x^3.

   Para derivarla aplicamos la regla del producto de una constante por una función:

$$\frac{d4x^3}{dx} = 4\frac{dx^3}{dx} = 12x^2$$

2. Se trata de la suma de tres funciones; entonces, si usamos el teorema de la derivada de una suma:

$$\frac{dx^5}{dx} + \frac{dx^2}{dx} + \frac{d(-1)}{dx} = 4x^4 + 2x + 0$$

3. Aplicamos la fórmula para la derivada de un cociente, para lo cual calculamos por separado las derivadas del numerador y del denominador.

$$\frac{df(x)}{dx} = 1; \ \frac{dg(x)}{dx} = 1$$

   Sustituyendo:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x-1}{x+2}\right] = \frac{(x+2) - x + 1}{[x+2]^2} = \frac{3}{[x+2]^2}$$

4. Podemos usar la fórmula de la función potencia:

$$\frac{1}{x} = x^{-1}$$

Derivando:

$$\frac{dx^{-1}}{dx} = -x^{-2}$$

5. En lugar de utilizar la fórmula del producto es mejor realizar la multiplicación antes de la derivación $f(x) = x^3\sqrt{x} = x^{5/2}$. Entonces, usando la fórmula de la derivada de la potencia:

$$f^1(x) = \frac{5}{2}x^{3/2} = f^2(x) = \frac{5}{2}x^{3/2}$$

Ejemplo 2.3. Derivadas por teoremas o fórmulas

Derive las funciones siguientes utilizando los teoremas 2.1 y 2.2, según corresponda:

1. $f(x) = 3x^2 + 4x$ **2.** $\theta(x) = \sqrt{x+1}$ **3.** $p(x) = 4x\sqrt{x+1}$ **4.** $\psi(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{x+1}}$

Solución:

1. $f(x) = 3x^2 + 4x$

$f'(x) = \dfrac{d}{dx}(3x^2) + \dfrac{d}{dx}(4x)$ Propiedad 1

$f'(x) = 3\dfrac{d}{dx}(x^2) + 4\dfrac{d}{dx}(x)$ Propiedad 3

$f'(x) = 6x + 4$

2. $\theta(x) = \sqrt{x+1}$

Replanteamos la función dada como:

$\theta(x) = (x+1)^{1/2}$

$\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x+1)^{1/2}$ Derivamos ambos lados de la igualdad respecto de x.

$\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{1}{2}(x+1)^{1/2-1}$ Derivamos la función potencia del lado derecho.

$\dfrac{d\theta}{dx} = \dfrac{1}{2}(x+1)^{-1/2}$ La derivada ya está hecha, solo falta acomodar.

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2(x+1)^{1/2}}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

3. $p(x) = 4x\sqrt{x+1}$

Replanteamos la función original como:

$p(x) = 4x(x+1)^{1/2}$

$\frac{d}{dx}p(x) = \frac{d}{dx}4x(x+1)^{1/2}$ Derivamos ambos lados de la igualdad.

$\frac{d}{dx}p(x) = 4x\frac{d}{dx}(x+1)^{1/2} + (x+1)^{1/2}\frac{d}{dx}(4x)$ La derivada de la función resulta ser del tipo $f(x) \cdot g(x)$.

$\frac{d}{dx}p(x) = 4x\frac{1}{2}(x+1)^{1/2-1} + (x+1)^{1/2}(4)$ Las derivadas restantes ya han sido estudiadas.

$\frac{d}{dx}p(x) = \cancel{4}x\frac{1}{\cancel{2}}(x+1)^{-1/2} + (x+1)^{1/2}(4)$ Simplificando y acomodando.

$$\frac{d}{dx}p(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}} + 4\sqrt{x+1}$$

4. $\psi(x) = \frac{4x}{\sqrt{x+1}}$

Replanteamos la expresión original como:

$\psi(x) = \frac{4x}{(x+1)^{1/2}}$

$\frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\frac{4x}{(x+1)^{1/2}}$ Derivamos ambos lados de la igualdad.

$\frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\frac{4x}{(x+1)^{1/2}}$ La derivada de la función es un cociente de funciones $\frac{f(x)}{g(x)}$.

$\frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{(x+1)^{1/2}\frac{d}{dx}(4x) - (4x)\frac{d}{dx}(x+1)^{1/2}}{\left[(x+1)^{1/2}\right]^2}$ Las derivadas que faltan ya han sido estudiadas.

$\frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{(x+1)^{1/2}(4) - (4x)^{1/2}(x+1)^{1/2-1}}{(x+1)^{2/2}}$ La derivada principal ya ha sido concluida.

$\frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{4\sqrt{x+1} - (4x)^{1/2}(x+1)^{-1/2}}{(x+1)}$ Seguimos acomodando.

$\frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{4\sqrt{x+1} - \frac{\cancel{4}x}{\cancel{2}(x+1)^{1/2}}}{(x+1)}$ Simplificando.

$$\frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{4\sqrt{x+1} - \frac{2x}{\sqrt{x+1}}}{(x+1)}$$

Con base en los ejemplos anteriores es fácil deducir que la derivada de un polinomio se obtiene derivando cada uno de sus términos.

2.1.2. Derivadas de polinomios

Una forma de visualizar un polinomio es mediante una suma de términos (funciones más elementales), mientras que la derivada del polinomio es la derivación de cada término del polinomio, en la cual se siguen sumando o restando cada una de esas derivadas, según sea el caso; o de manera más formal, la derivada de un polinomio es la suma de las derivadas de cada término, lo cual formulamos en el teorema 2.3.

Teorema 2.3 Derivadas de polinomios

Sea $P_n(x)$ un polinomio definido por:

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$$

Entonces:

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = \frac{d}{dx}a_0 + a_1\frac{d}{dx}x + a_2\frac{d}{dx}x^2 + a_3\frac{d}{dx}x^3 + \cdots$$

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = a_1 + \sum_{i=2}^{n} i a_i x^{i-1}$$

Ejemplo 2.4. **Derivada de un polinomio de grado tres**

Derive $P_3(x) = 1 - x + x^3$

Solución: Derivamos término a término:

$$\frac{dP_3(x)}{dx} = \frac{d}{dx}1 - \frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}x^3 = -1 + 3x^2$$

Ejemplo 2.5. **Derivada de un polinomio de grado *n***

Derive $p_n(x) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{x^i}{2}$

Solución:

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = \frac{d}{dx}1 + \frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}x^i = \frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{n}\frac{1}{2}ix^{i-1}$$

A continuación introduciremos el tema de derivadas de funciones compuestas; si no lo abordamos en este momento, los ejemplos resultarían demasiado sencillos cuando, en realidad, buscamos desarrollar ejemplos que enriquezcan el aprendizaje. Profundizaremos en la derivación de funciones compuestas en el tema “regla de la cadena”.

La función $f(x) = x$ (función identidad) es un caso muy sencillo que ya hemos ejemplificado en la derivación de funciones con más elementos, o sea, funciones compuestas; por ejemplo, $f(x) = 2x$ se compone del producto de la función constante $f_1(x) = 2$ o $u(x) = 2$ y de la función identidad

$f_2(x) = x$ o $v(x) = x$ ya que las funciones pueden componerse de más operaciones e incluso de funciones trascendentales, como exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, pero comenzaremos mencionando el teorema 2.4 y posteriormente explicaremos varios ejemplos.

Teorema 2.4 Derivadas de funciones compuestas

Sea $y = f(u)$ una función derivable de u y $u = g(x)$ una función derivable de x.

Entonces la derivada de f con respecto a x viene dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)}\frac{dg(x)}{dx}$$

Por ejemplo, sea $y = u^n$ con u como una función de x, entonces la derivada de y con respecto de x usando la regla de derivación de una función potencia y la derivada de una función compuesta es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du^n}{dx} = \frac{du^n}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

Ejemplo 2.6. Derivadas de funciones compuestas

Derive la siguiente función:

$$y = (x^2 - 2x)^4$$

Solución: Con $u = x^2 - 2x$

$$y = (x^2 - 2x)^4 = u^4$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{du^4}{dx} = \frac{du^4}{du}\frac{du}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = 4u^3\frac{du}{dx}$$

Pero $u = x^2 - 2x$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = 4(x^2 - 2x)^3\frac{d(x^2 - 2x)}{dx}$$ Ahora derivamos la resta de funciones.

$$\frac{dy}{dx} = 4(x^2 - 2x)^3\left[\frac{dx^2}{dx} - \frac{d2x}{dx}\right]$$ Ya estudiamos las dos derivadas restantes.

$$\frac{dy}{dx} = 4(x^2 - 2x)^3[2x - 2]$$

Al principio, este tipo de derivación parece muy laboriosa, pero cuando se comprende, es evidente que no es indispensable hacer la sustitución escrita de u. Analicemos el ejemplo anterior: la función potencia se compone de un exponente y una base, mientras que la base es una función, en este caso de la variable x; entonces, al derivar a la función potencia, debemos multiplicarla por la derivada de la función base. Veamos otro ejemplo:

Ejemplo 2.7. Derivadas de funciones compuestas

Derive la siguiente función:

$$y = \sqrt[3]{x^2 + 5}$$

Solución: Replanteamos la función como

$$y = (x^2 + 5)^{1/3}$$

Con $u = x^2 - 2x$ como la función base, entonces

$$y = (x^2 + 5)^{1/3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + 5)^{1/3} \qquad \text{Derivamos ambos lados, respecto a } x.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(x^2 + 5)^{(1/3-1)}\, \frac{d}{dx}(x^2 + 5) \qquad \text{Derivamos la función potencia } y.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(x^2 + 5)^{-2/3}\,(2x) \qquad \text{Multiplicamos por la derivada de la función que actúa como base.}$$

La forma de plantear la función compuesta puede variar, como observamos en el siguiente ejemplo, pero el fundamento es el mismo.

Ejemplo 2.8. Derivadas de funciones compuestas

Derive la siguiente función:

$$\theta(x) = 4x \cdot \sqrt{x^2 + 1}$$

Solución:

$$\theta(x) = (\theta_1(x) = 4x) \cdot \left(\theta_2(x) = \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\theta'(x) = \theta_1(x) \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2 + 1}\right) + \theta_2(x) \cdot \frac{d}{dx}(4x) \qquad \text{Propiedad 4}$$

$$\theta'(x) = \theta_1(x) \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2 + 1}\right) + \theta_2(x) \cdot 4\frac{d}{dx}(x) \qquad \text{Propiedad 3}$$

$$\theta'(x) = (4x) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + \sqrt{x^2 + 1} \cdot (4)$$

$$\theta'(x) = \frac{4x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} + 4\sqrt{x^2 + 1}$$

Ejercicios 2.1. Derivadas de funciones algebraicas

Derive las funciones siguientes aplicando los teoremas 2.1, 2.2, 2.3 o 2.4:

Función	Respuesta
1. $f(x) = 5x^5 - 3x^4 + 7x - 2$	$f'(x) = 25x^4 12x^3 + 7$
2. $f(x) = g(x)^3 + 4g(x)$	$f'(x) = 3g(x)^2 g'(x) + 4g'(x)$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x - 5}$	$f'(x) = -\dfrac{5}{(x - 5)^2}$

Función	**Respuesta**
4. $f(x)=\dfrac{3-x^2}{x^2-3}$	$f'(x)=-\dfrac{12x}{(x^2+3)^2}$
5. $f(x)=\dfrac{x-7}{7-x}$	$f'(x)=0$
6. $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)(x+2)(x-3)}$	$f'(x)=\dfrac{7-3x^2}{(x^3-7x-6)^2}$
7. $f(x)=x\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\left(\dfrac{2}{2-x}\right)\left(\dfrac{3}{3-x}\right)$	$f'(x)=\dfrac{12(x^3-3x^2+3)}{(x-3)^2(x-2)^2(x-1)^2}$
8. $f(x)=\sqrt{\dfrac{3}{3-x}}$	$f'(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2(3-x)^{3/2}}$
9. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{5-x}}$	$f'(x)=\dfrac{5x}{2[-(x-5)x]^{3/2}}$
10. $f(x)=(7-\sqrt{x-2})^2$	$f'(x)=1-\dfrac{7}{\sqrt{x-2}}$

2.1.3. Derivadas de funciones trigonométricas

En un gran número de problemas a resolver en el campo de la ingeniería hay funciones trigonométricas, de ahí la necesidad de entender sus variaciones. Una primera etapa de este proceso es aprender a derivar dichas funciones.

El caso más sencillo al respecto es cuando el argumento de dicha función es una constante, como:

$$f(x)=\operatorname{sen}(2)$$

El cual, en realidad, es una función constante.

El siguiente caso en sencillo es cuando el argumento de la función es tan solo la variable independiente, como:

$$f(x)=\cos(x)$$

Sin embargo, el argumento no tiene que limitarse a las situaciones anteriores y, en general, puede ser una función más elaborada que la función constante o la función identidad, por esto, es mejor si denotamos con u a la función que interviene como el argumento sobre el cual, a su vez, actúa el concepto de la función trigonométrica que esté operando.

En el siguiente teorema, mostramos expresiones del tipo sen(u), las cuales son funciones compuestas, y u también puede ser una función compuesta:

Teorema 2.5 Derivadas de funciones trigonométricas

$$\frac{d\operatorname{sen}(u)}{dx}=\cos(u)\frac{du}{dx} \qquad \frac{d\cos(u)}{dx}=-\operatorname{sen}(u)\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d\tan(u)}{dx}=\sec^2(u)\frac{du}{dx} \qquad \frac{d\cot(u)}{dx}=-\csc^2(u)\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d\sec(u)}{dx}=\sec(u)\tan(u)\frac{du}{dx} \qquad \frac{d\csc(u)}{dx}=-\csc(u)\cot(u)\frac{du}{dx}$$

Así como el argumento de las funciones trigonométricas puede constituirse por combinaciones algebraicas de funciones elementales, también las primeras pueden participar como elementos en operaciones (potencia, suma, producto y/o cocientes) junto a otras funciones.

Es complicado decir hasta qué punto es más o menos elaborado un problema. En esta sección trabajaremos primero con funciones que consideramos sencillas, pero aumentaremos gradualmente su complejidad y retomaremos el tema en las derivadas por la regla de la cadena o derivadas de funciones compuestas para las funciones trigonométricas, cuya estructura consideramos muy compleja.

Ejemplo 2.9. Derivadas de funciones trigonométricas

Derive la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

Solución:

$$f(x) = \operatorname{sen}(x)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x) \quad \text{Derivando ambos lados de la igualdad.}$$

$$\frac{df}{dx} = \cos(x) \quad \text{Por el teorema 2.5 con } u = x.$$

Ejemplo 2.10. Derivadas de funciones trigonométricas

Derive la función $f(x) = \cos(x)$

Solución:

$$f(x) = \cos(x)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\cos(x) \quad \text{Derivando ambos lados de la igualdad.}$$

$$\frac{df}{dx} = -\operatorname{sen}(x) \quad \text{Por el teorema 2.5 con } u = x.$$

Ejemplo 2.11. Derivadas de funciones trigonométricas

Derive la función $f(x) = \tan(x)$

Solución:

$$f(x) = \tan(x)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\tan(x) \quad \text{Derivando ambos lados de la igualdad.}$$

$$\frac{df}{dx} = \sec^2(x) \quad \text{Por el teorema 2.5 con } u = x.$$

Ejemplo 2.12. Derivadas de funciones trigonométricas

Derive la función $f(x) = \cot(x)$

Solución:

$$f(x) = \cot(x)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\cot(x) \quad \text{Derivando ambos lados de la igualdad.}$$

$$\frac{df}{dx} = -\csc^2(x) \quad \text{Por el teorema 2.5 con } u = x.$$

Ejemplo 2.13. Derivadas de funciones trigonométricas

Derive la función $f(x) = \sec(x)$

Solución:

$$f(x) = \sec(x)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\sec(x) \qquad \text{Derivando ambos lados de la igualdad.}$$

$$\frac{df}{dx} = \sec(x)\tan(x) \qquad \text{Por el teorema 2.5 con } u = x.$$

Ejemplo 2.14. Derivadas de funciones trigonométricas

Derive la función $f(x) = \csc(x)$

Solución:

$$f(x) = \csc(x)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\csc(x) \qquad \text{Derivando ambos lados de la igualdad.}$$

$$\frac{df}{dx} = -\csc(x)\cot(x) \qquad \text{Por el teorema 2.5 con } u = x.$$

Ejemplo 2.15. Derivadas de funciones trigonométricas

Derive la función $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$

Solución:

$$f(x) = \operatorname{sen}(3x)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\operatorname{sen}(3x) \qquad \text{Derivando ambos lados de la igualdad.}$$

$$\frac{df}{dx} = \cos(3x)\frac{d}{dx}3x \qquad \text{Por el teorema 2.5 con } u = 3x.$$

$$\frac{df}{dx} = \cos(3x)(3)$$

$$\frac{df}{dx} = 3\cos(3x)$$

Ejemplo 2.16. Derivadas de funciones trigonométricas

Derive la función $f(x) = \cos(\pi x^3)$

Solución:

$$f(x) = \cos(\pi x^3)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\cos(\pi x^3) \qquad \text{Derivando ambos lados de la igualdad.}$$

$$\frac{df}{dx} = -\operatorname{sen}(\pi x^3)\frac{d}{dx}\pi x^3 \qquad \text{Por el teorema 2.5 con } u = \pi x^3.$$
$$\frac{df}{dx} = \cos(3x)(3\pi x^2)$$
$$\frac{df}{dx} = 3\pi x^2 \cos(3x)$$

Ejemplo 2.17. Derivadas de funciones trigonométricas

Derive la función $f(x) = \tan^3\left(\frac{x}{2}\right)$

Solución:

$$f(x) = \tan^3\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\tan^3\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \text{Derivando ambos lados de la igualdad.}$$
$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\tan^3\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{d}{dx}\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]^3$$

Si la vemos así, nos damos cuenta de que en primera instancia es una función potencia.

$$\frac{df}{dx} = 3\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\frac{d}{dx}\tan\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$\frac{df}{dx} = 3\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \text{Por el teorema 2.5 con } u = \frac{x}{2}.$$
$$\frac{df}{dx} = 3\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\frac{df}{dx} = \frac{3}{2}\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Ejemplo 2.18. Derivadas de funciones trigonométricas

Derive la función $f(x) = \sec(2x^3 + 4x)$

Solución:

$$f(x) = \sec(2x^3 + 4x)$$
$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\sec(2x^3 + 4x) \qquad \text{Derivando ambos lados de la igualdad.}$$
$$\frac{df}{dx} = \sec(2x^3 + 4x)\tan(2x^3 + 4x)\frac{d}{dx}(2x^3 + 4x) \qquad \text{Por el teorema 2.5 donde } u = 2x^3 + 4x.$$
$$\frac{df}{dx} = \sec(2x^3 + 4x)\tan(2x^3 + 4x)(6x^2 + 4)$$
$$\frac{df}{dx} = (6x^2 + 4)\sec(2x^3 + 4x)\tan(2x^3 + 4x)$$

Ejemplo 2.19. Derivadas de funciones trigonométricas

Derive la función $f(x) = 4 \text{ sen} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Solución:

$f(x) = 4 \text{ sen} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} 4 \text{ sen} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ Derivando ambos lados de la igualdad.

$\frac{df}{dx} = 4 \frac{d}{dx} \text{sen} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ Derivada de una constante por una función.

$\frac{df}{dx} = 4 \cos \left(\frac{x-1}{x+1}\right) \frac{d}{dx} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ Por el teorema 2.5 con $u = \frac{x-1}{x+1}$.

$\frac{df}{dx} = 4 \cos \left(\frac{x-1}{x+1}\right) \frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2}$ Derivada de un cociente.

$\frac{df}{dx} = 4 \cos \left(\frac{x-1}{x+1}\right) \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$ Simplificando.

$\frac{df}{dx} = 4 \cos \left(\frac{x-1}{x+1}\right) \frac{2}{(x+1)^2}$

$\frac{df}{dx} = \frac{8}{(x+1)^2} \cos \left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ Multiplicando $(4)\left(\frac{2}{(x+1)^2}\right)$ y acomodando.

Ejemplo 2.20. Derivadas de funciones trigonométricas

Derive la función $f(x) = \text{sen}\,(x^3) \cos(4x)$

Solución:

$f(x) = \text{sen}\,(x^3) \cos(4x)$

$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(\text{sen}\,(x^3) \cos(4x))$ Derivando ambos lados de la igualdad.

$\frac{df}{dx} = \text{sen}\,(x^3) \frac{d}{dx} \cos(4x) + \cos(4x) \frac{d}{dx} \text{sen}(x^3)$ Derivada de un producto de funciones.

$\frac{df}{dx} = \text{sen}\,(x^3)(-\text{sen}\,(4x)\ \frac{d}{dx}(4x) + \cos(4x)\ (\cos(x^3))\frac{d}{dx}(x^3)$ Por el teorema 2.5.

$\frac{df}{dx} = \text{sen}\,(x^3)(-\text{sen}\,(4x)\ (4) + \cos(4x)(\cos(x^3))(3x^2)$ Derivadas algebraicas.

$\frac{df}{dx} = -4\,\text{sen}\,(x^3)\,\text{sen}\,(4x) + 3x^2 \cos(4x) \cos(x^3)$ Acomodando.

$\frac{df}{dx} = 3x^2 \cos(4x) \cos(x^3) - 4\,\text{sen}\,(x^3)\,\text{sen}\,(4x)$ Acomodando.

Ejemplo 2.21. Derivadas de funciones trigonométricas

Derive la función $f(x) = x^4 \sec^3(2x) + 5x \csc^4(x^3) - 6 \cot^2\left(\frac{x}{\pi}\right)$

Solución:

$$f(x)=x^4\sec^3(2x)+5x\csc^4(x^3)-6\cot^2\left(\frac{x}{\pi}\right)$$

Derivando ambos lados de la igualdad.

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\left[x^4\sec^3(2x)+5x\csc^4(x^3)-6\cot^2\left(\frac{x}{\pi}\right)\right]$$

Derivada de una suma de funciones.

$$\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}\left[x^4\sec^3(2x)\right]+\frac{d}{dx}\left[5x\csc^4(x^3)\right]-\frac{d}{dx}\left[6\cot^2\left(\frac{x}{\pi}\right)\right]$$

Derivando los productos tanto el caso de $f(x)\cdot g(x)$, como $c\cdot f(x)$.

$$\frac{df}{dx}=x^4\frac{d}{dx}\sec^3(2x)+\sec^3(2x)\frac{d}{dx}x^4+5x\frac{d}{dx}\csc^4(x^3)+\csc^4(x^3)\frac{d}{dx}5x-\left[6\frac{d}{dx}\cot^2\left(\frac{x}{\pi}\right)+\cot^2\left(\frac{x}{\pi}\right)\frac{d}{dx}6\right]$$

Derivando las potencias.

$$\frac{df}{dx}=x^4(3)\sec^2(2x)\frac{d}{dx}\sec(2x)+\sec^3(2x)4x^3+5x(4)\csc^3\frac{d}{dx}\csc(x^3)+\csc^4(x^3)(5)-\left[6(2)\cot\left(\frac{x}{\pi}\right)\frac{d}{dx}\cot\left(\frac{x}{\pi}\right)+0\right]$$

Derivando las funciones trigonométricas por el teorema 2.5 donde u, son diferentes funciones como $2x$; x^3..., etc.

$$\frac{df}{dx}=x^4(3)\sec^2(2x)\sec(2x)\tan(2x)\frac{d}{dx}2x+\sec^3(2x)4x^3+5x(4)\csc^3(x^3)\left(-\csc(x^3)\right)\cot(x^3)\frac{d}{dx}x^3+\csc^4(x^3)(5)-$$
$$\left[6(2)\cot\left(\frac{x}{\pi}\right)\left(-\csc 2\left(\frac{x}{\pi}\right)\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\pi}\right)\right]$$

Derivando las funciones algebraicas restantes.

$$\frac{df}{dx}=x^4(3)\sec^2(2x)\sec(2x)\tan(2x)(2)+\sec^3(2x)4x^3+5x(4)\csc^3(x^3)\left(-\csc(x^3)\right)\cot(x^3)(3x^2)+\csc^4(x^3)(5)-$$
$$\left[6(2)\cot\left(\frac{x}{\pi}\right)\left(-\csc^2\left(\frac{x}{\pi}\right)\right)\left(\frac{1}{\pi}\right)\right]$$

Simplificando.

$$\frac{df}{dx}=6x^4\sec^2(2x)\sec(2x)\tan(2x)+4x^3\sec^3(2x)-60x^3\csc^3(x^3)\csc(x^3)\cot(x^3)+5\csc^4(x^3)-$$
$$\left[-\frac{12}{\pi}\cot\left(\frac{x}{\pi}\right)\csc^2\left(\frac{x}{\pi}\right)\right]$$

$$\frac{df}{dx}=6x^4\sec^3(2x)\tan(2x)+4x^3\sec^3(2x)-60x^3\csc^4(x^3)\cot(x^3)+5\csc^4(x^3)+\frac{12}{\pi}\cot\left(\frac{x}{\pi}\right)\csc^2\left(\frac{x}{\pi}\right)$$

Ejercicios 2.2. Derivadas de funciones trigonométricas

Derive las siguientes funciones aplicando el teorema que corresponda a cada expresión algebraica o trigonométrica:

Función	Respuesta
1. $f(x)=\operatorname{sen}(3x+2)$	$f'(x)=3\cos(3x+2)$
2. $f(x)=\cos\left(1-\frac{7}{x}\right)$	$f'(x)=\dfrac{-7\operatorname{sen}\left(\frac{x\text{-}7}{x}\right)}{x^2}$
3. $f(x)=\tan\left(\frac{200}{x}\right)$	$f'(x)=\dfrac{200\sec^2\left(\frac{200}{x}\right)}{x^2}$

Función	**Respuesta**
4. $f(x)=\tan\left(\frac{2}{x\sqrt{x-2}}\right)$	$f'(x)=-\frac{(3x-4)\sec^2\left(\frac{2}{x\sqrt{x-2}}\right)}{(x-2)^{3/2}x^2}$
5. $f(x)=\sec\left(\pi x^3+\sqrt{3}\right)$	$f'(x) = 3\pi x^2\ \tan(\pi x^3+\sqrt{3})\ \sec(\pi x^3+\sqrt{3})$
6. $f(x)=\csc(-8x)$	$f'(x) = 8\ \mathrm{ctg}\ (8x)\ \csc\ (8x)$
7. $f(x)=\csc\left(\sqrt{5\pi-3x}\right)$	$f'(x)=\frac{3\ \mathrm{ctg}\sqrt{5\pi-3x}\csc\sqrt{5\pi-3x}}{2\sqrt{5\pi-3x}}$
8. $f(x)=\cot(7x-7)$	$f'(x) = -7\csc^2(7-7x)$
9. $f(x)=\mathrm{sen}^3(4x)$	$f'(x) = 12\ \mathrm{sen}^2(4x)\cos(4x)$
10. $f(x)=\cos^2(x-1)$	$f'(x) = -2\cos(x-1)\ \mathrm{sen}\ (x-1)$
11. $f(x)=\tan^6(6x)$	$f'(x) = 36\tan^5(6x)\sec^2(6x)$
12. $f(x)=\sec^2(x-2)\tan(x-2)$	$f'(x) = -(\cos(4-2x)-2)\sec^4(2-x)$

2.1.4. Derivadas de funciones trascendentales

Las funciones logaritmo natural y exponencial están estrechamente relacionadas. Veamos una gráfica para tener una idea más clara de su relación:

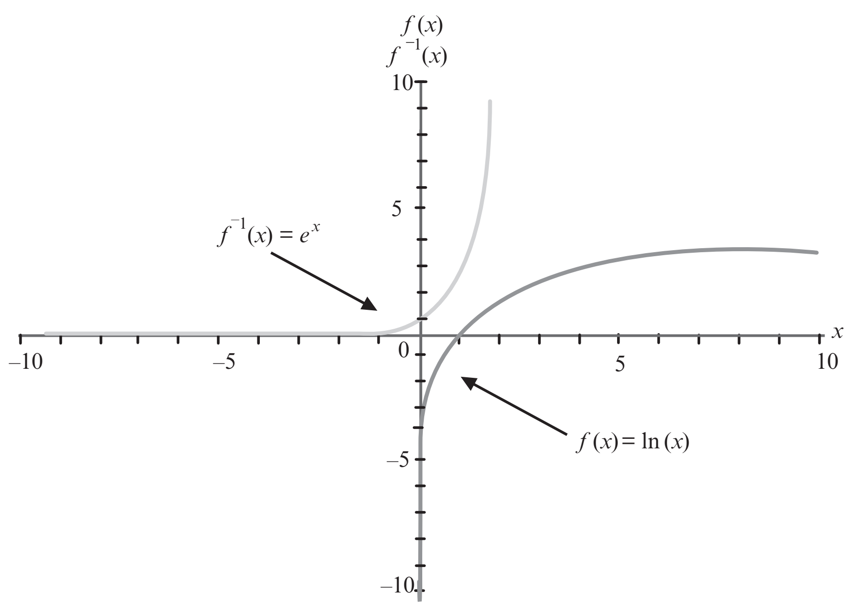


Figura 2.1. Gráfica de la relación entre la función logaritmo y la función exponencial.

Función logaritmo natural

Aunque en el siguiente capítulo estudiaremos las integrales, a continuación definimos un logaritmo natural a manera de mención al cálculo integral:

Definición de la función logaritmo natural

La función logaritmo natural se define como:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt, \qquad x > 0$$

El dominio de la función logaritmo natural es el conjunto de todos los números reales positivos.

A partir de la definición podemos deducir que ln x es positiva para $x > 1$, y negativa para $0 < x < 1$ (figura 2.1). Además, ln (1) = 0, ya que los límites inferior y superior de integración son iguales cuando $x = 1$.

Teorema 2.6 Propiedades de la función logaritmo natural

La función logaritmo natural tiene las propiedades siguientes:

1. El dominio es (o, ∞) y el recorrido (rango, contradominio o codominio) es (–∞, ∞).
2. La función es continua, creciente e inyectiva.
3. La gráfica es cóncava hacia abajo.

Teorema 2.7 Propiedades de los logaritmos

Si a y b son números positivos y n es racional, se satisfacen las propiedades siguientes:

1. $\ln(1) = 0$
2. $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$
3. $\ln(a^n) = n \ln a$
4. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Teorema 2.8 Derivada de la función logaritmo natural

Si a y b son números positivos y n es racional, se satisfacen las propiedades siguientes:

$$\frac{d(\ln[x])}{dx} = \frac{1}{x}, \quad x > 0 \qquad \frac{d(\ln[u])}{dx} = \frac{1}{\mathrm{u}}\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}, \quad u > 0 \qquad \frac{d(\log_a[u])}{dx} = \frac{1}{\ln(a)}\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

Veamos cómo usar estas propiedades con los ejemplos siguientes:

Ejemplo 2.22. Derivadas de funciones logarítmicas

Derive las funciones logarítmicas siguientes:

1. $\frac{d}{dx}[\ln ax] = \frac{u'}{u} = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}$ $\qquad u = ax$

2. $\frac{d}{dx}\left[\ln\left(3x^4 - 3\right)\right] = \frac{u'}{u} = \frac{12x^3}{3x^4 - 3} = \frac{4x^3}{x^4 - 1}$ $\qquad u = 3x^4 - 3$

3. $$\frac{d}{dx}[3x \ln 5x] = 3x\left(\frac{d}{dx}[\ln 5x]\right) + \ln 5x\left(\frac{d}{dx}[3x]\right)$$
$$= 3x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln 5x\,(3) = 3 + 3\ln 5x = 3 + \ln(5x)^3$$
$$= 3 + \ln\left(125x^3\right)$$
Regla del producto

4. $$\frac{d}{dx}\left[(\ln x)^5\right] = 5(\ln x)^4 \frac{d}{dx}[\ln x]$$
$$= 5(\ln x)^4\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{5(\ln x)^4}{x}$$
Regla de la cadena o función compuesta

5. $$\frac{d}{dx}\log_2(cx) = \frac{u'}{u\ln(a)} = \frac{c}{cx\ln(2)} = \frac{1}{x\ln(2)}$$
$u = cx$

6. $$\frac{d}{dx}\log_3\left(3x^4 - 6\right) = \frac{u'}{u\ln(a)} = \frac{12x^3}{\left(3x^4 - 6\right)\ln(3)} = \frac{4x^3}{\left(x^4 - 2\right)\ln(3)}$$
$u = 3x^4 - 6$

7. $$\frac{d}{dx}[3x\log_2 5x] = 3x\left(\frac{d}{dx}[\log_2 5x]\right) + [\log_2(5x)]\left(\frac{d}{dx}[3x]\right)$$
$$= 3x\left(\frac{1}{x\ln(2)}\right) + [\log_2(5x)](3)$$
$$= \frac{3}{\ln(2)} + 3\log_2(5x) = \frac{3}{\ln(2)} + \log_2(5x)^3$$
$$= \frac{3}{\ln(2)} + \log_2\left(125x^3\right)$$
Regla del producto

8. $$\frac{d}{dx}\left[(\log_7 x)^5\right] = 5(\log_7 x)^4 \frac{d}{dx}[\log_7 x]$$
$$= 5(\ln x)^4\left(\frac{1}{x\ln(7)}\right) = \frac{5(\ln x)^4}{x\ln(7)}$$
Regla de la cadena o función compuesta

Nota: Recuerde que $\ln x^n \neq (\ln x)^n = \ln^n(x)$

Ejercicios 2.3. **Derivadas de funciones logarítmicas**

Derive las siguientes funciones aplicando los teoremas 2.6, 2.7 y 2.8, según convenga:

Función	Respuesta
1. $f(x) = \ln(3 - x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x-3}$
2. $f(x) = \ln(x-3)^3$	$f'(x) = \dfrac{3}{x-3}$

Función	**Respuesta**
3. $f(x)=\ln\left(\sqrt{x+5}\right)^3$	$f'(x)=\dfrac{3}{2(x+5)}$
4. $f(x)=\log_2(7x)$	$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln(2)}$
5. $f(x)=x\ln(2-x)$	$f'(x)=\dfrac{x}{x-2}+\ln(2-x)$
6. $f(x)=x\ln(x+7)-x$	$f'(x)=\ln(x+7)-\dfrac{7}{x+7}$
7. $f(x)=x^2[\ln(x)]^3$	$f'(x)=x\ln^2(x)\,(2\ln(x)+3)$
8. $f(x)=3\ln\left(\sqrt{x^2-9}+x\right)+\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2-9}$	$f'(x)=\dfrac{2x^2-3}{2\sqrt{x^2-9}}$
9. $f(x)=5\ln\left[\dfrac{\sqrt{7-9x^2}-4}{x}\right]+\sqrt{7-9x^2}$	$f'(x)=\dfrac{9\left(\sqrt{7-9x^2}-4\right)x^2-20\sqrt{7-9x^2}+35}{x\left(9x^2+4\sqrt{7-9x^2}-7\right)}$
10. $f(x)=\dfrac{x}{3}\sqrt{x^2+16}-2\ln\left(\sqrt{x^2+16}-x\right)$	$f'(x)=\dfrac{2(x^2+11)}{3\sqrt{x^2+16}}$
11. $f(x)=-\dfrac{\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{6}+\dfrac{x\left(x^2-1\right)^{3/2}}{3}-\dfrac{x\sqrt{x^2-1}}{6}$	$f'(x)=\dfrac{1}{6}\left(6x^2\sqrt{x^2-1}-\dfrac{x}{x^2+1}+2(x^2-)^{3/2}-2\sqrt{x^2+1}\right)$
12. $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-x}}}$	$f'(x)=\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-x}}\right)^2\left(1+\dfrac{1}{1+x}\right)^2(1-x)^2}$
13. $f(x)=x+\sum_{i=n}^{n}b_i\left(x^{i+1}-1\right)^2$	$f'(x)=1+\sum_{i=1}^{n}2b_i\,(x^{i+1}-1)(i+1)x^i$
14. $f(x)=\dfrac{2}{5}\left[x^{3/2}\sqrt{x^2-1}\right]-\dfrac{2}{5}\int\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}dx$	$f'(x)=\dfrac{2x^{5/2}}{5\sqrt{-1+x^2}}+\dfrac{3}{5}\sqrt{x}\sqrt{-1+x^2}-\dfrac{2}{5}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}$

Función exponencial natural

Las funciones trascendentales, logarítmicas y exponenciales están estrechamente relacionadas; en el siguiente cuadro exponemos esta relación perfectamente definida en matemáticas.

Definición de la función exponencial natural

La función inversa de la función logaritmo natural $f(x)=\ln x$ se llama función *exponencial natural* y se denota por:

$$f^{-1}(x)=e^x$$

Esto es:

$$y=e^x \text{ si y sólo si } x=\ln y$$

Podemos expresar así la relación entre la función logaritmo natural y la exponencial natural:

$$\ln(e^x) = x \qquad \text{y} \qquad e^{\ln x} = x \qquad \text{(Relación inversa)}$$

Teorema 2.9 Operaciones con funciones exponenciales

Sean $a, b \in \mathbb{R}$.

1. $e^a e^b = e^{a+b}$
2. $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

A continuación revisaremos las propiedades de la función exponencial.

Propiedades de la función exponencial

1. El dominio de $f(x) = e^x$ es $(-\infty, \infty)$ y el rango es $(0, \infty)$.
2. La función $f(x) = e^x$ es continua, creciente e inyectiva en todo su dominio.
3. La gráfica de $f(x) = e^x$ es cóncava hacia arriba en todo su dominio.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty$

Derivadas de las funciones exponenciales

Una característica muy particular de la función exponencial natural es que su derivada es ella misma; en otras palabras, es la solución de la ecuación diferencial $y' = y$, lo cual resumimos en el teorema siguiente:

Teorema 2.10 Derivadas de las funciones exponenciales naturales

Si u es una función derivable de x, entonces:

1. $\dfrac{d(e^x)}{dx} = e^x$
2. $\dfrac{d(e^u)}{dx} = e^u \dfrac{du}{dx}$
3. $\dfrac{d(a^u)}{dx} = a^u \ln(a) \dfrac{du}{dx}$

Ejemplo 2.23. Derivadas de funciones exponenciales

Derive la función $f(x) = e^{-x}$

Solución:

$f(x) = e^{-x}$	
$\dfrac{df}{dx} = \dfrac{d}{dx}(e^{-x})$	Derivando ambos lados de la igualdad.
$\dfrac{df}{dx} = e^{-x}\dfrac{d}{dx}(-x)$	Aplicando el teorema 2.10 para $u = -x$.
$\dfrac{df}{dx} = e^{-x}(-1)$	Derivando la parte algebraica.
$\dfrac{df}{dx} = -e^{-x}$	Acomodando.

Ejemplo 2.24. Derivadas de funciones exponenciales

Derive la función $f(x) = e^{4x+1}$

Solución:

$f(x) = e^{4x+1}$

$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{4x+1}\right)$ Derivando ambos lados de la igualdad.

$\frac{df}{dx} = e^{4x+1}\frac{d}{dx}(4x+1)$ Aplicando el teorema 2.10 para $u = 4x+1$.

$\frac{df}{dx} = e^{4x+1}(4)$ Derivando la parte algebraica.

$\frac{df}{dx} = 4e^{4x+1}$ Acomodando.

Ejemplo 2.25. Derivadas de funciones exponenciales

Derive la función $f(x) = e^{-4/x}$

Solución:

$f(x) = e^{-4/x}$

$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}e^{-4/x}$ Derivando ambos lados de la igualdad.

$\frac{df}{dx} = e^{-4/x}\frac{d}{dx}\left(-\frac{4}{x}\right)$ Aplicando el teorema 2.10 para $u = -\frac{4}{x}$.

$\frac{df}{dx} = e^{4x+1}\left(-\left(-\frac{4}{x^2}\right)\right)$ Derivando la parte algebraica.

$\frac{df}{dx} = \frac{4e^{4x+1}}{x^2}$ Acomodando.

Las funciones exponenciales también pueden presentarse en combinación con otras funciones, como las algebraicas, trigonométricas, etcétera.

Ejemplo 2.26. Derivadas de funciones exponenciales

Derive la función $f(x) = x^3 e^{3x}$

Solución:

$f(x) = x^3 e^{3x}$

$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}x^3e^{3x}$ Derivando ambos lados de la igualdad.

$\frac{df}{dx} = x^3\frac{d}{dx}e^{3x} + e^{3x}\frac{d}{dx}x^3$ Derivando el producto.

$\frac{df}{dx} = x^3e^{3x}\frac{d}{dx}3x + e^{3x}3x^2$ Aplicando el teorema 2.10 para $u = 3x$ y derivando la parte algebraica.

$\frac{df}{dx} = x^3e^{3x}(3) + e^{3x}3x^2$

$\frac{df}{dx} = 3x^3e^{3x} + 3x^2e^{3x} = 3x^2e^{3x}(x+1)$ Acomodando.

Ejemplo 2.27. Derivadas de funciones exponenciales

Derive la función $f(x)=\dfrac{e^{x^2}}{\operatorname{sen}(2x)}$

Solución:

$$f(x)=\frac{e^{x^2}}{\operatorname{sen}(2x)}$$

$$\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{e^{x^2}}{\operatorname{sen}(2x)}$$ Derivando ambos lados de la igualdad.

$$\frac{df}{dx}=\frac{\operatorname{sen}(2x)\frac{d}{dx}e^{x^2}-e^{x^2}\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(2x)}{(\operatorname{sen}(2x))^2}$$ Derivando el cociente.

$$\frac{df}{dx}=\frac{\operatorname{sen}(2x)e^{x^2}\frac{d}{dx}x^2-e^{x^2}\cos(2x)\frac{d}{dx}2x}{(\operatorname{sen}(2x))^2}$$

Aplicando el teorema 2.10 para $u=x^2$ para la función exponencial.

Derivando la parte trigonométrica.

Aplicando el teorema 2.10 para $u=2x$ para la función trigonométrica.

$$\frac{df}{dx}=\frac{\operatorname{sen}(2x)e^{x^2}(2)x-e^{x^2}\cos(2x)(2)}{\operatorname{sen}^2(2x)}$$ Derivando la parte algebraica.

$$\frac{df}{dx}=\frac{2x\operatorname{sen}(2x)e^{x^2}-2e^{x^2}\cos(2x)}{\operatorname{sen}^2(2x)}=\frac{2e^{x^2}[x\operatorname{sen}(2x)-\cos(2x)]}{\operatorname{sen}^2(2x)}$$ Acomodando.

Ejercicios 2.4. Derivadas de funciones exponenciales

Derive las siguientes funciones utilizando los teoremas para funciones exponenciales o algebraicas.

	Función	Respuesta
1.	$f(x)=e^{-2x}$	$f'(x)=-2e^{-2x}$
2.	$f(x)=e^{2-x^2}$	$f'(x)=-2x\,e^{2-x^2}$
3.	$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4\pi}}\int e^{-x^2}\,dx$	$f'(x)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{-2x}$
4.	$f(x)=\frac{x}{e^{8x^2-8}}$	$f'(x)=e^{8-8x^2}(1-16x^2)$
5.	$f(x)=3^{x^2}$	$f'(x)=3^{x^2}2x\ln(3)$
6.	$f(x)=10^{5-x}$	$f'(x)=-10^{5-x}\ln(10)$
7.	$f(x)=b^{\ln(x-1)}$	$f'(x)=b^{\ln(x-1)}\ln(b)(\frac{1}{x-1})$
8.	$f(x)=7^x$	$f'(x)=7^x\ln(7)$
9.	$f(x)=(e-2x)^{2/x}$	$f'(x)=(e-2x)^{2/x}(-\frac{4}{(e-2x)}-\frac{2\ln[e-2x]}{x^2})$

2.1.5. Derivadas de funciones trigonométricas inversas

En la función trigonométrica $f(x) = \text{sen}\,(x)$ el ángulo es la variable independiente, el seno de x es la variable dependiente y el conjunto de todos estos valores es el contradominio de la función seno. En las funciones trigonométricas inversas se intercambian los papeles; o sea, el ángulo se convierte en la variable dependiente y la variable independiente toma valores del contradominio de la función seno, cuya escritura es:

Si $f(x) = \text{sen}\,(x)$, entonces $f^{-1}(x) = \text{arcsen}\,(x)$ o $f^{-1}(x) = \text{angsen}\,(x)$.

Si el argumento de la función trigonométrica inversa es una función compuesta que representamos con u como $f^{-1}(u) = \text{arcsen}\,(u)$, los valores de u deben pertenecer al contradominio de la función seno.

Lo anterior aplica para las seis funciones trigonométricas, como lo demostramos en el teorema 2.11.

Practiquemos la aplicación del teorema 2.11 con varios ejemplos, en los cuales supondremos que se cumplen las condiciones del dominio.

Teorema 2.11 Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Si b y a son números reales, y n un número entero positivo, f y g son funciones con los límites siguientes:

$$\frac{d(\text{arcsen}[u])}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, -\frac{\pi}{2} < \text{arcsen}\,(u) < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d(\text{arccot}\,[u])}{dx} = \frac{-1}{1+u^2}\frac{du}{dx}, 0 < \text{arccot}\,(u) < \pi$$

$$\frac{d(\text{arccos}\,[u])}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}, 0 < \text{arccos}\,(u) < \pi$$

$$\frac{d(\text{arcsec}\,[u])}{dx} = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\text{arctan}\,[u])}{dx} = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}, -\frac{\pi}{2} < \text{arctan}\,(u) < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d(\text{arccsc}\,[u])}{dx} = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

Ejemplo 2.28. Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Derive la función $f(x) = \text{arcsen}\,(-x)$.

Solución:

$$f(x) = \text{arcsen}\,(-x)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\text{arcsen}\,(-x) \qquad \text{Derivando ambos lados de la igualdad.}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}}\frac{d}{dx}(-x) \qquad \text{Aplicando el teorema 2.11 con } u = -x.$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}}(-1) \qquad \text{Derivando la parte algebraica.}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{Acomodando.}$$

Ejemplo 2.29. Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Derive la función $f(x) = \arccos(-2x)$.

Solución:

$$f(x) = \arccos(-2x)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\arccos(-2x) \qquad \text{Derivando ambos lados de la igualdad.}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-(-x)^2}}\frac{d}{dx}(-2x) \qquad \text{Aplicando el teorema 2.11 con } u = -2x.$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-(-x)^2}}(-2) \qquad \text{Derivando la parte algebraica.}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{Acomodando.}$$

Ejemplo 2.30. Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Derive la función $f(x) = \arctan(x^3)$

Solución:

$$f(x) = \arctan(x^3)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\arctan(x^3) \qquad \text{Derivando ambos lados de la igualdad.}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{1+(x^3)^2}\frac{d}{dx}(x^3) \qquad \text{Aplicando el teorema 2.11 con } u = x^3.$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{1+(x^3)^2}(3x^2) \qquad \text{Derivando la parte algebraica.}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{3x^2}{1+x^6} \qquad \text{Acomodando.}$$

Ejemplo 2.31. Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Derive la función $f(x) = \operatorname{arccot}^4(x^3)$

Solución:

$$f(x) = \operatorname{arccot}^4(x^3)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\operatorname{arccot}^4(x^3) \qquad \text{Derivando ambos lados de la igualdad.}$$

$$\frac{df}{dx} = 4\operatorname{arccot}^3(x^3)\frac{d}{dx}\operatorname{arccot}(x^3) \qquad \text{Derivando la potencia.}$$

$$\frac{df}{dx} = 4\operatorname{arccot}^3(x^3)\frac{-1}{1+(x^3)^2}\frac{d}{dx}(x^3) \qquad \text{Aplicando el teorema 2.11 con } u = x^3.$$

$$\frac{df}{dx} = 4\operatorname{arccot}^3(x^3)\frac{-1}{1+(x^3)^2}(3x^2) \qquad \text{Derivando la parte algebraica.}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{-12x^2\operatorname{arccot}^3(x^3)}{1+x^6} \qquad \text{Acomodando.}$$

Ejemplo 2.32. Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Derive la función $f(x) = \text{arcsec}\,(\pi x)$

Solución:

$f(x) = \text{arcsec}\,(\pi x)$	
$\dfrac{df}{dx} = \dfrac{d}{dx}\text{arcsec}\,(\pi x)$	Derivando ambos lados de la igualdad.
$\dfrac{df}{dx} = \dfrac{1}{\lvert\pi x\rvert\sqrt{(\pi x)^2 - 1}}\dfrac{d}{dx}(\pi x)$	Aplicando el teorema 2.11 con $u = \pi x$.
$\dfrac{df}{dx} = \dfrac{1}{\lvert\pi x\rvert\sqrt{(\pi x)^2 - 1}}(\pi)$	Derivando la parte algebraica.
$\dfrac{df}{dx} = \dfrac{\pi}{\lvert\pi x\rvert\sqrt{(\pi x)^2 - 1}}$	Acomodando.

Ejemplo 2.33. Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Derive la función $f(x) = \text{arccsc}\,(r^2x^3)$

Solución:

$f(x) = \text{arccsc}\,(r^2x^3)$	
$\dfrac{df}{dx} = \dfrac{d}{dx}\text{arccsc}\,(r^2x^3)$	Derivando ambos lados de la igualdad.
$\dfrac{df}{dx} = \dfrac{-1}{\lvert r^2x^3\rvert\sqrt{(r^2x^3)^2 - 1}}\dfrac{d}{dx}(r^2x^3)$	Aplicando el teorema 2.11 con $u = r^2x^3$.
$\dfrac{df}{dx} = \dfrac{1}{\lvert r^2x^3\rvert\sqrt{(r^2x^3)^2 - 1}}[r^2(3)x^2]$	Derivando la parte algebraica, con r^2 como constante.
$\dfrac{df}{dx} = \dfrac{-3r^2x^2}{\lvert r^2x^3\rvert\sqrt{r^4x^6 - 1}}$	Acomodando.

Ejercicios 2.5. Derivadas de funciones trigonométricas inversas

Derive las funciones trigonométricas inversas siguientes:

Función	**Respuesta**
1. $f(x) = \text{arcsen}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$	$f'(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}}}$
2. $f(x) = \arccos\left(x - x^2\right)$	$f'(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{1-(x-1)^2x^2}}$
3. $f(x) = \arctan\left(x^2\sqrt{9x-9}\right)$	$f'(x) = \dfrac{3x(5x-4)}{2\sqrt{x-1}(9x^5 - 9x^4 + 1)}$
4. $f(x) = \text{arccot}\left(\sqrt[3]{\dfrac{8\pi}{x}+1}\right)$	$f'(x) = \dfrac{8\pi}{3\left[(\dfrac{8\pi}{x}+1)^{2/3}+1\right](\dfrac{8\pi}{x}+1)^{2/3}x^2}$

Función	Respuesta
5. $f(x)=\text{arccsc}\left(ax^2-2bx+3c\right)$	$f'(x)=-\dfrac{(2ax-2b)}{(ax^2-2bx+3c)\sqrt{(ax^2-2bx+3c)}}$
6. $f(x)=\text{arcsec}\,(100x-0.01)$	$f'(x)=\dfrac{100}{\sqrt{1-\dfrac{1}{(0.01-100x)^2}}(0.01-100)^2}$
7. $f(x)=\dfrac{\arctan(x+1)}{\ln(x-1)}$	$f'(x)=\dfrac{\dfrac{\ln(x-1)}{(x+1)^2+1}-\dfrac{\arctan(x+1)}{x-1}}{\ln^2(x-1)}$
8. $f(x)=\text{sen}\,(ax)$	$f'(x)=a\cos(ax)$
9. $f(x)=\cos\left(\dfrac{b}{x}\right)$	$f'(x)=\dfrac{b\,\text{sen}\left(\dfrac{b}{x}\right)}{x^2}$
10. $f(x)=\tan(x+a)$	$f'(x)=\sec^2(x+a)$
11. $f(x)=\tan^4(ax)$	$f'(x)=4a\tan^3(ax)\sec^2(ax)$
12. $f(x)=\cot\left(\dfrac{a}{x}\right)$	$f'(x)=\dfrac{a\csc^2\left(\dfrac{a}{x}\right)}{x^2}$
13. $f(x)=\csc\left(\dfrac{bx}{a}\right)$	$f'(x)=-\dfrac{b}{a}\cot\left(\dfrac{bx}{a}\right)\csc\left(\dfrac{bx}{a}\right)$
14. $f(x)=\sec\left([x+1]^3\right)$	$f'(x)=3(x+1)^2\tan(x+1)^3\sec(x+1)^3$
15. $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{e^x}$	$f'(x)=-e^{-x}(\text{sen}\,(x)+\cos(x))$
16. $f(x)=\dfrac{\text{sen}\,(x)}{\ln(x)}$	$f'(x)=\dfrac{x\ln(x)\cos(x)-\text{sen}\,(x)}{x\ln^2(x)}$
17. $f(x)=\dfrac{e^{-x}\left[(x-1)e^{2x}-x-1\right]}{2}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2}e^{-x}(e^{2x}+1)x$
18. $f(x)=\dfrac{\int\frac{e^x}{x^2}dx-\int\frac{e^{-x}}{x^2}dx}{2}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{e^{-x}}{x^2}\right)$
19. $f(x)=\tan^{-1}(a-2x)$	$f'(x)=-\dfrac{2}{(a-2x)^2+1}$
20. $f(x)=\cot^{-1}\left(x^2\right)$	$f'(x)=-\dfrac{2x}{x^4+1}$
21. $f(x)=\text{sen}^{-1}\left(\pi-x^2\right)$	$f'(x)=-\dfrac{2x}{\sqrt{1-(\pi-x^2)^2}}$

Función	Respuesta
22. $f(x)=\cot^{-1}\left(\frac{b}{x}\right)$	$f'(x)=\frac{b}{b^2+x^2}$
23. $f(x)=\csc^{-1}\left(\frac{a}{bx}\right)$	$f'(x)=\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$
24. $f(x)=\sec^{-1}\left([ax+b]^2\right)$	$f'(x)=\frac{2a}{(ax+b)\sqrt{(ax+b)^2-1}}$
25. $f(x)=x\cdot\cos^{-1}(x)-\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$	$f'(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x+1}}-\frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{x-1}}+\text{arc cos}(x)$
26. $f(x)=\frac{\left[\ln(1-x)^{(1-x)}+\ln(x+1)^{(x+1)}\right]}{2}$	$f'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+1}-\ln(1-x)-1\right]$

Ejercicios 2.6. **Derivadas de funciones exponenciales, trigonométricas y sus combinaciones**

Derive las siguientes expresiones empleando las fórmulas anteriormente analizadas:

Función	Respuesta
1. $f(x)=e^x\text{sen}(x)$	$f'(x)=e^x(\text{sen}(x)+\cos(x))$
2. $f(x)=e^{-3x}\cos(3x)$	$f'(x)=-3e^{-3x}[\text{sen}(3x)+\cos(3x)]$
3. $f(x)=e^{x^{5/2}}\cos\left(\sqrt{-x}\right)$	$f'(x)=\frac{e^{x^{1/2}}\left[5x^{3/2}\sqrt{-x}\cos(\sqrt{-x})+\text{sen}(\sqrt{-x})\right]}{2\sqrt{-x}}$
4. $f(x)=-e^{-\sqrt{x}}$	$f'(x)=\frac{e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
5. $f(x)=x^{3/2}\text{sen}\left(\sqrt{x+1}\right)$	$f'(x)=\frac{x^{3/2}\cos(\sqrt{1+x})}{2\sqrt{1+x}}+\frac{3}{2}\sqrt{x}\,\text{sen}(\sqrt{x+1})$
6. $f(x)=\left(\sqrt{3x}-9x^2\right)^8$	$f'(x)=4x^3(\sqrt{3}-36x^{3/2})(\sqrt{3}-9x^{3/2})^7$
7. $f(x)=\left(\sqrt{x}-5x^3\right)^5\left(3x^2-\sqrt{x}\right)^4$	$f'(x)=-\frac{1}{2}x^{7/2}(3x^{3/2}-1)^3(1-5x^{5/4})(-170x^{5/2}-63x^{3/2}+690x^4+9)$
8. $f(x)=\left(\frac{\ln(x)}{5x+1}\right)^{12}\left(\frac{1}{x-5}\right)^4$	$f'(x)=\frac{4(\ln(x))^{11}(-15x^2+72x+2x(10x-37)\ln(x)+15}{x(x-5)^5(5x+1)^{13}}$
9. $f(x)=\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{e^{5x}}\right)^4\text{sen}^7(x)$	$f'(x)=\frac{e^{-20x}\ln^3(x)\text{sen}^6(x)[4(1-5x\ln(x)\,\text{sen}(x)+7x\ln(x)\cos(x)]}{16x}$
10. $f(x)=\left(\frac{x\sqrt{x}}{\ln(x)}\right)^3e^{10x}$	$f'(x)=\frac{e^{10x}x^{7/2}[(20x+9)\ln(x)-6]}{2[\ln(x)]^4}$

2.2. Regla de la cadena

Aplicamos este procedimiento para derivar funciones compuestas por expresiones matemáticas más elaboradas que la función constante y la función identidad. De hecho, ya lo hemos empleado antes en varios ejemplos —al menos de forma intuitiva— pero ahora lo abordaremos con formalidad, por lo cual presentamos el teorema que lo sustenta.

Teorema 2.12 Derivadas de funciones compuestas

Sea g: $I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en $x \in I$, o sea $\frac{dg}{dx}$ existe.

Sea f: $J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, una función definida en el conjunto J que contiene al rango de g.

Entonces la función compuesta $(f \circ g)\,(x) = f(g(x))$ es derivable en $x \in I$, y su derivada respecto a x es $(f \circ g)'\,(x) = f'\,(g) \cdot g'(x)$.

También es común utilizar u o v en lugar de f o g.

La notación de Leibniz nos presenta la misma idea con gran sencillez: si $f(g(x))$, entonces $\frac{df}{dx}$ es igual al producto de la derivada de la función $f(g)$, que escribimos como $\frac{df}{dg}$, por la derivada de la función $g(x)$, que se denota como $\frac{dg}{dx}$. Con lo anterior, la regla de la cadena o derivada de una función compuesta, se escribe así:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

Las fórmulas anteriores se conocen como *regla de la cadena para la derivación*; así, lo que en esta se establece como la derivada de una composición de funciones, es el producto de las derivadas de cada una de las funciones que están componiéndose.

Sugerimos desarrollar los ejemplos siguientes empleando también la notación de Leibniz, ya que en cursos posteriores se recurrirá a ella.

Ejemplo 2.34. **Derivadas de funciones compuestas por la regla de la cadena**

Determine la derivada de

$$y(x) = \sqrt{x^2 + 8x - 3}$$

Solución: Sea $f(x) = \sqrt{x}$ con $g(x) = x^2 + 8x - 3$

es decir, $y(x) = (f \circ g)(x)$

Las derivadas de cada función son: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ y $g'(x) = 2x + 8$

Entonces,

$$y'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}}(2x+8) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 8x - 3}}(2x+8)$$

$$y'(x) = \frac{x+4}{\sqrt{x^2 + 8x - 3}}$$

Ejemplo 2.35. Derivadas de funciones compuestas por la regla de la cadena

Determine la derivada de

$$y(x)=\cos\left(\frac{2}{x^2+3}\right)$$

Sea

$$f(x)=\cos\ (x)\ \text{ y }\ g(x)=\frac{2}{x^2+3}\ \therefore\ f'(x)=-\text{sen}\ (x)\ \text{ y }\ g'(x)=-\frac{2}{\left(x^2+3\right)^2}(2x)=-\frac{4x}{\left(x^2+3\right)^2}$$

$$y'(x)=(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)=-\text{sen}\ (g)\left(-\frac{4x}{\left(x^2+3\right)^2}\right)=\left(-\text{sen}\left(\frac{2}{x^2+3}\right)\right)\left(-\frac{4x}{\left(x^2+3\right)^2}\right)$$

Ejemplo 2.36. Derivadas de funciones compuestas por la regla de la cadena

Determine la derivada de $y(x)=3\ln\left(e^x+4x-2\right)$

Solución: Sea $f(x)=3\ln\ (x)$ y $g(x)=e^x+4x-2$

$$\therefore\ f'(x)=\frac{3}{x}\ \text{y}\ g'(x)=e^x+4$$

$$y'(x)=(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)=\left(\frac{3}{g(x)}\right)\left(e^x+4\right)=\left(\frac{3\left(e^x+4\right)}{e^x+4x-2}\right)$$

La regla de la cadena puede utilizarse para componer más de dos funciones:

$$y(x)=(f_1\circ f_2\circ f_3\circ f_4)(x)=f_1\left(f_2\left(f_3\left(f_4(x)\right)\right)\right)$$

Su derivada es:

$$y'(x)=\left(f_1\circ f_2\circ f_3\circ f_4\right)'(x)=f_1'\left(f_2\left(f_3\left(f_4(x)\right)\right)\right)\cdot f_2'\left(f_3\left(f_4(x)\right)\right)\cdot f_3'\left(f_4(x)\right)$$

Y así sucesivamente, para componer más funciones.

Ejemplo 2.37. Derivadas de funciones compuestas por la regla de la cadena

Determine la derivada de

$$f(x)=\text{sen}\left(\cos\left(3x^2-2x\right)\right)$$

Solución: Planteamos:

$$f_1(x)=\text{sen}\ (x),\ f_2(x)=\cos\ (x)\ \text{y}\ f_3(x)=3x^2-2x$$

$$f_1'(x)=\cos\ (x),\ f_2'(x)=-\text{sen}\ (x)\ \text{y}\ f_3'(x)=6x-2$$

$$f'(x)=\left(f_1\circ f_2\circ f_3\right)'(x)=f_1'\left(f_2\left(f_3(x)\right)\right)\cdot f_2'\left(f_3(x)\right)\cdot f_3'(x)$$

$$f'(x)=\cos\left(\cos\left(3x^2-2x\right)\right)\left(-\text{sen}\left(3x^2-2\right)\right)(6x-2)$$

Ejemplo 2.38. Derivadas de funciones compuestas por la regla de la cadena

Determine la derivada de

$$f(x) = \operatorname{sen}^3\left(\sqrt{\cos(x)+5}\right)$$

Solución: Planteamos:

$$f_1(x) = (x)^3,\ f_2(x) = \operatorname{sen}(x),\ f_3(x) = \sqrt{x} \text{ y } f_4(x) = \cos(x) + 5$$

$$f_1'(x) = 3(x)^2,\ f_2'(x) = \cos(x),\ f_3'(x) = \frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}} \text{ y } f_4'(x) = -\operatorname{sen}(x)$$

$$f'(x) = (f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4)'(x) = f_1'\left(f_2\left(f_3\left(f_4(x)\right)\right)\right) \cdot f_2'\left(f_3\left(f_4(x)\right)\right) \cdot f_3'\left(f_4(x)\right) \cdot f_4'(x)$$

$$f'(x) = 3\left(\operatorname{sen}\left(\sqrt{\cos(x)+5}\right)\right)^2\left(\cos\left(\sqrt{\cos(x)+5}\right)\right)\left(\frac{1}{2}(\cos(x)+5)^{-\frac{1}{2}}\right)(-\operatorname{sen}(x))$$

$$f'(x) = -\frac{3\operatorname{sen}^2\left(\sqrt{\cos(x)+5}\right) \cdot \cos\left(\sqrt{\cos(x)+5}\right) \cdot \operatorname{sen}(x)}{(2) \cdot \sqrt{(\cos(x)+5)}}$$

Ejercicios 2.7. Derivadas mediante la regla de la cadena o derivadas de funciones compuestas

Derive las siguientes funciones compuestas, mediante la regla de la cadena:

Función	Respuesta
1. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$	$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$
2. $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{2x}}}$	$f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2}\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{2}\sqrt{x}}}\ \sqrt{1-\sqrt{2}\sqrt{x}\sqrt{x}}}$
3. $f(x) = \cos\left(\operatorname{sen}\left(-\cos(7x)\right)\right)$	$f'(x) = 7\operatorname{sen}(7x)\cos(\cos(7x))\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\cos(7x)))$
4. $f(x) = \operatorname{sen}^3\left(\cos^2(x)\right) + \operatorname{sen}^2\left(\cos^3(x)\right)$	$f'(x) = -3\operatorname{sen}(x)\cos(x)\left[\cos(x)\operatorname{sen}(2\cos^3(x)\right] + 2\cos\left[\cos^2(x)\right]$ $\operatorname{sen}^2\cos^2(x)))$
5. $f(x) = \operatorname{sen}^3\left(\operatorname{sen}^4\left(\operatorname{sen}^5\left(x^6\right)\right)\right)$	$f'(x) = 360x^5\operatorname{sen}^4(x^6)\operatorname{sen}^3(\operatorname{sen}^5(x^6)))\cos(x^6)\cos(\operatorname{sen}^5(x^6))$ $\cos(\operatorname{sen}^4(\operatorname{sen}^5(x^6)))$
6. $f(x) = x^2\ln\left(-\ln(-5x)\right)$	$f'(x) = x\left[2\ln(-\ln(-5x) + \dfrac{1}{\ln(-5x)}\right]$
7. $f(x) = \ln(x)\ln^2\left(\ln(6x)\right)$	$f'(x) = \dfrac{\ln[\ln(6x)](2\ln(x) + \ln(6x)\ln(\ln(6x))}{x\ln(6x)}$
8. $f(x) = \sqrt{4 + \ln^2(-3x)}$	$f'(x) = \dfrac{\ln(-3x)}{x\sqrt{\ln^2(-3x) + 4}}$
9. $f(x) = \ln\left(3x - e^{\csc(-x)}\right)$	$f'(x) = \dfrac{3e^{\csc(x)} - \cot(x)\csc(x)}{3xe^{\csc(x)} - 1}$

Función	Respuesta
10. $f(x)=\cos^3\left(x^5+\sqrt{e^{\operatorname{sen}(x)}+e^{-\cos(x)}}\right)$	$f'(x)=-3\cos\left[\sqrt{e^{-\cos[x]}+e^{\operatorname{sen}[x]}}+x^5\right]^2\left(5x^4+\dfrac{e^{\operatorname{sen}[x]}\cos[x]+e^{-\cos[x]}\operatorname{sen}[x]}{2\sqrt{e^{-\cos[x]}+e^{\operatorname{sen}[x]}}}\right)$ $\operatorname{sen}\left[\sqrt{e^{-\cos[x]}+e^{\operatorname{sen}[x]}}+x^5\right]$
11. $f(x)=\left(x-2(x-2)^6\right)^{10}$	$f'(x)=10\left(x-2(x-2)^6\right)^9\left(1-12(x-2)^5\right)$
12. $f(x)=\left(\dfrac{x}{\left[10^4x+1\right]^4}\right)^{12}$	$f'(x)=12\left(\dfrac{x}{\left[10^4x+1\right]^4}\right)^{11}\dfrac{1-3\times10^4x}{\left(10^4x+1\right)^5}$
13. $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2^4}\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}}\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
14. $f(x)=\dfrac{x^2+\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\sqrt[3]{x-3}}{2}-3x}$	$f'(x)=2\dfrac{\left[\sqrt[3]{x^4-3x^3}-6x^2\right]\left(x^2+\dfrac{3}{2}x^{1/2}\right)\cdots\cdots-\left(x^3+x^{3/2}+1\right)\left[\dfrac{1}{3}\dfrac{4x^3-9x^2}{\sqrt[3]{\left(x^4-3x^3\right)^2}}-12x\right]}{\left[\sqrt[3]{x^4-3x^3}-6x^2\right]^2}$

2.2.1. Derivadas implícitas

Las funciones en las cuales aparece despejada la variable dependiente se llaman *funciones explícitas*. Algunos ejemplos de éstas son:

$$f(x)=x+1 \text{ si } y=f(x) \text{ entonces } y=x+1$$
$$f(x)=\frac{x+1}{x-1} \text{ si } y=f(x) \text{ entonces } y=\frac{x+1}{x-1}$$
$$f(x)=\operatorname{sen}\left(x^2\right) \text{ si } y=f(x) \text{ entonces } y=\operatorname{sen}\left(x^2\right)$$

Hay funciones en las que la variable y no está despejada, por lo que son funciones implícitas. Algunos ejemplos de dichas funciones son los siguientes:

$$xy+2=x+5$$
$$x^3y^4-y^3+x=x+y+1$$
$$\operatorname{sen}(y)+\cos(x)=e^y+4$$

En ocasiones no es posible (o es demasiado complicado) despejar la variable dependiente y, por lo que es conveniente derivar la expresión de forma implícita. Logramos esto al derivar la función término a término, considerando la variable dependiente y como función de x. Asimismo debemos despejar $\frac{dy}{dx}$ o y' según la notación empleada de la expresión resultante. Cabe mencionar que podemos utilizar otras literales como variables dependiente e independiente, respectivamente, pero debemos especificar de cuál literal se deriva y y respecto de cuál otra.

Salvo que especifiquemos lo contrario, en este tema consideramos que y es la variable dependiente y x es la independiente.

En la derivación implícita debemos aplicar la regla de la cadena o la derivación de función compuesta.

Ejemplo 2.39. Derivadas implícitas

Encuentre $\frac{dy}{dx}$ para la función $ax^6 + 4x^3y - y^9x = 5$. Cualquier literal diferente tanto de y como de x será considerada una constante.

Solución: Derivamos ambos lados respecto de x:

$$\frac{d}{dx}\left(ax^6 + 4x^3y - y^9x\right) = \frac{d}{dx}(5)$$

$$\frac{d}{dx}\left(ax^6\right) + \frac{d}{dx}\left(4x^3y\right) - \frac{d}{dx}\left(y^9x\right) = 0$$

En la expresión anterior planteamos varias derivadas de productos de funciones; hay que derivarlas con el teorema respectivo $[(uv)' = uv' + vu']$ y considerar el signo que afecta a todo el resultado de la derivación del producto.

$$6ax^5 + 4x^3\frac{dy}{dx} + 12x^2y - y^9 - 9xy^8\frac{dy}{dx} = 0$$

Dejamos de un lado de la igualdad los términos que contengan $\frac{dy}{dx}$, y movemos al otro lado de la igualdad los términos que no incluyan el factor $\frac{dy}{dx}$.

$$4x^3\frac{dy}{dx} - 9xy^8\frac{dy}{dx} = -6ax^5 - 12x^2y + y^9$$

Entonces factorizamos $\frac{dy}{dx}$ (por factor común) y lo dejamos solo de un lado de la igualdad; a lo cual queríamos llegar.

$$\frac{dy}{dx}\left(4x^3 - 9xy^8\right) = -6ax^5 - 12x^2y + y^9$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6ax^5 - 12x^2y + y^9}{4x^3 - 9xy^8}$$

Observe que el lado derecho de la igualdad queda en términos de las dos variables en la derivación implícita.

Ejemplo 2.40. Derivadas implícitas con aplicación geométrica

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $5(x^2 + y^2)^2 = 20xy$ en el punto (3, 1).

Solución: Halle $\frac{dy}{dx}$ en la función

$$\frac{d}{dx}\left[5\left(x^2 + y^2\right)^2\right] = \frac{d}{dx}(20xy)$$

$$10\left(x^2 + y^2\right)\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right) = 20\left(x\frac{dy}{dx} + y\right)$$

Resolvemos las multiplicaciones

$$20x\left(x^2 + y^2\right) + 20y\left(x^2 + y^2\right)\frac{dy}{dx} = 20x\frac{dy}{dx} + 20y$$

Dejamos los términos que contienen $\frac{dy}{dx}$ del lado izquierdo; y los que no lo contienen, del lado derecho de la igualdad, así:

$$20y\left(x^2+y^2\right)\frac{dy}{dx}-20x\frac{dy}{dx}=20y-20x\left(x^2+y^2\right)$$

Factorizamos y despejamos $\frac{dy}{dx}$

$$\left[20y\left(x^2+y^2\right)-20x\right]\frac{dy}{dx}=20y-20x\left(x^2+y^2\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{20y-20x\left(x^2+y^2\right)}{20y\left(x^2+y^2\right)-20x}$$

Simplificamos

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x\left(x^2+y^2\right)}{y\left(x^2+y^2\right)-x}$$

Para obtener la pendiente de la recta tangente a la función en el punto (3, 1) sustituimos los valores tanto de x como de y en la derivada que obtuvimos, así:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1)-(3)\left((3)^2+(1)^2\right)}{(1)\left((3)^2+(1)^2\right)-(3)}=\frac{-29}{7}$$

Ejemplo 2.41. Derivadas implícitas en funciones trascendentales

Encuentre $\frac{dy}{dx}$ en la función $\operatorname{sen}(x+y)=e^{x/y}$

Solución: Derivamos ambos lados respecto de x así

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x+y)=\frac{d}{dx}e^{x/y}$$

Aplicando la regla de la cadena, tenemos

$$\cos(x+y)\cdot\frac{d}{dx}(x+y)=e^{x/y}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\cos(x+y)\cdot\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=e^{x/y}\left[\frac{y(1)-x\frac{dy}{dx}}{y^2}\right]$$

Resolvemos las multiplicaciones del lado izquierdo, así

$$\cos(x+y)+\cos(x+y)\frac{dy}{dx}=e^{x/y}\left[\frac{y\,(1)-x\frac{dy}{dx}}{y^2}\right]$$

Multiplicamos todo por y^2 y obtenemos

$$y^2\cos(x+y)+y^2\cos(x+y)\frac{dy}{dx}=e^{x/y}\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)$$

Resolvemos las multiplicaciones del lado derecho de la igualdad

$$y^2\cos(x+y)+y^2\cos(x+y)\frac{dy}{dx}=ye^{x/y}-xe^{x/y}\frac{dy}{dx}$$

Juntamos los términos con el factor $\frac{dy}{dx}$ de un lado y lo despejamos

$$y^2\cos(x+y)\frac{dy}{dx}+xe^{x/y}\frac{dy}{dx}=ye^{x/y}-y^2\cos(x+y)$$

$$\left[y^2\cos(x+y)+xe^{x/y}\right]\frac{dy}{dx}=ye^{x/y}-y^2\cos(x+y)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ye^{x/y}-y^2\cos(x+y)}{y^2\cos(x+y)+xe^{x/y}}$$

Ejemplo 2.42. Derivadas implícitas en funciones trascendentales

Encuentre $\frac{dy}{dx}$ en la función $\tan y^2-x\ln y=\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$

Solución:

$$\tan y^2-x\ln y=\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\tan y^2-x\ln y\right]=\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\tan y^2-\frac{d}{dx}x\ln y=\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}}\cdot\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{x}{y}}$$

$$\sec^2\left(y^2\right)\frac{d}{dx}y^2-x\frac{d}{dx}\ln y-\ln y\,(1)=\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{d}{dx}\frac{x}{y}$$

$$\sec^2\left(y^2\right)\left[2y\frac{dy}{dx}\right]-x\frac{1}{y}-\ln y=\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\left[\frac{y(1)-x\frac{dy}{dx}}{y^2}\right]$$

Multiplicamos ambos lados por y^2

$$y^2\sec^2\left(y^2\right)\left[2y\frac{dy}{dx}\right]-xy-y^2\ln y=\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)$$

Resolvemos las multiplicaciones del lado derecho

$$y^2\sec^2\left(y^2\right)\left[2y\frac{dy}{dx}\right]-xy-y^2\ \ln\ y=\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot y-\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot x\frac{dy}{dx}$$

Juntamos del lado derecho los términos que contienen el factor $\frac{dy}{dx}$

$$y^2\sec^2\left(y^2\right)\left[2y\frac{dy}{dx}\right]+\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot x\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot y+xy+y^2\ \ln\ y$$

Multiplicamos por $\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot 2\sqrt{\frac{x}{y}}$

$$\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot 2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot y^2\sec^2\left(y^2\right)\left[2y\frac{dy}{dx}\right]+x\frac{dy}{dx}=y+\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot 2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot xy+\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot 2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot y^2\ln\ y$$

Por factor común, factorizamos y despejamos $\frac{dy}{dx}$

$$\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot 2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot y^2\ \sec^2\left(y^2\right)\left[2y\frac{dy}{dx}\right]+x\frac{dy}{dx}=y+\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot 2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot xy+\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot 2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot y^2\ln y$$

$$\left[\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot 2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot y^2\ \sec^2\left(y^2\right)2y+x\right]\frac{dy}{dx}=y+\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot 2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot xy+\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot 2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot y^2\ln\ y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot 2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot xy+\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot 2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot y^2\ln y}{\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot 2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot y^2\ \sec^2\left(y^2\right)2y+x}$$

Acomodamos y obtenemos

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+2\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot xy+2\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot y^2\ln\ y}{4y\sqrt{1-\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot y^2\ \sec^2\left(y^2\right)+x}$$

Dentro de la derivación implícita se encuentra el caso de derivación con ayuda de logaritmos. Por ejemplo, derivar la función $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ puede ser una tarea laboriosa, aun aplicando la regla de la cadena, pero si la función fuera $f(x)=\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, la derivación no sería un trabajo tan laborioso, ya que antes de derivar podríamos aplicar las leyes de los logaritmos, como mostramos a continuación:

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \qquad \text{Con ayuda de } \ln\sqrt[n]{A}=\frac{1}{n}\ln A$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} \qquad \text{Con ayuda de } \ln\frac{A}{B}=\ln A-\ln B$$

$$f(x)=\frac{1}{2}[\ln\ (x-1)-\ln\ (x+1)]$$

La derivación de la última expresión será más sencilla, porque los argumentos de los logaritmos no quedaron tan elaborados, según observamos a continuación:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]$$

$$\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\frac{1}{2}\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]$$
Derivamos ambos lados de la igualdad.

$$\frac{df}{dx}=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]$$
Derivamos una constante por una función.

$$\frac{df}{dx}=\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}\ln(x-1)-\frac{d}{dx}\ln(x+1)\right]$$
Derivamos una resta de funciones.

$$\frac{df}{dx}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}\frac{d}{dx}(x-1)-\frac{1}{x+1}\frac{d}{dx}(x+1)\right]$$
Derivamos las funciones logaritmo natural.

$$\frac{df}{dx}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}(1)-\frac{1}{x+1}(1)\right]$$
Derivamos las funciones algebraicas.

$$\frac{df}{dx}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}(1)-\frac{1}{x+1}(1)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{x^2-1}\right]=\frac{1}{x^2-1}$$
Simplificamos.

El proceso anterior fue relativamente sencillo porque la expresión $f(x)=\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ tiene un logaritmo natural, en comparación con el planteamiento original $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ el cual no tiene ese tipo de logaritmo, pero podemos introducirlo y facilitar el proceso, como mostramos a continuación:

$$f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$\ln f(x)=\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$
Obtenemos el logaritmo natural en ambos lados de la igualdad.

$$\ln f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}$$
Simplificamos el lado derecho de la igualdad.

$$\ln f(x)=\frac{1}{2}[\ln(x-1)-\ln(x+1)]$$
Mediante propiedades de los logaritmos.

$$\frac{d}{dx}\ln f(x)=\frac{d}{dx}\frac{1}{2}[\ln(x-1)-\ln(x+1)]$$
Derivamos ambos lados de la igualdad.

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x)=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}[\ln(x-1)-\ln(x+1)]$$
La derivada del lado izquierdo es una derivación implícita y la derivada del lado derecho ya la trabajamos.

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}\ln(x-1)-\frac{d}{dx}\ln(x+1)\right]$$

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}\frac{d}{dx}(x-1)-\frac{1}{x+1}\frac{d}{dx}(x+1)\right]$$

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}(1)-\frac{1}{x+1}(1)\right]$$

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{x^2-1}\right]$$

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x)=\frac{1}{x^2-1}$$
Despejamos $\frac{d}{dx}f(x)$.

$$\frac{d}{dx}f(x)=f(x)\frac{1}{x^2-1}$$
Sustituyendo $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

$$\frac{d}{dx}f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{1}{x^2-1}0$$
Tenemos la derivada deseada.

Ejemplo 2.43. Derivadas introduciendo logaritmos

Derive la función

$$f(x)=[3+\operatorname{sen}(x)]^{2\tan(x)}$$

Solución:

$$f(x)=[3+\operatorname{sen}(x)]^{2\tan(x)}$$

$$\ln f(x)=\ln[3+\operatorname{sen}(x)]^{2\tan(x)}$$

Obtenemos el logaritmo natural de ambos lados.

$$\ln f(x)=2\tan(x)\cdot\ln[3+\operatorname{sen}(x)]$$

Simplificamos mediante las propiedades de los logaritmos.

$$\frac{d}{dx}\ln f(x)=\frac{d}{dx}2\tan(x)\cdot\ln[3+\operatorname{sen}(x)]$$

Derivamos ambos lados como $f(x)\cdot g(x)$.

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x)=2\tan(x)\frac{d}{dx}\ln[3+\operatorname{sen}(x)]+\ln[3+\operatorname{sen}(x)]\frac{d}{dx}2\tan(x)$$

La derivada del lado izquierdo es implícita, la del lado derecho es un producto.

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x)=2\tan(x)\frac{1}{3+\operatorname{sen}(x)}\frac{d}{dx}[3+\operatorname{sen}(x)]+\ln[3+\operatorname{sen}(x)]\left[2\sec^2(x)\right]$$

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x)=2\tan(x)\frac{1}{3+\operatorname{sen}(x)}[0+\cos(x)]+\ln[3+\operatorname{sen}(x)]\left[2\sec^2(x)\right]$$

$$\frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}f(x)=\frac{2\tan(x)\cos(x)}{3+\operatorname{sen}(x)}+2\sec^2(x)\ln[3+\operatorname{sen}(x)]$$

Despejamos $\frac{d}{dx}f(x)$.

$$\frac{d}{dx}f(x)=f(x)\left\{\frac{2\tan(x)\cos(x)}{3+\operatorname{sen}(x)}+2\sec^2(x)\ln[3+\operatorname{sen}(x)]\right\}$$

Sustituimos $f(x)=[3+\operatorname{sen}(x)]^{2\tan(x)}$.

$$\frac{d}{dx}f(x)=[3+\operatorname{sen}(x)]^{2\tan(x)}\left\{\frac{2\tan(x)\cos(x)}{3+\operatorname{sen}(x)}+2\sec^2(x)\ln[3+\operatorname{sen}(x)]\right\}$$

Ejercicios 2.8. Derivadas implícitas

De las siguientes funciones, determine $\frac{dy}{dx}$

Función	**Respuesta**
1. $x^3-7x^2y^3+6y^3=c^3$	$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-14xy^3}{3(7x^2-6)y^2}$
2. $x^2+a\sqrt{xy}-y=-d$	$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-\frac{ay}{2\sqrt{xy}}}{\frac{ax}{2\sqrt{xy}-1}}$
3. $ax^3-3b^2xy+cy^3=1$	$\frac{dy}{dx}=\frac{-3x^2+3b^2y}{-3b^2x+3y^2c}$
4. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$	$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$
5. $\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{\frac{x}{y}}=6$	$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$

De las siguientes funciones, determine $\frac{dy}{dx}$ y evalúelas en el punto dado:

Función	**Respuesta**
6. $x^3y^3 - y = x$ en $(0, 0)$	$\dfrac{dy}{dx} = -1$
7. $\sqrt{xy} = x - 2y$ en $(4, 1)$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{4}$
8. $x^3 - 2x^2y + 3xy^2 = 38$ en $(2, 3)$	$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{15}{28}$
9. $\sqrt{2x} + \sqrt{3y} = 5$ en $(2, 3)$	$\dfrac{dy}{dx} = 1$
10. $x^3 - axy + 3ay^2 = 3a^3$ en (a, a)	$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2}{5}$

De las siguientes funciones, determine $\dfrac{dy}{dx}$

11. $e^{2x+3y} = -10$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}$$

12. $\operatorname{sen}\left(x^2 + y^3\right) + \cos\left(x^2 - y^3\right) = 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\left[x\cos(x^2 + y^3) - x\operatorname{sen}(x^2 - y^3)\right]}{3y^2\left[\operatorname{sen}(x^2 - y^3) + \cos(x^2 + y^3)\right]}$$

13. $\operatorname{sen}^3\left(\dfrac{x}{y}\right) + y\ln^2\left(\sqrt{3x^3y^5}\right) = x + y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left[\left(y(3y^2\ln(\sqrt{3}\sqrt{x^3y^5}) - xy + 3x\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{y}\right)\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right)\right]}{\left[x\left(y^2 - \ln(\sqrt{3}\sqrt{x^3y^5})) - 5y^2\ln(\sqrt{3}\sqrt{x^3y^5}) + 3x\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{y}\right)\cos\left(\frac{x}{y}\right) + y^2\right)\right]}$$

14. $e^{\operatorname{sen}(xy)} - \sec^2\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln\left(xy - x^2y^3\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{-2xy^3}{xy - x^2y^3} + \dfrac{y}{xy - x^2y^3} - ye^{\operatorname{sen}(xy)}\cos(xy) + \dfrac{2\tan\left(\frac{x}{y}\right)\sec^2\left(\frac{x}{y}\right)}{y}}{-\dfrac{x}{xy - x^2y^3} + \dfrac{3x^2y^2}{xy - x^2y^3} + \dfrac{2x\tan\left(\frac{x}{y}\right)\sec^2\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2} + xe^{\operatorname{sen}(xy)}\cos(xy)}$$

15. $\dfrac{x - y}{y - x} + \operatorname{sen}\left(\dfrac{y - x}{x - y}\right) - e^{x^2y^4} = x^3\ln\left(y^3 - xy + x\right) - \cos\left(\sqrt{xy}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{-\dfrac{x^3y}{-xy + x + y^3} + \dfrac{x^3}{-xy + x + y^3} + 2xy^4e^{x^2y^4} + 3x^2\ln(-xy + x + y^3 - \dfrac{1}{y - x} - \dfrac{x - y}{(y - x)^2} + \dfrac{y\operatorname{sen}(\sqrt{xy})}{2\sqrt{xy}} + \dfrac{(y - x)\cos\left(\frac{y - x}{x - y}\right)}{(x - y)^2} + \dfrac{\cos\left(\frac{y - x}{x - y}\right)}{x - y}}{\left[\dfrac{x^4}{-xy + x + y^3} - \dfrac{3x^3y^2}{-xy + x + y^3} - 4x^2y^3e^{x^2y^4} - \dfrac{1}{y - x} - \dfrac{x - y}{(y - x)^2} - \dfrac{x\operatorname{sen}(\sqrt{xy})}{2\sqrt{xy}} + \dfrac{(y - x)\cos\left(\frac{y - x}{x - y}\right)}{(x - y)^2} + \dfrac{\cos\left(\frac{y - x}{x - y}\right)}{x - y}\right]}\right]$$

2.2.2. Derivadas de orden superior

Cada derivada antes obtenida se conoce como *primera derivada*. Si esta existe, es posible derivar, a su vez, el resultado, en cuyo caso se obtiene la segunda derivada y, si dicha solución aún es una función derivable, este proceso puede seguir de manera indefinida. Por ejemplo:

Sea:

$$f(x) = x^3$$

La primera derivada es, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = 3x^2$$

Mientras que la segunda derivada es:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = f''(x) = 6x$$

Y la tercera derivada es:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = f'''(x) = 6$$

La última derivada que podemos obtener es la cuarta:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = f^{(iv)}(x) = 0$$

En caso de que la función tenga n derivadas, la k-ésima derivada es:

$$\frac{d^ky}{dx^k} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}\right) = f^{(k)}(x)$$

Algunos ejemplos de funciones con n derivadas son:

$$\text{sen}(x),\ e^x,\ \sum_{i=0}^{n} a_i x_i$$

Ejemplo 2.44. Derivadas de orden superior

Encuentre la k-ésima derivada de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Derivando sucesivamente:

$$f' = -\frac{1}{x^2}$$
$$f'' = \frac{2}{x^3}$$
$$f''' = \frac{6}{x^4}$$
$$f^{(iv)} = \frac{24}{x^5}$$

De donde, en general:

$$f^k = (-1)^k \frac{(k)!}{x^{k+1}}$$

Halle la k-ésima derivada de la función $f(x) = \ln(2x+1)$
Derivando sucesivamente, obtenemos:

$$f' = \frac{2}{2x+1}$$
$$f'' = \frac{-2 \cdot 2}{(2x+1)^2}$$
$$f''' = \frac{16}{(2x+1)^3} = \frac{2^3 2!}{(2x+1)^3}$$
$$f^{(iv)} = \frac{-96}{(2x+1)^4} = \frac{-2^4 3!}{(2x+1)^4}$$
$$f^{(v)} = \frac{768}{(2x+1)^5} = \frac{2^5 4!}{(2x+1)^5}$$

En general:

$$f^{(k)} = (-1)^{k+1} \frac{2^k (k-1)!}{(2x+1)^k}$$

Obtenga la k-ésima derivada de:

Función	k-ésima derivada
$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$	$f^{(k)} = (-1)^{k+1} \dfrac{(a \cdot d - b \cdot c)c^{k-1}}{(c \cdot x + d)^{k+1}} (k)!$
$f(x) = \operatorname{sen}(x)$	$f^{(k)} = \operatorname{sen}\left(x + k \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$

Tabla 2.1
Fórmula de la k-ésima derivada para un par de funciones.

Sea $P_k(x)$ un polinomio de Legendre de grado k, donde este se define como:

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k (x^2-1)^k}{dx^k}, \quad k = 0, 1, 2\ldots,$$

Halle los polinomios de Legendre desde grado 1 hasta grado 5.

Solución: $k = 0,\ P_0(x) = 1$

2.2.3. Teorema del valor medio

El teorema del valor medio puede utilizarse en la derivación numérica, ya que no siempre contamos con la función de la cual deseamos obtener la derivada, como en los laboratorios, donde al realizar un experimento obtenemos una serie de datos discretos y, al no tener una función, debemos calcular la razón de cambio a partir de estos datos (lo que en realidad sería una ampliación del teorema del valor medio). Es posible abundar sobre dicho teorema en cursos de métodos numéricos.

Teorema 2.13 Teorema del valor medio

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, y es derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe un número c contenido en el intervalo anterior, tal que $f(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ con $f(a) \neq f(b)$.

En otras palabras, el teorema del valor medio dice que la pendiente de la secante que corta la función en $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es igual a la recta tangente de la función en el punto $(c, f(c))$. Gráficamente podemos visualizar esto como:

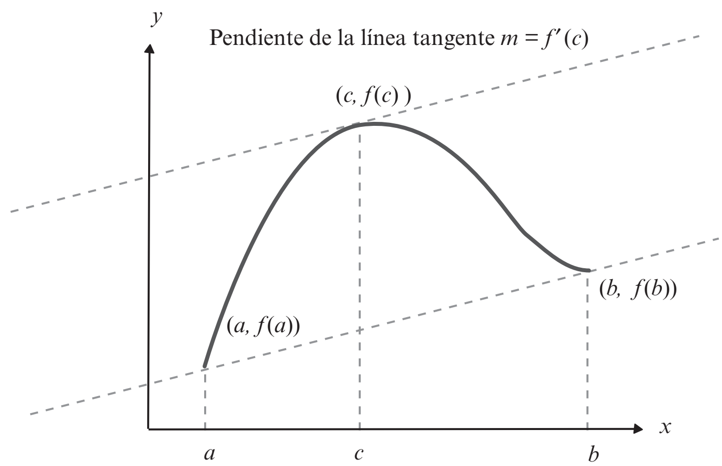


Figura 2.2. Recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

Usando el teorema del valor medio es posible encontrar el valor c a través del álgebra.

Ejemplo 2.45. Aplicaciones del teorema del valor medio

Calcule el número c para la función $f(x) = -x^2 + 2$ en el intervalo cerrado $[0, 1]$.

Solución: La pendiente de la secante es:

$$f(1) = -1^2 + 2 = 1$$
$$f(0) = -0^2 + 2 = 2$$
$$m_{\text{sec}} = \frac{1-2}{1} = -1$$

Por otro lado,

$$\frac{d}{dx} f(x) = -2x$$

Si la derivada de la función se iguala con la pendiente de la secante, obtenemos:

$$-2x = -1 \therefore x = \frac{1}{2}$$

Entonces,
$$c = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 2.46. Aplicaciones del teorema del valor medio

Calcule el número c para la función $f(x) = x^3 - 1$ en el intervalo cerrado $[-1, 2]$.

La pendiente de la secante es:

$$f(2) = 2^3 - 1 = 7$$
$$f(-1) = (-1)^3 - 1 = -2$$
$$\frac{f(2) - f(1)}{2-(-1)} = \frac{7-(-2)}{2+1} = \frac{9}{3} = 3$$
$$m_{\text{sec}} = \frac{7+2}{3} = 3$$

Y la derivada de la función es:

$$\frac{d}{dx} f(x) = 3x^2$$

Si la derivada de la función se iguala con la pendiente de la secante, obtenemos:

$$3x^2 = 3 \therefore x = \pm 1$$

Como -1 es uno de los extremos del intervalo que descartamos, concluimos que:

$$c = 1$$

Ejercicios 2.9. Aplicaciones del teorema del valor medio

Halle el número c para las siguientes funciones en los intervalos indicados.

	Función	Intervalo	Respuesta
1.	$f(x) = x^3 - 8$	$[-2, 0]$	$\sqrt{\frac{4}{3}}$
2.	$f(x) = x^5 + x + 1$	$[-1, 1]$	$\left\{-\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, \frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right\}$
3.	$f(x) = \sqrt{x+1}$	$[-1, 0]$	$-\frac{3}{4}$
4.	$f(x) = x^{5/2}$	$[0, 2]$	$\sqrt[3]{\frac{32}{25}}$
5.	$f(x) = e^x - 1$	$[-1, 1]$	$c = \ln[\text{senh}(1)]$

2.3. Aplicaciones de la derivada

La derivada es una razón de cambio que, desde el punto de vista geométrico, es la pendiente de una recta tangente a la gráfica de una función en un punto cualquiera, siempre y cuando exista. Si utilizamos este concepto podemos encontrar diferentes aplicaciones de la derivada, por ejemplo:

a) Resolver problemas de razón de cambio y optimización (problemas de máximos y mínimos), los cuales son muy útiles para analizar los valores de la variable dependiente para variaciones infinitesimales de la variable independiente o, tan solo, pequeñas variaciones, como en los diferenciales, todas estas de gran utilidad desde el punto de vista ingenieril, científico y de diversas áreas del conocimiento.

b) Determinar límites cuya complejidad impide que sean resueltos por medios algebraicos. Podemos solucionar los límites mediante la regla de L'Hôpital.

c) En combinación con conceptos como *límites en el infinito*, *límites finitos*, *dominio*, *contradominio* (rango), *intersecciones con los ejes* y *simetría*, es posible trazar (graficar) y analizar funciones.

d) Al usar su concepto geométrico es posible determinar las raíces de funciones (ceros de funciones) que sean difíciles de determinar mediante álgebra o que son funciones no algebraicas. El método que utiliza la interpretación geométrica es el de Newton-Raphson.

Diferenciales

Sea $y = f(x)$ una función derivable en su dominio, entonces:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Con:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

De la ecuación anterior podemos concluir que cuando Δx se aproxima a cero, $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ se aproxima a $f'(x)$ o, si se designa por ε la diferencia entre $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ y $f'(x)$, es decir:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \in, \quad \Delta x \neq 0$$

Entonces $\varepsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. Multiplicando ambos miembros de la igualdad por Δx obtenemos:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon \Delta x, \quad \Delta x \neq 0$$

Por lo que, si Δx se aproxima a cero, $\varepsilon \to 0$, y $\varepsilon\, \Delta x$ se aproxima a cero; es decir, $\Delta y \approx f'(x)\, \Delta x$

Definición de las aplicaciones de la derivada

Si $y = f(x)$ es una función derivable en su dominio, entonces:

a) dx se llama diferencial de x, y se define por la relación $dx = \Delta x$.

b) dy se llama diferencial de y, y se define por la relación $dy = f'(x) \cdot \Delta x$ o $df_{x_0}(h) = f'(x_0)h$.

Nota: De $dx = \Delta x$ y $dy = f'(x) \cdot \Delta x$, al dividir las ecuaciones entre sí, obtenemos:

$$dy = f'(x)dx \text{ si } dx \neq 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

La igualdad en la nota anterior expresa la derivada como cociente de dos diferenciales. La mayoría de las veces se usa la notación $\frac{dy}{dx}$ para designar la derivada de y respecto de x; no debemos confundir este simbolismo con el que acabamos de definir. Sin embargo, a veces nos conviene considerar la derivada como cociente de dos diferenciales.

Ejemplo 2.47. Diferenciales

Sea $y = x^2 - 3x + 1$, halle Δy y dy.

a) Para cualquier x
b) Para $x = 2, \Delta x = 0.1$
c) Para $x = 2, \Delta x = 0.01$
d) Para $x = 2, \Delta x = 0.001$

Solución:

Dado que $y = x^2 - 3x + 1$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \Delta y + y &= (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) + 1 \\ \Rightarrow (x^2 - 3x + 1) + \Delta y &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 3x - 3\Delta x + 1 \\ \Rightarrow \Delta y &= (2x - 3)\Delta x + (\Delta x)^2 \end{aligned}$$

También:

$$\begin{aligned} dy &= f'(x)dx \\ &= (2x-3)dx \\ &= (2x-3)\Delta x \end{aligned}$$

En resumen, tenemos los resultados de los incisos *b*), *c*) y *d*), según mostramos a continuación:

$$\Delta y = (2x-3)\Delta x + (\Delta x)^2,\ dy = (2x-3)\Delta x \text{ y } \varepsilon\Delta x = \Delta y - dy$$

x	Δx	Δy	dy	$\varepsilon \Delta x = \Delta y - dy$
2	0.1	0.11	0.1	0.01
2	0.01	0.0101	0.01	0.0001
2	0.001	0.001001	0.001	0.000001

Tabla 2.2

Comportamiento de las aproximaciones para diferentes valores de Δx.

En la tabla podemos observar que, a medida que x se acerca a cero, disminuye la diferencia $\Delta y - dy$. Por tanto, dy es una aproximación de Δy cuando Δx es menor.

Ejemplo 2.48. Diferenciales

Halle el volumen aproximado de un recipiente esférico cuyo radio exterior es de 4 cm y su espesor, de $\frac{1}{4}$ cm.

Solución: Primero tenemos que $r = 4$ cm, V es el volumen dado de una esfera en centímetros cúbicos y ΔV es la cantidad de centímetros cúbicos en el volumen del recipiente esférico. Así:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^2\text{: por lo tanto } dV = 4\pi^2 dr$$

Al sustituir $r = 4$ y $dr = -\frac{1}{4}$ en la ecuación anterior, obtenemos:

$$dV = 4\pi(4)^2\left(-\frac{1}{4}\right) = 16\pi$$

Entonces concluimos que el volumen de recipiente esférico es de aproximadamente 16π cm^3.

Ejemplo 2.49. Diferenciales

Si cometemos un error de 0.01 cm al medir el radio de una esfera de 12 cm, ¿qué error se produce al calcular el volumen de la esfera? Obtenga una respuesta exacta y una aproximación empleando diferenciales.

Solución:

1. *Exacta*. Volumen calculado: $v + \Delta v = \frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3 = \frac{4}{3}\pi(12.01)^3 = 7\,256.34$ cm^3.

Así, v y r representan el volumen y el radio verdadero, respectivamente, mientras que Δv y Δr son los errores de volumen y radio.

El volumen verdadero es $v = \frac{4}{3}\pi \cdot 12^3 = 7238.229$ cm^3 y el error en el volumen, $\Delta v = 18.111$ cm^3.

2. *Aproximada.* dv es una aproximación de Δv y de $v = \frac{4}{3}\pi r^3$, de donde obtenemos:

$$\begin{aligned} dv &= 4\pi r^2 dr \\ &= 4\pi r^2 \Delta r \\ &= 4\pi(12)^2(0.01) \\ &= 18.096 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

La diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado calculados mediante diferenciales es de 0.015 cm^3.

Ejemplo 2.50. Diferenciales

¿Para qué valores de x podemos usar $\sqrt[5]{x}$ en vez de $\sqrt[5]{x+1}$, si el error permitido debe ser menor que 0.001?

Solución: Tenemos que, $y = x^{1/5}$ y $dx = 1$, $dy = \frac{1}{5}x^{-4/5}dx = \frac{1}{5}x^{-4/5}$.

Así:

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}x^{-4/5} &< 10^{-3} \\ x^{-4/5} &< 5 \cdot 10^{-3} \\ x^{-4} &< 5^5 \cdot 10^{-15} \\ x^{-4} &< 10 \cdot 5^5 \cdot 10^{-16} \\ x^4 &> \frac{10^{16}}{31\,250} \\ x &> \frac{10^4}{\sqrt[4]{31\,250}} = 752.1 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.51. Diferenciales

Halle el volumen de ciertas bolas de acero —suponiendo que son esferas perfectas— si ha de ser medido su diámetro en una producción en serie.

Solución: La máquina que empleamos para medir el diámetro no da el valor exacto de d, sino un valor aproximado $d + h$. El error relativo en esta medida es h/d y el volumen de la esfera es $V(d) = \frac{\pi}{6} = d^3$. Por tanto, $dV(d, h) = \frac{\pi}{2}d^2 h$. Así, el error relativo en el volumen es:

$$\frac{\Delta V(d, h)}{V(d)} \approx \frac{dV(d, h)}{V(d)} = 3\frac{h}{d}$$

Este resultado nos dice que el error relativo en la medida del volumen es tres veces el error relativo en la medida original del diámetro.

Ejemplo 2.52. Diferenciales

Encuentre el incremento Δy y la diferencial dy de la función $y = x^2$ para $x = 20$, $\Delta x = 0.1$ (figura 2.3). ¿Cuál es el porcentaje de error de la aproximación de $\Delta y \approx dy$?

Solución:

$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

$dy = (x^2)'\Delta x = 2x\Delta x$. Entonces tenemos:

$\Delta y = 2 \cdot 20 \cdot (0.01) + (0.1)^2 = 4.01$

$dy = 2 \cdot 20 \cdot (0.01) = 4.00$, como $x = 20$ y $\Delta x = 0.01$.

El porcentaje de error en la aproximación $\Delta y \approx dy$ es:

$$\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| \cdot 100\% = \left|\frac{4.01 - 4}{4.01}\right| \cdot 100\% = 0.25\%$$

Reemplazar Δy por dy equivale a sustituir el área rayada por el área de los rectángulos $x\Delta x$, y despreciar la del cuadrado pequeño $(\Delta x)^2$.

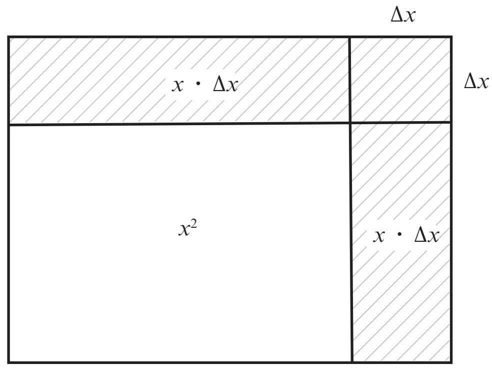


Figura 2.3. Área de los porcentajes de error.

Ejercicios 2.10. **Diferenciales**

Obtenga lo siguiente:

1. Si A es el área de un cuadrado de lado x, halle dA. Construya una figura que muestre el cuadrado dA y ΔA.

Respuesta: $dA = 2xdx$

2. Halle un valor aproximado del error en el que se puede incurrir al calcular el volumen y el área de un cubo con una arista de 6 cm si se comete un error de 0.02 cm al medir dicha arista.

Respuesta: Volumen $\pm$ 2.16 cm^3 área $\pm$ 1.44 cm^2

3. Usando diferenciales, encuentre un valor aproximado de cada una de las expresiones siguientes:

Respuesta:

$a)\ \sqrt{66} \approx 8.124$	$c)\ \sqrt[3]{120} \approx 4.932$	$e)\ \frac{1}{96} \approx 0.0104$	$g)\ \sqrt[5]{35} \approx 2.036$
$b)\ \sqrt[3]{98} \approx 4.610$	$d)\ \sqrt[3]{1\,010} \approx 10.03$	$f)\ \frac{1}{\sqrt{51}} \approx 0.140$	$b)\ \sqrt[4]{15} \approx 1.967$

4. Encuentre el valor aproximado de sen 31º.

Respuesta: sen 31º $\approx$ 0.51504

5. Se desea construir una caja en forma de cubo con 1 dm^3 de capacidad, ¿con que precisión se debe construir la arista interior para que el error en el volumen no sea mayor o menor a 3 cm^3?

Respuesta: Error $\leq$ 0.01 cm

2.3.1. Problemas de razón de cambio

En esta sección analizaremos el comportamiento de los valores de la posición de una partícula que se mueve en el eje horizontal (una dimensión espacial) respecto a un punto inicial, si conocemos $x(t)$ (distancia sobre el eje horizontal en función del tiempo). Tomaremos en cuenta que para la expresión matemática $x(t)$ puede darse que el dominio sean todos los números reales; sin embargo, para funciones donde la variable independiente es el tiempo, este solo puede tomar valores mayores o igual que cero, es decir, solo resolveremos problemas para $t \geq 0$. Si $t = 0$ entonces $x(0)$ es la posición inicial.

Recordemos que la primera derivada del espacio recorrido respecto al tiempo $\frac{dx}{dt} = x'(t)$ es la velocidad instantánea para un valor de t. Si x_2 es mayor que x_1, el cambio de posición $\Delta x = x_2 - x_1$ será positivo y $x'(t) > 0$, o sea la velocidad, también lo será, lo cual significa que la partícula se mueve en sentido positivo (hacia la derecha) y en la gráfica de la función $x(t)$ significa que esta es creciente. Por el contrario, si x_2 es menor que x_1, el cambio $\Delta x = x_2 - x_1$ será negativo y $x'(t) < 0$, o sea la velocidad, también lo será, lo que significa que la partícula se mueve en sentido negativo (hacia la izquierda) y en la gráfica de la función $x(t)$ significa que esta es decreciente. Además, si $t = 0$ entonces $x'(0)$ es la velocidad inicial, que también se denota comúnmente con el símbolo v_0.

Ejemplo 2.53. **Razón de cambio**

La función del movimiento de una partícula es $x = x(t) = t^2 - 8t$, en la cual, x está en metros y t, en segundos. Determine:

1. La posición inicial.
2. La velocidad inicial.
3. La posición y la velocidad a los 3 segundos de iniciar el movimiento.
4. La posición y la velocidad a los 6 segundos de iniciar el movimiento.
5. El tiempo durante el cual se mueve a la derecha.
6. El tiempo durante el cual se mueve a la izquierda.

Solución: La posición está dada por $x = x(t) = t^2 - 8t$ y la velocidad instantánea, por $v_0 = x'(t) = 2t - 8$.

1. La posición inicial de la partícula es $x_0 = x(0) = (0)^2 - 8(0) = 0$. Es decir, su movimiento comienza en el origen.

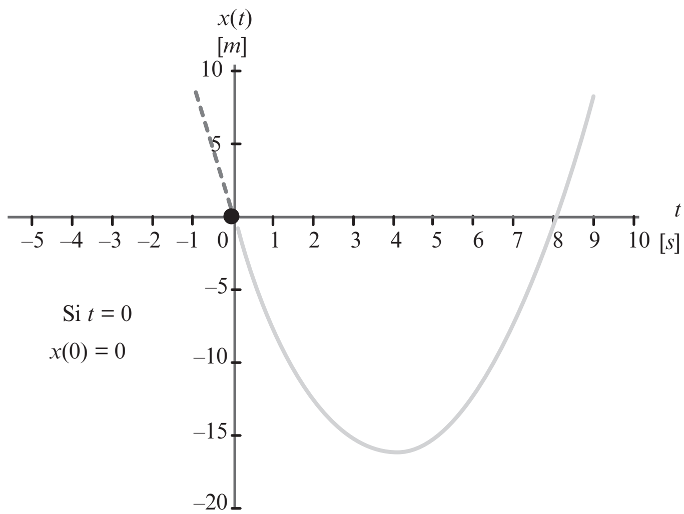


Figura 2.4*a*). Gráfica de $x(t)$.

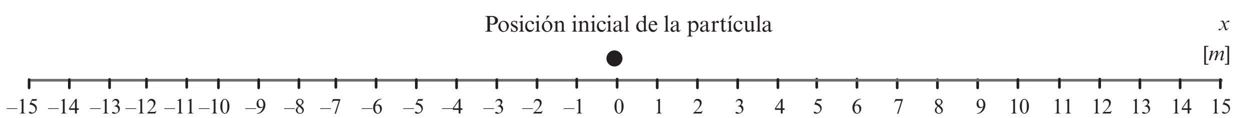


Figura 2.4*b*) Representación de la posición de la partícula sobre el eje horizontal en $t = 0$.

2. La velocidad inicial es $v_0 = x'(0) = 2(0) - 8 = -8\,\frac{m}{s}$, dado que $v_0 < 0$. Desde el punto de origen, la partícula comienza a moverse a la izquierda.

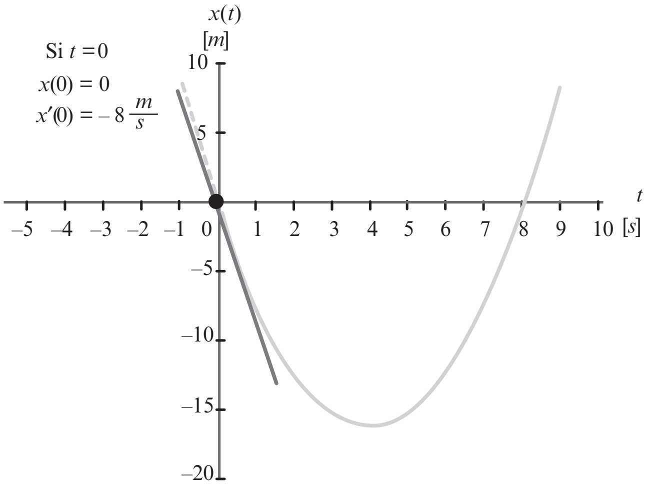


Figura 2.5*a)* Gráfica de $x(t)$ con segmento de recta tangente cuando $y = 0$.

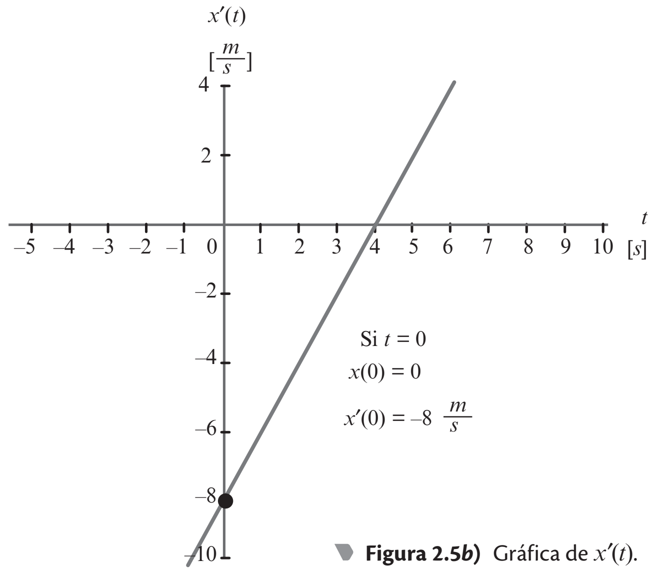


Figura 2.5*b)* Gráfica de $x'(t)$.

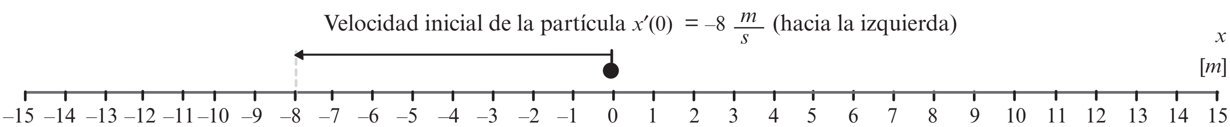


Figura 2.5*c)* Representación de la velocidad inicial de la partícula cuando $t = 0$.

3. A los 3 segundos, la posición es $x(3) = (3)^2 - 8(3) = -15$ m y la velocidad es de $v = x'(3) = 2(3) - 8 = -2\ \frac{m}{s}$. El cuerpo continúa moviéndose a la izquierda.

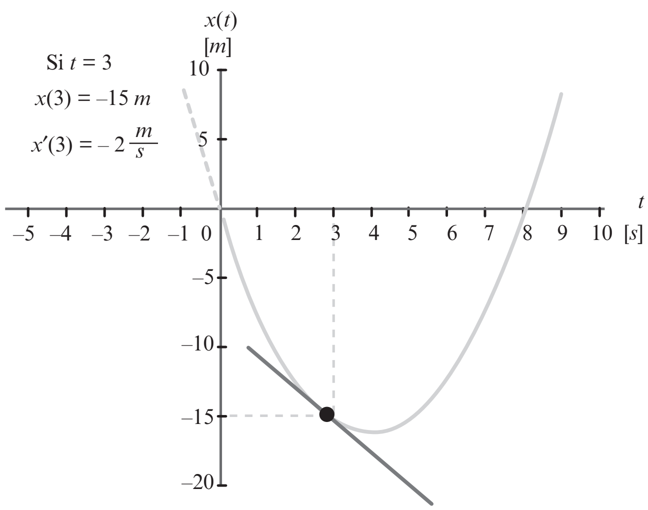


Figura 2.6*a)*. Gráfica de $x(t)$ con segmento de recta tangente en $t = 3$.

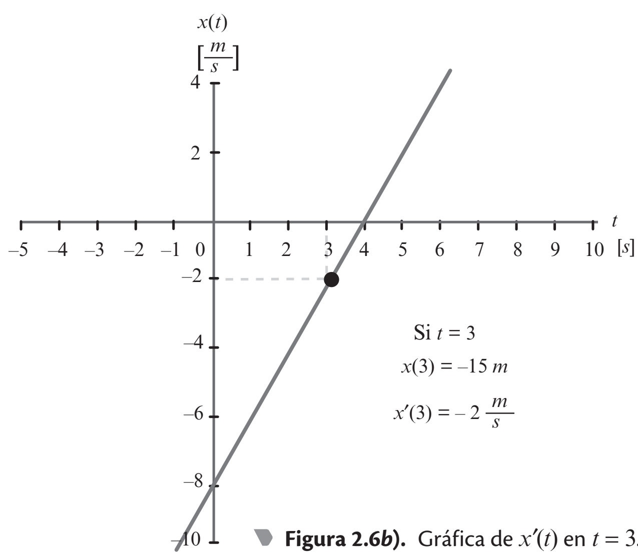


Figura 2.6*b)*. Gráfica de $x'(t)$ en $t = 3$.

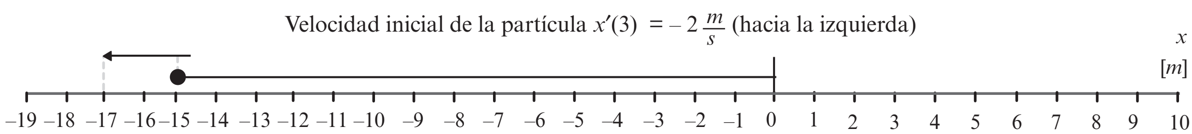


Figura 2.6*c)*. Representación de la posición y la velocidad de la partícula cuando $t = 3$.

4. A los 6 segundos, la posición es de $x(6) = -12$ m y la velocidad es de $v = x'(6) = 2(6) - 8 = -4\,\frac{m}{s}$. La partícula ahora se mueve a la derecha.

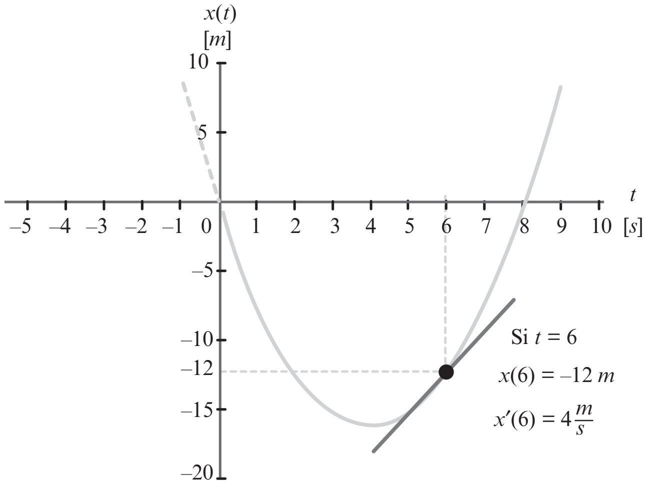


Figura 2.7*a*). Gráfica de $x(t)$ con segmento de recta tangente en $t = 6$.

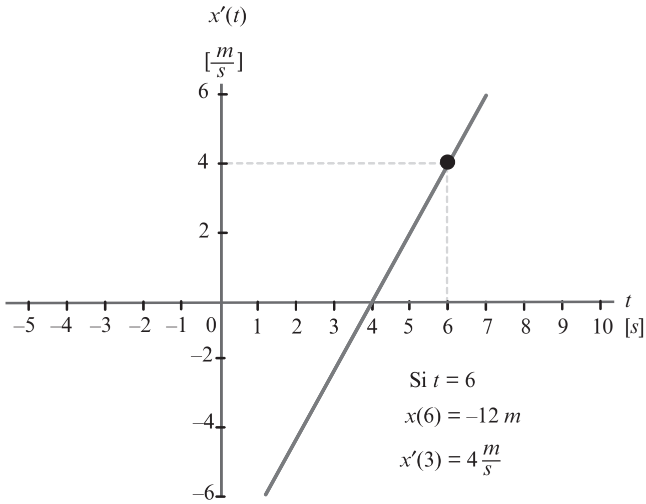


Figura 2.7*b*). Gráfica de $x'(t)$ en $t = 6$.

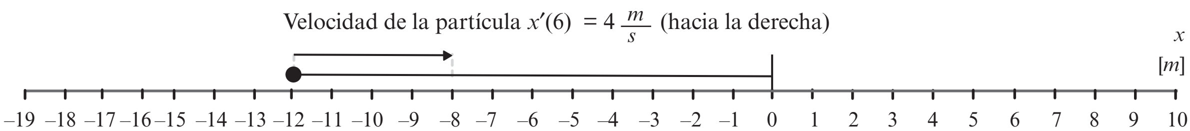


Figura 2.7*c*). Representación de la posición y la velocidad de la partícula cuando $t = 6$.

5. Si $v = x' > 0$, el cuerpo se moverá a la derecha. Es decir, si $2t - 8 > 0$, para $t > 4$. Solo después de 4 segundos, el movimiento de la partícula es hacia la derecha.

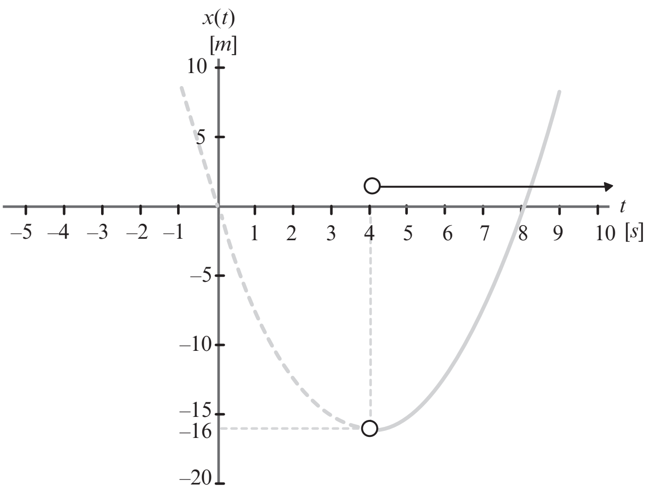


Figura 2.8*a*). Gráfica de $x(t)$ para $t > 4$, donde la función es creciente.

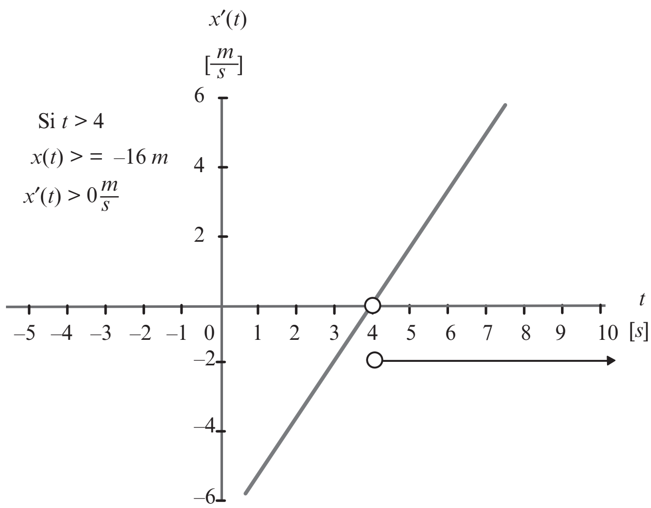


Figura 2.8*b*). Gráfica de $x'(t) > 0$ (positiva) para $t > 4$.

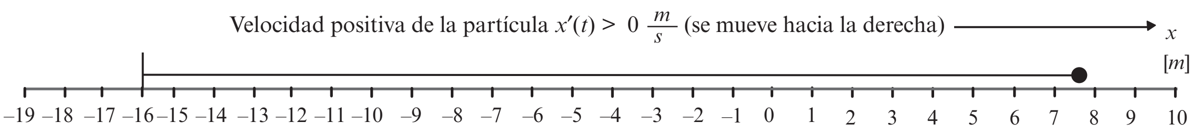


Figura 2.8*c*). Representación del movimiento de la partícula para $t > 4$.

6. Si $v = x' < 0$, el cuerpo se moverá a la izquierda. Es decir, si $2t - 8 < 0$, para $0 \le t < 4$. Solo antes de 4 segundos, el movimiento de la partícula es hacia la izquierda.

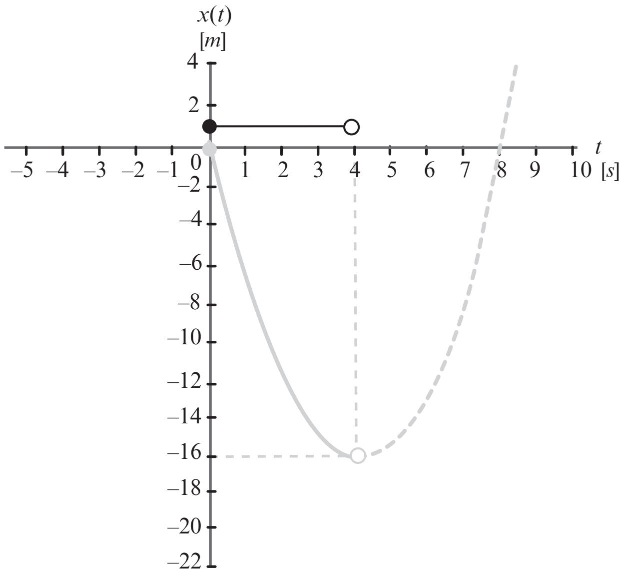


Figura 2.9*a*). Gráfica de $x(t)$ para $0 \le t < 4$, donde la función es decreciente.

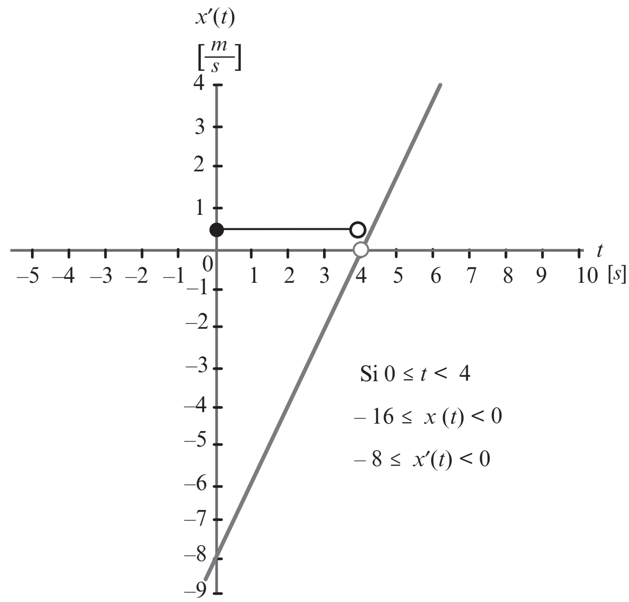


Figura 2.9*b*). Gráfica de velocidad $-8 \le x'(t) < 0$ (negativa) para $0 \le t < 4$.

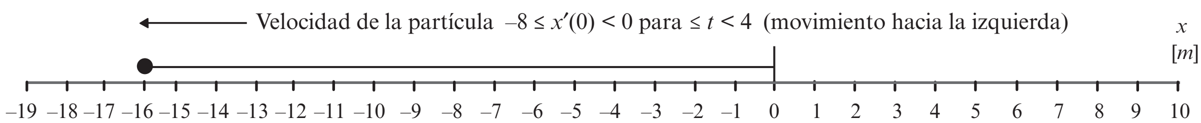


Figura 2.9*c*). Representación del movimiento y la velocidad de la partícula para $0 \le t < 4$.

Ejemplo 2.54. Razón de cambio

Una partícula se mueve sobre el eje x y su posición está dada por la función $x = x(t) = t^3 - 12t$, donde x se mide en metros y t, en segundos.

1. Determine los intervalos de tiempo en los cuales la partícula se mueve a la derecha o a la izquierda.
2. Precise la posición en la cual sucede el cambio en la dirección del movimiento.
3. Defina para cuáles valores de t, la partícula se mueve con aceleración positiva o negativa, según corresponda.

Solución: La velocidad del cuerpo es $v = x'(t) = 3t^2 - 12$. Este se moverá hacia la derecha cuando $v = x'(t) = 3t^2 - 12 > 0$, lo cual se presenta si $t < -2$ (el tiempo negativo no tiene interpretación física) y si $t > 2$. Entonces, el cuerpo se mueve a la derecha una vez que transcurren 2 segundos. Para $0 \le t < 2$, el desplazamiento de la partícula es hacia la izquierda.

En el instante $t = 2$, la partícula cambia la dirección de su movimiento y su posición es $x = x(2) = (2)^3 - 12(2) = -16\ m$ a la izquierda del origen.

La aceleración es $a = x''(t) = 6t$, la cual es positiva para $t > 0$ y negativa para $t < 0$ (los tiempos negativos carecen de sentido físico). O sea, la velocidad del cuerpo siempre aumenta, es decir, es creciente.

Ejercicios 2.11. **Razón de cambio**

A continuación se presentan las funciones que describen el movimiento de unas partículas. Con $x(t)$ en $[m]$, $x'(t)$ en $\left[\frac{m}{s}\right]$ y $x''(t)$ en $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ calcule:

a) La velocidad y posición iniciales.
b) El intervalo de tiempo en que la partícula se mueve a la derecha.
c) El intervalo de tiempo en que la partícula se mueve a la izquierda.
d) Para cuál intervalo de tiempo aumenta la velocidad.
e) Para cuál intervalo de tiempo disminuye la velocidad.

Para cada una de ellas:

Función	Respuesta	
1. $x = x(t) = 3$	*a*) $x_0 = 3m$ y $v_0 = 0\frac{m}{s}$ *b*) No se mueve a la derecha. *c*) No se mueve a la izquierda.	*d*) La velocidad no aumenta. *e*) La velocidad no disminuye.
2. $x = x(t) = (t-3)(t-2)$	*a*) $x_0 = 6m$ y $v_0 = -5\frac{m}{s}$ *b*) $\left(\frac{5}{2}, \infty\right)$	*c*) $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ *d*) $(0, \infty)$ *e*) La velocidad no disminuye.
3. $x = x(t) = t^2 + 2$	*a*) $x_0 = 2m$ y $v_0 = 0\frac{m}{s}$ *b*) $(0, \infty)$ *c*) No se mueve a la izquierda.	*d*) La velocidad siempre aumenta. *e*) La velocidad no disminuye.
4. $x = x(t) = (t)(t-3)(t-2)$	*a*) $x_0 = 3m$ y $v_0 = -4\frac{m}{s}$ *b*) $(2, \infty)$ *c*) $(0, 2)$	*d*) La velocidad siempre aumenta. *e*) La velocidad no disminuye.
5. $x = x\,(t) = t^3 + 6t$	*a*) $x_0 = 0m$ y $v_0 = 6\frac{m}{s}$ *b*) Siempre se mueve a la derecha. *c*) Nunca se mueve a la izquierda.	*d*) La velocidad siempre aumenta. *e*) La velocidad no disminuye.
6. $x = x(t) = \ln\,(t^2 + 3)$	*a*) $x_0 \approx 1.09m$ y $v_0 = 0\frac{m}{s}$ *b*) Siempre se mueve a la derecha.	*c*) No se mueve a la derecha *d*) $\left(0, 3\sqrt{3}\right)$ *e*) $(+\sqrt{3}, \infty)$
7. $x = x(t) = e^t - 2$	*a*) $x_0 = -1m$ y $v_0 = 0\frac{m}{s}$ *b*) $(0, \infty)$ *c*) No se mueve a la izquierda.	*d*) La velocidad siempre aumenta. *e*) La velocidad no disminuye.
8. $x = x(t) = \sqrt{2 + t^2}$	*a*) $x_0 \approx 1.41m$ y $v_0 = 0\frac{m}{s}$ *b*) Siempre se mueve a la derecha.	*c*) No se mueve a la izquierda. *d*) La velocidad siempre aumenta. *e*) La velocidad no disminuye.

Función	Respuesta	
9. $x = x(t) = \text{sen}\,(2t)$ Si $0 \le t < \dfrac{\pi}{2}$	*a*) $x_0 = 0\,m$ y $v_0 = 2\dfrac{m}{s}$ *b*) $\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$	*c*) $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ *d*) La velocidad no aumenta. *e*) $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$
10. $x = x(t) = t^2e^{-3t}$	*a*) $x_0 = 0\,m$ y $v_0 = 0\dfrac{m}{s}$ *b*) $\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$	*c*) $\left(\dfrac{2}{3}, \infty\right)$ *d*) $(2, \infty)$ *e*) $(0, 2)$

Razones de cambio relacionadas

En el tema anterior, abordamos el movimiento en una dimensión espacial. En función del tiempo, ahora presentamos dos variables dependientes que pueden representar diversas entidades: movimiento en el eje horizontal o vertical, superficie, ángulos, resistencia, etcétera, y cada una de ellas es una función del tiempo. Una de esas funciones respecto del tiempo será desconocida y, como veremos en los siguientes ejemplos, no es indispensable contar con dicha función para determinar la variación instantánea de la variable analizada, pero debemos tener información que permita relacionar las dos variables dependientes y así reducir el problema a una sola variable dependiente.

Ejemplo 2.55. Razones de cambio relacionadas

Se deja caer una piedra en un estanque con agua en reposo, lo cual provoca una serie de ondas circulares concéntricas. El radio de la primera onda aumenta a razón de $2\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ ¿Con qué rapidez está cambiando el área del círculo delimitado por esta onda, cuando el radio del círculo es $r = 3$ m?

Solución: El radio es función del tiempo $r = r(t)$ mientras que el área es función del tiempo $A = A(t)$. A su vez, estas dos variables están relacionadas entre sí mediante $A = \pi r^2$. Esta es la expresión importante.

Si derivamos ambos lados de forma implícita, respecto del tiempo tendremos $\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$.

La velocidad a la que varía el radio del círculo es la derivada del radio del círculo respecto del tiempo $\frac{dr}{dt} = 2\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

Sustituimos en la expresión $\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$.

Junto con el dato del radio $r = 3$ m $= 300$ cm. Aquí debemos tener cuidado de homogeneizar las unidades.

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt} = 2\pi(300\ \text{cm})\left(2\frac{\text{cm}}{\text{s}}\right) = 1\,200\pi\frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$$

Cuando el radio es de 3 m, el área del círculo cambia a una rapidez de $1\,200\,\pi\,\text{cm}^2$ cada segundo.

Ejemplo 2.56. Razones de cambio relacionadas

Una escalera de 7 m de longitud está recargada sobre una pared, y en su extremo superior se encuentra una persona. En un momento dado, la parte inferior de la escalera comienza a resbalar y se aleja de la base de la pared a una velocidad constante de $6\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$. ¿Con qué velocidad cae la persona cuando está a 2 m del suelo?

Las variables que están cambiando respecto del tiempo son: la distancia respecto a la pared, $x = x(t)$, y la distancia medida respecto del suelo, $y = y(t)$.

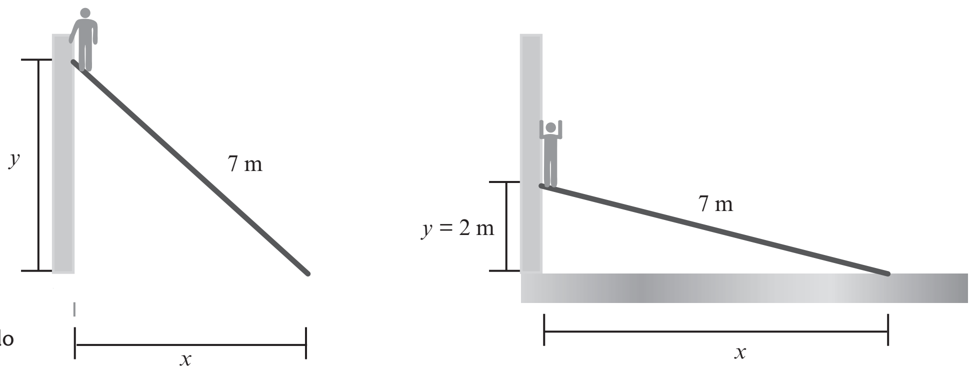


Figura 2.10. Escalera cayendo sobre una pared.

Observe que $x = x(t)$ aumenta conforme incrementa el tiempo de manera constante $6\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$ y que $y = y(t)$ disminuye conforme el tiempo aumenta. Ambas variables, que a su vez son funciones del tiempo, están relacionadas entre sí mediante el teorema de Pitágoras, en el que $x = x(t)$ y $y = y(t)$ son catetos y la longitud de la escalera es la hipotenusa; entonces, podemos plantear:

$$x^2 + y^2 = 7^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 49$$

Al derivar la expresión respecto del tiempo y simplificar:

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

Entonces dividimos ambos lados entre 2 y nos queda $x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0.$

Debemos tener claro que la pregunta es a qué velocidad está cayendo la persona situada en el extremo superior de la escalera, es decir $\frac{dy}{dt}$ en relación con el suelo, por lo que despejamos:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \alpha$$

De la expresión anterior tenemos la velocidad con que se aleja la base de la escalera de la base de la pared $\frac{dx}{dt} = 6\frac{\text{m}}{\text{min}}$ y lo que queremos es $\frac{dy}{dt}$ cuando $y = 2$ m, por lo que calculamos x para ese instante mediante el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 7^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{7^2 - y^2} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{7^2 - 2^2} \quad x = \sqrt{45}\text{ m}$$

Sustituimos los datos anteriores en α:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\sqrt{45}\,\text{m}}{2\,\text{m}} \cdot 6\frac{\text{m}}{\text{min}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -3\sqrt{45}\frac{\text{m}}{\text{min}} = -9\sqrt{5}\,\frac{\text{m}}{\text{min}} \approx -20.125\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

Observe que el signo *menos* indica que la función $y = y(t)$ es decreciente.

Ejemplo 2.57. Razones de cambio relacionadas

Un punto se mueve sobre la curva $y = x^2$ de tal forma que su abscisa aumenta a una razón constante de $3\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Calcule la variación de y con respecto del tiempo cuando el punto en movimiento pasa por (2, 4).

Solución: Ambas coordenadas del punto que se mueve sobre la curva $y = x^2$ son funciones del tiempo. El enunciado indica que $\frac{dx}{dt} = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ y que cuando pasa por (2, 4), el valor es $x = 2$ y la pregunta es $\frac{dy}{dt}$.

Al derivar respecto del tiempo, la función: $y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$.............. α

Entonces sustituimos la información que se requiere en la ecuación α:

$$\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} = 2(2)\left(3\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 12\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ejemplo 2.58. Razones de cambio relacionadas

En un recipiente en forma de cono invertido con radio $R = 30$ cm y altura $H = 50$ cm se vierte salmuera a razón de 4 litros en 1 minuto (figura 2.11). Si el recipiente comienza a llenarse en $t = 0$, calcule la velocidad a la que aumenta la altura del agua a los 3 minutos de haber iniciado el llenado del recipiente.

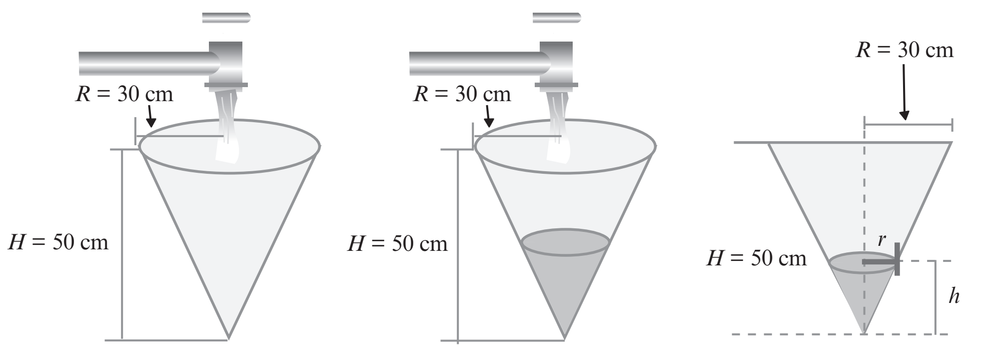


Figura 2.11. Perspectiva de un cono llenándose; pueden observarse los triángulos que lo conforman.

Solución: Llamemos h a la altura de la salmuera en centímetros respecto a la punta del cono, como podemos observar en la figura. Para el valor $h > 0$ hay un cono de salmuera en el interior del recipiente, el cual tiene altura h y base r; ambas están en función del tiempo, que escribimos como $h = h(t)$ y $r = r(t)$. El volumen V de este cono también está en función del tiempo:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ ....} \ \alpha$$

Observemos que en la expresión anterior hay dos variables: h y r; pongamos al volumen en términos de una sola variable. En la tercera figura hay un triángulo dentro de otro y las bases son paralelas, por lo que debe cumplirse:

$$\frac{H}{R} = \frac{h}{r} \Rightarrow \frac{50}{30} = \frac{h}{r} \Rightarrow r = \frac{3}{5}h$$

Con esta expresión podemos plantear el volumen en términos de la altura, por lo que queda:

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{5}h\right)^2 h = \frac{3}{25}\pi h^3$$

Luego, derivamos respecto del tiempo:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{9}{25}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

De donde queremos

$$\frac{dh}{dt} \quad \therefore \quad \frac{dh}{dt} = \frac{25}{9\pi h^2}\frac{dV}{dt} \text{..........} \beta$$

Ya obtuvimos el dato $\frac{dV}{dt}$ pero falta obtener la altura h cuando el tiempo es de 3 minutos, para lo cual partimos de que se vierten 4 L cada minuto, por tanto, a los 3 min tenemos 12 L, es decir, 12 000 cm^3. Recordemos que, en términos de altura, el volumen $V=\frac{3}{25}\pi h^3$ se convierte en $h=\sqrt[3]{\frac{25V}{3\pi}}$, de aquí calculamos h cuando han pasado 3 minutos, que es cuando hay 12 L o 12 000 cm^3.

$$h=\sqrt[3]{\frac{25V}{3\pi}}=\sqrt[3]{\frac{25\left(12\,000\,\text{cm}^3\right)}{3\pi}}=31.692\,\text{cm}$$

Ahora ya tenemos todos los datos para hacer la sustitución en la ecuación β:

$$\frac{dh}{dt}=\frac{25}{9\pi h^2}\frac{dV}{dt}=\frac{25}{9\pi(31.692\,\text{cm})^2}\left(4\,000\frac{\text{cm}^3}{\text{min}}\right)\approx 3.521\frac{\text{cm}}{\text{min}}$$

Concluimos que la altura de la salmuera sube con una rapidez de $3.521\frac{\text{cm}}{\text{min}}$ a los 3 min de haber iniciado el llenado.

Ejemplo 2.59. Razones de cambio relacionadas

Un faro está situado en una isla pequeña a 2 mi de la costa. Su baliza gira a una razón constante de $12\frac{\text{grados}}{\text{segundo}}$ (figura 2.12). ¿Qué tan rápido se mueve el haz del faro a lo largo de la costa en un punto localizado a 3 mi del punto sobre la costa que se encuentra más cercano al faro?

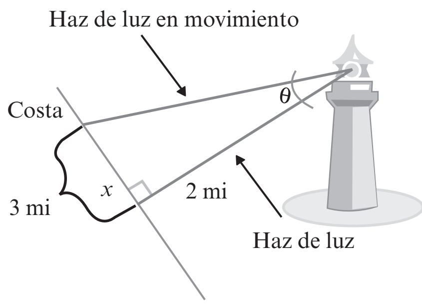


Figura 2.12. Haz de luz en movimiento.

Solución: Primero convertiremos los grados a radianes:

$$12^\circ\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{\pi}{15}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Lo cual corresponde a la rapidez con que está girando la baliza, es decir $\frac{d\theta}{dt}$ en radianes.

Calculamos el ángulo en el instante en que $x=3$ mi con $\tan\theta=\frac{x}{2}\Rightarrow\tan\ \theta=\frac{3}{2}\Rightarrow\tan^2\theta=\frac{9}{4}$; después, sustituimos el resultado anterior en la identidad $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\frac{9}{4}=\frac{13}{4}$. Este resultado lo ocuparemos en la función que derivemos respecto del tiempo y que más adelante llamaremos α.

Debemos encontrar $\frac{dx}{dt}$. Al observar la figura y recordar la definición de la tangente, podemos plantear:

$$\frac{x}{2}=\tan\ \theta$$

Despejando obtenemos $x = 2\tan\theta$ y al derivar respecto del tiempo,

$$\frac{dx}{dt} = 2\ \sec^2\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{15}\ \sec^2\theta........\alpha$$

Entonces sustituimos el resultado que habíamos calculado para $\sec^2\theta = \frac{13}{4}$.

$$\frac{dx}{dt} = 2\ \sec^2\theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{15} \cdot \frac{13}{4} = \frac{13\pi}{30} \approx 1.36\frac{\text{mi}}{\text{s}}$$

Ejercicios 2.12. **Razones de cambio relacionadas**

Resuelva los problemas siguientes:

1. La diagonal de un cuadrado está aumentando a una razón de $2\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Calcule la razón a la que incrementa el área del cuadrado cuando la diagonal mide 10 cm.

Respuesta: 20 cm^2/s

2. Un triángulo rectángulo tiene un cateto de 10 cm y su hipotenusa está aumentando a razón de $8\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Calcule la rapidez en la que está aumentando el área del triángulo, cuando la hipotenusa mide 30 cm.

Respuesta: $\frac{1\,200}{\sqrt{800}} \approx 42.42$

3. Un cono circular recto tiene una altura de $H = 30$ cm mientras el radio de su base está aumentando a razón de $2\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Calcule la rapidez en la que está aumentando el volumen del cono cuando el radio de su base mide 6 cm.

Respuesta: 249 π cm^3/s

4. Se tiene un depósito cónico cuya altura es de 10 m y cuyo radio de la base es de 3 m el cual está lleno de agua. En $t = 0$ comienza a bombearse agua hacia afuera del depósito a una razón de $2\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$. Determine la razón a la que está disminuyendo el nivel del líquido en el depósito, luego de una hora de haber comenzado a llenarse.

Respuesta: 8.05 m/s

5. Una persona que mide 1.70 m se aleja de un farol que se encuentra a una altura de 3.5 m del piso, con una rapidez de $3\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Determine la rapidez a la que crece la sombra del hombre que se proyecta sobre el piso.

Respuesta: 2.83 km/h

6. Al instante $t = 0$ se cruzan perpendicularmente las rutas de dos aviones, uno de los cuales vuela en una línea a 200 m por encima de la línea de vuelo del otro. Las velocidades de los aviones son de $550\frac{\text{km}}{\text{h}}$ y $750\frac{\text{km}}{\text{h}}$, respectivamente. Determine la velocidad a la que los aviones se alejan el uno del otro después de 2 minutos de t_0.

Respuesta: 34.25 km/h

7. Una cámara de rastreo ubicada a 1 000 pies del punto de lanzamiento de un globo, lo enfocará en su ascenso, por lo que girará alrededor de un eje y se elevará verticalmente por el aire caliente que contiene. En el instante en que el ángulo de elevación θ de la cámara es $\frac{\pi}{6}$, el ángulo crece a razón de $0.2\frac{\text{rad}}{\text{min}}$. ¿A qué razón se eleva el globo en ese instante?

Respuesta: 266.8 pies/min

8. Un punto se mueve sobre la hipérbola $y = \frac{1}{x}$ de tal modo que su abscisa x aumenta a una velocidad constante de $3\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$. Calcule la velocidad a la que varía la ordenada de ese punto cuando pasa por (1, 1).

Respuesta: -3 cm/s

2.3.2. Problemas de optimización

En áreas del conocimiento tan disímiles entre sí como la economía, la biología y la ingeniería se requiere calcular los valores máximos y/o mínimos de la variable dependiente y, por supuesto, el valor de la variable independiente que desemboca en esos valores, como el valor máximo de una producción, la población máxima de ciertos individuos o el volumen máximo de un recipiente. Es por ello que este tema es imprescindible en un curso de cálculo diferencial, ya que aplicaremos la derivada para responder estos problemas. Cabe mencionar que los valores mínimos no siempre son indeseables porque podemos calcular el costo mínimo de una producción o el mínimo de material para algún recipiente. En esta sección resolveremos algunas de las situaciones mencionadas.

Ejemplo 2.60. **Optimización (máximos y mínimos)**

Se desea construir un cono cuya altura sesgada sea de L unidades (figura 2.13). ¿Cuáles son las dimensiones (radio y altura) que maximizan el volumen de dicho cuerpo?

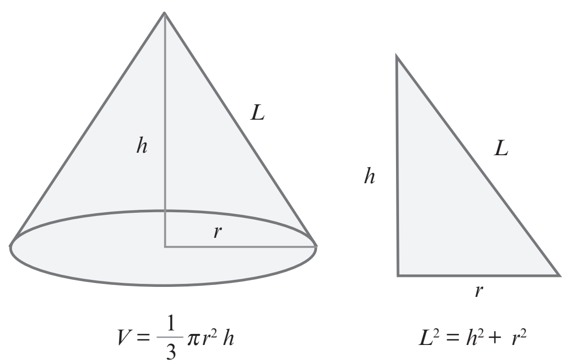


Figura 2.13. Gráfica de un cono en perspectiva frontal para observar el triángulo rectángulo.

De la figura 2.13 deducimos que:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \tag{1}$$

$$L^2 - h^2 = r^2 \tag{2}$$

Sustituyendo la ecuación (2) en la (1) tenemos

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(L^2 h - h^3\right) \tag{3}$$

Tomando la primera y segunda derivadas:

$$\frac{dV}{dh} = \frac{1}{3}\pi\left(L^2 - 3h^2\right) \tag{4}$$

$$\frac{d^2V}{dh^2} = -2\pi h \tag{5}$$

Para cualquier valor real y positivo de h, la segunda derivada será negativa, por lo que se produce un máximo. Resolviendo la ecuación (4) para encontrar los puntos críticos tenemos:

$$0=\frac{1}{3}\pi\left(L^2-3h^2\right);\ h=L\sqrt{\frac{1}{3}};\ r=\sqrt{L^2-\frac{L^2}{3}}\ \therefore r=L\sqrt{\frac{2}{3}}\text{ y }V_{\text{máx}}=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{3}L^2\right)L\sqrt{\frac{1}{3}},\ V_{\text{máx}}=\left(\frac{2}{9}\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\pi L^3$$

Ejemplo 2.61. Optimización (máximos y mínimos)

Se pretende diseñar una caja sin tapa con base cuadrada y con un área superficial de A_s (figura 2.14). ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para que su volumen sea máximo?

Solución: El área superficial es:

$$A_s=x^2+4*xy \qquad \textbf{(1)}$$

De donde, al despejar la altura obtenemos:

$$\frac{A_s-x^2}{4x}=y \qquad \textbf{(2)}$$

Por otro lado, el volumen de la caja está dado por

$$V=x^2y \qquad \textbf{(3)}$$

Sustituyendo la ecuación (2) en la (3),

$$V=x^2\left(\frac{A_s-x^2}{4x}\right)=\frac{1}{4}\left(A_sx-x^3\right) \qquad \textbf{(4)}$$

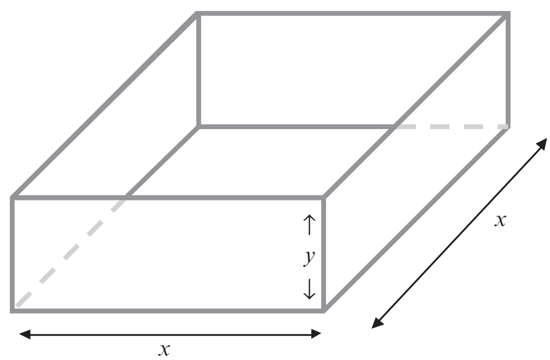


Figura 2.14. Caja sin tapa.

Derivando la ecuación (4):

$$\frac{dV}{dx}=\frac{1}{4}\frac{d}{dx}\left(A_sx-x^3\right)=\frac{1}{4}\left(A_s-3x^2\right) \qquad \textbf{(5)}$$

Y la segunda derivada es:

$$\frac{d^2V}{dx^2}=\frac{1}{4}\frac{d}{dx}\left(A_s-3x^2\right)=\frac{1}{4}[-6x]=-\frac{3}{2}x \qquad \textbf{(6)}$$

Resolviendo (5) para encontrar los puntos críticos:

$$\frac{dV}{dx}=0=\frac{1}{4}\left(A_s-3x^2\right)\ \therefore\ x=\pm\sqrt{\frac{4_s}{3}}$$

Sustituyendo el punto crítico con significado físico:

$$\frac{d^2V\left(\sqrt{\frac{A_s}{3}}\right)}{dx^2}=-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{A_s}{3}},\ \frac{d^2V\left(\sqrt{\frac{A_s}{3}}\right)}{dx^2}<0$$

por tanto, el volumen es máximo y la dimensión altura es:

$$y=\frac{A_s-\left(\sqrt{\frac{A_s}{3}}\right)^2}{4\sqrt{\frac{A_s}{3}}}=\frac{A_s-\frac{A_s}{3}}{4\sqrt{\frac{A_s}{3}}}=\frac{\frac{2A_s}{3}}{4\sqrt{\frac{A_s}{3}}}=\frac{A_s}{6\sqrt{\frac{A_s}{3}}},\ y=\sqrt{\frac{A_s}{12}}$$

El volumen máximo está dado por:

$$V=\left(\sqrt{\frac{A_s}{3}}\right)^2\frac{A_s}{6\sqrt{\frac{A_s}{3}}}=\frac{A_s}{6}\sqrt{\frac{A_s}{3}},\quad V_{\text{máx}}=\sqrt{\frac{A_s^{\,3}}{108}}$$

Ejemplo 2.62. Optimización (máximos y mínimos)

Se desea elaborar un recipiente cilíndrico que tenga un volumen V. Encuentre las dimensiones que este debe tener para que la cantidad de metal sea mínima, considerando:

1. Recipiente abierto.
2. Recipiente cerrado.

Solución:

1. El volumen del cilindro es $V=\pi r^2 h$ **(1)**

Mientras que obtenemos el área superficial con:

$$A_T=2\pi rh+\pi r^2 \tag{2}$$

Para el cilindro con una sola tapa.

De la ecuación (2) despejamos h:

$$h=\frac{V}{\pi r^2}$$

y sustituimos en la ecuación del área total (2)

$$A_T=2\pi r\left(\frac{V}{\pi r^2}\right)+\pi r^2,\quad A_T=\frac{2V}{r}+\pi r^2. \tag{3}$$

Derivando la ecuación (3) tenemos:

$$\frac{dA_T}{dr}=\frac{d}{dr}\left[\frac{2V}{r}+\pi r^2\right],\quad \frac{dA_T}{dr}=-\frac{2V}{r^2}+2\pi r \tag{4}$$

Derivando de nuevo:

$$\frac{d^2A_T}{dr^2}=\frac{6V}{r^3}+2\pi \tag{5}$$

Igualando a cero la primera derivada para hallar los puntos críticos:

$$2\pi r=\frac{2V}{r^2},\quad r^3=\frac{V}{\pi},\quad r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\text{, por tanto }h=\frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^2}=\frac{\pi^{2/3}V}{\pi V^{2/3}},\quad h=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

Sustituyendo r en la ecuación (5):

$$\frac{d^2A_T}{dr^2}=\frac{6V}{\left(\sqrt[3]{V/\pi}\right)^3}+2\pi=8\pi$$

con lo cual verificamos que con los valores de r y h encontrados obtenemos el área mínima. Por tanto, el área mínima es:

$$A_T=2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)+\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^2,\quad A_{\text{mín}}=3\sqrt[3]{\pi V^2}$$

2. Considere que el recipiente es cerrado:

$$A_T = 2\pi r\left(\frac{V}{\pi r^2}\right) + 2\pi r^2 \qquad \textbf{(6)}$$

$$\frac{dA_T}{dr} = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r; \; r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$h = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} = \frac{(2\pi)^{2/3}V}{\pi V^{2/3}}\; ; \; h = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

y la segunda derivada es

$$\frac{d^2 A_T}{dr^2} = \frac{6V}{r^3} + 4\pi$$

sustituyendo

$$\frac{d^2 A_T}{dr^2} = \frac{6V}{\left(\sqrt[3]{4V/\pi}\right)^3} + 4\pi = \frac{11}{2}\pi$$

lo cual garantiza el mínimo.

$$A_T = 2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\right) + \pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2 = 2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{2V^2}{\pi^2}}\right) + \pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2$$

$$A_{\text{mín}} = 5\sqrt[3]{\pi(V/2)^2}$$

Ejemplo 2.63. Optimización (máximos y mínimos)

Se desea elaborar un recipiente cilíndrico abierto que tenga un volumen V. El costo del material para la base cuesta n veces más que aquel del cuerpo del cilindro. Suponiendo que no hay desperdicio de material, calcule las dimensiones que permitan que el costo del recipiente sea mínimo. El costo es P.

Solución:

$$V = \pi r^2 h \qquad \textbf{(1)}$$

De donde

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Por otro lado, el área es: $A_T = 2\pi rh + \pi r^2$ **(3)**

Sustituyendo la altura en función del radio y el volumen:

$$A_T = \frac{2V}{r} + \pi r^2 \qquad \textbf{(4)}$$

El costo total está dado por:

Costo total $=$ (área de la base)(costo base) $+$ (área del cuerpo)(costo del cuerpo):

$$C_T = \frac{2V}{r}P + nP\pi r^2 \qquad \textbf{(5)}$$

Derivando respecto a r:

$$\frac{dC_T}{dr} = -\frac{2V}{r^2}P + 2nP\pi r \qquad \textbf{(6)}$$

Igualamos la primera derivada a cero para obtener el radio óptimo:

$$\frac{2V}{r^2}P = 2nP\pi r, \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{n\pi}}, \quad h = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{n\pi}}\right)^2}, \quad h = \sqrt[3]{\frac{n^2V}{\pi}}$$

Calculamos la segunda derivada:

$$\frac{d^2C_T}{dr^2} = \frac{6V}{r^3}P + 2nP\pi .... \tag{7}$$

$$\frac{d^2C_T}{dr^2} = \frac{6V}{\left(\sqrt[3]{\frac{V}{n\pi}}\right)^3}P + 2nP\pi$$

$$\frac{d^2C_T}{dr^2} = (6n\pi)P + (2n\pi)P = (8n\pi)P$$

por lo que el costo es mínimo.

$$C_{T\,\text{mín}} = \frac{2V}{\sqrt[3]{\frac{V}{n\pi}}}P + nP\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{n\pi}}\right)^2 \quad C_T = 2(n\pi)^{1/3}V^{2/3}P + (n\pi)^{1/3}V^{2/3}P; \quad C_{T\,\text{mín}} = \left(3\sqrt[3]{n\pi V^2}\right)P$$

Ejemplo 2.64. Optimización (máximos y mínimos)

Se desea construir una caja a partir de un rectángulo de cierto material con las siguientes dimensiones: L de largo y a de ancho; además, se recorta un cuadrado de lado x en cada esquina y, para tal efecto, se doblan ambos lados. Calcule las dimensiones del volumen máximo que se produce recortando el cuadrado óptimo.

$$V = (L-2x)(a-2x)*x \tag{1}$$

Si derivamos el polinomio en lugar de un producto tenemos:

$$V = aLx - 2(a+L)x^2 + 4x^3 \tag{2}$$

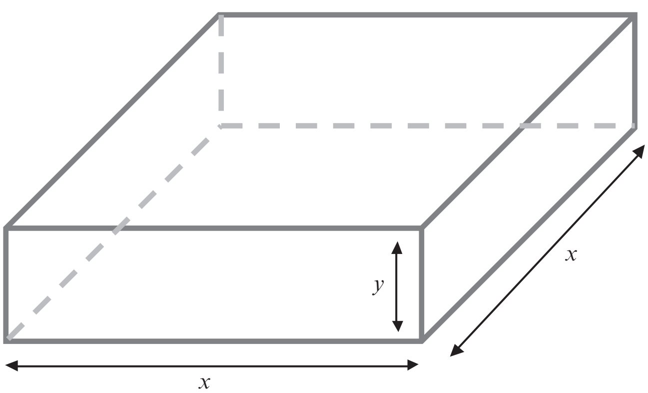


Figura 2.15. Caja sin tapa.

Derivando respecto de x:

$$\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 4(a+L)x + aL \tag{3}$$

Igualando a cero:

$$0 = 12x^2 - 4(a+L)x + aL$$

Resolviendo:

$$x = \frac{4(a+L) \pm \sqrt{4^2(a+L)^2 - 4(12)aL}}{2(12)} = \frac{4(a+L) \pm \sqrt{4^2(a+L)^2 - 4(12)aL}}{2(12)}$$

$$x = \frac{4(a+L) \pm 4\sqrt{\left[a^2 - aL + L^2\right]}}{4(6)} = \frac{(a+L) \pm \sqrt{\left[a^2 - aL + L^2\right]}}{6}$$

$$x = \frac{(a+L) + \sqrt{\left[a^2 - aL + L^2\right]}}{6}$$

La segunda derivada es:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 24x - 4(a+L)$$

Sustituyendo

$$x = \frac{(a+L) + \sqrt{\left[a^2 - aL + L^2\right]}}{6}$$

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_{\text{op}}} = 24\frac{(a+L) + \sqrt{\left[a^2 - aL + L^2\right]}}{6} - 4(a+L)$$

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_{\text{op}}} = 4(a+L) + 4\sqrt{\left[a^2 - aL + L^2\right]} - 4(a+L) = 4\sqrt{\left[a^2 - aL + L^2\right]}$$

lo cual produce un mínimo.

Sustituyendo la otra raíz:

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_{\text{op}}} = 24\frac{(a+L) - \sqrt{\left[a^2 - aL + L^2\right]}}{6} - 4(a+L) = -4\sqrt{a^2 - aL + L^2}$$

la cual produce un máximo, y, por tanto, la raíz elegida es:

$$x_{\text{op}} = \frac{(a+L) - \sqrt{\left[a^2 - aL + L^2\right]}}{6}$$

El volumen máximo es:

$$V = aLx - 2(a+L)x^2 + 4x^3$$

$$V_{\text{máx}} = \frac{(a+L) - \sqrt{\left[a^2 - aL + L^2\right]}}{6}\left[aL - 2(a+L)\left(\frac{(a+L) - \sqrt{\left[a^2 - aL + L^2\right]}}{6}\right) + 4\left(\frac{(a+L) - \sqrt{\left[a^2 - aL + L^2\right]}}{6}\right)^2\right]$$

Desarrollando y factorizando términos:

$$V_{\text{máx}} = \frac{(a+L) - \sqrt{\left[a^2 - aL + L^2\right]}}{54}\left[4aL - a^2 - L^2 + (a+L)\sqrt{\left[a^2 - aL + L^2\right]}\right]$$

Ejemplo 2.65. **Optimización (máximos y mínimos)**

Halle el volumen máximo de un cono que puede inscribirse dentro de una esfera de radio R.

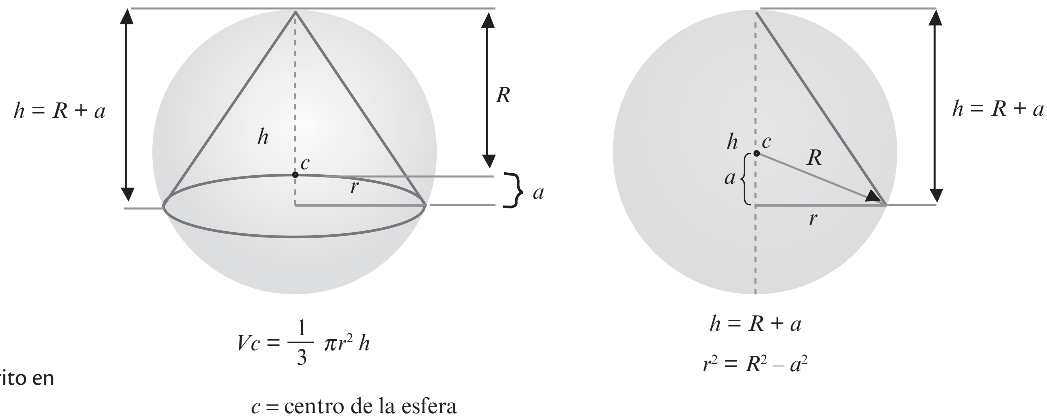


Figura 2.16. Cono inscrito en una esfera.

Solución: El volumen del cono es:

$$Vc = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - a^2\right)(R + a) \quad \textbf{(1)}$$

Desarrollando el polinomio:

$$Vc = \frac{1}{3}\pi\left(R^3 + aR^2 - a^2R - a^3\right) \quad \textbf{(2)}$$

Derivando la función:

$$\frac{d}{da}Vc = \frac{d}{da}\left[\frac{1}{3}\pi\left(R^3 + aR^2 - a^2R - a^3\right)\right], \text{ e igualando a cero } \frac{d}{da}Vc = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - 2aR - 3a^2\right) = 0$$

$$-3a^2 - 2aR + R^2 = 0 \text{ , resolviendo: } a = \frac{2 \pm \sqrt{4R^2 - 4(-3)R^2}}{-6}\text{; } a = \frac{1 \pm 2R}{-3}$$

$$a_1 = \frac{3R}{-3} = -R\text{ ; } a_2 = \frac{-R}{-3} = \frac{R}{3}\text{ ; } a_2 = \frac{R}{3}$$

Derivando para verificar el máximo:

$$\frac{d^2}{da^2}Vc = \frac{d}{da}\left[\frac{1}{3}\pi\left(R^2 - 2aR - 3a^2\right)\right] = \frac{1}{3}\pi(-2R - 6a) \quad \textbf{(3)}$$

$$\frac{d^2}{da^2}Vc = \frac{1}{3}\pi\left(-2R - 6\left(\frac{R}{3}\right)\right) = -\frac{4}{3}\pi R$$ y así se garantiza el resultado esperado.

Sustituyendo el valor de a para encontrar las otras dimensiones:

$$r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2} = R\sqrt{\frac{8}{9}}\text{; } r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R\text{; } h = R + \frac{R}{3} = \frac{4}{3}R\text{, } h = \frac{4}{3}R$$

El volumen máximo está dado por: $Vc = \frac{1}{3}\pi\left[R^3 + \left(\frac{R}{3}\right)R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2 R - \left(\frac{R}{3}\right)^3\right]$

realizando las operaciones pertinentes:

$$Vc = \frac{1}{3}\pi\left[R^3 + \frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{3^2} - \frac{R^3}{3^3}\right] = \frac{32}{81}\pi R^3\,;\; Vc_{\text{máx}} = \frac{32}{81}\pi R^3$$

Ejemplo 2.66. Optimización (máximos y mínimos)

Suponiendo que el radio de la esfera es de 3 pulgadas, halle las dimensiones y el volumen que lo hacen máximo.

$$r = \frac{2\sqrt{2}}{3}(3) = 2\sqrt{2}[u]\,;\; h = \frac{4}{3}(3) = 4[u]\,;\; V_{\text{máx}} = \frac{32}{81}\pi(3)^3 = \frac{32}{3}\pi\left[u^3\right]$$

Ejemplo 2.67. Optimización (máximos y mínimos)

Halle el volumen máximo de un cilindro recto que puede inscribirse dentro de una esfera de radio R.

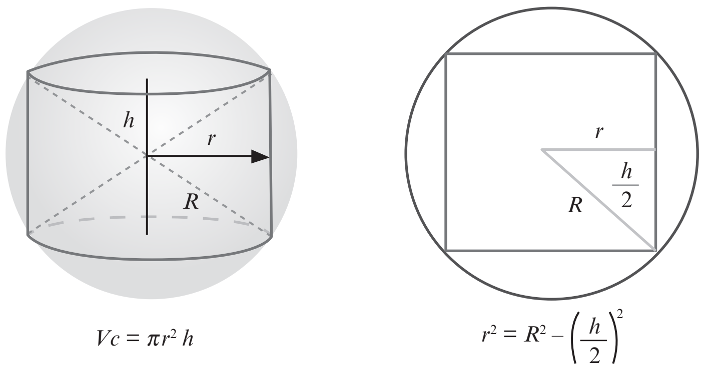


Figura 2.17. Cilindro inscrito en una esfera y una vista en plano que muestra el triángulo rectángulo.

Solución: A partir tanto de las ecuaciones del volumen como del teorema de Pitágoras:

$$Vc = \pi\left[R^2 - \frac{h^2}{4}\right]h = \pi\left(R^2 h - \frac{h^3}{4}\right) \qquad (1)$$

Derivando la ecuación (1):

$$\frac{d}{dh}Vc = \pi\frac{d}{dh}\left(R^2 h - \frac{h^3}{4}\right) = R^2 - \frac{3}{4}h^2 \qquad (2)$$

Igualando a cero y resolviendo:

$$\frac{d}{dh}V_C = 0 = R^2 - \frac{3}{4}h^2;\; \frac{4}{3}R^2 = h^2 \pm \frac{2R}{\sqrt{3}} = h;\; h = \pm\frac{2\sqrt{3}R}{3}$$

Cálculo de la segunda derivada:

$$\frac{d^2}{dh^2}Vc = -\frac{3}{2}h \qquad (3)$$

Utilizando el valor de h hallado anteriormente:

$$\frac{d^2}{dh^2}Vc = -\frac{3}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}R}{3}\right) = -\sqrt{3}R$$

que produce un máximo.

Utilizando el valor de h calculamos la dimensión r:

$$r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{2R}{2\sqrt{3}}\right)^2}, \quad r = R\sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}R; \quad r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$$

y el volumen es:

$$Vc_{\text{máx}} = \pi\left[R^2\left(\frac{2\sqrt{3}R}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{2\sqrt{3}R}{3}\right)^3\right]$$

Simplificando:

$$Vc_{\text{máx}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi R^3$$

Ejemplo 2.68. **Optimización (máximos y mínimos)**

a) Suponiendo que el radio de la esfera es de 3 pulgadas, encuentre las dimensiones y el volumen que hacen máximo al cilindro.

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}(3) = \sqrt{6}[u]; \; h = \frac{2\sqrt{3}}{3}(3) = 2\sqrt{3}[u], \; Vc_{\text{máx}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi(3)^3 = 12\sqrt{3}\pi\left[u^3\right]$$

Ejemplo 2.69. **Optimización (máximos y mínimos)**

Halle las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en el sector de parábola formado por la curva $x = \frac{y^2}{P}$ y la recta $x = x_0$.

Solución: Si la base se denota como a y la altura del rectángulo como b, se tiene que los puntos

$$\left(x_0 - a, \frac{b}{2}\right), \left(x_0 - a, -\frac{b}{2}\right)$$

deben pertenecer a la parábola, por tanto, satisfacen su ecuación y se tendrá que cumplir que:

$$x_0 - a = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{P}; \; a = x_0 - \frac{b^2}{4P}$$

Como el área del rectángulo es $A = ab$, expresándola sólo en función de b y sustituyendo el valor anterior, se tiene:

$$A = ab = \left(x_0 - \frac{b^2}{4P}\right)b \quad A = x_0 b - \frac{b^3}{4P}$$

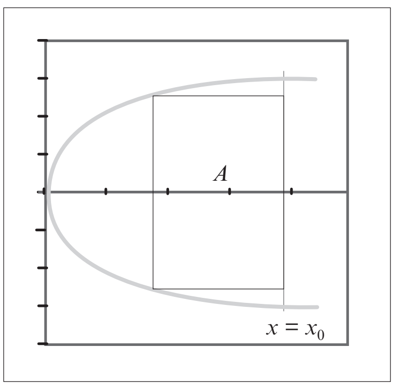


Figura 2.18. Rectángulo inscrito en el sector de la parábola.

Derivando esta última ecuación:

$$\frac{dA}{db}=x_0-3\frac{b^2}{4P};\ \frac{d^2A}{db^2}=-\frac{3b}{2P}$$

Igualando a cero la primera derivada:

$$0=x_0-3\frac{b^2}{4P}\ \therefore\ b=\pm 2\sqrt{\frac{Px_0}{3}}$$

Sustituyendo la raíz positiva en la segunda derivada:

$$\frac{d^2A}{db^2}=-\frac{3}{2P}2\sqrt{\frac{Px_0}{3}}=-\frac{3}{P}\sqrt{\frac{Px_0}{3}}$$

Que resulta en un número negativo, por lo cual el área es máxima:

$$a=x_0-\frac{\left(\frac{4Px_0}{3}\right)}{4P}=x_0-\frac{x_0}{3},\quad a=\frac{2}{3}x_0;\ \ b=\sqrt{2Pa}$$

$$A=\frac{2}{3}x_0\left(2\sqrt{\frac{Px_0}{3}}\right)=\frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{Px_0}{3}}\right)x_0;\ A_{\text{máx}}=\sqrt{2Pa^3}$$

2.3.3. Regla de L'Hôpital

Recordemos que las formas $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ son llamadas *indeterminadas* porque no garantizan la existencia del límite ni, en caso de existir, nos indican cuál es. Cuando nos encontremos con este tipo de indeterminaciones podríamos intentar reescribir la expresión usando algunas técnicas algebraicas. Ocasionalmente podremos desarrollar estas técnicas para encontrar el límite, sobre todo de las funciones trascendentes. Por ejemplo, calcule el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^x-1}$$

En este caso se produce una forma indeterminada de la forma $\frac{0}{0}$. Ahora, factorizando y dividiendo, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+1)\cdot(e^x-1)}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}(e^x+1)=2$$

A pesar de ello, no todas las formas indeterminadas pueden evaluarse de esta manera o utilizando alguna técnica algebraica cuando las funciones algebraicas y trascendentes están mezcladas. Un ejemplo de esto lo podemos ver en la función siguiente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$$

Aquí se produce la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Reescribiendo, obtenemos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}}{x}-\frac{1}{x}\right)$$

Esto produce la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, lo que obviamente no podemos evaluar de manera directa para obtener el límite de la función.

Teorema 2.14 Regla de L'Hôpital

Supóngase que $f(x)$ y $g(x)$ son diferenciables y $g'(x) \neq 0$ en las cercanías de c, excepto tal vez en c. Además, si suponemos que:

$$\lim_{x\to c} f(x) = 0 \ \text{ y } \ \lim_{x\to c} g(x) = 0$$

O bien:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \ \text{ y } \ \lim_{x\to c} g(x) = \infty$$

Entonces:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La aplicación de este teorema no se limita a la primera derivada, sino que puede extenderse a la segunda, tercera o k-ésima derivada, siempre y cuando la función continúe siendo diferenciable.

Ejemplo 2.70. Regla de L'Hôpital

Calcule el límite siguiente:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

Solución: La evaluación directa de la función conduce a una forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Utilizando los métodos antes vistos, concluimos que el límite existe y que es igual a 4. En efecto:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

Usando la regla de L'Hôpital obtenemos un resultado equivalente:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2x}{1} = 4$$

Nota: Es útil señalar que tanto el numerador como el denominador deben derivarse como funciones separadas, y no aplicar la regla del cociente, es decir:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{d}{dx}f(x)}{\frac{d}{dx}g(x)} \ \text{ y no } \ \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$$

Ejemplo 2.71. Regla de L'Hôpital

Halle el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{3}}{h}$$

Solución: La evaluación directa de la función conduce a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, por lo cual, si usamos la regla de L'Hôpital llegamos a:

$$f(h)=\sqrt{x+h}-\sqrt{x} \Rightarrow \frac{d}{dh}f(h)=\frac{1}{2\sqrt{x+h}}$$

$$g(h)=h \Rightarrow g'(h)=1$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\sqrt{x+h}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ejemplo 2.72. Regla de L'Hôpital

Calcule el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

Solución: Si derivamos el numerador y el denominador por separado:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=1$$

Ejemplo 2.73. Regla de L'Hôpital

Calcule el límite

$$y=(1+x)^{1/x}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x};\ \lim_{x\to 0}\ln(y)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)=\frac{0}{0}?\ \lim_{x\to 0}\ln(y)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1\ \therefore\ \lim_{x\to 0}y=e^{1}=e$$

Ejemplo 2.74. Regla de L'Hôpital con indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$

Calcule el límite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x\ln(x)}$$

Solución: La evaluación directa conduce a un absurdo.

Si reacomodamos la expresión anterior:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}=-\frac{\infty}{\infty}=?$$

Usando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{1}{x}=-\infty$$

Observe que podríamos derivar $\frac{1}{x}$, de la misma forma que en los casos anteriores, y el valor del cociente sería cero. Sin embargo, la expresión $\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x}$ no produce una forma indeterminada $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, por lo cual no es correcto continuar con la derivación indiscriminada.

Ejemplo 2.75. Regla de L'Hôpital

Resuelva:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{\ln(x)}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{\ln(x)} = \frac{0}{0}?$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{\ln(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} 2x(x-1) = 0$$

Ejemplo 2.76. Regla de L'Hôpital

Halle el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{x}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{x} = \frac{0}{0} = ?;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(e^x + e^{-x}\right) = 2$$

Uso iterado de la regla de L'Hôpital

A continuación abordaremos ejercicios en los que es preciso utilizar derivadas de orden superior para encontrar el límite de una función.

Ejemplo 2.77. Regla de L'Hôpital

Encuentre el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} = ?$$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} = \frac{0}{0}?,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-a\,\mathrm{sen}\,(ax) + b\,\mathrm{sen}\,(bx)}{2x} = \frac{0}{0} = ?$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-a\,\mathrm{sen}\,(ax) + b\,\mathrm{sen}\,(bx)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-a^2\cos(ax) + b^2\cos(bx)}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Ejemplo 2.78. Regla de L'Hôpital

Encuentre el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)-3x}{x^3}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)-3x}{x^3}=\frac{0}{0}?$$

Derivando:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)-3x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sec^2(2x)-3}{3x^2}=\frac{0}{0}?$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sec^2(2x)-3}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{12\sec(2x)\sec(2x)\tan(2x)}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{12\sec^2(2x)\tan(2x)}{6x}=\frac{0}{0}=?$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{12\;\sec^2(2x)\tan(2x)}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{12\left[2\sec^4(2x)+4\tan^2(2x)\sec^2(2x)\right]}{6}=\frac{24}{6}=4$$

Ejemplo 2.79. Regla de L'Hôpital

Encuentre el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(ax)-ax}{x^3}$$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(ax)-ax}{x^3}=\frac{0}{0}?$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(ax)-ax}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos(ax)-a}{3x^2}=\frac{0}{0}?,\ \lim_{x\to 0}\frac{a\cos(ax)-a}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-a^2\operatorname{sen}(ax)}{6x}=\frac{0}{0}=?,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-a^2\operatorname{sen}(ax)}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{-a^3\cos(ax)}{6}=-\frac{a^3}{6}$$

Ejemplo 2.80. Regla de L'Hôpital

Encuentre el límite

$$y=\left[\operatorname{sen}(x)\right]^x$$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0}[\text{sen}\,(x)]^x = 0^0 = ?$$

$$\lim_{x\to 0} \ln\,(y) = \lim_{x\to 0} x\ln[\text{sen}(x)] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln[\text{sen}(x)]}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{\infty} = ?$$

$$\lim_{x\to 0} \ln\,(y) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\ln[\text{sen}\,(x)]}{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos\,(x)}{\text{sen}\,(x)}}{\frac{-1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\tan\,(x)} = -\frac{0}{0} = ?$$

$$\lim_{x\to 0} \ln\,(y) = -\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}x^2}{\frac{d}{dx}\tan\,(x)} \Rightarrow -\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sec^2(x)} = -\lim_{x\to 0} 2x\cdot\sec^2(x) = 0$$

Ejercicios 2.13. **Regla de L'Hôpital**

Usando la regla de L'Hôpital, halle los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x+2} = 12$

2. $\lim_{a\to 0}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{x}}{a} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

4. $\lim_{\Phi\to 0}\frac{3}{\Phi}\frac{\Phi\cot\,(\Phi)-1}{\Phi} = \infty$

5. $\lim_{\Phi\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan\,(\Phi)}{\Phi} = \infty$

6. Si $N\tau_i = \frac{N}{k}\left[\left(\frac{C_0}{C}\right)^{1/N} - 1\right]$

   Demuestre que $\lim_{x\to\infty} N\tau_i = \ln\left(\frac{C_0}{C}\right)$

7. Sea $\tau = \frac{(R+1)}{k}\ln\left(\frac{C_0+R\cdot C}{(R+1)C}\right)$, demuestre que $\lim_{R\to\infty}\tau = \frac{1}{k}\frac{(C_0-C)}{C}$

2.3.4. Análisis de una función

El procedimiento para analizar las funciones es el siguiente:

1. Dominio de la función. Es el conjunto de números de donde la variable independiente toma sus valores, y para los cuales existe la variable dependiente en el conjunto de los números reales. En las funciones algebraicas solo puede haber indeterminación en dos situaciones y sus combinaciones: en una función racional cuando el denominador se hace cero y en una función radical cuando el subradical es negativo.
2. Rango de la función.* Es el conjunto de números de donde la variable dependiente toma sus valores y para los cuales esta existe en el conjunto de números reales. Despejamos la variable independiente para determinar el rango; si después del despeje queda una función racional, debemos evitar que el denominador se convierta en cero, y si después del despeje queda una función radical, *debemos impedir que el subradical sea negativo*. En muchos casos, *el cálculo* del rango se complica por la estructura de las funciones; en la gran mayoría, *obtendremos el rango a partir de la gráfica*.
3. Paridad. Es de gran ayuda saber si la variable independiente toma el mismo valor, tanto para x_0 como para $-x_0$; si cumple con lo anterior, será una función par o simétrica respecto al eje vertical o de las ordenadas. Si no cumple con lo mencionado, simplemente no es par. Matemáticamente es:

   Si $f(x_0) = f(-x_0)$, entonces $f(x)$ es par.

   Si $f(x_0) \neq f(-x_0)$, entonces $f(x)$ no es par.

   Puede presentarse otra situación cuando la variable independiente toma un valor x_0, obteniendo la variable dependiente el valor $f(x_0)$ y para un valor $-x_0$ obtenemos $-f(x_0)$; entonces la función es impar o simétrica respecto *del origen*. Matemáticamente es:

   Si $f(-x_0) = -f(x_0)$ entonces $f(x)$ es impar.

   Si $f(-x) \neq -f(x)$ entonces $f(x)$ no es impar.

   Si la función no es par ni impar, entonces es asimétrica; es decir, *no tiene simetría*.

4. Intersecciones con los ejes. Para que la curva de la función intersecte el eje vertical, la variable independiente debe ser igual a cero y obtendremos el punto de intersección al evaluar $f(x)$ en $x_0 = 0$, es decir, $f(0)$ siempre y cuando $f(x_0)$ en $\mathbb{R}$.

   Para que la curva de la función intersecte el eje horizontal, o eje de las abscisas, la variable dependiente debe ser igual a cero y el punto o los puntos de intersección deben ser los valores de la varible independiente (x_0, x_1, ... x_n) que provoquen que $f(x)$ se anule o tome el valor de cero $f(x_n) = 0$. El punto estará formado por las coordenadas $(x_n, 0)$.

   a) Intersección con el eje de las ordenadas: igualar a cero la variable independiente.
   b) Intersección con el eje de las abscisas: raíces o ceros de la función (intersección con el eje de las abscisas, igualar a cero la variable dependiente).

5. Puntos críticos o máximos o mínimos. Debemos derivar la función, igualarla a cero y determinar las raíces, así como obtener los pares ordenados de las raíces, evaluando la función con estas abscisas.
6. Intervalos de monotonía (intervalos de crecimiento/decrecimiento). Hay que dividir el dominio en tantos intervalos más uno del número de puntos críticos. Excluir de los intervalos los

* Algunas veces podemos obtener el rango al final del análisis. Si se trata de polinomios enteros, sabemos que todos los impares del rango son reales; si se trata de pares podemos determinar su máximo o mínimo absoluto al comparar las ordenadas de los puntos críticos entre sí. A partir del coeficiente del término dominante (el que tenga la variable elevada al mayor exponente) inferimos que la función crece o decrece sin límite a medida que la variable independiente toma valores negativos grandes. Entonces, determinamos el rango con esta información y el máximo o mínimo absoluto.

puntos singulares o los puntos donde la primera derivada es igual a cero. Si no hay puntos críticos, debemos tomar un solo valor de prueba en la primera derivada y, con ello, determinar si la función es creciente o decreciente. El recorrido se efectúa de izquierda a derecha.

> **Nota:** Es posible investigar la naturaleza de los puntos críticos (máximo o mínimo) con la primera derivada, evaluando antes y después del punto crítico; si decrece y luego crece, se trata de un mínimo local, en caso contrario, de un máximo local.
>
> Si $f'(x_p) > 0$, la función crece; en caso contrario, la función decrece.

7. Puntos de inflexión. Son los puntos de la gráfica de una función en donde ocurre un cambio en el sentido de la concavidad y podemos calcularlos a través de la segunda derivada de la función, la cual igualamos a cero y las raíces son los valores de la variable independiente de las coordenadas de los puntos que pueden ser puntos de inflexión. Para hallar el par ordenado de dichos puntos es necesario sustituirlos en la regla de correspondencia de la función.
8. Intervalos de concavidad. Debemos dividir el dominio en tantos intervalos de concavidad, como puntos de inflexión más uno. Si no existen puntos de inflexión, hay que utilizar los intervalos en los cuales la función es continua y ahí tomar los valores de prueba.

   Si $f''(x_p) > 0$, donde x_p es el valor de x para el cual la segunda derivada es igual a cero, la función es cóncava hacia arriba; en caso contrario, es cóncava hacia abajo.

   Si $f''(x_c) > 0$, donde x_c es la abscisa de un punto crítico, entonces el punto crítico es un mínimo; en caso contrario, es un máximo.
9. Asíntotas. Aunque fueron tratadas ampliamente en el capítulo 1, sería bueno repasar ese tema, para que el tema actual se facilite ya que, además de ser un referente para el trazo de la función, es más importante para comprender el comportamiento numérico de la curva cuando una o ambas variables toman valores extremos (positivos o negativos).

   a) Horizontales: $y = a$ es una asíntota horizontal si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$.

   b) Verticales: $x = a$ es una asíntota vertical si $\lim_{x\to a^+} |f(x)| = +\infty$ o $\lim_{x\to a^-} |f(x)| = +\infty$ o si ocurren ambas posibilidades.

   c) Oblicuas: La recta $y = ax + b$ es una asíntota oblicua si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ y $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - a\cdot x] = b$. Además, podemos obtener la recta $y = ax + b$ al efectuar la división algebraica $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ con $C(x)$ como la regla de correspondencia de la asíntota.
10. Bosquejo de la función. Trazar una gráfica empleando el análisis anterior.

Ejemplo 2.81. Análisis de una función

Analice lo siguiente a partir de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

1. Dominio de la función $D_f = \mathbb{R}$, por ser un polinomio.
2. Rango de la función $\text{Rango}_f = \mathbb{R}$, por ser un polinomio de grado impar.
3. Paridad:

$$f(-x) = (-x)^3 - 6(-x)^2 + 9(-x) = -x^3 - 6x^2 - 9x,\ f(-x) \neq f(x) \ \text{ y } \ f(-x) \neq -f(x)$$

   No es par ni impar, sino asimétrica.

4. Intersecciones con los ejes:

a) Intersección con el eje de las ordenadas: $x = 0$, $f(0) = 0^3 - 6(0)^2 + 9(0) = 0$; $P_{x=0}(0,\ 0)$

b) Intersección con el eje de las abscisas:

$$y = 0;\ 0 = x^3 - 6x^2 + 9x, \text{ factorizando.}$$

$$0 = x\left(x^2 - 6x + 9\right) = x(x-3)(x-3) \text{ resolviendo } x - 3 = 0, x = 0 \therefore x = 3 \text{ y } x = 0$$

$$P_{y1=0}(0,\ 0); P_{y2=0}(3,\ 0)$$

5. Puntos críticos:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3 - 6x^2 + 9x\right) = 3x^2 - 12 * x + 9 \text{ igualando a cero la derivada.}$$

$$0 = 3\left(x^2 - 4 * x + 3\right);\ 0 = (x-3)(x-1);\ x = 3; x = 1 \text{ sustituyendo este valor en la función.}$$

$$f(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) = 4;\ f(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) = 0; \qquad P_{c1}(1,\ 4)\ P_{c2}(3,\ 0)$$

Derivando de nuevo:

$$\frac{df'(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(3x^2 - 12 * x + 9\right) = 6x - 12$$

Sustituyendo en la segunda derivada los puntos críticos hallados en el paso 5:

$$f''(1) = 6(1) - 12 = -6;\ f''(3) = 6(3) - 12 = 6;\ P_{c1}(1,\ 4) = \text{máx};\ P_{c2}(3,\ 0) = \text{mín}$$

6. Intervalos de monotonía (intervalos de crecimiento/decrecimiento):

Intervalo	x_p	$f'(x_p)$	Comentario
$x \in (-\infty, 1)$	-2	$f'(-2) = 3(-2)^2 - 12 * (-2) + 9 = 45;\ f'(-2) > 0$	Crece.
$x \in (1, 3)$	2	$f'(2) = 3(2)^2 - 12 * (2) + 9 = -3;\ f'(2) < 0$	Decrece.
$x \in (3, +\infty)$	4	$f'(4) = 3(4)^2 - 12 * (4) + 9 = 9;\ f'(4) > 0$	Crece.

Tabla 2.3
Resumen de la monotonía del ejemplo 2.81.

7. Puntos de inflexión. Igualando a cero la segunda derivada y resolviendo la ecuación resultante:

$f''(x) = 6x - 12 = 0; x = 2$, por tanto, existe solo un punto de inflexión, y su par ordenado es:

$$f(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 9(2) = 2,\ P_I(2,\ 2)$$

8. Concavidad de la función:

Intervalo	x_p	$f''(x_p)$	Comentario
$x \in (-\infty, 2)$	0	$f''(0) = 6(0) - 12 = -12;\ f''(0) < 0$	Cóncava hacia abajo.
$x \in (2, +\infty)$	3	$f''(3) = 6(3) - 12 = 6;\ f''(3) > 0$	Cóncava hacia arriba.

Tabla 2.4
Resumen de concavidad del ejemplo 2.81.

9. Asíntotas:

a) Horizontales: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(x^3 - 6x^2 + 9x\right) = \pm\infty$

Por tanto, no existen asíntotas horizontales.

b) Verticales: no existen asíntotas verticales.
c) Oblicuas: no existen asíntotas oblicuas.

10. Bosquejo de la función.

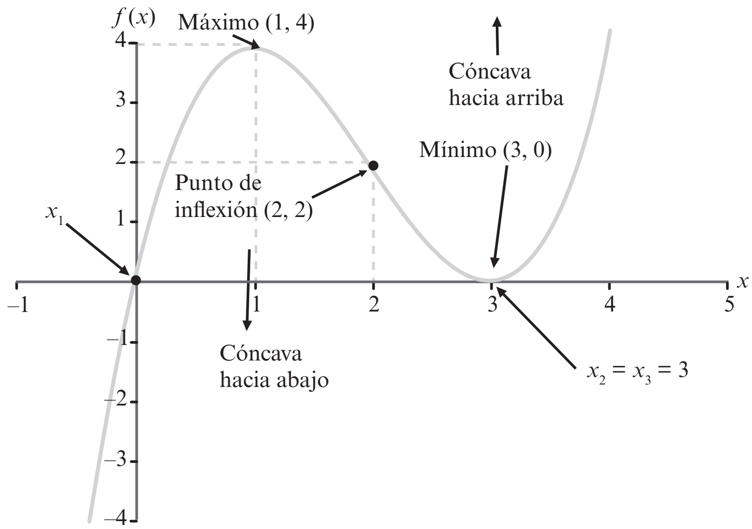


Figura 2.19. Comportamiento de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Ejemplo 2.82. **Análisis de una función**

Analice lo siguiente a partir de $y = -x^4 + 8x^2 - 16$.

1. Dominio de la función: $D_f = \mathbb{R}$.

2. Rango de la función: $-y = x^4 - 8x^2 + 16 \Rightarrow -y = \left(x^2 - 4\right)^2;\ x^2 = 4 + \sqrt{-y}\ \therefore\ y \le 0;\ R_f = \left(-\infty, 0\right]$

3. Paridad: $f(-x) = y = -(-x)^4 + 8(-x)^2 - 16 = -x^4 + 8x^2 - 16\ \therefore\ f(-x) = f(x)$, la función es par.

4. Intersecciones con los ejes:

a) Intersección con el eje de las ordenadas:

$$\text{Si } x = 0,\ f(0) = -(0)^4 + 8(0)^2 - 16 \Rightarrow f(0) = -16;\ P_{x=0}(0, -16)$$

b) Intersección con el eje de las abscisas:

$$\text{Si } y = 0,\ x^2 = 4 \pm \sqrt{-y} \Rightarrow x = \pm\sqrt{4 \pm \sqrt{-y}}$$

$x_1 = \sqrt{4 + \sqrt{0}} = 2,\ x_2 = -\sqrt{4 + \sqrt{0}} = -2$, lo cual se confirma porque es una función par.

Ordenando las raíces tenemos, $x_1 = -2;\ x_2 = 2$

$$P_{y1=0}(0, -2); P_{y2=0}(0, +2)$$

5. Puntos críticos:

$$y' = -4x^3 + 16x \Rightarrow x\left(-4x^2 + 16\right)\ \therefore\ x_1 = -\sqrt{4};\ x_2 = 0;\ x_3 = \sqrt{4}$$

Evaluando la función para obtener los pares ordenados tenemos: $f(-2) = -(-2)^4 + 8(-2)^2 - 16 = 0$, $f(0) = 16$ y $f(2) = 0$, por ser par. Entonces, los pares ordenados de los puntos críticos son: $Pc_1(-2, 0)$, $Pc_2(0, -16)$ y $Pc_3(2, 0)$.

La clasificación de los puntos críticos es:

$$y''(-2) = y''(2) = -12(2)^2 + 16 = -32 \quad P_{c1} \text{ y } P_{c3} \text{ máximos.}$$

$$y'(0) = -12(0) + 16 = 16 \quad P_{c2} \text{ mínimo.}$$

6. Intervalos de monotonía (intervalos de crecimiento/decrecimiento):

Intervalo	x_p	$f''(x_p)$	Comportamiento
$(-\infty, -2)$	-3	60	Crece.
$(-2, 0)$	-1	-12	Decrece.
$(0, 2)$	1	12	Crece.
$(2, +\infty)$	3	-60	Decrece.

Tabla 2.5

Resumen de la monotonía del ejemplo 2.82.

7. Puntos de inflexión: $y'' = -12x^2 + 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4/3}$ con los pares ordenados:

$$f\left(\sqrt{4/3}\right) = f\left(-\sqrt{4/3}\right) = -\left(\sqrt{4/3}\right)^4 + 8\left(\sqrt{4/3}\right)^2 - 16 = -64/9$$

Los pares ordenados de los puntos de inflexión son, portanto, $P_{I1}\left(-\sqrt{4/3}, -64/9\right)$, $P_{I2}\left(\sqrt{4/3}, -64/9\right)$.

8. Concavidad de la función:

Intervalo	x_p	$f''(x_p)$	Comportamiento
$\left(-\infty, -\sqrt{4/3}\right)$	-2	-32	Cóncavo hacia abajo.
$\left(-\sqrt{4/3}, \sqrt{4/3}\right)$	0	16	Cóncavo hacia arriba.
$\left(\sqrt{4/3}, +\infty\right)$	2	-32	Cóncavo hacia abajo.

Tabla 2.6

Resumen de la concavidad del ejemplo 2.82.

9. Asíntotas:

a) Horizontales: no tiene.
b) Verticales: no tiene.
c) Oblicuas: no tiene.

10. Bosquejo de la función:

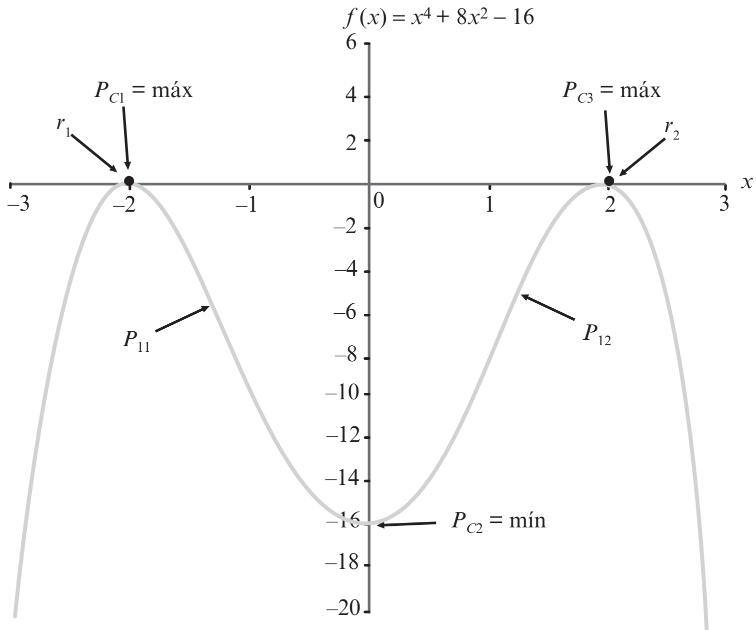


Figura 2.20. Comportamiento de la función $y = -x^4 + 8x^2 - 16$.

Ejemplo 2.83. **Análisis de una función**

Analice lo siguiente a partir de:

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

1. Dominio de la función:

$$1 - x^2 = 0,\ x = \pm 1,\ D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

2. Rango de la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}\text{, despejando } x,\ f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2} = y \Rightarrow x^2 = y\left(1 - x^2\right),\ x^2 = y - yx^2;$$

$$x^2 + yx^2 = y;\ x^2(1 + y) = y,\ x = \sqrt{\frac{y}{(1 + y)}}$$

$$\begin{array}{cc} - & + \\ - & + \end{array} \frac{y}{(1 + y)} \geq 0;\ y \geq 0,\ 1 + y > 0,\ y > -1 \quad \therefore\ S_1 = [0, +\infty)$$

$$y \leq 0,\ 1 + y < 0,\ y < -1 \therefore\ S_2 = (-\infty, -1)$$

La solución completa es, entonces:

$$Ry = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$$

$$Ry = R - [-1, 0)$$

3. Paridad:

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{1-(-x)^2}=\frac{x^2}{1-x^2}=f(x)\,,\; f(-x)=f(x)$$

La función es par, es decir, es simétrica respecto al eje de las ordenadas.

4. Intersecciones con los ejes:

a) Intersección con el eje de las ordenadas:

$$x=0, f(0)=\frac{0}{1-0}=0;\; P_{x=0}(0,0)$$

b) Intersección con el eje de las abscisas:

$$f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}=0,\, x^2=0,\, x=0$$

$$P_{y=0}(0,0)$$

5. Puntos críticos:

$$f(x)=\frac{x^2}{1-x^2};\;\frac{df(x)}{dx}=\frac{d\left[\dfrac{x^2}{1-x^2}\right]}{dx}$$

$$f'(x)=\frac{\left(1-x^2\right)\dfrac{d}{dx}\left(x^2\right)-x^2\dfrac{d}{dx}\left(1-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^2}$$

$$\frac{2x\left(1-x^2\right)+2x^3}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{2x-2x^3+2x^3}{\left(1-x^2\right)^2}=\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}$$

$$\therefore\; f'(x)=\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}$$

$$f'(x)=0=\frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2};\; 2x=0, x=0$$

Sustituyendo en la función:

$$f(0)=\frac{0^2}{1-0^2}=0,\; P_{c1}(0,0)$$

Derivando de nuevo:

$$f''(x)=\frac{d\left[\dfrac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}\right]}{dx}=\frac{\left(1-x^2\right)^2\dfrac{d[2x]}{dx}-2x\dfrac{d\left[\left(1-x^2\right)^2\right]}{dx}}{\left[\left(1-x^2\right)^2\right]^2}$$

$$f''(x)=\frac{2\left(1-x^2\right)^2-4x\left(1-x^2\right)\dfrac{d\left[1-x^2\right]}{dx}}{\left(1-x^2\right)^4}=\frac{2\left(1-x^2\right)^2+8x^2\left(1-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^4}$$

$$f''(x)=\frac{2\left(1-x^2\right)+8x^2}{\left(1-x^2\right)^3}=\frac{2-2x^2+8x^2}{\left(1-x^2\right)^3}=\frac{2+6x^2}{\left(1-x^2\right)^3}, \quad f''(x)=\frac{2+6x^2}{\left(1-x^2\right)^3}$$

Sustituyendo P_c en la segunda derivada:

$$f''(0)=\frac{2+6(0)^2}{\left(1-(0)^2\right)^3}=\frac{2}{1}=2 \text{ mínimo, y } P_{c1}(0,0)=\text{mín}$$

6. Intervalos de monotonía (intervalos de crecimiento/decrecimiento):

Tabla 2.7 Resumen de la monotonía del ejemplo 2.83.

Intervalo	x_p	$f''(x_p)$	Comentario
$(-\infty, 0)-\{-1\}$	-2	$f'(-2)=\frac{2(-2)}{\left(1-[-2]^2\right)^2}=-\frac{4}{9}$	Decrece.
$(0,+\infty)-\{1\}$	2	$f'(2)=\frac{2(2)}{\left(1-[-2]^2\right)^2}=\frac{4}{9}$	Crece.

7. Puntos de inflexión:

Igualando a cero la segunda derivada y resolviendo tenemos:

$$f''(x)=\frac{2+6x^2}{\left(1-x^2\right)^3}=0;\ 2+6x^2=0;\ x=\pm\sqrt{-\frac{1}{3}}$$, por tanto, no existen puntos de inflexión.

8. Concavidad de la función:

Tabla 2.8 Resumen de la concavidad del ejemplo 2.83.

Intervalo	x_p	$f''(x_p)$	Comentario
$x\in(-\infty,-1)$	-2	$f''(-2)=\frac{2+6(-2)^2}{\left(1-(-2)^2\right)^3}=\frac{26}{-27}<0$	Cóncava hacia abajo.
$x\in(-1,1)$	0	$f''(0)=\frac{2+6(0)^2}{\left(1-(0)^2\right)^3}=\frac{2}{-1}>0$	Cóncava hacia arriba.
$x\in(1,+\infty)$	2	$f''(2)=\frac{2+6(2)^2}{\left(1-(2)^2\right)^3}=\frac{26}{-27}<0$	Cóncava hacia abajo.

9. Asíntotas:

a) Horizontales: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{x^2}-1} = -1$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -1 \therefore\ y = -1$$

b) Verticales: $f(x) = \dfrac{x^2}{1-x^2}$ $\quad 1 - x^2 = 0,\ x = \pm 1$

$$x_1 = -1;\ x_2 = 1$$

Comportamiento de la curva cerca de las asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to\pm a^{\pm}} f(x)$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2}{1-x^2} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{1-x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{1-x^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{1-x^2} = -\infty$$

Por tanto, ambos ceros del denominador son asíntotas:

c) Oblicuas: no tiene.

10. Bosquejo de la función:

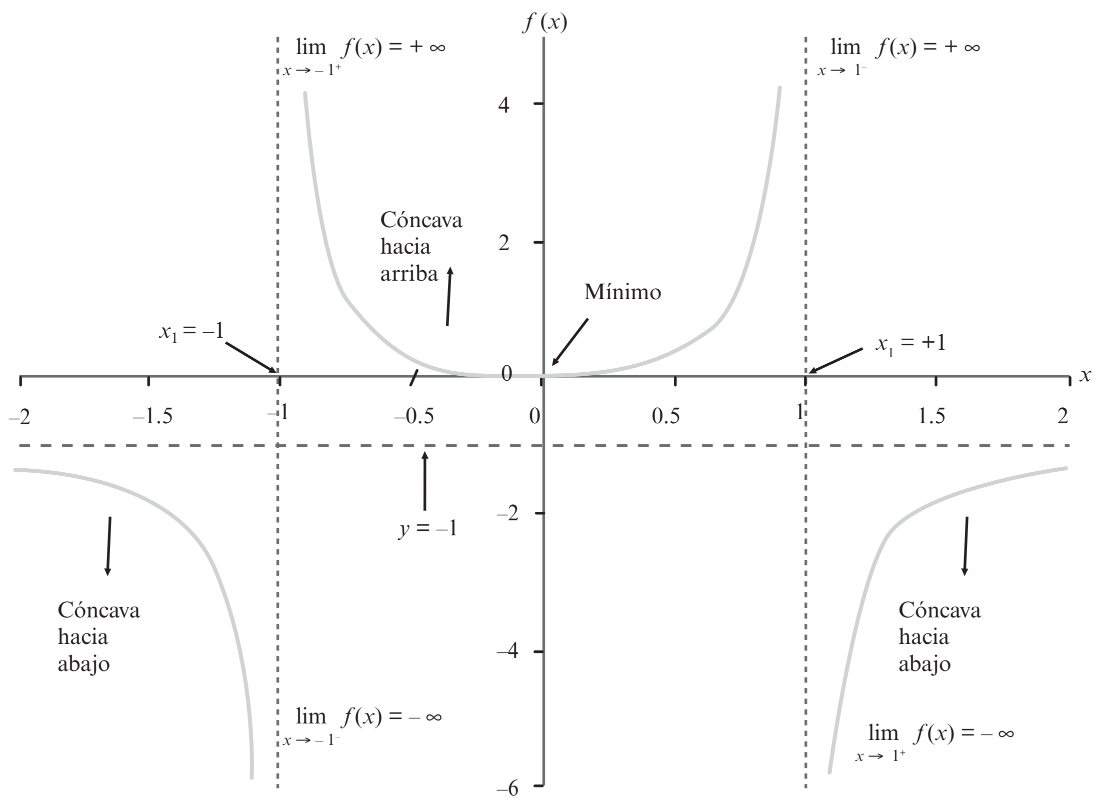


Figura 2.21. Comportamiento de la función $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$, con asíntotas horizontal y vertical.

Ejemplo 2.84. **Análisis de una función**

Analice lo siguiente a partir de:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

1. Dominio de la función: $x^2 - 4 = 0,\ x = \pm 2,\ D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

2. Rango de la función: $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$,

despejando x, $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4} = y \Rightarrow x^2 = y\left(x^2 - 4\right), x^2 = yx^2 - 4y;$

$$x^2 - yx^2 = -4y;$$

$$x^2(1 - y) = -4y,\ x = \sqrt{\frac{4y}{y - 1}}$$

$$\begin{matrix} - & + \\ - & + \end{matrix}\frac{4y}{(y-1)} \geq 0;$$

$$y \geq 0, y - 1 > 0, y > 1 \quad \therefore \quad S_1 = (1, +\infty)$$

$$y \leq 0, y - 1 < 0, y < 1 \ \therefore S_2 = (-\infty, 0]$$

La solución completa es, entonces, $Ry = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$, o bien, $Ry = R - (0, 1]$

3. Paridad:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2}{x^2 - 4} = f(x),\ f(-x) = f(x), \text{ la función es par}$$

4. Intersecciones con los ejes:

a) Intersección con el eje de las ordenadas:

$$x = 0, f(0) = \frac{0}{0 - 4} = 0; P_{x=0}(0, 0)$$

b) Intersección con el eje de las abscisas:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4} = 0, x^2 = 0, x = 0$$

$$P_{y=0}(0, 0)$$

5. Puntos críticos:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}; \frac{df(x)}{dx} = \frac{d\left[\dfrac{x^2}{x^2 - 4}\right]}{dx}, f'(x) = \frac{\left(x^2 - 4\right)\dfrac{d}{dx}\left(x^2\right) - x^2\dfrac{d}{dx}\left(x^2 - 4\right)}{\left(x^2 - 4\right)^2}$$

$$\frac{2x\left(x^2 - 4\right) - 2x^3}{\left(x^2 - 4\right)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3}{\left(x^2 - 4\right)^2} = \frac{-8x}{\left(x^2 - 4\right)^2} \ \therefore \ f'(x) = \frac{-8x}{\left(x^2 - 4\right)^2}$$

$$f'(x) = 0 = \frac{-8x}{\left(x^2 - 4\right)^2}; \ -8x = 0,\ x = 0$$

Sustituyendo en la función:

$$f(0)=\frac{0^2}{0^2-4}=0,\ P_{c1}(0,0)$$

Derivando de nuevo:

$$f''(x)=\frac{d\left[\dfrac{-8x}{\left(x^2-4\right)^2}\right]}{dx}=\frac{\left(x^2-4\right)^2\dfrac{d[-8x]}{dx}+8x\dfrac{d\left[\left(x^2-4\right)^2\right]}{dx}}{\left[\left(x^2-4\right)^2\right]^2}$$

$$f''(x)=\frac{-8\left(x^2-4\right)^2+8x\left(x^2-4\right)2x}{\left[\left(x^2-4\right)^2\right]^2}=\frac{8\left(x^2-4\right)\left\{-\left(x^2-4\right)+2x^2\right\}}{\left[\left(x^2-4\right)^2\right]^2}=\frac{8\left\{4+x^2\right\}}{\left(x^2-4\right)^3}$$

Sustituyendo en la segunda derivada el punto crítico:

$$f''(0)=\frac{2*4\left\{4+0^2\right\}}{\left(0^2-4\right)^3}=-\frac{1}{2},\ \text{máximo}$$

$$P_{c1}(0,0)=\text{máximo}$$

6. Intervalos de monotonía (intervalos de crecimiento/decrecimiento):

Intervalo	x_p	$f''(x_p)$	Comentario
$(-\infty,0)-\{-2\}$	-1	$f'(-1)=\dfrac{-8(-1)}{\left((-1)^2-4\right)^2}=\dfrac{8}{9}>0$	Crece.
$(0,+\infty)-\{2\}$	1	$f'(1)=\dfrac{-8(1)}{\left((1)^2-4\right)^2}=-\dfrac{8}{9}<0$	Decrece.

Tabla 2.9

Resumen de la monotonía del ejemplo 2.84.

7. Puntos de inflexión:

Igualando a cero la segunda derivada y resolviendo:

$$f''(x)=\frac{8\left\{4+x^2\right\}}{\left(x^2-4\right)^3}=0;\ 4+x^2=0;\ x=\pm\sqrt{-4}$$, por tanto, no existen puntos de inflexión.

8. Concavidad de la función:

Tabla 2.10

Resumen de la concavidad del ejemplo 2.84.

Intervalo	x_p	$f''(x_p)$	Comentario
$x \in (-\infty, -2)$	-3	$f''(-3) = \dfrac{8\{4+(-3)^2\}}{((-3)^2-4)^3} = \dfrac{104}{125} > 0$	Cóncava hacia arriba.
$x \in (-2, 2)$	0	$f''(0) = \dfrac{8\{4+0^2\}}{(0^2-4)^3} = \dfrac{1}{-2} < 0$	Cóncava hacia abajo.
$x \in (2, +\infty)$	3	$f''(2) = \dfrac{8\{4+3^2\}}{(3^2-4)^3} = \dfrac{104}{125} > 0$	Cóncava hacia arriba.

9. Asíntotas:

a) Horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\frac{4}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 \therefore y = 1$$

b) Verticales:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}, \quad x^2 - 4 = 0, \; x = \pm 4$$

$$x_1 = -2; \; x_2 = 2$$

Comportamiento de la curva cerca de las asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to\pm a^{\pm}} f(x)$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2}{x^2-4} = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2}{x^2-4} = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{x^2-4} = +\infty$$

Por tanto, ambos ceros del denominador son asíntotas:

c) Oblicuas: no tiene.

10. Bosquejo de la función:

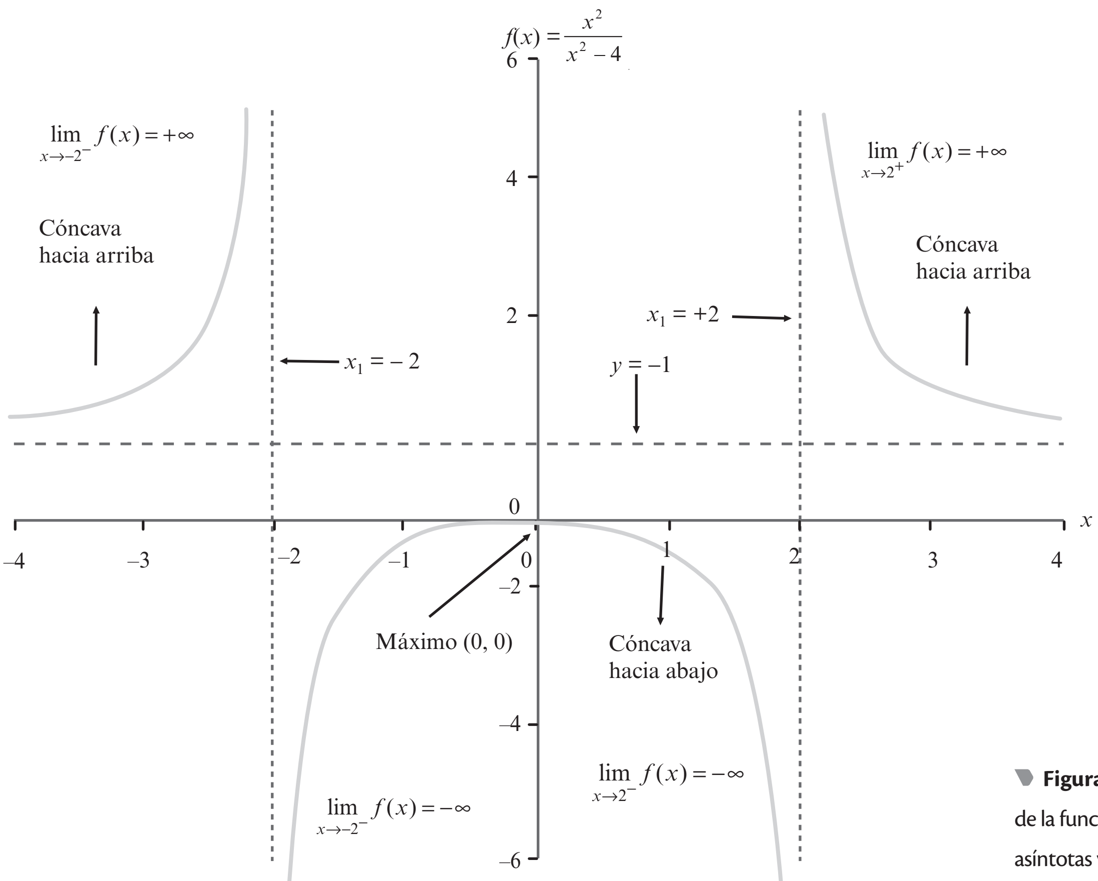


Figura 2.22. Comportamiento de la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ con asíntotas vertical y horizontal.

Ejemplo 2.85. **Análisis de una función**

Analice lo siguiente a partir de $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$

1. Dominio de la función $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

2. Rango de la función $2xy - y = x^2 \Rightarrow -y = (x^2 - 2xy + y^2) - y^2;\ y(y-1) = (x-y)^2 \therefore x = y \pm \sqrt{y(y-1)}$

$y(y-1) \geq 0,\ S_1 = \{0, 1\};\ y(y-1) > 0:\ y > 0\ y > 1 \therefore S_2 = (1, +\infty),\quad y < 0\ y < 1 \therefore S_3 = (-\infty, 0)$

Por tanto, el rango es $R = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \cup \{0, 1\} \Rightarrow R = \mathbb{R} - (0, 1)$

3. Paridad:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{2(-x)-1} = \frac{x^2}{1-2x} \Rightarrow f(-x) \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases};\ \text{por tanto, no es par ni impar.}$$

4. Intersecciones con los ejes:

a) Intersección con el eje de las ordenadas:

$$f(0) = \frac{0^2}{2(0)-1} = 0$$

b) Intersección con el eje de las abscisas:

$$x = 0 \pm \sqrt{0(0-1)} = 0$$

$$P_{x=0}(0,0); P_{y=0}(0,0)$$

5. Puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{(2x-1)\left[x^2\right]' - x^2[2x-1]'}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2};$$

$$f''(x) = 2\left\{\frac{(2x-1)^2\left[x^2-x\right]' - \left(x^2-x\right)[2x-1]^{2'}}{(2x-1)^4}\right\} = \frac{2}{(2x-1)^3}$$

Igualando la primera derivada a cero y resolviendo tenemos: $x_1 = 0, x_2 = 1$

Sustituyendo estos valores en la función para encontrar su par ordenado:

$$f(0) = 0;\ f(1) = 1$$

Entonces evaluamos la segunda derivada con estos puntos críticos para conocer su naturaleza:

$$f''(0) = -2;\ f''(1) = 1, \text{ por lo cual } \Rightarrow Pc_1(0,0) = \text{máximo}, Pc_2(1,1) = \text{mínimo}$$

6. Intervalos de monotonía (intervalos de crecimiento/decrecimiento):

Tabla 2.11

Resumen de la monotonía del ejemplo 2.85.

Intervalo	x_p	$f'(x_p)$	Comentario
$(-\infty, 0)$	-1	$\frac{4}{9}$	Crece.
$(0,1)\left\{\frac{1}{2}\right\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-3}{2}$	Decrece.
$(1, +\infty)$	2	$\frac{4}{9}$	Crece.

7. Puntos de inflexión (igualando la segunda derivada a cero):

$$\frac{2}{(2x-1)^3} = 0$$

$$\cancel{(2x-1)^3}\frac{2}{\cancel{(2x-1)^3}} = 0(2x-1)^3$$

$$2 \neq 0$$

Como *la ecuación no tiene solución*, concluimos *que no existen puntos de inflexión*.

8. Concavidad de la función:

Tomando el dominio para analizar las concavidades de la función:

Intervalo	x_p	$f''(x_p)$	Comentario
$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	0	−2	Cóncava hacia abajo.
$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$	1	2	Cóncava hacia arriba.

Tabla 2.12

Resumen de la concavidad del ejemplo 2.85.

9. Asíntotas:

a) Horizontales:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, por tanto, la función no tiene asíntotas horizontales.

b) Verticales:

$$x = \frac{1}{2};\ \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty;\ \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) = \infty$$

c) Oblicuas:

$$\begin{array}{r|l} & x/2+1/4 \\ \hline 2x-1 & x^2 \\ & \underline{-x^2+x/2} \\ & x^2-x/2+1/4 \\ & \qquad\quad 1/4 \end{array}$$

; entonces $\dfrac{x^2}{2x-1} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1/4}{2x-1}$, la asíntota oblicua es

$$z = \frac{1}{4}(2x+1);\ \text{si } x = 0,\ z = \frac{1}{4};\ \text{si } z = 0,\ x = -\frac{1}{2},\ \text{o también:}$$

$$\frac{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x-1}\right)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x-1} = \frac{1}{2};\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x-1} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2 - x^2 + \frac{x}{2}}{2x-1}\right) = \frac{1}{4}$$

10. Bosquejo de la función:

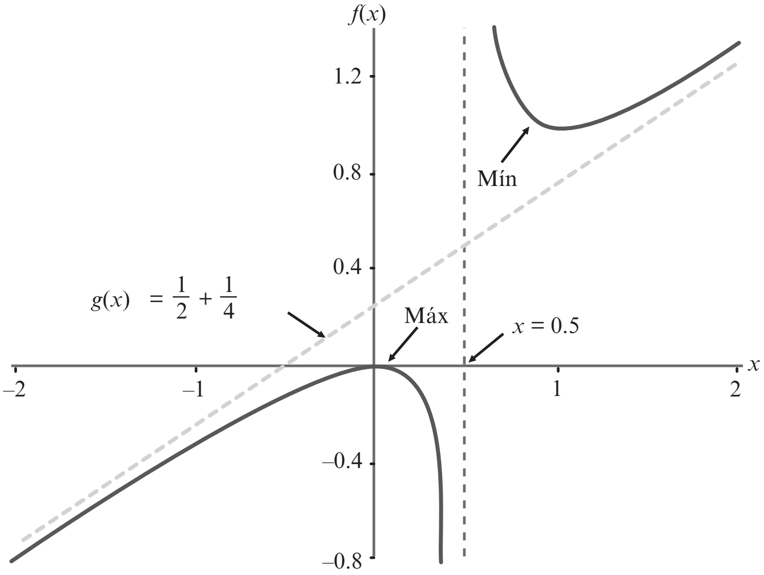
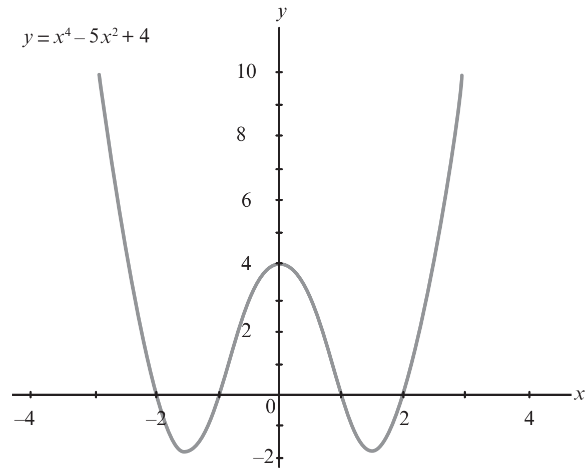


Figura 2.23. Bosquejo de la función $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ con asíntota oblicua.

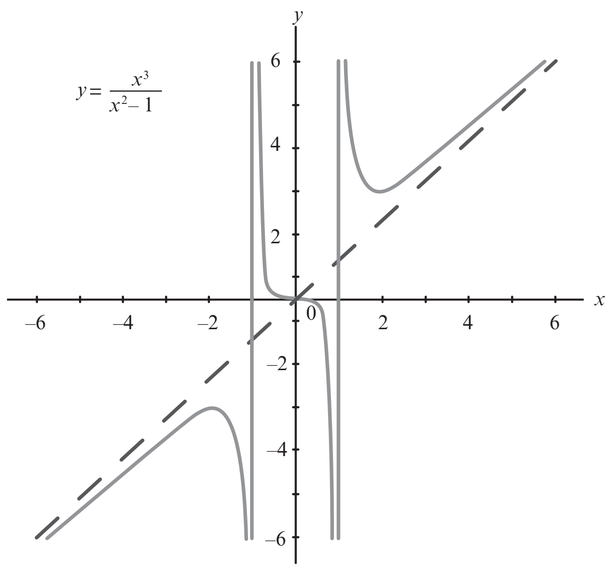
Ejercicios 2.14. **Análisis de una función**

Analice las funciones siguientes:

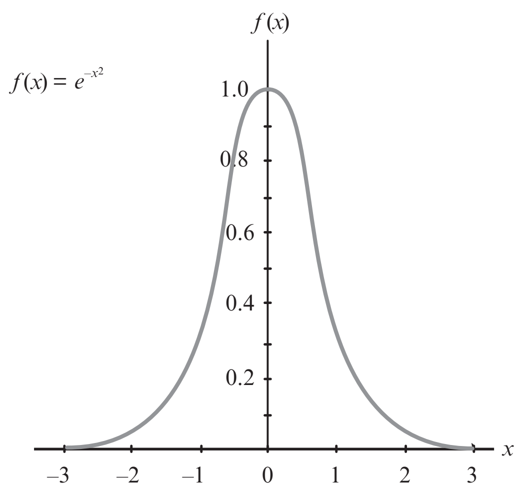
Función	**Respuesta**
1. $y = x^4 - 5x^2 + 4$	Puntos críticos en $x = 0, -\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}$ Mínimo en $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, -\frac{9}{4}\right), \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, -\frac{9}{4}\right)$ Máximo en $(0, 4)$ Creciente en $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right), \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \infty\right)$ Decrece en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right), \left(0, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ No tiene asíntotas



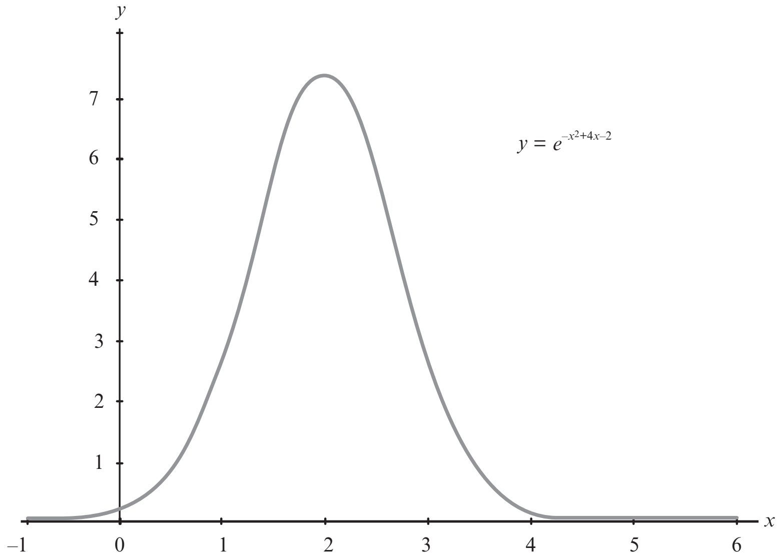
2. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$	Puntos críticos en $x = 0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$ Mínimo en $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ Máximo en $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$



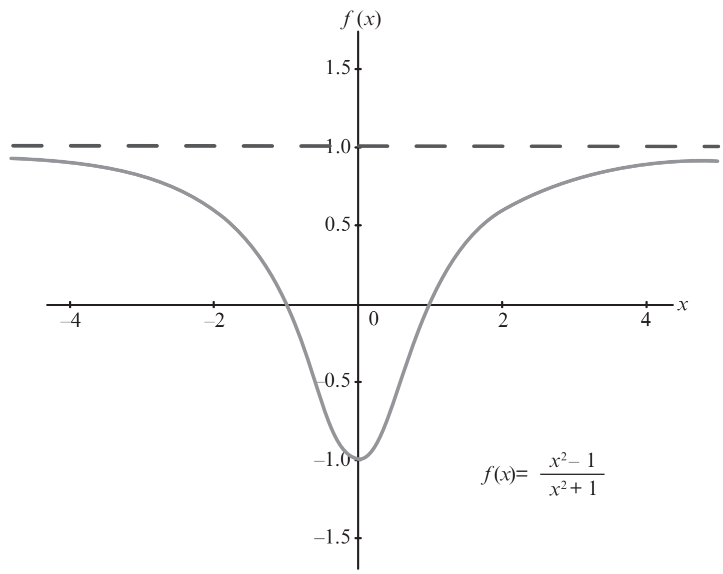
3. $f(x) = e^{-x^2}$	Punto crítico en $x = 0$ Máximo en $(0, 1)$ Creciente en $(-\infty, 0]$ Decreciente en $[0, \infty)$



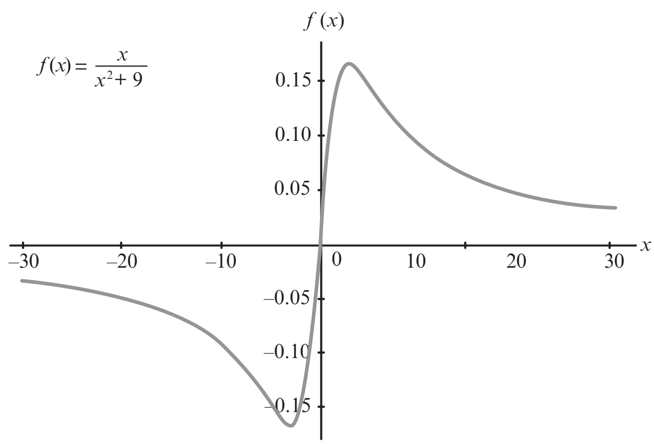
Función	**Respuesta**
4. $y = e^{-x^2+4x-2}$	Punto crítico en $x = 2$ Máximo en $(2, e^2)$ Creciente en $(-\infty, 2)$ Decreciente en $(2, \infty)$



5. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$	Punto crítico en $x = 0$ Mínimo en $(0, -1)$ Creciente en $(-\infty, 0)$ Decreciente en $(0, \infty)$



6. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+9}$	Puntos críticos en $x = -3, 3$ Máximo en $\left(3, \dfrac{1}{6}\right)$ Mínimo en $\left(-3, \dfrac{-1}{6}\right)$ Creciente en $(-3, 3)$ Decreciente en $(-\infty, -3), (3, \infty)$



2.3.5. Método de Newton-Raphson

El método de Newton permite resolver ecuaciones no lineales mediante aproximaciones sucesivas o iteraciones.

Si $f(c) = 0$, donde f es derivable en un intervalo abierto que contiene c, entonces, para aproximar c podemos seguir la metodología descrita a continuación:

a) Se propone un valor inicial de la raíz, la cual puede obtenerse a partir de un bosquejo o de las consideraciones físicas del problema (x_0).
b) Se calcula una nueva aproximación con la fórmula siguiente:

$$x_{k-1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Donde x_k es el valor inicial o supuesto, y x_{k-1} es el valor calculado; dichos valores se actualizan con cada iteración. Este método permite estimar las raíces de ecuaciones con suficiente exactitud. En los problemas no lineales donde no es posible encontrar de manera exacta el valor de la raíz es necesario un criterio para detener el algoritmo de Newton. Dicho criterio es:

$$\left| x_{k-1} - 1_k \right| < \varepsilon$$

Donde ε es un valor suficientemente pequeño y se elige con base en el tipo de problema a resolver. El valor de inicio (x_0) debe elegirse juiciosamente, de lo contrario, la solución no podría obtenerse.

Ejemplo 2.86. **Cálculo de raíces o sus aproximaciones mediante el método de Newton-Raphson**

Sea la ecuación:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Verifique que las raíces reales son:

$$x = \{-1, 2\}$$

Solución: Al aplicar el método de Newton fijando como valor inicial $x_0 = 1$ y un criterio de paro $\varepsilon < 0.0001$, derivamos la función:

$$f'(x) = 2x$$

La actualización de valores la obtenemos con la fórmula siguiente:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{xk^2 - x_k - 2}{2x_k - 1}$$

Entonces, comenzamos el algoritmo así:

$$x_1 = 1 - \frac{\left(1^2 - 1 - 2\right)}{(2)(1) - 1} = 3$$

Calculamos la diferencia absoluta entre el valor inicial y el calculado:

$$|1 - 3| = 2$$

Puesto que:

$$2 > \varepsilon$$

Continuamos, entonces, con las aproximaciones, tomando ahora el valor inicial como $x = 3$:

$$x_2 = 3 - \frac{3^2 - 3 - 2}{(2)(3) - 1} = \frac{11}{5} = 2.2$$

De nueva cuenta, calculamos la diferencia entre el valor nuevo y el propuesto:

$$|3 - 2.2| = 0.8$$

Podemos observar estas iteraciones en la figura siguiente:

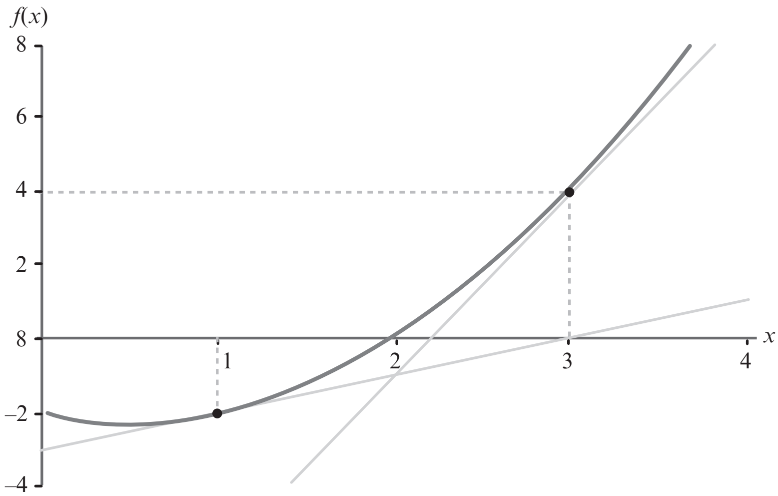


Figura 2.24. Ilustración del método de Newton para determinar la raíz de un polinomio.

Como esta diferencia aún es mayor que la tolerancia (ε), actualizamos el valor inicial y calculamos uno nuevo:

$$x_3 = 2.2 - \frac{2.2^2 - 2.2 - 2}{(2)(2.2) - 1} \approx 2.0118$$

El proceso continúa hasta alcanzar la convergencia deseada, y resumimos los resultados en la tabla siguiente:

Tabla 2.13 Resumen de valores del ejemplo 2.86.

x	$f(x) = x^2 - x - 2$	$f'(x) - 2x^2 - 1$	x_{k-1}	$\lvert x_{k-1} - x_k \rvert$
1.0000	–2.0000	1.0000	3.0000	2.0000
3.0000	4.0000	5.0000	2.2000	0.8000
2.2000	0.6400	3.4000	2.0118	0.1882
2.0118	0.0354	3.0235	2.0000	0.0117
2.0000	0.0001	3.0001	2.0000	0.0000

Por lo cual, concluimos que la solución, con una tolerancia de 0.0001, es: $x = 2.0000$.

Ejemplo 2.87. Cálculo de raíces o sus aproximaciones mediante el método de Newton-Raphson

Sea la ecuación: $x^{3.2} - 2 = 0$

Calcule sus raíces, si sabemos que $x_0 = 1$ es cercano a una raíz.

Solución: Al aplicar el método de Newton, comenzando con un valor inicial $x_0 = 1$ y un criterio de paro $\varepsilon < 0.0001$ para encontrar una raíz.

Usando el método obtenemos la tabla de iteraciones siguiente:

Tabla 2.14

Resumen de valores del ejemplo 2.87.

x	$f(x) = x^{3.2} - 2$	$f'(x) = 3.2x^{2.2}$	x_{k-1}	$\lvert x_{k-1} - x_k \rvert$
1.0000	–1.0000	3.2000	1.3125	–0.3125
1.3125	0.3874	5.8206	1.2460	0.0665
1.2460	0.0212	5.1910	1.2419	0.0041
1.2419	0.0001	5.1537	1.2419	0.0000

Lo cual coincide con la solución analítica $x = 2^{5/16}$ hasta la tercera cifra decimal.

Ejemplo 2.88. Cálculo de raíces o sus aproximaciones mediante el método de Newton-Raphson

Resuelva la ecuación $0 = e^x - 1$, para $\varepsilon < 0.0001$, comenzando con $x_0 = 1$.

Solución:

Tabla 2.15

Resumen de valores del ejemplo 2.88.

x	$f(x) = e^x - 1$	$f'(x) = e^x$	x_{k-1}	$\lvert x_{k-1} - x_k \rvert$
1.0000	1.7183	2.7183	0.3679	0.6321
0.3679	0.4447	1.4447	0.0601	0.3078
0.0601	0.0619	1.0619	0.0018	0.0583
0.0018	0.0018	1.0018	0.0000	0.0018
0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000

La solución es comparable con el resultado analítico $x = 0$.

Ejemplo 2.89. Cálculo de raíces o sus aproximaciones mediante el método de Newton-Raphson

Resuelva la ecuación $0 = \operatorname{sen}(x) - \frac{1}{2}$ con $\varepsilon < 0.0001$ y $x_0 = 1$.

Solución: Podemos observar las iteraciones en la tabla siguiente:

Tabla 2.16

Resumen de valores del ejemplo 2.89.

x	$f(x) = \operatorname{sen}(x) - \frac{1}{2}$	$f'(x) = \cos(x)$	x_{k-1}	$\lvert x_{k-1} - x_k \rvert$
1.0000	0.3415	0.5403	0.3680	0.6320
0.3680	–0.1402	0.9330	0.5183	0.1503
0.5183	–0.0046	0.8687	0.5236	0.0053
0.5236	0.0000	0.8660	0.5236	0.0000

La solución analítica es:

$$\operatorname{sen}(x)=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\left\{\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$$

En la cual una raíz es $x=\dfrac{\pi}{6}\approx 0.523599.$

Ejercicios 2.15. Cálculo de raíces o sus aproximaciones mediante el método de Newton-Raphson

Usando el método de Newton-Raphson, halle una raíz de las ecuaciones utilizando como valor inicial el sugerido y el criterio de convergencia señalado.

Ecuaciones		Valor de inicio (x_0)	Criterio $\lvert x_{k-1}-x_k\rvert$	Solución	
				Valor final	Núm. de iteraciones
1.	$x^2-4=0$	1	0.0001	2.0000	5
2.	$x^2+0.13x-0.066=0$	1	0.0001	0.2000	6
3.	$e^{\sqrt{x}}-2=0$	1	0.0001	0.4804	3
4.	$\log_2(x+1)-8=0$	100	0.0001	255.0000	5
5.	$\tan(x)-\sqrt{3}=0$	1	0.0001	1.0472	3

2.4. Definición de antiderivada o primitiva

El proceso de la determinación de una función a partir de su derivada es opuesto a la derivación, por ello se llama *antiderivación*. Si podemos determinar una función $y(x)$ cuya derivada sea $f(x)$, entonces:

$$y'(x)=f(x)$$

Por lo que decimos que $y(x)$ es una primitiva (o antiderivada) de $f(x)$.

Es decir, para una función dada, si le hacemos una antiderivación (camino del centro hacia la izquierda en la figura siguiente), obtenemos una función primitiva. En cambio, si la derivamos, obtenemos su derivada.

Definición de antiderivada o primitiva

Una antiderivada o primitiva de la función f es una función F tal que $F'(x)=f(x)$. Siempre y cuando $f(x)$ esté definida.

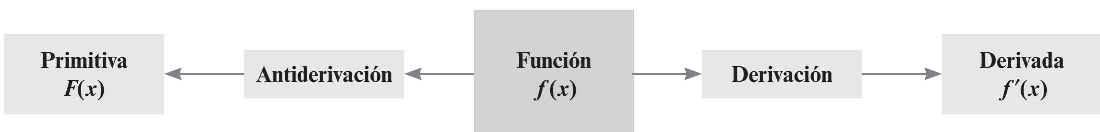


Figura 2.A

En la figura anterior ilustramos las operaciones de derivación y antiderivación, comenzando con la misma función $f(x)$ y siguiendo en direcciones opuestas.

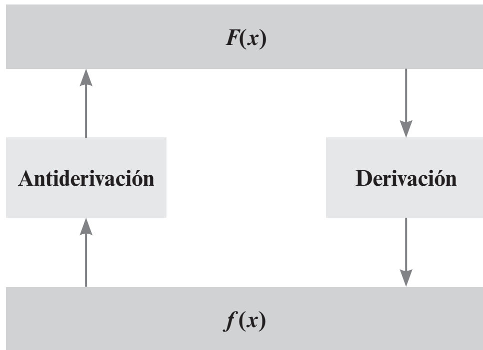


Figura 2.B

En la figura anterior mostramos que la derivación "anula" el resultado de la antiderivación y que la derivada de la primitiva de $f(x)$ es la función original $f(x)$.

A continuación damos algunos ejemplos de funciones, cada una con sus primitivas:

Tabla 2.17

Tabla de algunas funciones y sus primitivas.

Función $f(x)$	Primitiva $F(x)$
1	x
$2x$	x^2
x^3	$\frac{1}{4}x^4$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x$
$\operatorname{sen} 2x$	$-\frac{1}{2}\cos 2x$

Teorema 2.15

Si F es una antiderivada en un intervalo I, entonces la antiderivada más general de f en I es $f(x) + c$, donde c es una constante arbitraria.

Tenemos la función $f(x) = x^2$ en la cual observamos que la antiderivada general de f es $\frac{x^3}{3} + C$ Al asignar valores específicos a la constante C, obtenemos una familia de funciones cuyas gráficas son traslaciones verticales de una a otra.

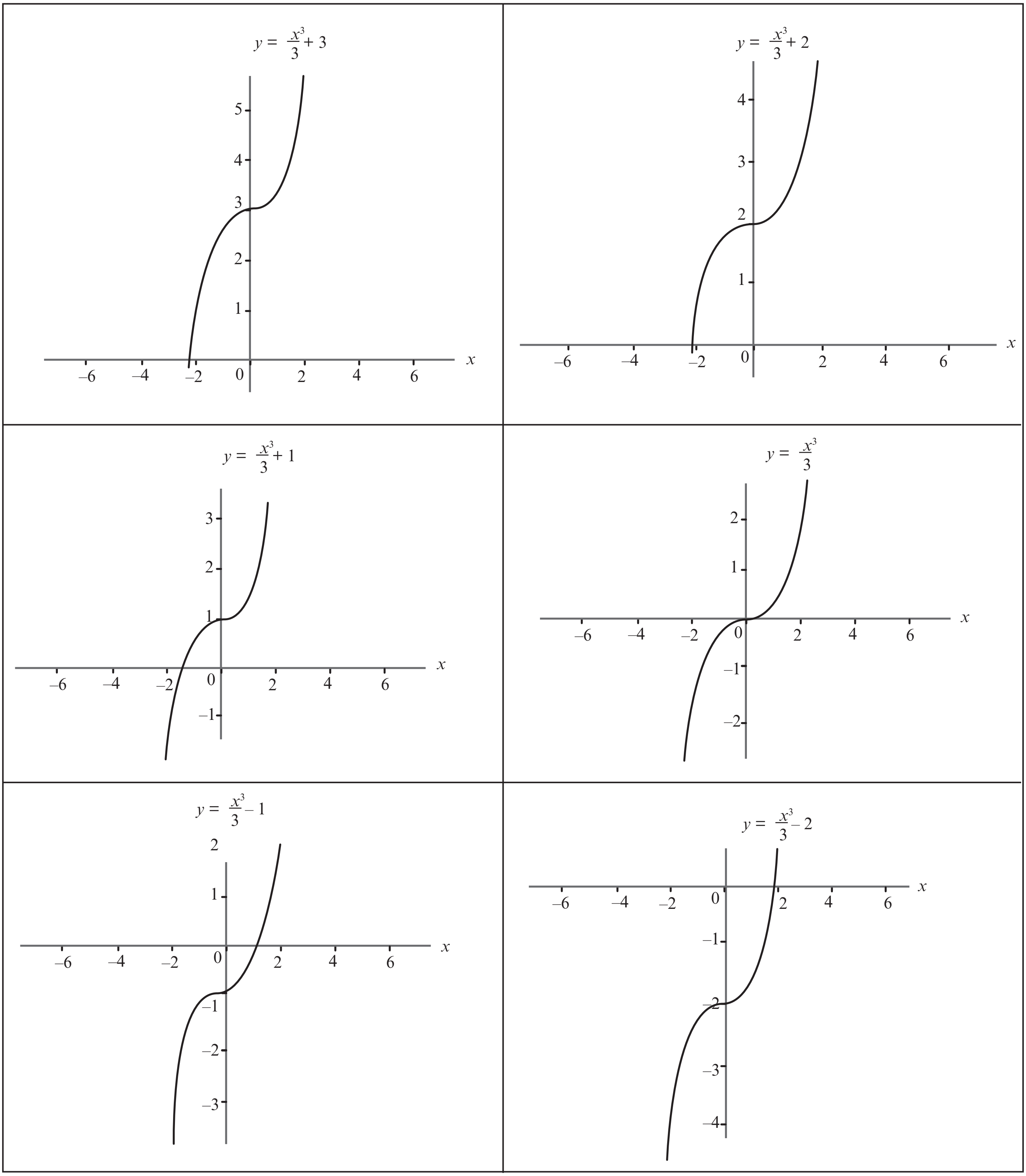


Figura 2.25.

A continuación presentamos algunas fórmulas de antiderivación:

Tabla 2.18

Tabla con funciones y sus antiderivadas de uso frecuente.

Función	Antiderivada particular	Función	Antiderivada particular
$cf(x)$	$cF(x)$	sen x	$-\cos x$
$f(x)+g(x)$	$F(x)+G(x)$	$\sec^2 x$	$\tan x$
$x^n (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\sec x \tan x$	$\sec x$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{sen}^{-1} x$
e^x	e^x	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\tan^{-1} x$
$\cos x$	sen x		

Para obtener la antiderivada general (en un intervalo) a partir de las particulares de la tabla anterior, tenemos que sumar una constante.

Ejemplo 2.90. Antiderivadas

Encuentre la antiderivada de cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x) = 6x^2 - 8x + 3$

b) $f(x) = 1 - x^3 + 5x^5 - 3x^7$

c) $f(x) = 4 \text{ sen } x - 3x^5 + 6\sqrt[4]{x^3}$

d) $f(x) = e^x + 20(1 + x^2) - 1$

Soluciones:

a) Aplicando $\frac{x^{n+1}}{n+1}$

Tenemos:

$$g(x) = \frac{6x^{2+1}}{2+1} - 8\frac{x^{1+1}}{1+1} + 3$$

$$g(x) = \frac{6x^5}{3} - \frac{8x^2}{2} + 3 + c$$

$$g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + c$$

b) Aplicando $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

Tenemos:
$$g(x) = x - \frac{x^3}{3+1} + 5\frac{x^{5+1}}{5+1} - 3\frac{x^{7+1}}{7+1} + c$$

$$g(x) = x - \frac{x^4}{4} - 5\frac{x^6}{6} - \frac{3x^8}{8} + c$$

c) Aplicando: $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ y $f(x) = \text{sen } x,\ g(x) = -\cos\ x$

$$g(x) = 4(-\cos\ x) - \frac{3x^{5+1}}{5+1} + \frac{6x^{3/4+1}}{\frac{3}{4}} + c$$

$$g(x) = -4\cos\ x - \frac{x^6}{3} + \frac{24}{7}x^{7/4} + c$$

d) Aplicando: $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ y $f(x) = e^x,\ g(x) = e^x$

$$g(x) = e^x + \frac{20}{1+x^2} + c$$

Ejercicios 2.16. **Antiderivadas**

Determine la antiderivada de las funciones siguientes:

Función	**Respuesta**
1. $f(x) = 6 + 9x^2 - 12x^3$	$6x + 3x^3 - 3x^4$
2. $f(x) = x^{20} - 6x^{10} - 10$	$-10x - \dfrac{6x^{11}}{11} + \dfrac{x^{21}}{21}$
3. $f(x) = 2 - \dfrac{27}{5}x^{1.7}$	$2x - 2x^{2.7}$
4. $f(x) = 9\sqrt[8]{x^2} + 6\sqrt{x^3}$	$\dfrac{27}{5}x(x^2)^{1/3} + \dfrac{12x\sqrt{x^3}}{5}$
5. $f(x) = \dfrac{3}{x^3} - \dfrac{5}{x^6}$	$\dfrac{1}{x^5} - \dfrac{3}{2x^2}$
6. $f(x) = 5e^x - \sec\theta\ \tan\theta$	$5e^x - \sec(x)$
7. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2} - x - 5$	$-5x$
8. $f(x) = 7\cos(x) - 10\text{ sen }(x)$	$10\cos(x) + 7\text{ sen }(x)$
9. $f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{8-4x^2}}$	$4\text{ arc sen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$
10. $f(x) = 5x - \sqrt{3x}$	$-\dfrac{2x^{3/2}}{\sqrt{3}} + \dfrac{5x^2}{2}$

Capítulo 3

La integral y sus aplicaciones

Sumario

Introducción

En el capítulo 2 se analizó la razón de cambio cuando la modificación de la variable independiente tendía a cero; si lo traducimos en operaciones muy elementales para simplificarlo, se trata de variables en un cociente y para interpretarlas nos ayudamos de unidades, las cuales quedan como $\frac{m}{s}$, $\frac{m}{s^2}$, $\frac{gr}{s}$ o $\frac{K}{s}$, …, etc. Otra operación fundamental es el producto; si recordamos los cursos elementales de física, las unidades de un resultado también se pueden presentar por una multiplicación; por ejemplo, el Newton resulta de multiplicar la masa en kg por la aceleración en $\frac{m}{s^2}$, lo que forma el producto $Kg \cdot \frac{m}{s^2}$. El trabajo es el producto de la fuerza en N por la distancia en m, y así sucesivamente. Ésta y otras situaciones de productos son de gran relevancia; la rama de las matemáticas que las describe es el *cálculo integral*, del cual primero debemos estudiar sus fundamentos.

3.1. Teorema fundamental del cálculo

En el estudio de las integrales de funciones hay ciertas condiciones que, si se consideran, ayudan a llegar a algunas conclusiones. Lo anterior se describe en el teorema siguiente:

Teorema 3.1 Primer teorema fundamental de cálculo

Si f es una función continua en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, y la función $F(x) = \int_a^b f(x)dx$, entonces $F(x)$ es derivable en $[a, b]$. Además, para todo x de $[a, b]$, se tiene $F'(x) = f(x)$.

El teorema 3.1 se describe en la definición siguiente:

Definición de antiderivada

Sea una función real definida de un intervalo cualquiera $[a, b](a, b)$. Se dice que la función real F definida y derivable respecto de $[a, b]$ es una *antiderivada* de f si para todo x tal que $a < x < b$ se tiene que $F'(x) = f(x)$.

Por ejemplo, $F(x) = \left(\frac{x^4}{2}\right)$ es una antiderivada de la función en $f(x) = 2x^3$ porque al derivar F sobre $(-\infty, \infty)$ se verifica que $\left(\frac{x^4}{2}\right)' = 2x^3$.

Nota: La definición implica que una antiderivada F es una función continua sobre $[a, b]$, o sea, que es derivable en cada uno de sus puntos.

3.1.1. Reglas básicas de integración

Es importante comprender que 1) integramos diferenciales; 2) que los diferenciales son producto de la derivada de una función (la cual sigue siendo una función) por el diferencial de la variable independiente, por lo cual, nunca debemos ubicar el diferencial en el denominador, y 3) que mediante la integración determinamos la función de la cual teníamos, al inicio, su diferencial o derivada. Por lo anterior, mediante la integración se determina la antiderivada.

A continuación estudiaremos algunas antiderivadas (integrales indefinidas) sencillas con el fin de abordar el tema de integrales definidas; posteriormente integraremos diferenciales más elaboradas.

También en el capítulo anterior estudiamos la definición de antiderivada, como:

Definición de antiderivada

Se dice que una función F es una antiderivada de una función f respecto de algún intervalo I, si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I.

Ejemplo 3.1. Antiderivada

Encuentre las antiderivadas de $f(x) = 2x$.

Solución: Una antiderivada de $f(x) = 2x$ es $F(x) = x^2$, puesto que $F'(x) = 2x$. Cabe mencionar que una función siempre tiene más de una antiderivada. Así, en el ejemplo anterior, $F_1(x) = x^2 - 1$ y $F_2(x) = x^2 + 10\,000$ también son antiderivadas de $f(x) = 2x$, puesto que $F'_1(x) = F'_2(x) = 2x$.

Ahora veamos que cualquier antiderivada de f debe ser de la forma $G(x) = F(x) + C$; es decir, *dos antiderivadas de la misma función pueden diferir, a lo más, en una constante.* Por tanto, $F(x) + C$ *es la antiderivada más general de* $f(x)$. Asimismo, gráficamente es una familia de curvas, como se muestra a continuación:

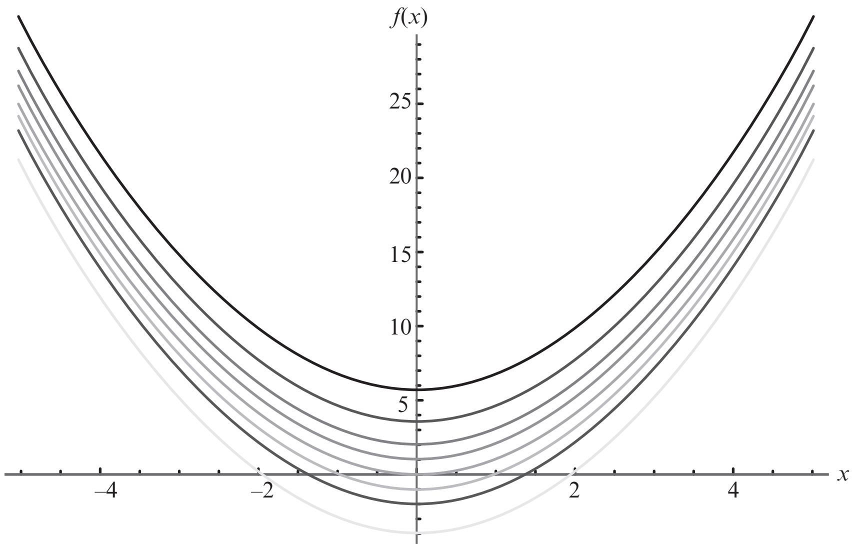


Figura 3.1. Algunos miembros de la familia de antiderivadas de $f(x) = 2x$.

Ejemplo 3.2. Antiderivadas generales

a) Encuentre la antiderivada de $f(x) = 2x + 5$.

Solución: Una antiderivada de $f(x) = 2x + 5$ es $F(x) = x^2 + 5x$, puesto que $F'(x) = 2x + 5$.

La antiderivada más general de $f(x) = 2x + 5$ es $F(x) = x^2 + 5x + C$.

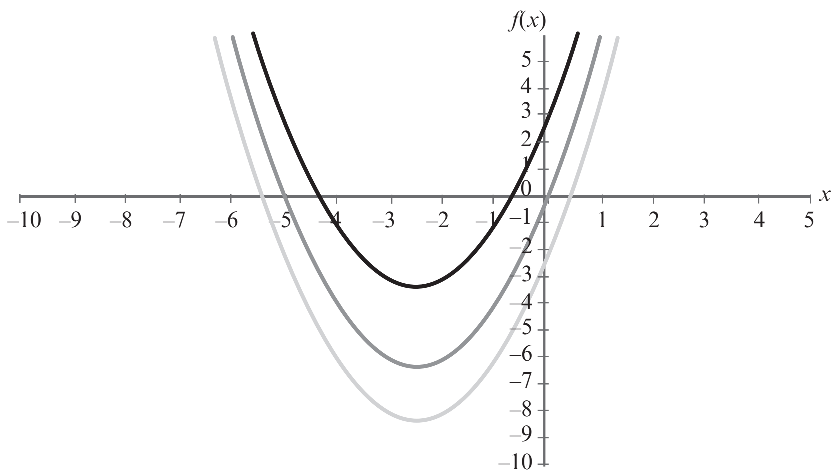


Figura 3.2. Algunos miembros de la familia de antiderivadas de $f(x) = 2x + 5$.

b) Encuentre la antiderivada de $f(x) = -\text{sen}\,(x)$.

Solución: Una antiderivada de $f(x) = -\text{sen}\,(x)$ es $F(x) = \cos\,(x)$, puesto que $F'(x) = -\text{sen}\,(x)$.

La antiderivada más general de $f(x) = -\text{sen}\,(x)$ es $F(x) = \cos\,(x) + C$.

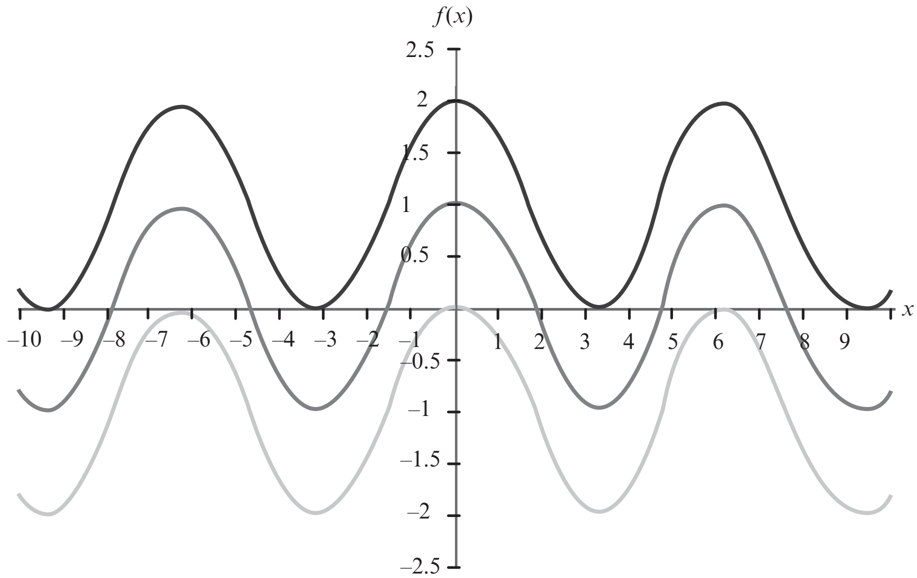


Figura 3.3. Algunos miembros de la familia de antiderivadas de $f(x) = -\text{sen}\,(x)$.

3.1.2. Notación de la integral indefinida

La notación más general de la antiderivada, la cual aquí llamamos $G(x)$, se muestra en el teorema siguiente:

Teorema 3.2 Las antiderivadas difieren por una constante

Si $F'(x) = f(x)$ para toda x en algún intervalo $[a, b]$, entonces

$$G(x) = F(x) + C.$$

Así, se trata de la antiderivada más general para toda x en el intervalo.

Demostración

Supongamos que se define $g(x) = G(x) - F(x)$. Entonces, puesto que $G'(x) = F'(x)$, se concluye que $g'(x) = G'(x) - F'(x) = 0,\ \forall x \in [a, b]$.

Si x_1 y x_2 son dos números cualesquiera que satisfacen $a \le x_1 < x_2 \le b$; por el teorema del valor medio se concluye que en el intervalo abierto (x_1, x_2) existe un número k para el cual

$$g'(k) = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{o} \quad g(x_2) - g(x_1) = g'(k)(x_2 - x_1)$$

Pero $g'(x) = 0 \forall x \in [a, b]$; en particular, $g'(k) = 0$. Por tanto, $g(x_2) - g(x_1) = 0$ o $g(x_2) = g(x_1)$. Luego, por hipótesis, x_1 y x_2 son dos números arbitrarios, pero diferentes, en el intervalo. Puesto que los valores funcionales $g(x_1)$ y $g(x_2)$ son iguales, debe concluirse que la función $g(x)$ es una constante C respecto a x. Por tanto, $g(x) = C \Rightarrow G(x) - F(x) = C$ o $G(x) = F(x) + C$.

En la tabla siguiente se presentan varias fórmulas en las cuales se señala la función antiderivada más general para ciertas integrales indefinidas de uso frecuente.

Tabla 3.1

Reglas básicas de integración.

Integrales básicas algebraicas, exponenciales y logarítmicas	Integrales básicas trigonométricas
1. $\int 0dx = c$	12. $\int \cos u du = \text{sen } u + C$
2. $\int dx = x + c$	13. $\int \tan u du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C$
3. $\int df = f(x) + c$ o $\int du = u + c$	14. $\int \cot u du = \ln\lvert\text{sen } u\rvert + C$
4. $\int kdx = kx + C$	15. $\int \sec u du = \ln\lvert\sec u + \tan u\rvert + C$
5. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$	16. $\int \csc u du = \ln\lvert\csc u - \cot u\rvert + C$
6. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$	17. $\int \tan^2 u du = -u + \tan u + C$
7. $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$	18. $\int \cot^2 u du = -u - \cot u + C$
8. $\int \frac{1}{u} du = \ln\lvert u\rvert + C$	19. $\int \sec^2 u du = \tan u + C$
9. $\int e^u du = e^u + C$	20. $\int \dfrac{1}{u^2 + a^2} du = \dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{u}{a} + C$
10. $\int \ln u du = u + u \ln u + C$	21. $\int \dfrac{1}{u^2 - a^2} du = -\int \dfrac{1}{a^2 - u^2} du = \dfrac{1}{2a} \ln\left\lvert\dfrac{u-a}{u+a}\right\rvert + C$
11. $\int \text{sen } u du = -\cos u + C$	

A continuación utilizaremos algunas de las fórmulas del cuadro anterior para resolver las integrales siguientes:

Ejemplo 3.3. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int dx$$

Solución: Mediante la integración obtenemos la función de la cual tenemos el diferencial que, en este caso, corresponde al de la variable independiente dx. Al integrar llegamos a la variable independiente o función identidad más una constante, como se muestra a continuación:

$$\int dx = \int 1dx = x + c$$

Ejemplo 3.4. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int 3x^2 dx$$

Solución: En realidad, en esta integral hay dos diferenciales: uno que es evidente dx (el diferencial de la variable independiente) y otro que puede ser menos evidente; si desarrollamos la facultad de identificar diferenciales elaborados dentro de las integrales, el cálculo integral será exitoso.

Resulta que $3x^2\,dx$, es el diferencial de la función $f(x) = x^3$; podemos verificar esto rápidamente al diferenciar ambos lados de la igualdad:

$$f(x) = x^3$$
$$df = d\left(x^3\right)$$
$$df = 3x^2 dx$$

Entonces, podemos ver la integral $\int 3x^2 dx$ como $\int df$, la cual es la tercera fórmula de la tabla 3.1 y, además, es muy parecida al ejemplo 3.2.

$$\int df = \cancel{\int} \cancel{d}\, f = f + c \quad \text{y para} \quad f(x) = x^3$$

> **Nota:** La diagonal invertida que cruza el símbolo de la integral y, posteriormente, el del diferencial, es un recurso práctico,[1] el cual indica que el primer concepto matemático (la integral) deja sin efecto al siguiente concepto matemático (el diferencial).

$$\int 3x^2 dx = x^3 + c$$

También es muy común visualizarla como $\int du = u + c$

> **Nota:** Por lo anterior, el tema de cálculo integral debe estudiarse después de adquirir habilidad en derivación y diferenciación.

Ejemplo 3.5. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int 3dx$$

Solución: Si el integrando se compone del producto de una constante por el diferencial de la variable independiente, la constante puede salir de la integral y multiplicar el resultado de la integral que se replantea; tal como indica la fórmula $\int kdx = kx + C$, y la aplicamos como se muestra a continuación:

$$\int 3dx = 3\int dx = 3\left(\int dx\right) = 3\left(\cancel{\int} \cancel{d}x\right) = 3(x + c) = 3x + 3$$

El último término $3c$ sigue siendo una constante, la cual finalmente puede escribirse tan sólo como k, o con algún otro símbolo para una constante (como C_2, C, etc.), de modo que:

$$\int 3dx = 3\int dx = 3\left(\int dx\right) = 3\left(\cancel{\int} \cancel{d}x\right) = 3(x + c) = 3x + 3c = 3x + c_2$$

[1] Utilizado por el profesor Silverio Mera Luna.

Ejemplo 3.6. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int 6x^2 dx$$

Solución: El número 6 puede replantearse como (2)(3), y nuestra integral, como $\int 2 \cdot 3x^2\, dx$.

Ahora analicemos la quinta fórmula de la tabla 3.1: $\int kdf = k\int df = k \cdot f + c$. Esta fórmula señala una constante que multiplica al diferencial de una función (de forma más general (df) que el diferencial de la variable independiente (dx)), sale de la integral y multiplica a la integral del diferencial de una función. Veamos el siguiente ejemplo:

$$\int 2 \cdot 3x^2 dx = 2\int 3x^2 dx$$

$$\text{si } f(x) = x^3$$

$$df = 3x^2 dx$$

$$\therefore 2\int 3x^2 dx = 2\int df = 2(f + c) = 2f + 2c = 2\left(x^3\right) + c_1 = 2x^3 + c_1$$

Ejemplo 3.7. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int \frac{5x^4}{3} dx$$

Solución: Podemos reescribir el cociente como el producto $\int \frac{1}{3} \cdot 5x^4 dx$.

Entonces, la fracción $\frac{1}{3}$ puede salir de la integral para multiplicar a la nueva integral

$$\frac{1}{3}\int 5x^4 dx$$

Así $5x^4dx$ es el diferencial de x^5, por lo que el resultado es:

$$\int \frac{5x^4}{3} dx = \int \frac{1}{3} \cdot 5x^4 dx = \frac{1}{3}\int 5x^4 dx = \frac{1}{3}\left(x^5 + c\right) = \frac{x^5}{3} + \frac{1}{3}c = \frac{x^5}{3} + c_1$$

Manipular el denominador de la fracción en el ejemplo anterior será fundamental para completar el diferencial. Más adelate estudiaremos dicha técnica.

La quinta fórmula de la tabla 3.1 $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ sólo generaliza que una costante que multiplica al integrando original puede salir de la integral y multiplicará al resultado de la integral que se replantea. Lo anterior se establece porque no siempre que sacamos una constante, lo que queda dentro de la integral es un diferencial evidente, como se muestra a continuación. Cabe mencionar que la siguiente integral no se resolverá en este momento, sino más adelante, mediante técnicas para identificar diferenciales más complicados; por ejemplo, $\int 2x^3 dx = 2\int x^3 dx$. Aquí, x^3dx ya no es un diferencial muy directo.

Ejemplo 3.8. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int x^3 dx$$

Solución: Es fundamental que comprendamos la fórmula $\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$, ya que ésta será una de las más utilizadas (tal vez la que más empleemos). Dicha fórmula indica que la integral del producto de una función potencia (la cual se compone de una función que actúa como base u, y un exponente constante n) multiplicada por el diferencial de la función base du. El resultado que proporciona esta fórmula es la función base con exponente aumentado en la unidad, dividido entre el exponente original más la unidad y más una constante. Recordemos que el exponente debe ser diferente a –1. Así, si aplicamos lo anterior a la integral $\int x^3 dx$, la función potencia es x^3; el exponente es 3 (diferente de –1), la función base es x y el diferencial de la función base es dx.

> **Nota:** Lo que no forma parte de la función potencia (en este caso dx) debe ser el diferencial de la función base, lo cual se cumple en este ejemplo.

Por lo anterior, este diferencial está completo, y resulta en que a la función potencia le aumentamos el exponente en la unidad, la dividimos entre el exponente original, mas la unidad y le agregamos una constante. De este modo:

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{x^4}{4} + c$$

Ejemplo 3.9. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int (x+2)^3\, dx$$

Solución: La función potencia es $(x + 2)^3$, el exponente es 3 (diferente de –1). La función base es $x + 2$ y lo que no forma parte de la función potencia (en este caso dx) debe ser el diferencial de la función base, lo cual, aquí se cumple. Por lo cual, la integral es directa, mediante la fórmula

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$$

$$\int (x+2)^3\, dx = \frac{(x+2)^{3+1}}{3+1} + c = \frac{(x+2)^4}{4} + c$$

Ejemplo 3.10. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int \sqrt{x-3}\, dx$$

Solución: Primero la reescribimos como $\int (x-3)^{1/2} dx$.

La función potencia es $(x-3)^{1/2}$, el exponente es $\frac{1}{2}$ (diferente de –1). La función base es $x - 3$ y lo que no forma parte de la función potencia (en este caso dx) debe ser el diferencial de la función base, lo cual, aquí se cumple. Por lo que la integral es directa mediante la fórmula

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$$

$$\int \sqrt{x-3}\, dx = \int (x-3)^{1/2}\, dx = \frac{(x-3)^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{(x-3)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2(x-3)^{3/2}}{3} + c$$

Ejemplo 3.11. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int \sqrt[3]{x+4}dx$$

Solución: Primero la reescribimos como $\int (x+4)^{1/3}\,dx$

La función potencia es $(x+4)^{1/3}$, el exponente es $\frac{1}{3}$ (diferente de -1). La función base es $x+4$ y lo que no forma parte de la función potencia (en este caso dx) debe ser el diferencial de la función base, lo cual, aquí se cumple. Por lo que la integral es directa mediante la fórmula

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt[3]{x+4}\,dx &= \int (x+4)^{1/3}\,dx \\ &= \frac{(x+4)^{1/3+1}}{\frac{1}{3}+1} + c \\ &= \frac{(x-3)^{4/3}}{\frac{4}{3}} + c \\ &= \frac{3(x-3)^{4/3}}{4} + c\end{aligned}$$

Ejemplo 3.12. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int \frac{2}{(x-5)^3}dx$$

Solución: Primero la reescribimos como $\int 2(x-5)^{-3}\,dx = 2\int (x-5)^{-3}\,dx$.

La función potencia es $(x-5)^{-3}$, el exponente es -3 (diferente de -1). La función base es $x-5$ y lo que no forma parte de la función potencia (en este caso dx) debe ser el diferencial de la función base, lo cual, aquí se cumple. Por lo que la integral es directa, mediante la fórmula

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$$

$$\int 2(x-5)^{-3}\,dx = 2\int (x-5)^{-3}\,dx = 2\frac{(x-5)^{-3+1}}{-3+1} + c = \cancel{2}\frac{(x-5)^{-2}}{-\cancel{2}} + c = -(x-5)^{-2} + c = -\frac{1}{(x-5)^2} + c$$

Ejemplo 3.13. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int \frac{5}{\sqrt{x-3}}dx$$

Solución: Primero la reescribimos como $\int 5(x-3)^{-1/2}\,dx = 5\int (x-3)^{-1/2}\,dx$

La función potencia es $(x-3)^{-1/2}$, el exponente es $-\frac{1}{2}$ (diferente de –1). Su base es la función $x-3$ y lo que no forma parte de la función potencia (en este caso dx) debe ser el diferencial de la función base, lo cual, aquí se cumple. Por lo que la integral es directa, mediante la fórmula

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$$

$$\int 5(x-3)^{-1/2}\,dx = 5\int (x-3)^{-1/2}\,dx = 5\frac{(x-3)^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = 5\frac{(x-3)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = 10(x-3)^{1/2} + c$$

Ejemplo 3.14. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int -6x^2\left(3-2x^3\right)^4 dx$$

Solución: Si observamos la base $(3-2x^3)$ y la diferenciamos, vemos que los elementos requeridos están presentes y sólo hay que acomodarlos, como se muestra:

$$\int -6x^2\left(3-2x^3\right)^4 dx = \int \left(3-2x^3\right)^4\left(-6x^2\right)dx$$

La función potencia es $(3-2x^3)^4$, el exponente es 4 (diferente de –1). La función base es $3-2x^3$, el diferencial de la función base es $-6x^2dx$ y lo que no forma parte de la función potencial debe ser el diferencial de la función base, y es precisamente lo que tenemos: $-6x^2dx$, por lo cual la integral es inmediata. De este modo

$$\int -6x^2\left(3-2x^3\right)^4 dx = \int \left(3-2x^3\right)^4\left(-6x^2\right)dx = \frac{\left(3-2x^3\right)^{4+1}}{4+1} + c = \frac{\left(3-2x^3\right)^5}{5} + c$$

Ejemplo 3.15. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int (3-2x)^3\,dx$$

Solución: La función potencia es $(3-2x)^3$, el exponente es 3 (diferente de –1), la función base es $3-2x$, el diferencial de la función base es $-2dx$ y lo que no forma parte de la función potencia (en este caso dx) debe ser el diferencial de la función base, lo cual no se cumple, por lo que esta integral no es inmediata y será resuelta cuando estudiemos la forma de completar el diferencial.

Ejemplo 3.16. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int \left(x^5 - \sqrt{x+4} + \frac{3}{2x^2} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$$

Solución: La fórmula $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ indica que si tenemos que integrar una suma o resta de funciones que se multiplican por el diferencial de la variable independiente, entonces podemos separar, en términos de suma o resta, las integrales de cada función que al principio se estaban sumando o restando, y cada una se multiplica por el diferencial de la variable independiente para formar los diferenciales correspondientes. De este modo, apliquemos la fórmula

$$\int \left(x^5 - \sqrt{x+4} + \frac{3}{2x^2} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \int x^5 dx - \int \sqrt{x+4}\, dx + \int \frac{3}{2x^2} dx - \int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx$$

Ahora integraremos cada función, como lo realizamos en los ejemplos previos

$$\begin{aligned}
\int x^5 dx - \int \sqrt{x+4}\, dx + \int \frac{3}{2x^2} dx - \int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx &= \frac{x^6}{6} - \frac{(x+4)^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{3}{2}\int x^{-2} dx - 2\int x^{-1/3} dx \\
&= \frac{x^6}{6} - \frac{(x+4)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\frac{x^{-2+1}}{(-2+1)} - 2\frac{x^{-1/3+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c \\
&= \frac{x^6}{6} - \frac{2(x+4)^{3/2}}{3} + \frac{3}{2}\frac{x^{-1}}{(-1)} - 2\frac{x^{2/3}}{\frac{2}{3}} + c \\
&= \frac{x^6}{6} - \frac{2(x+4)^{3/2}}{3} - \frac{3}{2x} - \cancel{2}\frac{3x^{2/3}}{\cancel{2}} + c \\
\int x^5 dx - \int \sqrt{x+4}\, dx + \int \frac{3}{2x^2} dx - \int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx &= \frac{x^6}{6} - \frac{2(x+4)^{3/2}}{3} - \frac{3}{2x} - 3x^{2/3} + c
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.17. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int \frac{1}{x} dx \quad \text{o} \quad \int \frac{dx}{x}$$

Solución: La octava fórmula de la tabla 3.1 $\int \frac{1}{u} du = \ln(u) + c$ indica que cuando el integrando está formado por un cociente del tipo $\frac{1}{u}$, (en el denominador hay una función con exponente 1) y el resto del integrando es el diferencial de esa función, entonces su integral es el logaritmo natural de dicha función más una constante.

Si aplicamos lo anterior al presente ejemplo vemos que la función que está en el denominador con exponente 1 es x y su diferencial es dx. Lo que en el presente ejemplo es el resto del integrando y, por tanto, la integral está completa y podemos aplicar la fórmula mencionada. De este modo:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c$$

Ejemplo 3.18. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int \frac{3}{x-4} dx$$

Solución: La podemos reescribir como:

$$\int \frac{3}{x-4}dx = 3\int \frac{1}{x-4}dx$$

La función que está en el denominador con exponente 1 es $x - 4$ y su diferencial es dx. Lo que en el presente ejemplo es el resto del integrando, por lo que la integral está completa y podemos aplicar la fórmula siguiente:

$$\int \frac{1}{u}du = \ln(u) + c$$

De la cual obtenemos

$$3\int \frac{1}{x-4}dx = 3\ln(x-4) + c$$

Ejemplo 3.19. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int \frac{-2x}{5-x^2}dx$$

Solución: La podemos reescribir como:

$$\int \frac{-2x}{5-x^2}dx = \int \frac{1}{5-x^2}(-2x)dx$$

La función que está en el denominador con exponente 1 es $5 - x^2$ y su diferencial es $-2xdx$. Lo que en este ejemplo es el resto del integrando, por lo que la integral está completa y podemos aplicar la fórmula

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln(u) + c$$

De la cual resulta

$$\int \frac{-2x}{5-x^2}\,dx = \int \frac{1}{5-x^2}(-2x)\,dx = \ln\left(5-x^2\right) + c$$

Ejemplo 3.20. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int \frac{12x^2+3}{4x^3+3x}dx$$

Solución: La función que está en el denominador con exponente 1 es $4x^3 + 3x$ y su diferencial es $(12x^2 + 3)\,dx$. Si reescribimos la integral como:

$$\int \frac{12x^2+3}{4x^3+3x}dx = \int \frac{1}{4x^3+3x}\left(12x^2+3\right)dx$$

Lo que no es el cociente $\frac{1}{4x^3+3x}$ es el diferencial de la función que está en el denominador, por tanto, la integral está completa y podemos aplicar la fórmula

$$\int \frac{1}{u} du = \ln(u) + c$$

De la cual obtenemos

$$\int \frac{12x^2+3}{4x^3+3x} dx = \int \frac{1}{4x^3+3x}\left(12x^2+3\right)dx = \ln\left(4x^3+3x\right)+c$$

Ejemplo 3.21. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int \frac{6x^2-10}{x^3-5x} dx$$

Solución: La función que está en el denominador con exponente 1 es $x^3 - 5x$ y su diferencial es $(3x^2 - 5)dx$. Si reescribimos la integral como:

$$\int \frac{6x^2-10}{x^3-5x} dx = \int \frac{2\left(3x^2-5\right)}{x^3-5x} dx = 2\int \frac{3x^2-5}{x^3-5x} dx = 2\int \frac{1}{x^3-5x}\left[\left(3x^2-5\right)dx\right]$$

Lo que no es el cociente $\frac{1}{x^3-5x}$ es el diferencial de la función que está en el denominador, por lo que la integral está completa y podemos aplicar la fórmula

$$\int \frac{1}{u} du = \ln(u) + c$$

De la cual resulta

$$\int \frac{6x^2-10}{x^3-5x} dx = \int \frac{2\left(3x^2-5\right)}{x^3-5x} dx = 2\int \frac{3x^2-5}{x^3-5x} dx = 2\int \frac{1}{x^3-5x}\left(3x^2-5\right)dx = 2\ln\left(x^3-5x\right)+c$$

Ejemplo 3.22. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int e^x\, dx$$

Solución: Dada la fórmula $\int e^u du = e^u + C$, si el integrando es el producto de e^u, donde u es una función por el diferencial del exponente de e, entonces la integral está completa y es inmediata. Entonces su integral es la misma función exponencial más una constante. Si aplicamos lo anterior al presente ejemplo veremos que la función exponencial es e^x, el exponente es x, el diferencial de la función que funge como exponente es dx y lo que no es la función exponencial debe ser el diferencial de la función que funge como exponente. Esto se cumple en el presente ejemplo si aplicamos la fórmula:

$$\int e^u\, du = e^u + C$$

Tenemos que

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

Ejemplo 3.23. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int e^{3x}\,3dx$$

Solución: La función exponencial es e^{3x}, el exponente es $3x$ el diferencial de la función que funge como exponente es $3dx$ y lo que no es la función exponencial debe ser el diferencial de la función que funge como exponente. Esto se cumple en el presente ejemplo si aplicamos la fórmula:

$$\int e^u\,du = e^u + C$$

Tenemos que

$$\int e^{3x}\,3dx = e^{3x} + c$$

Ejemplo 3.24. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int -e^{-x}\,dx$$

Solución: La función exponencial es e^{-x}, el exponente es $-x$, el diferencial de la función que funge como exponente es $-dx$ y, si reescribimos la integral, tenemos:

$$\int e^{-x}(-dx)$$

> **Nota:** Lo que no es la función exponencial (es decir, lo que aparece en un círculo), debe ser el diferencial de la función que funge como exponente.

Esto se cumple en el presente ejemplo si aplicamos la fórmula:

$$\int e^u\,du = e^u + C$$

Tenemos que

$$\int e^{-x}(-dx) = e^{-x} + c$$

Ejemplo 3.25. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int \frac{e^{x/\pi}}{\pi}dx$$

Solución: La función exponencial es $e^{x/\pi}$ el exponente es $\frac{x}{\pi}$, el diferencial de la función que funge como exponente es $\frac{dx}{\pi}$ y, si reescribimos la integral, tenemos:

$$\int e^{x/\pi}\frac{dx}{\pi}$$

Como ya se indicó, lo que no es la función exponencial (es decir, lo que aparece en un círculo) debe ser el diferencial de la función que funge como exponente. Esto se cumple en este ejemplo si aplicamos la fórmula:

$$\int e^u\,du = e^u + C$$

Tenemos que

$$\int e^{x/\pi}\frac{dx}{\pi} = e^{x/\pi} + c$$

Ejemplo 3.26. Integrales inmediatas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int 2xe^{x^2}\,dx$$

Solución: La función exponencial es e^{x^2}, el exponente es x^2, el diferencial de la función que funge como exponente es $2xdx$ y, si reescribimos la integral, tenemos:

$$\int e^{x^2} 2xdx$$

Vale la pena reiterar que lo que no es la función exponencial (es decir, lo que aparece en un círculo) debe ser el diferencial de la función que funge como exponente. Esto se cumple en el presente ejemplo si aplicamos la fórmula:

$$\int e^u\,du = e^u + C$$

$$\int e^{x^2}\,2xdx = e^{x^2} + c$$

Ejemplo 3.27. Integrales inmediatas trigonométricas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int \operatorname{sen}(x)dx$$

Solución: Dada la fórmula

$$\int \operatorname{sen}(u)\,du = -\cos(u) + c$$

Si en la integral se presenta el producto del seno de una función, (u), por el diferencial de esa función, la integral es directa y el resultado es menos el coseno de la misma función más una constante. Si se aplica la fórmula anterior al presente ejemplo la función trigonométrica es sen (x) la función a la cual se le aplica el seno es x, el diferencial de la función a la que se le aplica el seno es dx, y lo que no sea la función seno debe ser el diferencial de la función a la que se le aplica el seno. Esto se cumple en este ejemplo si aplicamos la fórmula:

$$\int \operatorname{sen}(u)\, du = -\cos(u) + c$$

Tenemos que

$$\int \operatorname{sen}(x)\, dx = -\cos(x) + c$$

Ejemplo 3.28. Integrales inmediatas trigonométricas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int 3 \operatorname{sen}(3x)\, dx$$

Solución: La función trigonométrica es sen ($3x$), la función a la cual se le aplica el seno es $3x$, el diferencial de la función a la que se le aplica el seno es $3dx$ y, si reescribimos la integral, llegamos a:

$$\int 3\operatorname{sen}(3x)\, dx = \int \operatorname{sen}(3x)(3)\, dx$$

Donde tenemos que lo que no sea la función seno (es decir, lo que aparece en un círculo) debe ser el diferencial de la función a la que se le aplica el seno. Esto se cumple en este ejemplo; por tanto, aplicamos la fórmula:

$$\int \operatorname{sen}(u)\, du = -\cos(u) + c$$

Tenemos que

$$\int \operatorname{sen}(3x)3\, dx = -\cos(3x) + c$$

Ejemplo 3.29. Integrales inmediatas trigonométricas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int 3x^2 \cos\left(x^3\right) dx$$

Solución: La idea es semejante a la integral de la función seno, sólo que ahora se recurre a la fórmula

$$\int \cos(u)\, du = \operatorname{sen}(u) + c$$

La función trigonométrica es cos (x^3), la función a la cual se le aplica coseno es x^3, el diferencial de la función a la que se le aplica el coseno es $3x^2dx$ y, si reescribimos la integral, tenemos:

$$\int 3x^2 \cos\left(x^3\right) dx = \int \cos(3x)(3x^2\ dx)$$

Lo que no sea la función coseno debe ser el diferencial de la función a la que se le aplica el coseno. Esto se cumple en el presente ejemplo, por tanto, si aplicamos la fórmula:

$$\int \cos(u)\, du = \operatorname{sen}(u) + c$$

Tenemos que

$$\int 3x^2 \cos\left(x^3\right) dx = \int \cos(3x)(3x^2\, dx) = \operatorname{sen}(3x) + c$$

Ejemplo 3.30. Integrales inmediatas trigonométricas

Resuelva la integral siguiente:

$$\int \frac{\cos\left(\frac{x}{\pi}\right)}{\pi} dx$$

Solución: La función trigonométrica es cos $(\frac{x}{\pi})$ la función a la cual se le aplica coseno es $\frac{x}{\pi}$ y el diferencial de la función a la que se le aplica el coseno es $\frac{dx}{\pi}$. Si reescribimos la integral tenemos:

$$\int \frac{\cos\left(\frac{x}{\pi}\right)}{\pi} dx = \int \cos\left(\frac{x}{\pi}\right)\left(\frac{dx}{\pi}\right)$$

Lo que no sea la función coseno (es decir, lo aparece en un círculo) debe ser el diferencial de la función a la que se le aplica el coseno. Esto se cumple en el presente ejemplo, por tanto, si aplicamos la fórmula:

$$\int \cos(u)\, du = \operatorname{sen}(u) + c$$

Tenemos que

$$\int \frac{\cos\left(\frac{x}{\pi}\right)}{\pi} dx = \int \cos\left(\frac{x}{\pi}\right)\frac{dx}{\pi} = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{\pi}\right) + c$$

En general, el resto de las fórmulas para integración funcionan de la misma manera: lo imperante es conseguir el diferencial adecuado. Algunos procedimientos para realizar integrales sirven para encontrar el diferencial correcto. Se recomienda practicar esto en los próximos ejercicios.

Ejercicios 3.1. Integrales inmediatas

Verifique si las integrales siguientes son inmediatas y, de ser así, obtenga la integral de cada una:

Función	**Respuesta**
1. $\int \frac{6x^2}{2x^3 - 5} dx$	$\ln(-5 + 2x^3) + c$
2. $\int (6x+5)\sqrt{3x^2 + 5x}dx$	$\frac{2}{3}(x(5+3x))^{3/2} + c$

Función	Respuesta
3. $\int \frac{-16x\,dx}{5-8x^2}$	$\ln(-5+8x^2)+c$
4. $\int \frac{3(5x^2-2x)dx}{5x^3-3x^2}$	$\ln(3-5x)+2\ln(x)+c$
5. $\int (12x+2)e^{6x^2+2x+7}dx$	$e^{6x^2+2x+7}+c$
6. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx$	e^x+c
7. $\int \left(2e^{2x}-3x^2e^{x^3}\right)dx$	$e^{2x}-e^{x^3}+c$
8. $\int 4x^3 \operatorname{sen}\left(x^4\right)dx$	$-\cos(x^4)+c$
9. $\int \frac{-7}{x^2}\cos\left(\frac{7}{x}\right)dx$	$\operatorname{sen}\left(\frac{7}{x}\right)+c$
10. $\int \frac{\tan\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\sec^2\left(\sqrt{x}\right)dx$	$\tan^2\sqrt{x}+c$
11. $\int 6x\sec\left(3x^2\right)\tan\left(3x^2\right)dx$	$\sec(3x^2)+c$
12. $\int \cos(x)\sec(\operatorname{sen}(x))\tan(\operatorname{sen}(x))\,dx$	$\sec(\operatorname{sen}(x))+c$

3.1.3. Definición de la integral definida

Se puede interpretar geométricamente el producto de la función $f(x)$ y de Δx, para el cual $f(x)$ es continua, como se muestra en la figura siguiente:

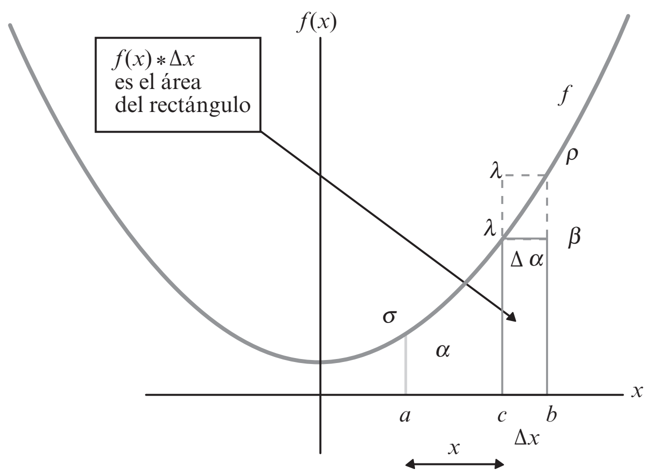


Figura 3.4 Interpretación geométrica del producto $f(x) * \Delta x$ es el área del rectángulo.

Diferencial del área bajo la curva

Sea la función continua $f(x)$ y sea f la ecuación de la curva. Si $f(a)=\sigma$ es una ordenada fija; $f(c)=\gamma$ una ordenada variable; y α la medida del área $\overline{a\sigma}$, $\widehat{\sigma\gamma}$, $\overline{\gamma c}$, $\overline{ac}$. Cuando x toma una variación pequeña Δx, toma un incremento $\Delta\alpha$ = área $\overline{c\gamma}$, $\widehat{\gamma\rho}$, $\overline{b\beta}$, $\overline{cb}$ formando los rectángulos $\overline{c\gamma}$, $\overline{\gamma\beta}$, $\overline{b\beta}$, $\overline{cb}$ y $\overline{c\lambda}$, $\overline{\lambda\rho}$, $\overline{b\rho}$, $\overline{cb}$, entonces vemos que:

Área del rectángulo $\overline{c\gamma}$, $\overline{\gamma\beta}$, $\overline{b\beta}$, $\overline{cb}$ < Área $\overline{c\gamma}$, $\widehat{\gamma\rho}$, $\overline{b\beta}$, $\overline{cb}$ < Área del rectángulo $\overline{c\lambda}$, $\overline{\lambda\rho}$, $\overline{b\rho}$, $\overline{cb}$

Es decir, $f(c)\cdot\Delta x < \Delta\alpha < f(b)\cdot\Delta x$ y, si dividimos entre Δx,

$$\frac{f(c)\cdot\Delta x}{\Delta x} < \frac{\Delta\alpha}{\Delta x} < \frac{f(b)\cdot\Delta x}{\Delta x}$$

$$f(c) < \frac{\Delta\alpha}{\Delta x} < f(b)$$

Ahora, si $\Delta x \to 0$, entonces $f(b)$ tiene como límite $f(c)$, y puesto que $f(x)$ es una función continua de x, tenemos:

$$\frac{d\alpha}{dx} = f(x) \text{ en forma diferencial } d\alpha = f(x)dx$$

El diferencial del área es igual al producto de la función que describe la curva por el diferencial de la variable independiente.

Si integramos y resolvemos:

$$\int d\alpha = \int f(x)dx$$

$$\alpha = \int f(x)dx$$

Si $\int f(x)dx = F(x) + k \ \therefore\ \alpha = F(x) + k$

Nota: Recuerde que a la antiderivada se agrega una constante que, por lo regular, se representa con c, pero en el resultado anterior esta constante se simboliza con k.

Lo anterior se condensa en el teorema siguiente:

Teorema 3.3 Segundo teorema fundamental del cálculo

Si f es una función continua sobre el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, y

$$F'(x) = f(x),\ (a \le x \le b)$$

Entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Analice la aplicación del teorema 3.3 en los ejemplos siguientes:

Ejemplos 3.31. Cálculo de una integral indefinida

Calcule las integrales siguientes:

1. $\int_1^2 (2x^2+1)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + x\right]_1^2 = \left(\frac{16}{3}+2\right) - \left(\frac{2}{3}+1\right) = \frac{17}{3}$

2. $\int_1^2 3\sqrt{x}\,dx = 3\int_1^4 x^{1/2}\,dx = 3\left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = 2(4)^{3/2} - 2(1)^{3/2} = 14$

3. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2$

Cómo emplear el teorema fundamental del cálculo:

1. Suponiendo que se conozca una antiderivada o primitiva f, se dispone de una forma para calcular una integral definida sin tener que utilizar el límite de la suma.
2. Cuando aplicamos el teorema fundamental del cálculo, la siguiente notación resulta conveniente:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

3. No es necesario incluir una constante de integración C en la antiderivada o primitiva, ya que

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) + C\Big|_a^b = [F(b)+C] - [F(a)+C]$$

Ejemplo 3.32. Integrales definidas

Resuelva $\int_2^5 x^2 dx$

Solución:

$$\int_2^5 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^5 = \frac{125}{3} - \frac{8}{3} = \frac{117}{2} = 39$$

Ejemplo 3.33. Integrales definidas

Reuelva $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)dx$

Solución:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = [-(-1)] - [-1] = 2$$

Ejemplo 3.34. Integrales definidas

Resuelva $\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2}$

Solución:

$$\int_0^a \frac{3dx}{a^2+x^2} = \left[\frac{3}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a = \frac{3}{a}\arctan(1) - \frac{1}{a}\arctan(0) = \frac{3\pi}{4a}$$

Ejemplo 3.35. Integrales definidas

Resuelva $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2-9}$

Solución:

$$\int_{-1}^0 \frac{2dx}{4x^2-9} = -2\int_{-1}^0 \frac{dx}{9-4x^2} = -\frac{1}{6}\left[\ln\frac{3+2x}{3-2x}\right]_{-1}^0 \approx 0.26823952$$

> **Nota:** Cuando el resultado es negativo, el área está por debajo del eje x.

Ejercicios 3.2. Integrales definidas

Resuelva las siguientes integrales definidas:

Función	Respuesta	Función	Respuesta
1. $\displaystyle\int_0^\pi (\pi^2 x - x^3)dx$	$\dfrac{\pi^4}{4}$	**7.** $\displaystyle\int_0^\pi (\sqrt{\pi}-\sqrt{x})^2 dx$	$\dfrac{\pi^2}{6}$
2. $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{dx}{x}$	2	**8.** $\displaystyle\int_0^4 \frac{x^2dx}{x+4}$	$-8+\ln(65\,536)$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{5dx}{\sqrt{3-2x}}$	$5(-1+\sqrt{3})$	**9.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^{2x}}$	$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2e^2}$
4. $\displaystyle\int_2^3 \frac{5zdz}{1+z^2}$	$\dfrac{5\ln(2)}{2}$	**10.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(\phi)d\phi$	1
5. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3dx}{x+2}$	$\dfrac{20}{3}-\ln(256)$	**11.** $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{3+3\cos(\alpha)}\,d\alpha$	$2\sqrt{6}$
6. $\displaystyle\int_0^a \frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\dfrac{a\pi}{2},\ a>0$	**12.** $\displaystyle\int_0^4 \sec^4\theta\,d\theta$	$\dfrac{4}{3}$

Compruebe que los resultados propuestos son correctos

13. $\displaystyle\int_{-1}^1 (t^2-2)dt = -\frac{10}{3}$

14. $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\left(u-\frac{1}{u^2}\right)du = -2$

15. $\displaystyle\int_1^4 \frac{u-2}{\sqrt{u}}du = \frac{2}{3}$

16. $\displaystyle\int_{-3}^3 v^{1/3}dv = \frac{9}{4}((-3)^{1/3}+3^{1/3})$

17. $\int_{-1}^{1}(\sqrt[5]{t}-2)\,dt = -4 + \frac{3}{4}(1+(-1)^{1/3})$

18. $\int_{1}^{8}\sqrt{\frac{2}{x}}dx = 8 - 2\sqrt{2}$

19. $\int_{0}^{5}|2x-5|dx = \frac{25}{2}$

20. $\int_{1}^{4}(3-|x-3|)dx = \frac{13}{2}$

21. $\int_{0}^{\pi}(1+\operatorname{sen} x)dx = 9+\cos 1-\cos 8$

22. $\int_{0}^{\pi/4}\frac{1+\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta = 2-\frac{\pi}{4}$

23. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3}2\sec\theta\,\tan\theta\,d\theta = 0$

24. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2t+\cos t)dt = 2$

3.2. Integrales impropias

El tema anterior indica que una integral definida puede considerarse como el área bajo una curva si ésta es una región cerrada. Ahora veremos que no necesariamente se debe tener una región cerrada para determinar el área bajo la curva; no obstante, es preciso estudiar algunos conceptos que nos permitan calcular áreas bajo la curva en las cuales no está cerrada la región. Comencemos con los conceptos necesarios.

3.2.1. Límites infinitos

Hasta aquí se ha supuesto que los límites de la integral son finitos (en algunos casos no se tiene esa restricción), pero debemos considerar integrales con límites infinitos, para lo cual emplearemos las definiciones siguientes:

- Cuando el límite superior es infinito: $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$
- Cuando el límite inferior es infinito: $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$

Ejemplo 3.36. Límites infinitos

Resuelva

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$$

Solución:

Planteamos el límite de la integral cuando $b \to \infty$

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_{2}^{b}\frac{dx}{x^2}$$

Resolvemos la integral y evaluamos en los límites superior einferior

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_2^b$$

Obtenemos el límite, si es que existe

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{b}+\frac{1}{2}\right]$$

En el presente ejemplo si $b \to +\infty$, entonces $-\frac{1}{b} \to 0$

$$= \frac{1}{2}$$

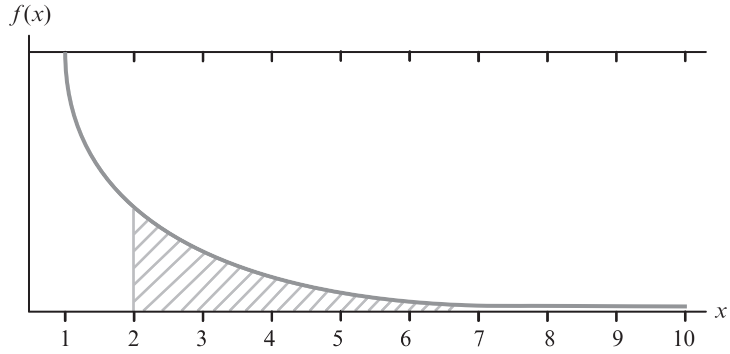


Figura 3.5. Gráfica con límite superior $+\infty$.

Ejemplo 3.37. **Límites infinitos**

Resuelva

$$\int_0^{+\infty} \frac{8c^3dx}{x^2+4c^2}$$

Solución:

Planteamos el límite de la integral cuando $b \to \infty$

$$\int_0^{+\infty} \frac{8c^3dx}{x^2+4c^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} \frac{8c^3dx}{x^2+4c^2}$$

Resolvemos la integral y evaluemos

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[4c^2 \arctan\frac{x}{2c}\right]_0^b$$

Obtenemos el límite, si es que existe

$$= \lim_{b\to+\infty}\left[4c^2 \arctan\frac{b}{2c}\right]$$

En el presente ejemplo si $b \to +\infty$, entonces $\arctan\left(\frac{b}{2c}\right) \to \frac{\pi}{2}$

$$= 4c^2\frac{\pi}{2}$$

$$= 2\pi c^2$$

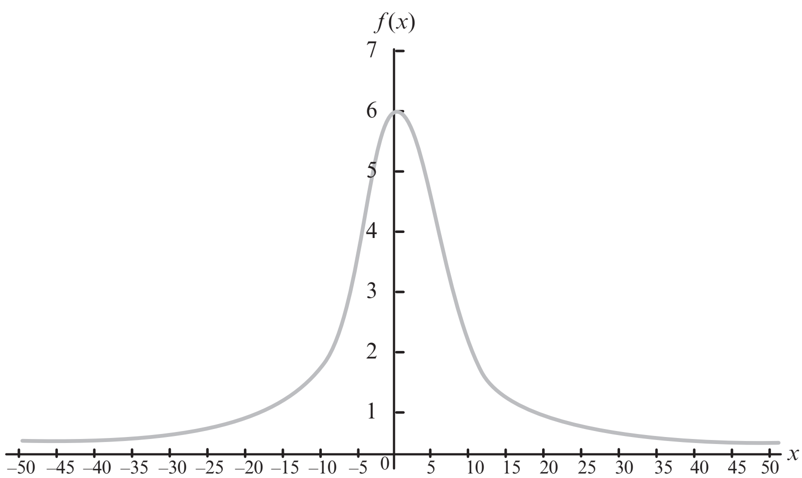


Figura 3.6. Gráfica con límite superior $+\infty$.

Nota: La gráfica se realizó con $c = 3$.

Ejemplo 3.38. **Límites infinitos**

Resuelva

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x}$$

Solución:

Planteamos el límite de la integral cuando $b \to \infty$

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \to +\infty} \int_{2}^{b} \frac{dx}{x}$$

Resolvemos la integral y evaluamos

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[\ln (x)\right]_{2}^{b}$$

Obtenemos el límite, si es que esxiste

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[\ln\ (b) - \ln (2)\right]$$

En este caso el límite *no* existe

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[\ln (b) - \ln (2)\right] = \text{ No hay solución}$$

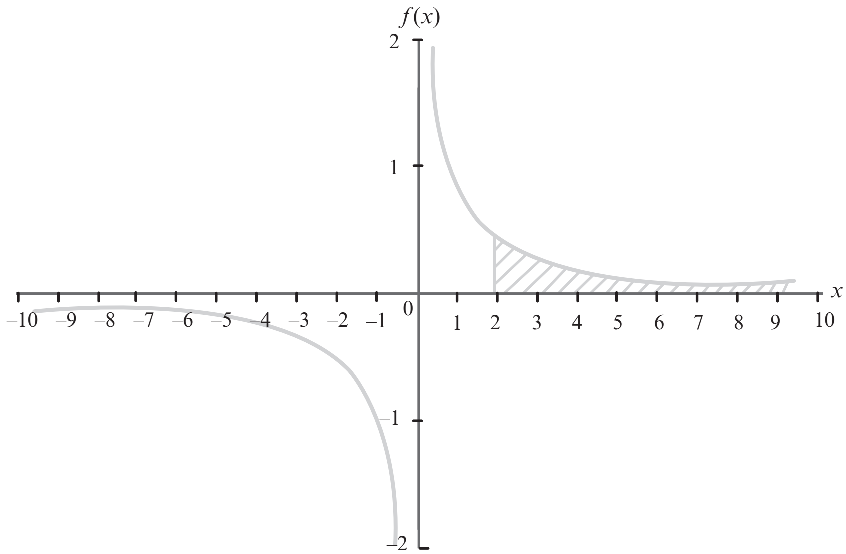


Figura 3.7. Gráfica con límite superior $+\infty$.

3.2.2. Integrales impropias

Con los límites estudiados podemos abordar el tema de integrales impropias; así, cuando $y = f(x)$ es discontinua procedemos como en la sección 3.1.2. Consideremos ahora los casos en que la función a integrar es discontinua para valores aislados de la variable dentro de los límites de integración. Primero cuando la función a integrar es continua para todos los valores de x entre los límites a y b, excepto en $x = a$.

Si $a < b$ y ε es positivo, empleamos la definición siguiente:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \int_{a+\delta}^{b} f(x)dx$$

Ahora, cuando $f(x)$ es continua, excepto en $x = b$, utilizaremos:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \int_{a}^{b-\delta} f(x)dx$$

Lo anterior es posible siempre y cuando los límites existan.

Ejemplo 3.39. Integrales impropias

Calcule $\int_0^a \frac{2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ la cual se vuelve infinito cuando $x = a$.

Solución:

$$\int_0^a \frac{2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}(2)\int_0^{a-\delta}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \lim_{\delta\to 0}(2)\cdot \lim_{\delta\to 0}\left[\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\right]_0^{a-\delta}$$

$$= 2\lim_{\delta\to 0}\left[\operatorname{arcsen}\left(1-\frac{\varepsilon}{a}\right)\right]$$

$$= 2 \text{ arc sen } (1) = \cancel{2}\frac{\pi}{\cancel{2}} = \pi$$

Ejemplo 3.40. Integrales impropias

Calcule $\int_0^1 \frac{3dx}{x^2}$, la cual se vuelve infinito cuando $x = 0$.

Solución:

Planteamos el límite de la integral cuando $\varepsilon \to 0$

$$\int_0^1 \frac{3dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}(3)\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2}$$

Resolvemos la integral y evaluamos

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(3)\cdot \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^1$$

Obtenemos el límite, si es que existe

$$= 3\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{1}-\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$$

En este caso el límite *no* existe

$$= 3\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$$

Si c es un valor que está entre a y b, y $g(x)$ es continua excepto en $x = c$, y siendo ε y ε' números positivos, la integral entre a y b se define por:

$$\int_a^b g(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} g(x)dx + \lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{c+\varepsilon'}^b g(x)dx$$

Siempre y cuando existan ambos límites.

Ejemplo 3.41. Integrales impropias

Calcule $\int_0^{3a} \frac{2x}{(x^2-a^2)^{2/3}}dx$ donde la función es discontinua para $x = a$, el cual es un valor en el intervalo $[0, 3a]$ por lo que emplearemos la definición anterior.

Solución:

Planteamos el límite y separamos en dos. Esto es debido a la indeterminación en $x = a$.

$$\int_0^{3a} \frac{2x}{\left(x^2 - a^2\right)^{2/3}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{2x}{\left(x^2 - a^2\right)^{2/3}} dx + \lim_{\varepsilon' \to 0} \int_{a+\varepsilon'}^{3a} \frac{2x}{\left(x^2 - a^2\right)^{2/3}} dx$$

Resolvemos la integral

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[3\left(x^2 - a^2\right)^{1/3} \right]_0^{a-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon' \to 0} \left[3\left(x^2 - a^2\right)^{1/3} \right]_{a+\varepsilon'}^{3a}$$

Evaluamos los límites superior e inferior

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[3\sqrt[3]{(a-\varepsilon)^2 - a^2} + 3a^{2/3} \right] + \lim_{\varepsilon' \to 0} \left[3\sqrt[3]{8a^2} - 3\sqrt[3]{(a+\varepsilon')^2 - a^2} \right]$$

Obtenemos el límite, si es que existe

$$= 3a^{2/3} + 6a^{2/3} = 9a^{2/3}$$

Ejemplo 3.42. Integrales impropias

Calcule $\int_0^{2a} \frac{dx}{(x-a)^2}$, la cual se vuelve infinito para $x = a$ que es un valor en el intervalo $[0, 2a]$

Solución:

Plantemos el límite y separemos en dos. Esto es debido a la indeterminación en $x = a$.

$$\int_0^{3a} \frac{dx}{(x-a)^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{dx}{(x-a)^2} + \lim_{\varepsilon' \to 0} \int_{a+\varepsilon'}^{3a} \frac{dx}{(x-a)^2}$$

Resolvemos la integral

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[-\frac{1}{x-a} \right]_0^{a-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon' \to 0} \left[-\frac{1}{x-a} \right]_{a+\varepsilon'}^{3a}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{a} \right) + \lim_{\varepsilon' \to 0} \left(-\frac{1}{2a} + \frac{1}{\varepsilon'} \right)$$

Los límites anteriores no existen, por lo que la integral anterior no tiene significado.

Practique las integrales impropias en los ejercicios siguientes:

Ejercicios 3.3. Integrales impropias

Verifique las siguientes integrales impropias. Recuerde que las literales diferentes a las variables del diferencial se consideran constantes.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{2dx}{x^2+1} = \pi$

2. $\int_1^{+\infty} \frac{2dx}{x\sqrt{2x^2-1}} = \frac{\pi}{4}$

3. $\int_1^{5} \frac{3xdx}{4\sqrt{5-x}} = \frac{44}{3}$

4. $\int_0^{+\infty} \frac{b\,dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{\pi}{2ab}$

5. $\int_1^{2} \frac{dx}{\sqrt{3}\,x^2\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$

6. $\int_0^{+\infty} 4xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}$

7. $\int_0^{+\infty} ae^{-ax}dx = 1$

8. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{2}\,dx}{(1+x)^{3/2}} = \sqrt{2}$

9. $\int_0^{a} \frac{4x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = a2\pi,\ a>0$

10. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2dx}{x^2+2x+2} = 2\pi$

11. $\int_1^{+\infty} \frac{2xdx}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1}{2}$

12. $\int_a^{2a} \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = a^2\sqrt{3} - \frac{a^2}{4}\ln(-a^2) + \frac{a^2}{2}\ln(2a + a\sqrt{3})$

3.2.3. Integración por sustitución y cambio de variable

El método de integración por sustitución o cambio de variable se basa en la derivada de la función compuesta. Podemos observar que el diferencial que se está integrando corresponde precisamente al de una función de función o función compuesta.

$$\int f'(u)\cdot u'dx = F(u) + C$$

Para cambiar de variable, identificamos una parte de lo que se integrará con una nueva variable t, de modo que se obtenga una integral más sencilla.

Pasos para integrar por cambio de variable

Para llegar a la fórmula $\int f'(u)\cdot u'dx$, la cual es el objetivo del cambio de variable, debemos seguir los pasos que se detallan a continuación:

1. Hacemos el cambio de variable y diferenciamos en ambos términos:

$$t = u$$
$$dt = u'dx$$

Después, despejamos u y dx, y sustituimos en la integral:

$$\int f'(t)\cdot u'^{dt/u'} = \int f'(t)dt$$

2. Si la integral resultante es más sencilla, integramos:

$$\int f'(t)dt = f(t) + C$$

3. Volvemos a la variable inicial:

$$f(t) + C = f(u) + C$$

Ejemplo 3.43. **Integración mediante cambio de variable**

Resuelva la integral siguiente:

$$\int (3x+2)^3\,dx$$

Solución: La función potencia es $(3x+2)^3$; el exponente, 3 (diferente de -1); la función base, $3x+2$; y el diferencial de la función base, $3dx$. Si replanteamos la integral con un cambio de variable donde $u = 3x + 2$, el diferencial es $du = 3dx$. Observe la similitud que hay con los ejemplos realizados en integrales inmediatas pero aquí el diferencial no está completo. Cabe recordar que aquello que no es la función potencia debe ser el diferencial de la función base. Al reescribir la integral con el cambio de variable es más evidente que du no está completo.

$$\int (3x+2)^3\,dx = \int u^3\,dx$$

Si multiplicamos y dividimos por tres el diferencial de la variable independiente $\left(\frac{3dx}{3}\right)$.

La expresión se convierte en:

$$\int (3x+2)^3\,dx = \int u^3\frac{3}{3}dx$$

Entonces podemos sacar de la integral el 3 que divide, como un tercio que multiplica al resultado de la integral replanteada, como se muestra:

$$\int (3x+2)^3\,dx = \int u^3\frac{3}{3}dx = \int u^3\frac{1}{3}\frac{3}{1}dx = \frac{1}{3}\int u^3\,3dx$$

Si observamos la última parte, $3dx$ es el diferencial du:

$$\int (3x+2)^3\,dx = \int u^3\frac{3}{3}dx = \int u^3\frac{1}{3}\frac{3}{1}dx = \frac{1}{3}\int u^3\,3dx = \frac{1}{3}\int u^3\,du$$

Con lo cual, la última integral está completa y es inmediata:

$$\int (3x+2)^3\,dx = \int u^3\frac{3}{3}dx = \int u^3\frac{1}{3}\frac{3}{1}dx = \frac{1}{3}\int u^3\,3dx = \frac{1}{3}\int u^3\,du = \frac{1}{3}\frac{u^{3+1}}{3+1}+c$$

$$\int (3x+2)^3\,dx = \int u^3\frac{3}{3}dx = \int u^3\frac{1}{3}\frac{3}{1}dx = \frac{1}{3}\int u^3\,3dx = \frac{1}{3}\int u^3\,du = \frac{1}{3}\frac{u^{3+1}}{3+1}+c = \frac{u^4}{3(4)}+c$$

$$\int (3x+2)^3\,dx = \int u^3\frac{3}{3}dx = \int u^3\frac{1}{3}\frac{3}{1}dx = \frac{1}{3}\int u^3\,3dx = \frac{1}{3}\int u^3\,du = \frac{1}{3}\left(\frac{u^{3+1}}{3+1}+c\right) = \frac{u^4}{3(4)}+c_2 = \frac{u^4}{12}+c_2$$

Ahora sólo falta regresarlo a la variable original. Recuerde que $u = 3x + 2$.

$$\int (3x+2)^3\,dx = \frac{u^4}{12}+c_2 = \frac{(3x+2)^4}{12}+c_2$$

> **Nota:** En el ejemplo que acabamos de resolver, recurrimos al cambio de variable para que fuera evidente que el diferencial estaba incompleto y que era necesario completarlo, pero también se puede utilizar el cambio de variable cuando el diferencial está completo. No es obligatorio emplear el símbolo u para denotar la nueva variable o función. Aunque es común utilizar constantes para completar el diferencial, también es posible usar x o cualquiera que sea la variable independiente, o funciones, si con esto se consigue completar el diferencial.

Ejemplo 3.44. Integración mediante cambio de variable

Resuelva la integral siguiente:

$$\int \sqrt{3-5x}\,dx$$

Solución: Reescribimos la integral como

$$\int \sqrt{3-5x}dx = \int (3-5x)^{1/2}\, dx$$

La función potencia es $(3 - 5x)^{1/2}$ el exponente, $\frac{1}{2}$ (diferente de -1); la función base, $3 - 5x$; y el diferencial de la función base, $-5dx$. Si replanteamos la integral con un cambio de variable donde $u = 3 - 5x$, el diferencial es $du = -5dx$. Observe la similitud con los ejemplos realizados en integrales inmediatas pero aquí el diferencial no está completo. Cabe recordar que aquello que no es la función potencia debe ser el diferencial de la función base. Al reescribir la integral con el cambio de variable es más evidente que du no está completo.

$$\int \sqrt{3-5x}dx = \int (3-5x)^{1/2}\, dx = \int u^{1/2} dx$$

Si multiplicamos y dividimos por -5 el diferencial de la variable independiente $\left(\frac{-5dx}{-5}\right)$, la expresión se convierte en

$$\int \sqrt{3-5x}dx = \int (3-5x)^{1/2}\, dx = \int u^{1/2}\frac{-5}{-5}dx$$

Aquí podemos sacar de la integral el -5 que divide, como un quinto que multiplica al resultado de la integral replanteada, como se muestra:

$$\int (3-5x)^{1/2}\, dx = \int u^{1/2}\frac{-5}{-5}dx = \int u^{1/2}\frac{1}{-5}\frac{-5}{1}dx = \frac{1}{-5}\int u^{1/2}(-5)dx$$

Si observamos la última parte, $(-5)dx$ es el diferencial du:

$$\int (3-5x)^{1/2}\, dx = \int u^{1/2}\frac{-5}{-5}dx = \int u^{1/2}\frac{1}{-5}\frac{-5}{1}dx = \frac{1}{-5}\int u^{1/2}(-5)dx = \frac{1}{-5}\int u^{1/2}du$$

Con lo cual, la última integral está completa y es inmediata

$$\int (3-5x)^{1/2}\, dx = \int u^{1/2}\frac{-5}{-5}dx = \int u^{1/2}\frac{1}{-5}\frac{-5}{1}dx = \frac{1}{-5}\int u^{1/2}(-5)dx = \frac{1}{-5}\int u^{1/2}du = -\frac{1}{5}\frac{u^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$

Entonces realizamos las operaciones aritméticas con las fracciones

$$\int (3-5x)^{1/2}\, dx = \frac{1}{-5}\int u^{1/2}(-5)dx = \frac{1}{-5}\int u^{1/2}du = -\frac{1}{5}\frac{u^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = -\frac{1}{5}\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c_2$$

Simplificamos

$$\int (3-5x)^{1/2}\, dx = \frac{1}{-5}\int u^{1/2}(-5)dx = \frac{1}{-5}\int u^{1/2}du = -\frac{1}{5}\frac{u^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = -\frac{1}{5}\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c_2 = -\frac{1}{5}\frac{2u^{3/2}}{3} + c_2$$

$$\int (3-5x)^{1/2}\, dx = -\frac{1}{5}\frac{2u^{3/2}}{3} + c_2 = -\frac{2u^{3/2}}{15} + c_2$$

Ahora sólo falta regresarlo a la variable original. Recuerde que $u = 3 - 5x$:

$$\int \sqrt{3-5x}\, dx = -\frac{2u^{3/2}}{15} + c_2 = -\frac{(3-5x)^{3/2}}{15} + c_2 = -\frac{\sqrt{(3-5x)^3}}{15} + c_2$$

Ejemplo 3.45. Integración mediante cambio de variable

Resuelva la integral siguiente:

$$\int x\left(x^2-5\right)^4 dx$$

Solución: La función potencia es $(x^2 - 5)^4$ en la cual el exponente es 4 (diferente de -1); la función base, $x^2 - 5$; y el diferencial de la función base, $2xdx$. Si replanteamos con un cambio de variable donde $u = x^2 - 5$, el diferencial es $du = 2xdx$.

Observe el parecido de este ejemplo con los que realizamos en el tema de integrales inmediatas. La diferencia entre ambos es que el diferencial no está completo. Cabe recordar que aquello que no es la función potencia debe ser el diferencial de la función base. Al reescribir la integral con el cambio de variable es más evidente que du no está completo.

$$\int x\left(x^2-5\right)^4 dx = \int x\,u^4 dx = \int u^4 xdx$$

Si multiplicamos y dividimos por dos, la última parte de la integral es $\frac{2}{2}xdx = \frac{2xdx}{2}$.

La expresión se convierte en:

$$\int \left(x^2-5\right)^4 xdx = \int u^4 \frac{2}{2}xdx$$

Entonces podemos sacar de la integral el 2 que divide, como un medio que multiplica el resultado de la integral replanteada, como se muestra a continuación:

$$\int \left(x^2-5\right)^4 xdx = \int u^4 \frac{2}{2}xdx = \int u^4 \frac{1}{2}\,\frac{2}{1}xdx = \frac{1}{2}\int u^4 2xdx$$

Si observamos la última parte, $2xdx$ es el diferencial du:

$$\int x\left(x^2-5\right)^4 dx = \int u^4 \frac{2}{2}xdx = \int u^4 \frac{1}{2}\,\frac{2}{1}xdx = \frac{1}{2}\int u^4 2xdx = \frac{1}{2}\int u^4 du$$

Con lo cual, la última integral está completa y es inmediata

$$\int x\left(x^2-5\right)^4 dx = \int u^4 \frac{2}{2}dx = \int u^4 \frac{1}{2}\,\frac{2}{1}xdx = \frac{1}{2}\int u^4 2xdx = \frac{1}{2}\int u^4 du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{4+1}}{4+1}+c\right)$$

$$\int x\left(x^2-5\right)^4 dx = \int u^4 \frac{2}{2}dx = \int u^4 \frac{1}{2}\,\frac{2}{1}xdx = \frac{1}{2}\int u^4 2xdx = \frac{1}{2}\int u^4 du = \frac{1}{2}\,\frac{u^{4+1}}{4+1}+c_2 = \frac{1}{2}\,\frac{u^5}{5}+c_2$$

$$\int x\left(x^2-5\right)^4 dx = \int u^4 \frac{2}{2}dx = \int u^4 \frac{1}{2}\,\frac{2}{1}xdx = \frac{1}{2}\int u^4 2xdx = \frac{1}{2}\int u^4 du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{4+1}}{4+1}+c\right) = \frac{1}{2}\,\frac{u^5}{5}+c_2 = \frac{u^5}{10}+c_2$$

Ahora sólo falta regresarlo a la variable original, recuerde que $u = x^2 - 5$:

$$\int x\left(x^2-5\right)^4 dx = \frac{u^5}{10}+c_2 = \frac{\left(x^2-5\right)^5}{10}+c_2$$

Ejemplo 3.46. Integración mediante cambio de variable

Resuelva la integral siguiente:

$$\int x^2\left(2x^3-7\right)^5 dx$$

Solución: En esta integral, la función potencia es $(2x^3 - 7)^5$, el exponente es 5 (diferente de -1), la función base es $2x^3 - 7$ y el diferencial de la función base es $6x^2dx$. Si replanteamos la integral con un cambio de variable donde $u = 2x^3 - 7$, el diferencial es $du = 6x^2dx$. Observe la similitud de este ejemplo con aquellos realizados en el tema de integrales inmediatas. La diferencia que hay entre ellos es que el diferencial no está completo. Nuevamente es preciso recordar que aquello que no es la función potencia debe ser el diferencial de la función base. Al reescribir la integral con el cambio de variable es más evidente que du no está completo.

$$\int x^2\left(2x^3 - 7\right)^5 dx = \int x^2 u^5 dx = \int u^5 x^2 dx$$

Si multiplicamos y dividimos por 6, la última parte de la integral es $\frac{6}{6}x^2dx = \frac{6x^2dx}{6}$.

La expresión se convierte en:

$$\int\left(2x^3 - 7\right)^5 x^2 dx = \int u^5 \frac{6}{6}x^2 dx$$

Entonces podemos sacar de la integral el 6 que divide, como un sexto que multiplica al resultado de la integral replanteada, como se muestra a continuación:

$$\int\left(2x^3 - 7\right)^5 x^2 dx = \int u^5 \frac{6}{6}x^2 dx = \int u^5 \frac{1}{6}\,\frac{6}{1}x^2 dx = \frac{1}{6}\int u^5 6x^2 dx$$

Si observamos la última parte, $6x^2dx$ es el diferencial du:

$$\int x^2\left(2x^3 - 7\right)^5 dx = \int u^5 \frac{6}{6}x^2 dx = \int u^5 \frac{1}{6}\,\frac{6}{1}x^2 dx = \frac{1}{6}\int u^5 6x^2 dx = \frac{1}{6}\int u^5 du$$

Con lo cual la última integral está completa y es inmediata:

$$\int x^2\left(2x^3 - 7\right)^5 dx = \int u^5 \frac{6}{6}x^2 dx = \int u^5 \frac{1}{6}\,\frac{6}{1}x^2 dx = \frac{1}{6}\int u^5 6x^2 dx = \frac{1}{6}\int u^5 du = \frac{1}{6}\left(\frac{u^{5+1}}{5+1} + c\right)$$

$$\int x^2\left(2x^3 - 7\right)^5 dx = \int u^5 \frac{6}{6}x^2 dx = \int u^5 \frac{1}{6}\,\frac{6}{1}x^2 dx = \frac{1}{6}\int u^5 6x^2 dx = \frac{1}{6}\int u^5 du = \frac{1}{6}\left(\frac{u^{5+1}}{5+1} + c\right) = \frac{1}{6}\,\frac{u^6}{6} + c_2$$

$$\int x^2\left(2x^3 - 7\right)^5 dx = \int u^5 \frac{6}{6}x^2 dx = \int u^5 \frac{1}{6}\,\frac{6}{1}x^2 dx = \frac{1}{6}\int u^5 6x^2 dx = \frac{1}{6}\int u^5 du = \frac{1}{6}\left(\frac{u^{5+1}}{5+1} + c\right) = \frac{u^6}{36} + c_2$$

Ahora sólo falta regresarlo a la variable original. Recuerde que $u = 2x^3 - 7$:

$$\int x^2\left(2x^3 - 7\right)^5 dx = \frac{u^6}{36} + c_2 = \frac{\left(2x^3 - 7\right)^6}{36} + c_2$$

Ejemplo 3.47. Integración mediante cambio de variable

Resuelva la integral siguiente:

$$\int\left(x^2 + x\right)\left(2x^3 + 3x^2\right)^7 dx$$

Solución: Aquí la función potencia es $(2x^3 + 3x^2)^7$; el exponente, 7 (diferente de −1); la función base, $2x^3 + 3x^2$ y el diferencial de la función base, $(6x^2 + 6x)dx$. Si replanteamos con un cambio de variable donde $u = 2x^3 + 3x^2$, el diferencial es $du = (6x^2 + 6x)dx$. Observe la similitud con los ejemplos realizados en integrales inmediatas. La diferencia que hay entre ellos es que el diferencial no está completo. Recuerde que aquello que no es la función potencia debe ser el diferencial de la función base. Al reescribir con el cambio de variable es más evidente que du no está completo.

$$\int (x^2 + x)(2x^3 + 3x^2)^7 dx = \int (x^2 + x^2)u^7 dx = \int u^7 (x^2 + x)dx$$

Si multiplicamos y dividimos entre 6 la última parte de la integral:

$$\frac{6}{6}(x^2 + x)dx = \frac{6(x^2 + x)dx}{6} = \frac{(6x^2 + 6x)dx}{6}$$

La expresión se convierte en:

$$\int (2x^3 + 3x^2)^7 (x^2 + x)dx = \int u^7 \frac{6}{6}(x^2 + x)dx = \int u^7 \frac{(6x^2 + 6x)}{6}dx$$

Entonces podemos sacar de la integral el 6 que divide, como un sexto que multiplica al resultado de la integral replanteada:

$$\int (2x^3 + 3x^2)^7 (x^2 + x)dx = \int u^7 \frac{6}{6}(x^2 + x)dx = \int u^7 \frac{(6x^2 + 6x)}{6}dx = \frac{1}{6}\int u^7 (6x^2 + 6x)dx$$

Si observamos la última parte, $(6x^2 + 6x)dx$ es el diferencial du:

$$\int (2x^3 + 3x^2)^7 (x^2 + x)dx = \int u^7 \frac{6}{6}(x^2 + x)dx = \int u^7 \frac{(6x^2 + 6x)}{6}dx = \frac{1}{6}\int u^7 (6x^2 + 6x)dx = \frac{1}{6}\int u^7 du$$

Con lo cual, la última integral está completa y es inmediata:

$$\int (2x^3 + 3x^2)^7 (x^2 + x)dx = \int u^7 \frac{6}{6}(x^2 + x)dx = \frac{1}{6}\int u^7 (6x^2 + 6x)dx = \frac{1}{6}\int u^7 du = \frac{1}{6}\left(\frac{u^{7+1}}{7+1} + c\right)$$

$$\int (2x^3 + 3x^2)^7 (x^2 + x)dx = \int u^7 \frac{6}{6}(x^2 + x)dx = \frac{1}{6}\int u^7 (6x^2 + 6x)dx = \frac{1}{6}\int u^7 du = \frac{1}{6}\left(\frac{u^8}{8} + c\right) = \frac{1}{6}\,\frac{u^8}{8} + c_2$$

$$\int (2x^3 + 3x^2)^7 (x^2 + x)dx = \int u^7 \frac{6}{6}(x^2 + x)dx = \frac{1}{6}\int u^7 (6x^2 + 6x)dx = \frac{1}{6}\int u^7 du = \frac{1}{6}\left(\frac{u^8}{8} + c\right) = \frac{u^8}{48} + c_2$$

Ahora sólo falta regresarlo a la variable original. Recuerde que $u = 2x^3 + 3x$.

$$\int (x^2 + x)(2x^3 + 3x^2)^7 dx = \frac{u^8}{48} + c_2 = \frac{(2x^3 + 3x^2)^8}{48} + c_2$$

Ejemplo 3.48. Integración mediante cambio de variable

Resuelva la integral siguiente:

$$\int \frac{4x + 2}{(x^2 + x)^9}dx$$

Solución: Reescribimos la integral como $\int(4x+2)(x^2+x)^{-9}dx$ entonces, la función potencia es $(x^2+x)^{-9}$; el exponente, −9 (diferente de −1); la función base, x^2+x y el diferencial de la función base, $(2x+1)dx$. Si replanteamos la integral con un cambio de variable donde $u=x^2+x$, el diferencial es $du=(2x+1)dx$. Observe la similitud de este ejemplo con aquellos que realizamos en el tema de integrales inmediatas. La diferencia entre ambos es que el diferencial no está completo. Recuerde que aquello que no es la función potencia debe ser el diferencial de la función base. Al reescribir con el cambio de variable es más evidente que du no está completo.

$$\int\frac{4x+2}{\left(x^2+x\right)^9}dx=\int(4x+2)\left(x^2+x\right)^{-9}dx=\int u^{-9}(4x+2)dx$$

Factorizamos 2 en la última parte de la integral:

$$\int\frac{4x+2}{\left(x^2+x\right)^9}dx=\int(4x+2)\left(x^2+x\right)^{-9}dx=\int u^{-9}2(2x+1)dx$$

Lo sacamos de la última integral:

$$\int\frac{4x+2}{\left(x^2+x\right)^9}dx=\int(4x+2)\left(x^2+x\right)^{-9}dx=\int u^{-9}2(2x+1)dx=2\int u^{-9}(2x+1)dx$$

La última parte de la integral $(2x+1)dx$ es el diferencial du, con el cual está completa:

$$\int\frac{4x+2}{\left(x^2+x\right)^9}dx=\int(4x+2)\left(x^2+x\right)^{-9}dx=\int u^{-9}2(2x+1)dx=2\int u^{-9}(2x+1)dx=2\int u^{-9}du$$

$$=2\left(\frac{u^{-9+1}}{-9+1}+c\right)$$

Realizamos la suma en el exponente y en el denominador:

$$\int\frac{4x+2}{\left(x^2+x\right)^9}dx=\int(4x+2)\left(x^2+x\right)^{-9}dx=\int u^{-9}2(2x+1)dx=2\int u^{-9}(2x+1)dx=2\int u^{-9}du$$

$$=2\left(\frac{u^{-9+1}}{-9+1}+c\right)=2\left(\frac{u^{-8}}{-8}+c\right)$$

Multiplicamos por 2:

$$\int\frac{4x+2}{\left(x^2+x\right)^9}dx=\int(4x+2)\left(x^2+x\right)^{-9}dx=\int u^{-9}2(2x+1)dx=2\int u^{-9}(2x+1)dx=2\int u^{-9}du$$

$$=2\left(\frac{u^{-9+1}}{-9+1}+c\right)=2\left(\frac{u^{-8}}{-8}+c\right)=\frac{2u^{-8}}{-8}+c_2$$

Simplificamos 2 con −8:

$$\int\frac{4x+2}{\left(x^2+x\right)^9}dx=\int(4x+2)\left(x^2+x\right)^{-9}dx=\int u^{-9}2(2x+1)dx=2\int u^{-9}(2x+1)dx=2\int u^{-9}du$$

$$=2\left(\frac{u^{-9+1}}{-9+1}+c\right)=2\left(\frac{u^{-8}}{-8}+c\right)=\frac{u^{-8}}{-4}+c_2=-\frac{u^{-8}}{4}+c_2$$

Ahora sólo falta regresarlo a la variable original. Recuerde que $u = x^2 + x$.

$$\int \frac{4x+2}{\left(x^2+x\right)^9} dx = \int (4x+2)\left(x^2+x\right)^{-9} dx = -\frac{u^{-8}}{4} + c_2 = -\frac{\left(x^2+x\right)^{-8}}{4} + c_2 = -\frac{1}{4\left(x^2+x\right)^8} + c_2$$

Ejemplo 3.49. Integración mediante cambio de variable

Resuelva la integral siguiente:

$$\int x^2 \sqrt{x^3+6}\, dx$$

Solución: Reescribimos la integral como $\int x^2(x^3+6)^{1/2}dx$. Entonces, la función potencia es $(x^3+6)^{1/2}$ el exponente, $\frac{1}{2}$ (diferente de -1); la función base, x^3+6 y el diferencial de la función base, $3x^2dx$. Si replanteamos con un cambio de variable donde $u = x^3+6$, el diferencial es $du = 3x^2dx$. Observe la similitud de este ejemplo con los que realizamos en el tema de integrales inmediatas. La diferencia entre ambos es que el diferencial no está completo. Cabe recordar que aquello que no es la función potencia debe ser el diferencial de la función base. Al reescribir con el cambio de variable es más evidente que du no está completo.

$$\int x^2 \sqrt{x^3+6}\, dx = \int x^2\left(x^3+6\right)^{1/2} dx = \int \left(x^3+6\right)^{1/2} x^2 dx = \int u^{1/2} x^2 dx$$

Si multiplicamos y dividimos por 3 la última parte de la integral

$$\frac{3}{3} x^2 dx = \frac{3x^2 dx}{3}$$

La expresión se convierte en

$$\int x^2 \sqrt{x^3+6}\, dx = \int x^2\left(x^3+6\right)^{1/2} dx = \int \left(x^3+6\right)^{1/2} x^2 dx = \int u^{1/2} \frac{3}{3} x^2 dx$$

Entonces podemos sacar de la integral el 3 que divide, como un tercio que multiplica el resultado de la integral replanteada:

$$\int x^2 \sqrt{x^3+6}\, dx = \int x^2\left(x^3+6\right)^{1/2} dx = \int \left(x^3+6\right)^{1/2} x^2 dx = \int u^{1/2} \frac{3}{3} x^2 dx = \int u^{1/2} \frac{1}{3}\frac{3}{1} x^2 dx = \frac{1}{3}\int u^{1/2} 3x^2 dx$$

Si observamos la última parte, vemos que $3x^2dx$ es el diferencial du:

$$\int x^2 \sqrt{x^3+6}\, dx = \int \left(x^3+6\right)^{1/2} x^2 dx = \int u^{1/2} \frac{3}{3} x^2 dx = \int u^{1/2} \frac{1}{3}\frac{3}{1} x^2 dx = \frac{1}{3}\int u^{1/2} 3x^2 dx = \frac{1}{3}\int u^{1/2} du$$

Con lo cual, la última integral está completa y es inmediata:

$$\int x^2 \sqrt{x^3+6}\, dx = \int \left(x^3+6\right)^{1/2} x^2 dx = \int u^{1/2} \frac{3}{3} x^2 dx = \frac{1}{3}\int u^{1/2} 3x^2 dx = \frac{1}{3}\int u^{1/2} du = \frac{1}{3}\left(\frac{u^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + c\right)$$

Realizamos la suma de números racionales del exponente como del denominador:

$$\int x^2 \sqrt{x^3+6}\, dx = \int \left(x^3+6\right)^{1/2} x^2 dx = \int u^{1/2} \frac{3}{3} x^2 dx = \frac{1}{3}\int u^{1/2} 3x^2 dx = \frac{1}{3}\int u^{1/2} du = \frac{1}{3}\left(\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c\right)$$

Realizamos la división $\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}$ como medios por medios y extremos por extremos:

$$\int x^2\sqrt{x^3+6}\,dx = \int (x^3+6)^{1/2}x^2dx = \int u^{1/2}\frac{3}{3}x^2dx = \frac{1}{3}\int u^{1/2}3x^2dx = \frac{1}{3}\int u^{1/2}du = \frac{1}{3}\left(\frac{2u^{3/2}}{3}+c\right)$$

Multiplicamos por $\frac{1}{3}$:

$$\int x^2\sqrt{x^3+6}\,dx = \int (x^3+6)^{1/2}x^2dx = \int u^{1/2}\frac{3}{3}x^2dx = \frac{1}{3}\int u^{1/2}3x^2dx = \frac{1}{3}\int u^{1/2}du = \frac{2u^{3/2}}{9}+c_2$$

Ahora sólo falta regresarlo a la variable original, recuerde que $u = x^3 + 6$:

$$\int x^2\sqrt{x^3+6}\,dx = \frac{2(x^3+6)^{3/2}}{9}+c_2$$

Ejemplo 3.50. **Integración mediante cambio de variable**

Resuelva la integral siguiente:

$$\int \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt[3]{x^2+x}}dx$$

Solución: Reescribimos la integral como

$$\int \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt[3]{x^2+x}}dx = \int \frac{x+\frac{1}{2}}{(x^2+x)^{1/3}}dx = \int\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x)^{-1/3}dx.$$

Entonces, la función potencia es $(x^2+x)^{-1/3}$; el exponente, $-\frac{1}{3}$ (diferente de -1); la función base, $x^2 + x$ y el diferencial de la función base, $(2x + 1)dx$. Si replanteamos la integral con un cambio de variable donde $u = x^2 + x$, el diferencial es $du = (2x + 1)dx$. Observe la similitud de este ejemplo con los que realizamos en el tema de integrales inmediatas. La diferencia entre ambos es que el diferencial no está completo. Cabe recordar que aquello que no es la función potencia debe ser el diferencial de la función base. Al reescribir la integral con el cambio de variable es más evidente que du no está completo.

$$\int \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt[3]{x^2+x}}dx = \int \frac{x+\frac{1}{2}}{(x^2+x)^{1/3}}dx = \int\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x)^{-1/3}dx = \int (x^2+x)^{-1/3}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \int u^{-1/3}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx$$

Si multiplicamos y dividimos por 2 la última parte de la integral:

$$\frac{2}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{(2x+1)dx}{2}$$

La expresión se convierte en:

$$\int \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt[3]{x^2+x}}dx = \int\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x)^{-1/3}dx = \int (x^2+x)^{-1/3}\frac{2}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \int u^{-1/3}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2}dx$$

$$= \int u^{-1/3}\frac{(2x+1)}{2}dx$$

Entonces podemos sacar de la integral el 2 que divide, como un tercio que multiplica al resultado de la integral replanteada:

$$\int \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt[3]{x^2+x}}dx = \int\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x)^{-1/3}dx = \int (x^2+x)^{-1/3}\frac{2}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \int u^{-1/3}\,\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int u^{-1/3}(2x+1)dx$$

Si observamos la última parte, vemos que $(2x + 1)dx$ es el diferencial du:

$$\int \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt[3]{x^2+x}}\,dx = \int\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x)^{-1/3}dx = \int u^{-1/3}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2}dx = \frac{1}{2}\int u^{-1/3}2\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int u^{-1/3}(2x+1)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int u^{-1/3}du$$

Con lo cual, la última integral está completa y es inmediata:

$$\int \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt[3]{x^2+x}}dx = \int\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x)^{-1/3}dx = \int u^{-1/3}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2}dx = \int u^{-1/3}\frac{1}{2}\,(2x+1)\,dx = \frac{1}{2}\int u^{-1/3}du$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{u^{-1/3+1}}{-\frac{1}{3}+1}+c\right)$$

Realizamos la suma de números racionales tanto del exponente como del denominador:

$$\int \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt[3]{x^2+x}}dx = \int\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x)^{-1/3}dx = \int u^{-1/3}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2}dx = \int u^{-1/3}\frac{1}{2}(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int u^{-1/3}du$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{u^{-1/3+1}}{-\frac{1}{3}+1}+c\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{u^{2/3}}{\frac{2}{3}}+c\right)$$

Realizamos la división $\frac{u^{2/3}}{\frac{2}{3}}$ como medios por medios y extremos por extremos:

$$\int \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt[3]{x^2+x}}dx = \int\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x)^{-1/3}dx = \int u^{-1/3}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2}dx = \int u^{-1/3}\frac{1}{2}(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int u^{-1/3}du$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{u^{-1/3+1}}{-\frac{1}{3}+1}+c\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{u^{2/3}}{\frac{2}{3}}+c\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3u^{2/3}}{2}+c\right)$$

Multiplicamos por $\frac{1}{2}$:

$$\int \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt[3]{x^2+x}}dx = \int\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2+x)^{-1/3}dx = \int u^{-1/3}\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2}dx = \int u^{-1/3}\frac{1}{2}(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int u^{-1/3}du$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{u^{-1/3+1}}{-\frac{1}{3}+1}+c\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{u^{2/3}}{\frac{2}{3}}+c\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3u^{2/3}}{2}+c\right)=\frac{3u^{2/3}}{4}+c_2$$

Ahora sólo falta regresarlo a la variable original. Recuerde que $u = x^2 + x$:

$$\int \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt[3]{x^2 + x}} dx = \frac{3\left(x^2+x\right)^{2/3}}{4} + c_2$$

Ejemplo 3.51. **Integración mediante cambio de variable**

Resuelva la integral siguiente:

$$\int \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

Solución: Podemos reescribir la integral como $\int \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int (3+\sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}} dx \int (3+\sqrt{x}) \frac{dx}{\sqrt{x}}$ donde la función potencia es $\left(3+\sqrt{x}\right)^1$; el exponente, 1 (diferente de -1); la función base, $3+\sqrt{x}$ y el diferencial de la función base, $\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$. Si replanteamos la integral con un cambio de variable donde $u = 3+\sqrt{x}$, el diferencial es $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

Observe el parecido de este ejemplo con otros realizados en el tema integrales inmediatas. La diferencia entre ambos es que el diferencial no está completo. Cabe recordar que aquello que no es la función potencia debe ser el diferencial de la función base. Al reescribir la integral con el cambio de variable es más evidente que *du* no está completo.

$$\int \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int (3+\sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int u \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Si multiplicamos y dividimos por 2 la última parte de la integral:

$$\frac{2}{2} \frac{dx}{\sqrt{3}} = \frac{2}{1} \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

La expresión se convierte en:

$$\int \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int (3+\sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int u \frac{2}{1} \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

Entonces podemos sacar de la integral el 2 que multiplica, como uno que multiplica el resultado de la integral:

$$\int \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int (3+\sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int u \frac{2}{1} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int u \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

Si observamos la última parte, vemos que $\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ es el diferencial *du*:

$$\int \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int (3+\sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int u \frac{2}{1} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int u \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int u\, du$$

Con lo cual la última integral está completa y es inmediata:

$$\int \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int (3+\sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int u \frac{2}{1} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int u \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int u\, du = 2\left(\frac{u^{1+1}}{1+1} + c\right)$$

Realizamos la suma tanto en el exponente como en el denominador:

$$\int \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int (3+\sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int u \frac{2}{1} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int u \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int u\, du = 2\left(\frac{u^2}{2} + c\right)$$

Realizamos la multiplicación $2\left(\frac{u^2}{2}+c\right)$:

$$\int \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int (3+\sqrt{x})\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int u\frac{2}{1}\frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int u\frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int u\,du = 2\left(\frac{u^2}{2}+c\right) = \frac{2u^2}{2}+c_2$$

Simplificamos:

$$\int \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int (3+\sqrt{x})\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int u\frac{2}{1}\frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int u\frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int u\,du = \frac{2u^2}{2}+c = u^2+c_2$$

Ahora sólo falta regresarlo a la variable original. Recuerde que $u = 3+\sqrt{x}$:

$$\int \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = u^2+c_2 = (3+\sqrt{x})^2+c_2$$

Ejemplo 3.52. **Integración mediante cambio de variable**
Resuelva la integral siguiente:

$$\int \frac{4-\sqrt[3]{2x+3}}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}dx$$

Solución: Podemos reescribir la integral como

$$\int \frac{4-\sqrt[3]{2x+3}}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}dx = \int (4-\sqrt[3]{2x+3})\frac{1}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}dx = \int (4-\sqrt[3]{2x+3})\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$$

donde la función potencia es $\left(4-\sqrt[3]{2x+3}\right)^1$; el exponente, 1 (diferente de -1); la función base, $4-\sqrt[3]{2x+3}$ y el diferencial de la función base,

$$-\frac{1}{3}(2x+3)^{1/3-1}(2)dx = -\frac{1}{3}(2x+3)^{-2/3}(2)dx = -\frac{1}{3(2x+3)^{2/3}}(2)dx = -\frac{2dx}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}} = \frac{-2dx}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$$

Si replanteamos la integral con un cambio de variable donde $u = 4-\sqrt[3]{2x+3}$, el diferencial es

$$du = -\frac{2dx}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$$

Observe la similitud de este ejemplo con los que realizamos en el tema de integrales inmediatas. La diferencia entre ambos es que el diferencial no está completo. Cabe recordar que aquello que no es la función potencia debe ser el diferencial de la función base. Al reescribir con el cambio de variable es más evidente que *du* no está completo.

$$\int \frac{4-\sqrt[3]{2x+3}}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}dx = \int (4-\sqrt[3]{2x+3})\frac{1}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}dx = \int u\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$$

Si multiplicamos y dividimos

$$\left(-\frac{3}{3}\right)\left(-\frac{2}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)$$

la última parte de la integral

$$\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}} = -\frac{3}{2}\,\frac{-2dx}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$$

La expresión se convierte en

$$\int \frac{4-\sqrt[3]{2x+3}}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}dx = \int \left(4-\sqrt[3]{2x+3}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}dx = \int u\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$$
$$= \int u\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{-2dx}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$$

Entonces podemos sacar de la integral el $-\frac{3}{2}$ que multiplica, como un 2 que multiplica el resultado de la integral, replanteada como:

$$\int \frac{4-\sqrt[3]{2x+3}}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}dx = \int \left(4-\sqrt[3]{2x+3}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}dx = \int u\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$$
$$= \int u\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{-2dx}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}} = -\frac{3}{2}\int u\frac{-2dx}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$$

Si observamos la última parte, vemos que $\frac{-2dx}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$ es el diferencial du:

$$\int \frac{4-\sqrt[3]{2x+3}}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}dx = \int \left(4-\sqrt[3]{2x+3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}dx = \int u\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$$
$$= \int u\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{-2dx}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}} = -\frac{3}{2}\int u\frac{-2dx}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}} = -\frac{3}{2}\int udu$$

Con lo cual la última integral está completa y es inmediata:

$$\int \frac{4-\sqrt[3]{2x+3}}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}dx = \int \left(4-\sqrt[3]{2x+3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}dx = \int u\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$$
$$= \int u\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{-2dx}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}} = -\frac{3}{2}\int u\frac{-2dx}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}} = -\frac{3}{2}\int udu = -\frac{3}{2}\left(\frac{u^{1+1}}{1+1}+c\right)$$

Realizamos la suma tanto en el exponente como en el denominador:

$$\int \frac{4-\sqrt[3]{2x+3}}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}dx = \int \left(4-\sqrt[3]{2x+3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}dx = \int u\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$$
$$= \int u\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{-2dx}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}} = -\frac{3}{2}\int u\frac{-2dx}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}} = -\frac{3}{2}\int udu = -\frac{3}{2}\left(\frac{u^{1+1}}{1+1}+c\right) = -\frac{3}{2}\left(\frac{u^2}{2}+c\right)$$

Realizamos la multiplicación $-\frac{3}{2}\left(\frac{u^2}{2}+c\right)$:

$$\int \frac{4-\sqrt[3]{2x+3}}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}dx = \int \left(4-\sqrt[3]{2x+3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}dx = \int u\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$$
$$= \int u\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{-2dx}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}} = -\frac{3}{2}\int u\frac{-2dx}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}} = -\frac{3}{2}\int udu = -\frac{3}{2}\left(\frac{u^{1+1}}{1+1}+c\right) = -\frac{3}{2}\left(\frac{u^2}{2}+c\right) = -\frac{3u^2}{4}+c_2$$

Ahora sólo falta regresarlo a la variable original. Recuerde que $u = 4-\sqrt[3]{2x+3}$:

$$\int \frac{4-\sqrt[3]{2x+3}}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}dx = -\frac{3u^2}{4}+c_2 = -\frac{3\left(4-\sqrt[3]{2x+3}\right)^2}{4}+c_2$$

Ejemplo 3.53. **Integrales por cambio de variable**

Resuelva la integral:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

Solución: Si practicamos lo suficiente podemos resolverla de forma más directa, como se muestra a continuación.

Con la sustitución $u = \ln x$ y $du = dx/x$, podemos obtener lo siguiente:

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx \text{ sería lo mismo que } \int u^2 du$$

Por tanto

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + c$$

Ejercicios 3.4 **Integrales mediante cambio de variable.**

Realice las siguientes integrales utilizando el cambio de variable que convenga:

	Función	**Respuesta**
1.	$\int (3x+2)^{10}\, dx$	$\frac{1}{33}(2+3x)^{11} + c$
2.	$\int (5x+8)^4\, dx$	$\frac{1}{40}(5x+8)^5 + c$
3.	$\int (x+2)(2x^2+8x)^6 dx$	$\frac{2x^6}{3} + 8x^5 + 32x^4 + \frac{128x^3}{3} + c$
4.	$\int \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right)\left(x^3 - x^2 + x - 4\right) dx$	$\frac{x^6}{12} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{6} + \frac{3x^2}{4} - \frac{2x}{3} + c$
5.	$\int \frac{bdx}{d+3bx}$	$\frac{1}{3} \ln [d+3bx] + c$
6.	$\int \frac{xdx}{a+2x^2}$	$\frac{1}{4} \ln \left[a+2x^2\right] + c$
7.	$\int \frac{4x^2}{3-5x^3} dx$	$-\frac{4}{15} \ln \left[3-5x^3\right] + c$
8.	$\int \frac{1-2x}{(2x-2x^2)} dx$	$\frac{1}{2} \ln [1-x] + \frac{\ln [x]}{2} + c$
9.	$\int \frac{6x^2 - 4x + 2}{x^3 - x^2 + 2x} dx$	$-\frac{\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)}{\sqrt{7}} + \ln x + \frac{5}{2} \ln \left[x^2 - x + 2\right] + c$
10.	$\int \sqrt{7-3x}\, dx$	$-\frac{2}{9}(7-3x)^{3/2} + c$
11.	$\int \sqrt[3]{7-10x}\, dx$	$-\frac{3}{40}(7-10x)^{4/3} + c$

Función	Respuesta
12. $\int 4x\sqrt{5x^2+3}\,dx$	$\frac{4}{15}(3+5x^2)^{3/2}+c$
13. $\int 7x\sqrt[3]{6x^2-5}\,dx$	$\frac{7}{16}\left(6x^2-5\right)^{4/3}$
14. $\int x\left(x^2+3\right)^{11}dx$	$\frac{1}{24}\left(x^2+3\right)^{12}+c$
15. $\int x^2\left(x^3-10\right)^3dx$	$\frac{1}{12}\left(x^3-10\right)^4+c$
16. $\int 9x^2\sqrt{x^3+6}\,dx$	$2(6+x^3)^{3/2}+c$
17. $\int \frac{12x^2+8x}{\sqrt{x^3+x^2}}dx$	$8\sqrt{x^2(1+x)}+c$
18. $\int \frac{5x^2-4x+1}{\sqrt[3]{5x^3-6x^2+3x}}dx$	$\frac{1}{2}\left(x\left(3-6x+5x^2\right)\right)^{2/3}+c$
19. $\int \frac{7-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+6}}\,dx$	$-x+14\sqrt{6+x}+c$
20. $\int \frac{\sqrt{2x-3}+5}{\sqrt{2x-3}}\,dx$	$x+5\sqrt{-3+2x}+c$
21. $\int \frac{7-\sqrt{5-9x}}{\sqrt{5-9x}}\,dx$	$-\frac{14}{9}\sqrt{5-9x}-x+c$
22. $\int \frac{\sqrt[3]{4-x}}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}\,dx$	$-\frac{3(4-x)^{4/3}}{2((x-4)^2)^{1/3}}+c$
23. $\int \frac{\sqrt[3]{4x-3}-5}{\sqrt[3]{(4x-3)^2}}\,dx$	$\frac{3(4x-3)((4x-3)^{1/3}-10)}{8((3-4x)^2)^{1/3}}+c$
24. $\int \frac{x\left(\sqrt[3]{3x^2-2}-2\right)}{\sqrt[3]{(3x^2-2)^2}}\,dx$	$\frac{(3x^2-2)((3x^2-2)^{1/3}-4)}{4((2-3x^2)^2)^{1/3}}+c$

Como vimos en los ejercicios anteriores, es muy importante intuir cuál será el diferencial de u. Para ello debemos observar los elementos presentes en la integral y, de alguna manera, lo que no es u es el diferencial o parte de él. En seguida realizaremos algunos ejemplos en los cuales no es tan evidente dicha sustitución, ni tampoco el diferencial de la nueva variable introducida; de hecho, debemos recurrir a varias sustituciones y manipulaciones de las expresiones hasta conformar una integral que pueda realizarse.

Ejemplo 3.54. **Integración mediante cambio de variable**

Resuelva la integral siguiente:

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx$$

Solución: Con el cambio de variable $u = x - 1$, el diferencial es $du = dx$. Si consideramos el exponente $\frac{1}{2}$, la función potencia es $(x-1)^{1/2} = u^{1/2}$ la función base es $x - 1 = u$, con lo cual la integral se reescribe $\int x\sqrt{u}\,dx = \int u^{1/2}\,x\,dx = \int u^{1/2}\,x\,du.$

En la expresión anterior aquello que no es la función potencia no es el diferencial de la función base, pero si manipulamos algebraicamente la sustitución realizada, como se muestra a continuación:

Si $u = x - 1$, entonces $x = u + 1$.
Y el diferencial $dx = du$.

La integral puede reescribirse como

$$\int x\sqrt{u}\,dx = \int u^{1/2}\,x\,dx = \int u^{1/2}\,x\,du.$$

Pero si $x = u + 1$, también se sustituye, queda:

$$\int x\sqrt{u}\,dx = \int u^{1/2}\,x\,dx = \int u^{1/2}\,x\,du = \int u^{1/2}(u+1)du$$

Observemos que esta última integral está en términos de la nueva variable u. La cual ya podemos realizar.

Realizamos el producto en el integrando

$$\int u^{1/2}(u+1)du = \int \left(u^{3/2} + u^{1/2}\right)du$$

Separamos en dos integrales

$$\int u^{1/2}(u+1)du = \int \left(u^{3/2} + u^{1/2}\right)du = \int u^{3/2}du + \int u^{1/2}du$$

Las cuales son inmediatas

$$\int u^{1/2}(u+1)du = \int \left(u^{3/2} + u^{1/2}\right)du = \int u^{3/2}du + \int u^{1/2}du = \frac{u^{3/2+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{u^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2u^{5/2}}{5} + \frac{2u^{3/2}}{3} + c$$

Por último, escribimos el resultado en términos de la variable original, para lo cual recordemos que $u = x - 1$:

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \frac{2(x-1)^{5/2}}{5} + \frac{2(x-1)^{3/2}}{3} + c$$

Ejemplo 3.55. Integración mediante cambio de variable

Resuelva la integral siguiente:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x+5}}dx$$

Solución: Si reescribimos la integral como $\int x^2(x+5)^{-1/2}\,dx.$

Si realizamos el cambio de variable $u = x + 5$, el diferencial es $du = dx$. Si consideramos el exponente $-\frac{1}{2}$, la función potencia es $(x+5)^{-1/2} = u^{-1/2}$ y la función base es $x + 5 = u$, con lo cual la integral se reescribe

$$\int x^2 u^{-1/2}\,dx = \int u^{-1/2}\,x^2\,dx = \int u^{-1/2}\,x^2\,du.$$

En la expresión anterior aquello que no es la función potencia no es el diferencial de la función base, pero si manipulamos algebraicamente la sustitución realizada, como se muestra a continuación:

Si $u = x + 5$, entonces $x = u - 5$ y el diferencial $dx = du$ y $x^2 = (u - 5)^2$ o, desarrollando el binomio al cuadrado, $x^2 = u^2 - 10x + 25$.

La integral puede reescribirse como $\int x^2 u^{-1/2}\,dx = \int u^{-1/2}\,x^2\,dx = \int u^{-1/2}\,x^2\,du$ pero si $x^2 = u - 5$ también se sustituye, queda:

$$\int x^2 u^{-1/2}\,dx = \int u^{-1/2}\,x^2\,dx = \int u^{-1/2}\,x^2\,du = \int u^{-1/2}\,(u-5)^2\,du = \int u^{-1/2}\left(u^2 - 10x + 25\right)du$$

Observemos que esta última integral está en términos de la nueva variable u. La cual ya podemos realizar. Entonces realizamos el producto en el integrando:

$$\int u^{-1/2}\left(u^2 - 10u + 25\right)du = \int\left(u^{3/2} - 10u^{1/2} + 25u^{-1/2}\right)du$$

Separamos en tres integrales:

$$\int u^{-1/2}\left(u^2 - 10u + 25\right)du = \int\left(u^{3/2} - 10u^{1/2} + 25u^{-1/2}\right)du = \int u^{3/2}du - \int 10u^{1/2}du + \int 25u^{-1/2}du$$

Las cuales son inmediatas, sacando previamente a las constantes:

$$\int u^{3/2}du - \int 10u^{1/2}du + \int 25u^{-1/2}du = \int u^{2/3}du - 10\int u^{1/2}du + 25\int u^{-1/2}du = \frac{u^{3/2\,+\,1}}{\frac{3}{2}+1} - 10\frac{u^{1/2\,+\,1}}{\frac{1}{2}+1} + 25\frac{u^{-1/2\,+\,1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$$

Simplificando

$$\int u^{3/2}du - \int 10u^{1/2}du + \int 25u^{-1/2}du = \int u^{3/2}du - 10\int u^{1/2}du + 25\int u^{-1/2}du = \frac{u^{5/2}}{\frac{5}{2}} - 10\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + 25\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{2u^{5/2}}{5} - \frac{20u^{3/2}}{3} + 50u^{1/2} + c$$

Por último, escribimos el resultado en términos de la variable original, para lo cual recordemos que $u = x + 5$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x+5}}dx = \frac{2u^{5/2}}{5} - \frac{20u^{3/2}}{3} + 50u^{1/2} + c = \frac{2(x+5)^{5/2}}{5} - \frac{20(x+5)^{3/2}}{3} + 50(x+5)^{1/2} + c$$

Ejemplo 3.56. Integración mediante cambio de variable

Resuelva la integral siguiente:

$$\int \frac{4x-3}{\sqrt[3]{2x+7}}dx$$

Solución: Si reescribimos la integral como $\int (4x-3)(2x+7)^{-1/3}\,dx$ y si realizamos el cambio de variable $u = 2x + 7$, el diferencial es $du = 2dx$. Si consideramos el exponente $-1/3$, la función potencia es $(2x+7)^{-1/3} = u^{-1/3}$ y la función base es $2x+7=u$. Con lo cual la integral se reescribe

$$\int (4x-3)u^{-1/3}\,dx = \int u^{-1/3}(4x-3)\,dx$$

En la expresión anterior aquello que no es la función potencia no es el diferencial de la función base, pero si manipulamos algebraicamente la sustitución realizada, como se muestra a continuación:

Si $u=2x+7$, entonces $x=\frac{1}{2}u-\frac{7}{2}$ y el diferencial $dx=\frac{1}{2}du=\frac{du}{2}$; observe con cuidado la manipulación algebraica para obtener la expresión $4x-3$ a partir de la sustitución propuesta si:

$$x=\frac{1}{2}u-\frac{7}{2}$$

Multiplicamos por 4 ambos lados de la igualdad:

$$4(x)=4\left(\frac{1}{2}u-\frac{7}{2}\right)$$

$$4x=\frac{4}{2}u-\frac{28}{2}$$

$$4x=2u-14$$

Ahora restamos 3 a ambos lados de la igualdad:

$$4x-3=2u-14-3$$

$$4x-3=2u-17$$

Y la integral puede reescribirse como $\int(4x-3)u^{-1/3}\,dx=\int u^{-1/3}(4x-3)\,dx$

Donde $4x-3=2u-17$ y $dx=\frac{1}{2}du=\frac{du}{2}$, por lo que la integral escrita en términos de la nueva variable es:

$$\int(4x-3)u^{-1/3}\,dx=\int u^{-1/3}(2u-17)\frac{du}{2}$$

Sacamos al $\frac{1}{2}$ de la integral:

$$\int(4x-3)u^{-1/3}\,dx=\int u^{-1/3}(2u-17)\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int u^{-1/3}(2u-17)\,du$$

Realizamos el producto en el integrando:

$$\int(4x-3)u^{-1/3}\,dx=\int u^{-1/3}(2u-17)\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int\left(2u^{2/3}-17u^{-1/3}\right)du$$

Separamos en dos integrales:

$$\int(4x-3)u^{-1/3}\,dx=\int u^{-1/3}(2u-17)\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int\left(2u^{2/3}-17u^{-1/3}\right)du=\frac{1}{2}\int 2u^{2/3}du+\frac{1}{2}\int -17u^{-1/3}du$$

Las cuales son inmediatas, sacando previamente a las constantes:

$$\int(4x-3)u^{-1/3}\,dx=\int u^{-1/3}(2u-17)\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int\left(2u^{2/3}-17u-^{1/3}\right)du=\frac{1}{2}\int 2u^{2/3}du+\frac{1}{2}\int -17u^{-1/3}du$$

$$=\int u^{2/3}du-\frac{17}{2}\int u^{-1/3}du=\frac{u^{2/3\,+\,1}}{\frac{2}{3}+1}-\frac{17}{2}\frac{u^{-1/3\,+\,1}}{}+c_2$$

Simplificando:

$$\int (4x-3)u^{-1/3}\,dx = \int u^{-1/3}(2u-17)\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \left(2u^{2/3}-17u^{-1/3}\right)du = \frac{1}{2}\int 2u^{2/3}du + \frac{1}{2}\int -17u^{-1/3}du$$

$$= \int u^{2/3}du - \frac{17}{2}\int u^{-1/3}du = \frac{u^{2/3+1}}{\frac{2}{3}+1} - \frac{17}{2}\frac{u^{-1/3+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c_2 = \frac{3u^{5/3}}{5} - \frac{17}{2}\frac{u^{2/3}}{\frac{2}{3}} + c_2 = \frac{3u^{5/3}}{5} - \frac{51u^{2/3}}{4} + c_2$$

Por último, escribimos el resultado en términos de la variable original, para lo cual recordemos que $u = 2x + 7$:

$$\int \frac{4x-3}{\sqrt[3]{2x+7}}dx = \frac{3(2x+7)^{5/3}}{5} - \frac{51(2x+7)^{2/3}}{4} + c_2$$

Ejemplo 3.57. Integración mediante cambio de variable

Resuelva la integral siguiente:

$$\int x^2\sqrt{2x+1}\,dx$$

Solución: Primero resolvemos $u = 2x + 1$, entonces podemos replantear la integral en términos de la variable u, de la manera siguiente:

$$x = \frac{1}{2}(u-1) \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

$$x^2 = \frac{1}{4}(u-1)^2 = \frac{1}{4}\left(u^2-2u+1\right) \qquad \text{y} \qquad \sqrt{2x+1} = u^{1/2}$$

Si sustituimos, obtenemos la expresión siguiente:

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{2x+1}\,dx &= \frac{1}{8}\int \left(u^2-2u+1\right)u^{1/2}du\\ &= \frac{1}{8}\int \left(u^{5/2}-2u^{3/2}+u^{1/2}\right)du\\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{2}{7}u^{7/2}-\frac{4}{5}u^{5/2}+\frac{2}{3}u^{3/2}\right)+C\\ &= \frac{1}{28}(2x+1)^{7/2}-\frac{1}{10}(2x+1)^{5/2}+\frac{1}{12}(2x+1)^{3/2}\end{aligned}$$

Derivando $x^2\sqrt{2x+1}$ podemos verificar que el resultado es correcto. Compruébelo.

Con los ejemplos anteriores nos damos cuenta de la gran diversidad de integrales en las que es posible utilizar un cambio de variables con la finalidad de simplificarlas o resolverlas; pero aquí sólo mostramos algunos casos comunes.

Ejercicios 3.5 **Integrales mediante cambio de variable**

Realice las siguientes integrales utilizando el cambio de variable que convenga.

Función	**Respuesta**
1. $\int x\sqrt[3]{x-5}\,dx$	$\frac{2}{63}(x-5)^{3/2}(400+120x+30x^2+7x^3)+c$
2. $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}}dx$	$\frac{2}{3}(x-8)\sqrt{4+x}+c$
3. $\int 3x\sqrt{2x+7}\,dx$	$\frac{1}{5}(7+2x)^{3/2}(3x-7)+c$
4. $\int (2x+1)\sqrt{x-9}\,dx$	$\frac{2}{15}(x-9)^{3/2}(41+6x)+c$
5. $\int \frac{x^2}{(x-2)^5}\,dx$	$\frac{-2+4x-3x^2}{6(x-2)^4}+c$
6. $\int \frac{5x-3}{\sqrt[3]{x-2}}\,dx$	$\frac{3}{2}(x-2)^{2/3}(3+2x)+c$
7. $\int \frac{2x-3}{(x-6)^3}\,dx$	$\frac{15-4x}{2(x-6)^2}+c$
8. $\int \left(x^2-3\right)\sqrt{3x+1}dx$	$\frac{2(1+3x)^{3/2}(135x^2-36x-937)}{2\ 835}+c$

3.2.4. Integración de funciones exponenciales, logarítmicas y algebraicas

Las sustituciones que hemos hecho hasta el momento para resolver integrales son aplicables a varios tipos de funciones, como las exponenciales y las logarítmicas, pero ambas ocupan un lugar relevante en la descripción de fenómenos naturales y sociales, por lo que no podemos dejar de estudiarlas en un curso de cálculo diferencial e integral. En el siguiente apartado deseamos aclarar cómo se aplica el cambio de variable en las integrales que involucran funciones exponenciales, logarítmicas y, con lo anterior, en más funciones algebraicas. Además en las funciones logarítmicas siempre debemos estar conscientes de cuál es el dominio de la función y de que la nueva variable debe ajustarse a dicho dominio.

Función exponencial

Ahora, utilicemos la sustitución en integrandos que presentan funciones exponenciales. Sea cuidadoso al determinar el diferencial adecuado, el cual se presenta en el teorema siguiente:

Teorema 3.4 Reglas de integración para funciones exponenciales

Si u es una función derivable de x.

1. $\int e^x dx = e^x + C$

2. $\int e^u du = e^u + C$

Ejemplo 3.58. **Integración de funciones exponenciales**

Encuentre $\int e^{7x+10}dx$.

Solución: Si $u = 7x + 10$, entonces $du = 7\ dx$.

Completar el diferencial: $\int e^{7x+10}dx = \frac{1}{7}\int e^{7x+10}(7)dx$

Cambio de variable $u = 7x+10$: $= \frac{1}{7}\int e^{u}du$

Solución de la integral: $= \frac{1}{7}e^{u} + C$

$$= \frac{e^{7x+10}}{7} + C$$

Ejemplo 3.59. Integración de funciones exponenciales

Determine: $\int 10xe^{-x2}\,dx.$

Solución: Si se tiene $u = -x^2$, entonces $du = -2xdx$ o $dx = -du/2$.

$$\begin{aligned}\int 10x\,e^{-x^2}dx &= \int 10e^{-x^2}(xdx)\\ &= \int 10e^{u}\left(-\frac{du}{2}\right)\\ &= -\frac{10}{2}\int e^{u}du\\ &= -5e^{u} + C\\ &= -5e^{-x^2} + C\end{aligned}$$

Ejercicios 3.6. Integración de funciones exponenciales

Resuelva lo siguiente:

Función	Respuesta	Función	Respuesta
1. $\int e^{2x-5}dx$	$\frac{e^{-5+2x}}{2}+c$	**9.** $\int e^{\cos(7x)}\,\mathrm{sen}(7x)dx$	$-\frac{1}{7}e^{\cos(7x)}+c$
2. $\int x^2ex^3dx$	$\frac{e^{x^3}}{3}+c$	**10.** $\int \frac{e^{5x}}{e^{5x}+4}dx$	$\frac{1}{5}\ln(e^{5x}+4)+c$
3. $\int e^x(e^x+1)^2dx$	$e^x+e^{2x}+\frac{e^{3x}}{3}+c$	**11.** $\int_{-2}^{0} x^2e^{x^3/3}dx$	$1-\frac{1}{e^{8/3}} \approx 0.93$
4. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$	$2e^{\sqrt{x}}+c$	**12.** $\int_{0}^{\sqrt{2}} xe^{-(x^2/2)}dx$	0.632
5. $\int \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$	$-\ln(1+e^{-x})+c$	**13.** $\int_{0}^{\pi/2} e^{\mathrm{sen}\,\pi x}\cos\pi x\,dx$	– 0.628
6. $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$	$\ln(e^x+e^{-x})+c$	**14.** $\int_{\pi/3}^{\pi/2} e^{\sec(2x)}\sec(2x)\tan(2x)\,dx$	0.1162
7. $\int \frac{2e^x-2e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}dx$	$-\frac{2}{e^x+e^{-x}}+c$	**15.** $\int \frac{e^{1/2}}{x^2}dx$	$=-e^{1/x}+c$
8. $\int e^x\sqrt{1-e^x}dx$	$-\frac{2}{3}(1-e^x)^{3/2}+c$	**16.** $\int \mathrm{sen}(x)\,e^{\cos(x)}dx$	$-e^{\cos(x)}+c$

Desarrolle los conceptos siguientes:

17. Enuncie con sus propias palabras las propiedades de la función exponencial natural.
Respuesta: El dominio es de $(-\infty, \infty)$, el contradominio $(0, \infty)$, la intersección con el eje y está en $(0, 1)$, no hay intersección con el eje x, y el eje x, esto es $y = 0$, es una asíntota horizontal.

18. ¿Existe una función f tal que $f(x) = f'(x)$? Si es así, ¿cuál es?
Respuesta: Sí existe una función f tal que $f(x) = f'(x)$ y es $f(x) = e^x$.

19. Sin integrar, enuncie la fórmula que podría utilizarse para efectuar las integrales siguientes:

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$ *b*) $\displaystyle\int xe^{x^2}dx$

20. Considere la función:

$$f(x) = \frac{2}{1+e^{1/x}}$$

a) Use una herramienta de graficación para graficar f.
b) Escriba un párrafo corto en el que explique por qué la gráfica tiene una asíntota horizontal en $y = 1$, y por qué la función tiene una discontinuidad no desmontable en $x = 0$.

21. Al ser $e^x \geq 1$ para $x \geq 0$, se tiene que $\int_0^x e^t\,dt \geq \int_0^x 1\,dt$. Efectúe esta integración para deducir la desigualdad $e^x \geq 1 + x$ para $x \geq 0$.

22. Discuta con su profesor la relación entre las gráficas de $f(x) = \ln x$ y $g(x) = e^x$.
Respuesta: Son simétricas respecto a la función identidad $h(x) = x$.

Función logaritmo natural

La gran relevancia de las funciones exponenciales se transfiere a las funciones logarítmicas, ya que son la función inversa de las exponenciales. Observe el diferencial y determínelo de forma correcta.

Teorema 3.5 Reglas de integración para la función logaritmo natural

Si u es una función derivable de x.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ **2.** $\displaystyle\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C$

Ejemplo 3.60. Uso de la regla del logaritmo para integración

Determine

$$\int \frac{2}{x}dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x}dx &= 2\int \frac{1}{x}\,dx \\ &= 2\ \ln\ x + C \\ &= \ln\ (x^2) + C\end{aligned}$$

Como x^2 no puede ser negativa, el valor absoluto no es necesario en la forma final de la primitiva o la antiderivada.

Ejemplo 3.61. Regla del logaritmo para integración

Halle
$$\int \frac{1}{7x+1}\,dx$$

Solución: Si tomamos $u = 7x + 1$, entonces $du = 7dx$.

Completando la integral: $$\int \frac{1}{7x+1}\,dx = \frac{1}{7}\int\left(\frac{1}{7x+1}\right)7dx$$

Cambio de variable: $$= \frac{1}{7}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{7}\ln|u| + C$$

$$= \frac{1}{7}\ln|7x+1| + C$$

Ejemplo 3.62. Cálculo de áreas con la regla del logaritmo

Encuentre el área de la región limitada por la gráfica de la función:

$$y = \frac{x}{x^2+1}, \text{ el eje } x \text{ y las rectas } x = 0 \text{ y } x = 3.$$

Solución: Si tomamos a $u = x^2 + 1$, entonces $u' = 2x$. Para aplicar la regla del logaritmo se debe multiplicar y dividir por 2, de la manera siguiente:

Multiplica y divide por 2: $$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}2dx$$

$\int \frac{u'}{u}dx = \ln|u| + C$ $$= \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^3$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 10 - \ln 1)$$

$\ln 1 = 0$ $$= \frac{1}{2}\ln 10$$

$$\approx 1.51$$

Puede practicar la regla del logaritmo para integración en los ejercicios siguientes:

Ejercicios 3.7. Regla del logaritmo para integración

Compruebe las siguientes integrales utilizando la regla del logaritmo y el cambio de variable:

1. $\int \frac{4x^3+1}{x^4+x}\,dx = \ln\left|x^4+x\right| + C \quad u = x^4 + x$

2. $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}dx = \ln|\tan x| + C \quad u = \tan x$

3. $\int \frac{x^2+1}{x^3+x}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+3}{x^3+3x}\,dx = \ln\left|x^2 + 3x\right| + C$

$u = x^3 + 3x$

4. $\int \frac{1}{5x+4}dx = \frac{1}{5}\int \frac{5}{5x+4}\,dx = \ln|5x+4| + C$

$u = 5x + 4$

Otro recurso para resolver algunas integrales en las cuales, por un lado, se presenta un cociente de polinomios y, por el otro, se incluye un polinomio en el numerador de grado igual o mayor que el del polinomio que se encuentra en el denominador, es realizar la división antes de la integración, como se muestra en los ejemplos siguientes:

Ejemplo 3.63. División larga antes de integrar

Encuentre
$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx$$

Solución: Realizamos la división:

$$\begin{array}{r|lll} & 1 & & \\ \cline{2-4} x^2+0x+1 & x^2 & +x & +1 \\ & -x & +0x & -1 \\ \cline{2-4} & 0 & +x & +0 \end{array}$$

$$\frac{x^2+x+1}{x^2+1} = 1 + \frac{x}{x^2+1}$$

Regresamos a la integral.
Reescribimos usando el resultado de la división larga:

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx = \int\left(1+\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

Reescribimos usando dos integrales:

$$= \int dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

Integramos:

$$= x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

Ejemplo 3.64. Cambio de variable con la regla del logaritmo

Encuentre $$\int \frac{2x}{(x+1)^2}\,dx$$

Solución: Si se parte de que $u = x + 1$, entonces $du = dx$ y $x = u - 1$.

Sustitución: $$\int \frac{2x}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{2(u-1)}{u^2}\,du$$

Reescribir como dos fracciones: $$= 2\int\left(\frac{u}{u^2} - \frac{1}{u^2}\right)du$$

Separamos las integrales: $$= 2\int \frac{du}{u} - 2\int u^{-2}\,du$$

Integrar: $$= 2\ln|u| - 2\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right) + C$$

Sustitución: $$= 2\ln|u| + \frac{2}{u} + C$$

Sustitución regresiva: $$= 2\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} +$$

En ciertas integrales el proceso previo a la aplicación de una fórmula de integración puede ser elaborado y no tan evidente; por lo que es necesario familiarizarse con esas integrales, como se muestra en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 3.65. Obtención de la fórmula de la secante

Halle $$\int \sec x\,dx$$

Solución:

$$\int \sec x\,dx = \int \sec x\left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\right)dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x\tan x}{\sec x + \tan x}\,dx$$

Como vemos, el denominador de este cociente puede obtenerse de la manera siguiente:

$$u = \sec x + \tan x \qquad \Rightarrow \qquad u' = \sec x \tan x + \sec^2 x.$$

Entonces podemos proceder como sigue.

Reescribir la integral:

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec\ x\ \tan\ x}{\sec x + \tan x}\ dx$$

Sustituir:

$$= \int \frac{u'}{u} dx$$

Aplicar regla del logaritmo:

$$= \ln |u| + C$$

Sustitución regresiva:

$$= \ln |\sec x + \tan x| + C$$

Ejercicios 3.8. **Función logaritmo natural**

Practique la aplicación de la fórmula $\int \frac{du}{u} = \ln(u) + c$ realizando las integrales siguientes (puede comprobar el resultado mediante derivación):

Función	**Respuesta**
1. $\int \frac{1}{2x+1} dx$	$\frac{1}{2}\ln(1+2x)+c$
2. $\int \frac{x}{x^2+3} dx$	$\frac{1}{2}\ln(3+x^2)+c$
3. $\int \frac{x^2}{7-x^3} dx$	$-\frac{1}{3}\ln(7-x^2)+c$
4. $\int \frac{4x^3+7}{x^4+7x} dx$	$\ln(x)+\ln(7+x^2)+c$
5. $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3+3x^2+9x} dx$	$\frac{1}{3}\ln(x^3+3x^2+9x)$
6. $\int \frac{x(x+2)}{x^3+3x^2+\sqrt{1000\,000\,000\,000^{1000\,000\,000^{10}}}} dx$	$\frac{1}{3}\ln(1+3x^2+x^3)+c$
7. $\int \frac{1}{t^{2/3}\left(1+t^{2/3}\right)} dt$	$3\arctan(t^{1/3})+c$
8. $\int \frac{\cos t}{1+\operatorname{sen} t} dt$	$\ln(1+\operatorname{sen}(t))+c$
9. $\int \frac{\sec x \tan x}{\sec x - 1} dx$	$-\ln(\cos(x))+2\ln\left(\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)+c$
10. $\int \frac{\csc^2 t}{\cot t} dt$	$-\ln(\cos(x))+\ln(\operatorname{sen}(x))+c$

3.2.5. Integrales de diferenciales de funciones trigonométricas inversas y de estructura similar

Como se mencionó antes, de cada fórmula de derivación se deduce otra, correspondiente, de integración. De las fórmulas para las derivadas de las funciones trigonométricas inversas proviene el siguiente teorema, que además de proporcionar algunas fórmulas de integrales indefinidas, presenta otras para resolver integrales de estructura similar:

Teorema 3.6

1. $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + c,\ a > 0$$

2. $$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + c,\ a \neq 0$$

3. $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a} + c,\ a > 0$$

4. $$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ \ln\frac{a+u}{a-u} + c$$

5. $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left(u \pm \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + c$$

Ejemplo 3.66. **Integrales de diferenciales de funciones trigonométricas inversas y de estructura similar**

Resuelva $$\int \frac{3}{x^2 + 5}dx$$

Solución: Sacamos el 3 de la integral:

$$\int \frac{3}{x^2 + 16}dx = 3\int \frac{dx}{x^2 + 16}$$

Utilizando la fórmula:

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\ \arctan\left(\frac{u}{a}\right) + c = \frac{1}{a}\ \tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$$

Donde

$x = u$

$dx = du$, el diferencial está completo

$a^2 = 16$

$a = 4$

$$\int \frac{3}{x^2 + 16}dx = 3\int \frac{dx}{x^2 + 16} = 3\frac{1}{4}\ \arctan\left(\frac{x}{4}\right) + c$$

Ejemplo 3.67. **Integrales de diferenciales de funciones trigonométricas inversas y de estructura similar**

Resuelva $$\int \frac{9dx}{9x^2 + 1}$$

Solución:

Si

$u^2 = 9x^2$

$u = 3x$ Se debe completar el diferencial y compensarlo con $\frac{1}{3}$ fuera de la integral

$du = 3dx$

$$\int \frac{9dx}{9x^2 + 1} = 3\int \frac{3dx}{(3x)^2 + 1} = 3\tan^{-1}(3x) + C \quad \text{(aplicando la parte (2) del teorema)}$$

Ejemplo 3.68. Integrales de diferenciales de funciones trigonométricas inversas y de estructura similar

Resuelva
$$\int \frac{2}{x^2-3}dx$$

Solución: Acomodamos los elementos de la integral, sacando el 2:

$$\int \frac{2}{x^2-3}dx = 2\int \frac{dx}{x^2-3}$$

Y utilizamos la fórmula:
$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{u-a}{u+a}+c$$

Donde

$$\begin{aligned} u^2 &= x^2 \\ u &= x \\ du &= dx \\ a^2 &= 3 \\ a &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\int \frac{2}{x^2-3}dx = 2\int \frac{dx}{x^2-3} = \cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{3}}\ln\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}+c = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}+c$$

Ejemplo 3.69. Integrales de diferenciales de funciones trigonométricas inversas y de estructura similar

Resuelva
$$\int \frac{3}{5x^2-10}dx$$

Solución: Acomodamos los elementos de la integral, sacando el 3:

$$\int \frac{3}{5x^2-10}dx = 3\int \frac{dx}{5x^2-10}$$

Y utilizando la fórmula:

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{u-a}{u+a}+c$$

Donde

$$\begin{aligned} u^2 &= 5x^2 \\ u &= \sqrt{5}\,x \\ du &= \sqrt{5}\,dx \end{aligned}$$

¡Cuidado, tenemos que completar el diferencial!

$$\begin{aligned} a^2 &= 10 \\ a &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\int \frac{3}{5x^2-10}dx = 3\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\sqrt{5}\,dx}{5x^2-10} = 3\frac{1}{\sqrt{5}}\;\frac{1}{2\left(\sqrt{10}\right)}\ln\frac{\sqrt{5}\,x-\sqrt{10}}{\sqrt{5}\,x+\sqrt{10}}+c = \frac{3}{2\cdot 5\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{5}\,x-\sqrt{10}}{\sqrt{5}\,x+\sqrt{10}}+c$$

Ejemplo 3.70. Integrales de diferenciales de funciones trigonométricas inversas y de estructura similar

Resuelva
$$\int \frac{3}{\sqrt{9-z^2}}dz$$

Solución: Acomodamos los elementos de la integral, sacando el 3:

$$\int \frac{3}{\sqrt{9-z^2}}dz = 3\int \frac{dz}{\sqrt{9-z^2}}$$

Y utilizamos la fórmula:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{arcsen}\,\frac{u}{a} + c = \text{sen}^{-1}\frac{u}{a} + c$$

Donde

$u^2 = z^2$

$u = z$

$du = dz$ El diferencial está completo.

$a^2 = 9$

$a = 3$

$$\int \frac{3}{\sqrt{9-z^2}}dz = 3\int \frac{dz}{\sqrt{9-z^2}} = \text{arcsen}\,\frac{z}{3} + c$$

Ejemplo 3.71. Integrales de diferenciales de funciones trigonométricas inversas y de estructura similar

Resuelva $$\int \frac{5}{\sqrt{7-9z^2}}dz$$

Solución: Acomodamos los elementos de la integral, sacando el 5:

$$\int \frac{5}{\sqrt{7-9z^2}}dz = 5\int \frac{dz}{\sqrt{7-9z^2}}$$

Y utilizamos la fórmula:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{arcsen}\frac{u}{a} + c = \text{sen}^{-1}\frac{u}{a} + c$$

Donde:

$u^2 = 9z^2$

$u = 3z$

$du = 3dz$ Se tiene que completar el diferencial

$a^2 = 7$

$a = \sqrt{7}$

$$\int \frac{5}{\sqrt{7-9z^2}}dz = 5\frac{1}{3}\int \frac{3dz}{\sqrt{7-9z^2}} = \frac{5}{3}\,\text{arcsen}\,\frac{3z}{\sqrt{7}} + c$$

Ejemplo 3.72. Integrales de diferenciales de funciones trigonométricas inversas y de estructura similar

Resuelva $$\int \frac{2dt}{\sqrt{t^2-4}}$$

Solución: Acomodamos los elementos de la integral, sacando el 2:

$$\int \frac{2dt}{\sqrt{t^2 - 4}} = 2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 4}}$$

Y utilizamos la fórmula:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left(u \pm \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + c$$

Donde:

$u^2 = t^2$
$u = t$
$du = dt$ El diferencial está completo.
$a^2 = 4$
$a = 2$

$$\int \frac{2dt}{\sqrt{t^2 - 4}} = 2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 4}} = 2\ln\left(t - \sqrt{t^2 - 4}\right) + c$$

Ejemplo 3.73. Integrales de diferenciales de funciones trigonométricas inversas y de estructura similar

Resuelva $$\int \frac{4dt}{\sqrt{3(t+1)^2 + 2}}$$

Solución: Acomodamos los elementos de la integral, sacando el 4:

$$\int \frac{4dt}{\sqrt{3(t+1)^2 + 2}} = 4\int \frac{dt}{\sqrt{3(t+1)^2 + 2}}$$

Y utilizamos la fórmula:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left(u \pm \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + c$$

Donde:

$u^2 = 3(t+1)^2$
$u = \sqrt{3}(t+1)$
$du = \sqrt{3}\,dt$ Se debe completar el diferencial.
$a^2 = 2$
$a = \sqrt{2}$

$$\int \frac{4dt}{\sqrt{3(t+1)^2 + 2}} = 4\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\sqrt{3}\,dt}{\sqrt{3(t+1)^2 + 2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\ln\left(\sqrt{3}(t+1) + \sqrt{3(t+1)^2 + 2}\right) + c$$

Ejemplo 3.74. Integrales de diferenciales de funciones trigonométricas inversas y de estructura similar

Resuelva $$\int \frac{dx}{x^2 + 3}$$

Solución:

Aplicando la parte (*ii*) del teorema 3.6:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 3} = \int \frac{dx}{x^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}} + C,$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2 + 3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3}x + \mathrm{C}$$

Ejemplo 3.75. **Integrales de diferenciales de funciones trigonométricas inversas y de estructura similar**

Resuelva
$$\int \frac{10dx}{x^2 + 1}$$

Solución:

Aplicando la parte (*ii*) del teorema 3.6:

$$\int \frac{10}{x^2 + 1} dx = 10 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = 10 \tan^{-1} x + c$$

3.2.6. Integración al completar el trinomio cuadrado perfecto (TCP)

En la sección anterior abordamos las integrales de diferenciales de funciones trigonométricas inversas, en las cuales se presentan polinomios de segundo grado en varias formas y no tienen un término de primer grado, es decir, sólo incluyen un término de segundo grado y un término constante. Estos polinomios de segundo grado pueden estar en el denominador o en un radical. Ahora veremos qué hacer cuando se presentan polinomios de segundo grado completos, ya sea en el denominador o en un radical; asimismo, veremos cómo reducir estos trinomios a alguno de los casos estudiados en la sección previa. Veamos los ejemplos siguientes:

Ejemplo 3.76. **Integrales completando el TCP**

Resuelva la integral
$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}$$

Solución: Sumamos y restamos 1 en el denominador:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 1 - 1 + 10}$$

Ahora los tres primeros forman un trinomio cuadrado perfecto. Éste se factoriza, y los últimos dos términos se reducen, quedando:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2 + 9} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 3^2}$$

para la cual emplearemos la fórmula:

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + c, \; a \neq 0$$

> **Nota:** En los cambios de variables usuales siempre debemos cuidar el diferencial.

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2 + 9} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 3^2} \text{ Donde } u(x) = x + 1 \quad du = dx \;\; a = 3$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2 + 3^2} = \frac{1}{3} \text{ arctg } \frac{x+1}{3} + c = \frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{x+1}{3} + c$$

Ejemplo 3.77. Integrales completando el TCP

Resuelva la integral:

$$\int \frac{5dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$$

Solución: Usamos el trinomio que está dentro del radical:

$$2+x-x^2$$

Acomodamos $-x^2+x+2$ y factorizamos el signo:

$$-[x^2-x-2]$$

Entonces completamos el TCP en el interior del corchete:

$$-\left[x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2\right]$$

Los tres primeros dentro del corchete son un TCP, los factorizamos como tal y reducimos sus dos últimos términos:

$$-\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]$$

Ahora introducimos el signo:

$$\left[-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\right]$$

Acomodando queda:

$$\left[\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

Regresamos a la integral con la última expresión dentro del radical:

$$\int \frac{5dx}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

Y aplicamos la fórmula:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}+c, \quad a>0$$

Para lo cual debemos tener extremo cuidado de encontrar todos los elementos $u(x)=x-\frac{1}{2}$; $du=dx$ y $a=\frac{3}{2}$

$$\int \frac{5dx}{\sqrt{\left[\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]}} = 5\int \frac{dx}{\sqrt{\left[\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]}} = 5 \text{ arcsen } \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}+c$$

$$= 5 \text{ arcsen } \frac{\frac{2x-1}{2}}{\frac{3}{2}}+c = 5 \text{ arcsen } \frac{2x-1}{3}+c = 5 \text{ arcsen } \frac{2x-1}{3}+c$$

Ejemplo 3.78. Integrales completando el trinomio cuadrado perfecto

Resuelva la integral:

$$\int \frac{12dx}{3x^2+4x-7}$$

Solución: Usamos el denominador en el cual factorizamos el 3:

$$3\left[x^2+\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}\right]$$

Completamos el TCP en el interior del corchete:

$$3\left[x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}-\frac{7}{3}\right]$$

Factorizamos los tres primeros en el interior del corchete y reducimos los dos últimos:

$$3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{25}{9}\right]$$

Regresamos a la integral con la última expresión en el denominador:

$$\int \frac{12dx}{3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{25}{9}\right]}$$

El 3 y el 12 salen de la integral en el denominador y numerador, respectivamente:

$$\frac{12}{3}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{25}{9}}$$

Para la cual podemos aplicar la fórmula siguiente:

$$\int \frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\frac{a+u}{a-u}+c$$

Con los elementos $u(x)=x+\frac{2}{3}$; $du=dx$ y $a=\frac{5}{3}$

$$4\int \frac{dx}{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{25}{9}}=\cancel{4}\frac{1}{\cancel{2}\frac{5}{3}}\ln\frac{x+\frac{2}{3}-\frac{5}{3}}{x+\frac{2}{3}+\frac{5}{3}}+c=\frac{6}{5}\ln\frac{3x+2-5}{3x+2+5}+c$$

Ejemplo 3.79. Integrales completando el trinomio cuadrado perfecto

Resuelva la integral:

$$\int \frac{3x-5}{\sqrt{4x^2+9}}dx$$

Solución: Las siguientes integrales se deben separar en dos, como en dos casos que vimos antes:

$$\int \frac{3x-5}{\sqrt{4x^2+9}}\,dx=\int \frac{3x}{\sqrt{4x^2+9}}\,dx-\int \frac{5}{\sqrt{4x^2+9}}\,dx$$

La primera integral es un simple cambio de variable, o de función:

$$\int \frac{3x}{\sqrt{4x^2+9}}\,dx \quad \text{si } h(x)=4x^2+\ 9 \quad dh=8x\,dx \quad \therefore \quad \frac{3}{8}\int \frac{8x\,dx}{\sqrt{h(x)}} = \frac{3}{8}\int \frac{dh}{\sqrt{h(x)}} = \frac{3}{8}\int [h(x)]^{-1/2}dh$$

$$= \frac{3}{8}\frac{[h(x)]^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{3}{4}\left[4x^2+\ 9\right]^{1/2} + c = \frac{3}{4}\sqrt{4x^2+\ 9} + \ c$$

La segunda integral $\int \frac{5}{\sqrt{4x^2+9}}\,dx$ se resuelve con la segunda fórmula vista en este tema, sólo hay que procurar encontrar el diferencial adecuado y completarlo en la integral:

$$u(x)=2x;\ du=2dx\ y\ a=3$$

$$5\int \frac{1}{\sqrt{4x^2+\ 9}}dx = 5\frac{1}{2}\int \frac{2dx}{\sqrt{(2x)^2+\ 9}} = \frac{5}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+3^2}} = \frac{5}{2}\ \ln\left(2x+\sqrt{4x^2+\ 9}\right)+c$$

Unimos ambas soluciones:

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+\ 9}}dx = \frac{3}{4}\sqrt{4x^2+\ 9} - \frac{5}{2}\ \ln\left(2x+\sqrt{4x^2+9}\right)+c$$

Ejemplo 3.80. Integrales completando el trinomio cuadrado perfecto

Resuelva la integral:

$$\int \frac{2x-9}{3x^2+4x-7}\,dx$$

Solución: Usamos el denominador completando el TCP, como lo vimos antes

$$3\left[x^2+\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}\right] = 3\left[x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}-\frac{7}{3}\right] = 3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{25}{9}\right]$$

Entonces hacemos un cambio de variable, siendo:

$$u = x+\frac{2}{3} \quad \therefore \quad x = u-\frac{2}{3} \ \text{ y } \ du = dx$$

y realizamos las sustituciones en la integral:

$$\int \frac{2x-3}{3\left[\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{25}{9}\right]}dx = \int \frac{2\left(u-\frac{2}{3}\right)-9}{3\left[u^2-\frac{25}{9}\right]}du = \int \frac{2u-\frac{4}{3}-9}{3\left[u^2-\frac{25}{9}\right]}du = \int \frac{2u-\frac{31}{3}}{3\left[u^2-\frac{25}{9}\right]}du = \int \frac{\frac{6u-31}{3}}{3\left[u^2-\frac{25}{9}\right]}du$$

$$\int \frac{6u-31}{9\left[u^2-\frac{25}{9}\right]}du = \frac{1}{9}\int \frac{6u-31}{u^2-\frac{25}{9}}du$$

La última integral puede realizarse como la anterior, separando en dos integrales:

$$\frac{1}{9}\int \frac{6u-31}{u^2-\frac{25}{9}}du = \frac{1}{9}\int \frac{6u}{u^2-\frac{25}{9}}du - \frac{1}{9}\int \frac{31}{u^2-\frac{25}{9}}du$$

Resolvemos la primera integral:

$$\frac{1}{9}\int \frac{6u}{u^2-\frac{25}{9}}du$$

Realizamos un cambio de variable o función:

$$g(x)=u^2-\frac{25}{9} \ \therefore \ dg=2udu$$

$$\frac{1}{9}\int \frac{3\cdot 2udu}{u^2-\frac{25}{9}}=\frac{3}{9}\int \frac{2udu}{u^2-\frac{25}{9}}=\frac{1}{3}\int \frac{dg}{[g(x)]}=\frac{1}{3}\ln[g(x)]+c=\frac{1}{3}\ln\left(u^2-\frac{25}{9}\right)+c=\frac{1}{3}\ln\left(\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{25}{9}\right)+c$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left(x^2+\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}\right)+c$$

Resolvemos la segunda integral al aplicar directamente la fórmula correspondiente

$$\frac{1}{9}\int \frac{31}{u^2-\frac{25}{9}}du=\frac{31}{9}\int \frac{du}{u^2-\frac{25}{9}}=\frac{93}{90}\ln\frac{3x-3}{3x+7}+c=\frac{31}{30}\ln\frac{3x-3}{3x+7}+c$$

Unimos las dos respuestas parciales para resolver la integral original:

$$\int \frac{2x-3}{3x^2+4x-7}dx=\frac{1}{3}\ln\left(x^2+\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}\right)-\frac{31}{30}\ln\frac{3x-3}{3x+7}+c$$

Ejemplo 3.81. Integrales completando el TCP

Resuelva la integral:

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$$

Solución:

$$\int \frac{dx}{x^2-2x+5}=\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)+4}=\int \frac{dx}{(x-1)^2+2^2}$$

Aplicando la parte (2) del teorema 3.6:

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^2+x+1}=\left(\frac{1}{2}\right)\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)+c$$

Ejemplo 3.82. Integrales completando el TCP

Resuelva la integral:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1}$$

Solución:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1}=\int \frac{dx}{x^2+x\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\int \frac{dx}{\left[x^2+x+\frac{1}{4}\right]+\frac{3}{4}}=\int \frac{dx}{\left[x+\frac{1}{2}\right]^2+\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2}$$

Aplicando la parte (2) del teorema 3.6:

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) \tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + c$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}\,(2x+1)}{3} + c$$

Ejercicios 3.9. **Integrales con fórmula, completando el TCP**

Realice las integrales siguientes:

Función	**Respuesta**
1. $\int \frac{5dx}{x^2 + 4x + 3}$	$5\left[\frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(3+x)\right]$
2. $\int \frac{7dx}{2x - x^2 - 10}$	$-\frac{3}{7}\arctan\left[\frac{1}{3}(-1+x)\right] + c$
3. $\int \frac{10dx}{x^2 - 8x + 25}$	$\frac{10}{3}\arctan\left[\frac{1}{3}(-4+x)\right] + c$
4. $\int \frac{-4dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}$	$4 \operatorname{arcsen}(3 - 2x) + c$
5. $\int \frac{6dv}{v^2 - 6v + 5}$	$6\left[-\frac{1}{4}\ln(1-x) + \frac{1}{4}\ln(5-x)\right] + c$
6. $\int \frac{-dx}{2x^2 - 2x + 1}$	$\arctan(1 - 2x) + c$
7. $\int \frac{3(1+2x)dx}{1+x^2}$	$3\arctan(x) + 3\ln(1+x^2) + c$
8. $\int \frac{-2(2x+3)dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$-2\left[2\sqrt{x^2-1} + 3\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right] + c$
9. $\int \frac{-2(x+1)dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$-2\left[-\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arcsen}(x)\right] + c$
10. $\int \frac{5(3x-2)dx}{x^2 + 9}$	$5\left[-\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{3}{2}\ln(9+x^2)\right] + c$
11. $\int \frac{9(3r-1)dr}{\sqrt{9-r^2}}$	$9\left[-3\sqrt{9-x^2} - \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3}\right)\right] + c$
12. $\int \frac{7(x+5)dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$	$7\left[\sqrt{4+x^2} + 5 \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)\right] + c$

3.3. Técnicas de integración

El cálculo diferencial nos ha proporcionado una regla general para obtener la derivada y el diferencial; sin embargo, no da una regla general que pueda aplicarse en la práctica para la operación inversa de la integración. Cada caso necesita un trato especial, y se llega a la integral de una expresión diferencial dada por medio de lo que sabemos acerca de los resultados de la diferenciación. Así, cada método de integración es un procedimiento de ensayos esencialmente. Para facilitar el trabajo, existen unas tablas llamadas *tablas de integrales inmediatas*. Para efectuar una integración cualquiera comparamos la expresión diferencial dada con las tablas. Si la expresión está registrada ahí, entonces la integral se conoce, pero si no, buscaremos por varios métodos la posibilidad de reducirla a una de las formas conocidas. Como muchos de los métodos se sirven de artificios que sólo la práctica puede sugerir, una gran parte de nuestro texto se centrará en la explicación de métodos para integrar las funciones que se encuentran frecuentemente en la resolución de problemas prácticos.

3.3.1. Integración por partes

La fórmula de integración por partes es una técnica de enorme relevancia, porque en todas las fórmulas anteriores es indispensable que el diferencial de la función esté en el integrando, pero en ésta se integra una función acompañada del diferencial de otra, como se muestra a continuación:

Sean $u = u(x)$, $v = v(x)$ dos funciones variables en un intervalo $[a, b]$ o en todo R

Es decir: $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$.

De donde: $u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot dv$

Si integramos los dos miembros de la igualdad:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

La expresión obtenida se denomina *fórmula de integración por partes* y se utiliza para transformar una integral en otra. Esta transformación será útil como método de integración cuando la integral del segundo miembro sea inmediata o, al menos, más sencilla que la primera integral.

Con este método podemos resolver, entre otras, integrales de las formas:

a) $\int x^n \operatorname{sen} x\, dx, \quad \int x^n \cos x\, dx$

b) $\int e^x \cos x\, dx, \quad \int e^x \operatorname{sen} x\, dx, \quad \int x^n e^x\, dx$

c) $\int x^n \ln x\, dx$

d) $\int \operatorname{arc\,tan} x\, dx, \quad \int \operatorname{arc\,cot} x\, dx$

e) $\int \operatorname{arcsen} x\, dx, \quad \int \operatorname{arccos} x\, dx$

f) $\int \operatorname{sen}^x dx, \quad \int \cos^n x\, dx$

Normalmente se recomienda considerar que u corresponde a las funciones logarítmicas arco seno, arco coseno, arco tangente, así como a las polinómicas, y que dv corresponde a las funciones trigonométricas y exponenciales.

Caso I

En aquellas integrales en las que al aplicar la fórmula de integración por partes resulte

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

la integral del segundo miembro $\int u \cdot du$ es inmediata.

Ejemplo 3.83. Integración por partes

Realice integración por partes:

$$\int \pi x \sec \pi x \tan \pi x\, dx$$

Solución:

$$u = \pi x \qquad dv = \sec \pi x \ \tan \pi x \, dx$$

$$du = \pi dx \qquad v = \frac{\sec \pi x}{\pi}$$

$$\int \pi x \sec \pi x \tan \pi x \, dx = x \cdot \sec \ \pi x \frac{1}{\pi} \int \sec \ \pi x (\pi \, dx)$$
$$= x \cdot \sec \ \pi x - \ln | \sec \ \pi x + \tan \ \pi x | + c$$

Ejemplo 3.84. Integración por partes

Realice integración por partes:

$$\int \arctan \theta \ d\theta$$

Solución:

$$u = \arctan \theta \qquad dv = d\theta$$

$$du = \frac{d\theta}{1+\theta^2} \qquad v = \theta$$

$$\int \arctan \theta \ d\theta = \theta \arctan \theta - \int \frac{\theta d\theta}{1+\theta^2}$$
$$= \theta \arctan \theta - \frac{1}{2} \ln \left(1+\theta^2\right) + C$$

Ejemplo 3.85. Integración por partes

Realice integración por partes:

$$\int x e^x dx$$

Solución:

$$v = x \qquad dv = e^x \, dx$$

$$du = dx \qquad v = e^x$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

Ejemplo 3.86. Integración por partes

Realice integración por partes:

$$\int \theta \cos \theta \ d\theta$$

Solución:

$$u = \theta \qquad dv = \cos \theta \ d\theta$$

$$du = d\theta \qquad v = \operatorname{sen} \ \theta$$

$$\int \theta \ \cos \theta \ \ d\theta = \theta \ \operatorname{sen} \ \theta - \int \operatorname{sen} \theta \ d\theta = \theta \ \operatorname{sen} \ \theta + \cos \theta + c$$

Ejemplo 3.87. Integración por partes

Realice integración por partes:

$$\int t\sqrt[5]{2t+3}\ dt$$

Solución:

$$u = t \qquad dv = (2t+3)^{1/3}\,dt$$

$$du = dt \qquad v = \frac{3}{8}(2t+3)^{4/3}$$

$$\begin{aligned}\int t\sqrt[5]{2t+3}\ dt &= \frac{3}{8}t\,(2t+3)^{4/3} - \int \frac{3}{8}(2t+3)^{4/3}dt\\ &= \frac{3}{8}t(2t+3)^{4/3} - \frac{3}{16}(2t+3)^{7/3}\frac{3}{7} + c\\ &= \frac{3}{8}t(2t+3)^{4/3} - \frac{9}{112}(2t+3)^{7/3} + c\end{aligned}$$

Ejemplo 3.88. Integración por partes

Realice integración por partes:

$$\int x^2 \ln\ x\ dx$$

Solución:

$$u = \ln x \qquad dv = x^2\,dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \qquad v = \frac{x^3}{3}$$

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x\,dx &= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx\\ &= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C\end{aligned}$$

Ejemplo 3.89. Integración por partes

Realice integración por partes:

$$\int x\ \arctan\ x\ dx$$

Solución:

$$u = \arctan x \qquad dv = x\,dx$$

$$du = \frac{dx}{1+x^2} \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{aligned}\int x \arctan x\ dx &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{1+x^2}\\ &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{1+x^2}\end{aligned}$$

Al resolver:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{1-x^2}$$

Recuerde que:

$$\frac{x^2}{1+x^2}=1-\frac{1}{x^2+1} \Rightarrow = -\frac{1}{2}\int\left[1-\frac{1}{x^2+1}\right]dx = -\frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$\int x\cdot \arctan x\, dx = \frac{x^2}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + c$$

Ejemplo 3.90. Integración por partes

Realice integración por partes:

$$\int \frac{x^2dx}{(x\ \cos\ x - \text{sen}\ x)^2}$$

Solución: Multiplicamos el numerador y el denominador por sen x:

$$\int \frac{x^2dx}{(x\cos\ x-\text{sen}\ x)^2} = \int \frac{x}{\text{sen}\ x}\cdot\frac{x\ \text{sen}\,x\ dx}{(x\cos x - \text{sen}\ x)^2}$$

$$u = \frac{x}{\text{sen}\ x} \qquad du = \frac{\text{sen}\ x - x\ \cos\ x}{\text{sen}^2 x}dx$$

$$dv = \frac{x\ \text{sen}\ x}{(x\cos x - \text{sen}\ x)^2}dx \qquad v = \frac{1}{x\cos x - \text{sen}\ x}$$

Se resolvió

$$\int \frac{x\ \text{sen}\,x}{(x\ \cos\ x - \text{sen}\ x)^2}dx,$$

Si $\quad t = x\cos x - \text{sen}\ x \quad dt = -x\ \text{sen}\ x\ dx.$

entonces

$$\int -\frac{dt}{t^2} = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{x\cos\ x - \text{sen}\ x} = v$$

y finalmente obtenemos

$$\int \frac{x^2dx}{(x\cos x - \text{sen}\ x)^2} = \frac{1}{x\cos x - \text{sen}\ x}\ \frac{x}{\text{sen}\ x} - \int \frac{1}{x\cos x - \text{sen}\ x}\ \frac{\text{sen}\ x - x\cos x}{\text{sen}^2 x}dx$$

$$= \frac{-x}{\text{sen}\ x(x\cos x - \text{sen}\ x)} + \int \frac{dx}{x\cos x - \text{sen}\ x}\ \frac{\text{sen}\ x - x\cos x}{\text{sen}^2 x}dx$$

$$= \frac{-x}{\text{sen}\ x(x\cos x - \text{sen}\ x)} - \int \frac{dx}{\text{sen}^2 x}$$

$$= \frac{-x}{\text{sen}\ x(x\cos x - \text{sen}\ x)} - \int \csc^2 x\, dx$$

$$= \frac{-x}{\text{sen}\ x(x\cos x - \text{sen}\ x)} + \text{ctg}\ x + c$$

Ejemplo 3.91. Integración por partes

Realice integración por partes:

$$\int e^x \frac{x^2+1}{(x+1)^2}dx$$

Solución: Sabemos que $(x+1)^2 - 2x = x^2+1$.

Completamos el TCP en el numerador:

$$\int e^x \frac{x^2+1}{(x+1)^2}dx = \int e^x \frac{(x+1)^2-2x}{(x+1)^2}dx$$

Multiplicamos por e^x:

$$= \int \frac{e^x(x+1)^2 - e^x(2x)}{(x+1)^2}dx$$

Separamos las integrales:

$$= \int \frac{e^x(x+1)^2}{(x+1)^2}dx - \int \frac{e^x(2x)}{(x+1)^2}dx$$

La nueva integral:

$$= \int e^x dx - 2\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$$

Se resuelve por partes:

$$= e^x - 2\int xe^x(x+1)^{-2}dx$$

$$u = xe^x \qquad dv = (x+1)^{-2}\,dx$$

$$du = (xe^x + e^x)\,dx \qquad v = -\frac{1}{(x+1)}$$

$$\begin{aligned}
\int e^x \frac{x^2+1}{(x+1)^2}dx &= e^x - 2\int xe^x(x+1)^{-2}dx \\
&= e^x - 2\left[-\frac{1}{x+1}xe^x + \int \frac{1}{x+1}(xe^x+e^x)dx\right] \\
&= e^x - 2\left[-\frac{1}{x+1}xe^x + \int \frac{1}{x+1}e^x(x+1)dx\right] \\
&= e^x - 2\left[-\frac{xe^x}{x+1} + \int e^x dx\right] \\
&= e^x + \frac{2xe^x}{x+1} - 2e^x + c \\
&= e^x\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + c
\end{aligned}$$

Caso II

En este caso, al aplicar la fórmula de integración por partes, la integral del segundo miembro $\int v \cdot du$ aún no es inmediata, por lo que es necesario aplicar nuevamente el método a dicha integral.

Ejemplo 3.92. Integración por partes

Realice integración por partes:

$$\int x^2 e^{-x} dx$$

Solución:

$$u = x^2 \qquad dv = e^{-x}\, dx$$
$$du = 2x\, dx \qquad v = -\, e^{-x}$$

$$\int x^2 e^{-x} dx = -e^{-x} x^2 + \int e^{-x} 2x dx$$
$$= -x^2 e^{-x} + 2\int e^{-x} x dx$$

Observamos que la integral $\int e^{-x} x dx$ no tiene solución inmediata; sin embargo, es más fácil de resolver que la inicial. Esta nueva integral la resolvemos utilizando de nuevo la técnica de integración por partes.

$$u = x \qquad dv = e^{-x}\, dx$$
$$du = dx \qquad v = e^{-x}$$

$$= 2\left[-e^{-x} x + \int e^{-x} dx\right] = -2xe^{-x} - 2e^{-x} + c$$

Finalmente se obtiene:

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C = e^{-x}(-x^2 - 2x - 2) + C$$

Ejemplo 3.93. **Integración por partes**

Realice integración por partes

$$\int \ln^2 \theta \;\, d\theta$$

Solución:

$$u = \ln^2 \theta \qquad dv = d\theta$$
$$du = 2 \ln \theta \frac{d\theta}{\theta} \qquad v = \theta$$

$$\Rightarrow \int \ln^2 \theta \;\, d\theta = \theta \ln^2 \theta - \int \theta 2 \ln \theta \frac{d\theta}{\theta}$$
$$= \theta \ln^2 \theta - 2\int \ln \theta \;\, d\theta$$

Al resolver la nueva integral $2\int \ln\theta\, d\theta$, tenemos:

$$u = \ln \theta \qquad dv = d\theta$$
$$du = \frac{d\theta}{\theta} \qquad v = \theta$$

$$\begin{aligned}\int \ln^2\theta \; d\theta &= \theta \ln^2\theta - 2\int \ln\theta\, d\theta \\ &= \theta \ln^2\theta - 2\left[\theta \ln\theta - \int \theta \frac{d\theta}{\theta}\right] \\ &= \theta \ln^2\theta - 2\theta \ln\theta + 2\int d\theta \\ &= \theta \ln^2\theta - 2\theta \ln\theta + 2\theta + C\end{aligned}$$

Ejemplo 3.94. **Integración por partes**

Realice integración por partes:

$$\int x^2 e^{3x} dx$$

Solución:

$$u = x^2 \qquad dv = e^{3x} dx$$

$$du = 2x \qquad v = \frac{1}{3}e^{3x}$$

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{3x} dx &= \frac{1}{3}e^{\theta x}x^2 - \int \frac{1}{3}e^{3x}2x\, dx \\ &= \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}2x\, dx\end{aligned}$$

Al integrar $\int e^{3x}2x\, dx$ por partes, tenemos:

$$u = 2x \qquad dv = e^{3x}\, dx$$

$$du = 2dx \qquad v = \frac{1}{3}e^{3x}$$

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{3x} dx &= \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}e^{3x}2x - \int \frac{1}{3}e^{3x}2\, dx\right] \\ &= \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{1}{9}2xe^{3x} + \frac{1}{9}\int e^{3x}2\; dx \\ &= \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + c\end{aligned}$$

Ejemplo 3.95. **Integración por partes**

Realice integración por partes:

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, dx$$

Solución:

$$u = x^2 \qquad dv = \operatorname{sen} x\, dx$$

$$du = 2x\, dx \qquad v = -\cos x$$

$$\int x^2 \text{ sen } x\, dx = -x^2 \cos x - \int -\cos x\, 2x\, dx$$
$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx$$

Al integrar por partes $\int x \cos x\, dx$, tenemos

$$u = x \qquad dv = \cos x\, dx$$
$$du = dx \qquad v = \text{sen } x$$

$$\int x \cos x\, dx = x \text{ sen } x - \int \text{sen } x\, dx$$
$$= -x^2 \cos x + 2x \text{ sen } x + 2 \cos x + c$$

Ejemplo 3.96. Integración por partes

Realice integración por partes:

$$\int x^3 e^{-x/3} dx$$

Solución:

$$u = x^3 \qquad du = 3x^2\, dx$$
$$dv = e^{-x/3} dx \qquad v = -3e^{-x/3}$$

$$\int x^3 e^{-x/3} dx = -3x^3 e^{-x/3} + 9 \int e^{-x/3} x^2 dx$$
$$= -3e^{-x/3} x^3 + 9 \int e^{-x/3} x^2 dx$$

Al integrar por partes $\int e^{-x/5} x^2 dx$, tenemos:

$$u = x^2 \qquad du = 2x\, dx$$
$$dv = e^{-x/3} dx \qquad v = -3e^{-x/3}$$

$$\int x^3 e^{-x/3} dx = -e^{-x/3} x^3 + 9\left(-3e^{-x/3} x^2 + 6\int e^{-x/3} x\, dx\right)$$
$$= -3e^{-x/3} x^3 - 27e^{-x/3} x^2 + 54 \int e^{-x/3} x\, dx$$

Al integrar $\int e^{-x/3} x\, dx$ nuevamente por partes, tenemos:

$$u = x \qquad du = dx$$
$$dv = e^{-x/3} dx \qquad v = -3e^{-x/3}$$

$$\int x^3e^{-x/3}dx = -3e^{-x/3}x^3 - 27e^{-x/3}x^2 + 54\left(-3xe^{-x/3} + 3\int e^{-x/3}dx\right)$$
$$= -3e^{-x/3}x^3 - 27x^{-x/3}x^2 - 162xe^{-x/3} + 162\left(-3e^{-x/3}\right) + C$$
$$= -3e^{-x/3}x^3 - 27e^{-x/3}x^2 - 162e^{-x/3}x - 486e^{-x/3} + C$$

Caso III

En este caso, la integral del segundo miembro $\int v\,du$ no es inmediata al aplicar la fórmula de integración, pero es la misma que se está buscando inicialmente, por lo que las agrupamos en el primer miembro para despejar la integral a resolver inicialmente.

Ejemplo 3.97. **Integración por partes**

Realice integración por partes:

$$\int x\cos^2 x\,\text{sen}\,x\,dx$$

Solución:

$$u = x\cos^2 x \qquad dv = \text{sen}\,x\,dx$$
$$du = (\cos^2 x - 2x\cos x\,\text{sen}\,x)dx \qquad v = -\cos x$$

$$\int x\cos^2 x\,\text{sen}\,x\,dx = -x\cos x\cos^2 x - \int -\cos x(\cos^2 x - 2x\cos x\,\text{sen}\,x)dx$$
$$= -x\cos^3 x - \left(-\int \cos^3 x\,dx + \int \cos^2 x\,2x\,\text{sen}\,x\,dx\right)$$
$$= -x\cos^3 x - \left(-\int \cos^2 x\cos x\,dx + 2\int x\cos^2 x\,\text{sen}\,x\,dx\right)$$
$$= -x\cos^3 x - \left(-\int (1-\text{sen}^2 x)\cos x\,dx + 2\int x\cos^2 x\,\text{sen}\,x\,dx\right)$$
$$= -x\cos^3 x - \left(-\int \cos x\,dx + \int \text{sen}^2 x\cos x\,dx + 2\int x\cos^2 x\,\text{sen}\,x\,dx\right)$$
$$= -x\cos^3 x + \int \cos x\,dx - \int \text{sen}^2 x\cos x\,dx - 2\int x\cos^2 x\,\text{sen}\,x\,dx$$
$$= -x\cos^3 x + \text{sen}\,x - \frac{\text{sen}^3 x}{3}x - 2\int x\cos^2 x\,\text{sen}\,x\,dx$$

La última integral es la que inicialmente queremos resolver, por tanto, para facilitar la solución podemos proceder de la manera siguiente:

$$\int x\cos^2 x\,\text{sen}\,x\,dx = -x\cos^3 x + \text{sen}\,x - \frac{\text{sen}^3 x}{3} - 2\int x\cos^2 x\,\text{sen}\,x\,dx + c$$

Despejamos: $3\int x\cos^2 x\,\text{sen}\,x\,dx = -x\cos^3 x + \text{sen}\,x - \dfrac{\text{sen}^3 x}{3} + c$

Finalmente:

$$\int x\cos^2 x\,\text{sen}\,x\,dx = -\frac{x\cos^3 x}{3} + \frac{\text{sen}\,x}{3} - \frac{\text{sen}^3 x}{9} + c$$

Ejemplo 3.98. Integración por partes

Realice integración por partes:

$$\int e^x \cos\ x\ dx$$

Solución:

$$u = \cos x \qquad dv = e^x\,dx$$
$$du = -\text{sen}\ x\ dx \qquad v = e^x$$

$$\int e^x \cos x\ dx = e^x \cos x + \int e^x \text{ sen } x\ dx$$
$$= e^x \cos x + \int e^x \text{ sen } x\ dx$$

Al resolver por partes la nueva integral, tenemos:

$$u = \text{sen}\ x \qquad dv = e^x\,dx$$
$$du = \cos x\ dx \qquad v = e^x$$

$$\int e^x \cos x\ dx = e^x \cos x + e^x \text{ sen } x - \int e^x \cos x\ dx$$
$$= e^x \cos x + e^x \text{ sen } x - \int e^x \cos x\ dx$$

Es posible observar que de nuevo aparece la misma integral del lado derecho, por lo que:

$$\int e^x \cos\ x\ dx = e^x \cos x + e^x \text{ sen } x - \int e^x \cos\ x\ dx$$
$$2\int e^x \cos x\ dx = e^x \cos x + e^x \text{sen } x + C$$

Finalmente

$$\int e^x \cos\ x\ dx = \frac{e^x \cos x + e^x \text{ sen } x}{2} + C$$

Ejemplo 3.99. Integración por partes

Realice integración por partes:

$$\int 3^\theta \cos\ \theta\ d\theta$$

Solución:

$$u = \cos\theta \qquad dv = 3^\theta\,d\theta$$
$$du = -\text{ sen } \theta\,d\theta \qquad v = \frac{3^\theta}{\ln 3}$$

$$\int 3^\theta \cos\theta\ d\theta = \frac{3^\theta}{\ln 3}\cos\theta - \int \frac{3^\theta}{\ln 3}(-\text{sen } \theta)\,d\theta$$
$$= \frac{3^\theta \cos\theta}{\ln 3} + \int \frac{3^\theta}{\ln 3}\text{sen } \theta\ d\theta$$
$$= \frac{3^\theta \cos\theta}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 3}\int 3^\theta \text{sen } \theta\ d\theta$$

$$u = \text{sen } \theta \qquad dv = 3^\theta d\theta$$

$$du = \cos \theta \, d\theta \qquad v = \frac{3^\theta}{\ln 3}$$

$$= \frac{3^\theta \cos \theta}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 3}\left(\frac{3^\theta}{\ln 3} \text{ sen } \theta - \int \frac{3^\theta}{\ln 3} \cos \theta \, d\theta\right)$$

$$= \frac{3^\theta \cos \theta}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 3}\left(\frac{3^\theta}{\ln 3} \text{ sen } \theta - \frac{1}{\ln 3} \int 3^\theta \cos \theta \, d\theta\right)$$

$$= \frac{3^\theta \cos \theta}{\ln 3} + \frac{3^\theta \text{ sen } \theta}{\ln^2 3} - \frac{1}{\ln^2 3} \int 3^\theta \cos \theta \, d\theta$$

Si $@ = \int 3^\theta \cos \theta \, d\theta$

$$@ = \frac{3^\theta \cos \theta}{\ln 3} + \frac{3^\theta \text{sen } \theta}{\ln^2 3} - \frac{1}{\ln^2 3} @ + c$$

$$@ + \frac{1}{\ln^2 3} @ = \frac{3^\theta \cos\theta}{\ln 3} + \frac{3^\theta \text{ sen } \theta}{\ln^2 3} + C$$

Despejando @:

$$@ = \frac{\ln 3(3^\theta \cos \theta) + 3^\theta \text{ sen } \theta}{\ln^2 3 + 1} + C$$

$$\int 3^\theta \cos \theta \, d\theta = \frac{3^\theta \cos \theta \ln 3 + 3^\theta \text{sen } \theta}{\ln^2 3 + 1} + C$$

Ejercicios 3.10. Integración por partes

Verifique los resultados propuestos mediante integración por partes:

Función	**Respuesta**
1. $\int x \text{ sen } x \, dx$	$-x \cos x + \text{sen } x + c$
2. $\int x \ln x \, dx$	$\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + c$
3. $\int x^3 e^x dx$	$(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + c$
4. $\int x^5 e^x \, dx$	$(x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)e^x + c$
5. $\int x^2 2^{x \, dx}$	$\frac{2^x\left[2 + x^2 \ln(2)^2 - x\ln(4)\right]}{\ln(2)^3} + c$
6. $\int \text{sen}^{-1} ax \, dx$	$x \,\text{sen}^{-1}(ax) - \frac{1}{a}\sqrt{1-(ax)^2} + c$
7. $\int e^{2x} \cos 3x \, dx$	$e^{2x}\left(\frac{2}{13} \cos 3x + \frac{3}{13} \text{ sen } 3x + c\right)$
8. $\int e^{ax} \text{sen } bx \, dx$	$\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) e^{ax} \text{sen } bx - \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right) e^{ax} \cos bx + c$

Función	Respuesta
9. $\int x\tan^{-1}x\,dx$	$\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+c$
10. $\int \theta\cos\theta\,d\theta$	$\theta\,\text{sen}\,\theta+\cos\theta+c$
11. $\int z\ln z\,dz$	$\frac{z^2}{2}\ln z-\frac{1}{4}z^2+c$
12. $\int \ln x\,dx$	$x\ln x-x+c$
13. $\int \theta^2\sqrt{1+2\theta}\,d\theta$	$\frac{1}{3}\theta^2(1+2\theta)^{3/2}-\frac{2}{15}\theta(1+2\theta)^{5/2}+\frac{2}{105}(1+2\theta)^{2/7}+c$
14. $\int \frac{\ln y}{y^4}dy$	$-\frac{\ln y}{3y^3}-\frac{1}{9y^3}+c$
15. $\int z^3 e^{z^2}\,dz$	$\frac{1}{2}z^2e^{z^2}-\frac{1}{2}e^{z^2}+c$
16. $\int \sec^3\theta\,d\theta$	$\frac{\sec\theta\tan\theta-\ln(\sec\theta+\tan\theta)}{2}+c$
17. $\int e^{\pi x}\,\text{sen}\,\theta x\,dx$	$\frac{-\frac{1}{\theta}e^{\pi x}\cos\theta x+\frac{\pi}{\theta^2}e^{\pi x}\,\text{sen}\,\theta x}{1+\frac{\pi^2}{\theta^2}}+c$
18. $\int x\,\text{arc}\cos x\,dx$	$\frac{x^2}{2}\text{arc}\cos x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{4}\text{arc sen}\,x+c$

3.3.2. Integración de potencias de funciones trigonométricas

Ahora se considerará la integración de diferenciales trigonométricas que se presentan con frecuencia y pueden integrarse fácilmente al transformarse en integrales inmediatas mediante reducciones trigonométricas sencillas.

Es importante recordar las siguientes propiedades trigonométricas

a) $\text{sen}^2 x+\cos^2 x=1$

b) $\text{sen}^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

c) $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

Integrales de la forma $\int \text{sen}^m(x)\,dx$ o $\int \cos^m(x)\,dx$

Es necesario clasificar las integrales de productos de potencias de senos y cosenos según el tipo de exponente para saber cuál sustitución es conveniente utilizar. Las diferentes situaciones se muestran a continuación:

I. Si m es impar: $\text{sen}^m x = \text{sen}^{m-1} x \text{ sen } x$.

Dado que $m - 1$ es par, el primer término del segundo miembro será una potencia de $\text{sen}^2 x$ y podrá expresarse en potencias de $\cos^2 x$, sustituyendo $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ (despeje de [a]).

II. Si m es impar: $\cos^m x = \cos^{m-1} x \cos x$.

Dado que $m - 1$ es par, el primer término del segundo miembro será una potencia de $\cos^2 x$ y se podrá expresar en potencias de $\text{sen}^2 x$, sustituyendo $\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$ (despeje de [a]).

Ejemplo 3.100. Integrales de potencias de seno y coseno

Realice la integral siguiente:

$$\int \text{sen}^3 \pi x \; dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}\int \text{sen}^3 \pi x \; dx &= \int \text{sen}^2 \pi x \; \text{sen} \; \pi x \; dx \\ &= \int \text{sen} \; \pi x \left(1 - \cos^2 \pi x\right) dx \\ &= \int \text{sen} \; \pi x \; dx - \int \cos^2 \pi x \; \text{sen} \; \pi x \; dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \cos \pi x + \frac{1}{3\pi} \cos^3 \pi x + c\end{aligned}$$

Ejemplo 3.101. Integrales de potencias de seno y coseno

Realice la integral siguiente:

$$\int \cos^5 \theta \; d\theta$$

Solución:

$$\begin{aligned}\int \cos^5 \theta \; d\theta &= \int \cos^4 \theta \; \cos \theta \; d\theta = \int (\cos^2 \theta)^2 \cos \theta \; d\theta \\ &= \int \left(1 - \text{sen}^2 \theta\right)^2 \cos \theta \; d\theta = \int \left(1 - 2 \; \text{sen}^2 \theta + \text{sen}^4 \theta\right) \cos \theta \; d\theta \\ &= \int \cos \theta \; d\theta - 2\int \text{sen}^2 \theta \; \cos \theta \; d\theta + \int \text{sen}^4 \theta \; \cos \theta \; d\theta \\ &= \text{sen} \; \theta - \frac{2}{3} \text{sen}^3 \theta + \frac{1}{5} \text{sen}^5 \theta + c\end{aligned}$$

Ejemplo 3.102. Integrales de potencias de seno y coseno

Realice la integral siguiente:

$$\int \cos^7 \pi x \; dx$$

Solución:

$$\int \cos^7 \pi x \; dx = \int \cos^6 \pi x \; \cos \pi x \, dx = \int \left(\cos^2 \pi x\right)^3 \cos \pi x \; dx$$

$$= \int \left(1 - \text{sen}^2\ \pi x\right)^3 \cos \pi x\ \ dx$$

$$= \int \left[1 - 3\ \text{sen}^2\ \pi x + 3\ \text{sen}^4\ \pi x - \text{sen}^6\ \pi x\right] \cos \pi x\ \ dx$$

$$= \int \cos \pi x\ \ dx - 3 \int \text{sen}^2\ \pi x \cdot \cos \pi x\ \ dx + 3 \int \text{sen}^4 \pi x \cos \pi x\ \ dx - \int \text{sen}^6 \pi x \cos \pi x\ dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\ \text{sen}\ \pi x - \text{sen}^3\ \pi x + \frac{3}{5}\ \text{sen}^5\ \pi x - \frac{1}{7\pi}\ \text{sen}^7\ \pi x + c$$

Ejercicios 3.11. Integrales de potencias de seno y coseno

Verifique los resultados propuestos, realizando las integrales siguientes:

Función	**Respuesta**
1. $\int \cos^3 3\theta\ \text{sen}^{-2}\ 3\theta\ d\theta$	$-\frac{1}{3} \csc\ 3\theta - \frac{1}{3} \text{sen}\ 3\theta + c$
2. $\int \text{sen}^{1/2} 2z \cos^3\ 2z\ \ dz$	$\frac{1}{3} \text{sen}^{3/2}\ 2z - \frac{1}{7}\ \text{sen}^{7/2}\ 2z + c$
3. $\int \text{sen}^3\ \frac{x}{2}\ \cos^5 \frac{x}{2}\ dx$	$-\frac{1}{3} \cos\ \ {}^6\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\ \cos^8\ \frac{x}{2} + c$
4. $\int \text{sen}^5\ x \cos^5 x\ \ dx$	$\frac{1}{6}\ \text{sen}^6 x - \frac{1}{4}\ \text{sen}^8 x + \frac{1}{10}\ \text{sen}^{10} + c$
5. $\int \cos^3 x\ \ \text{sen}^5 x\ \ dx$	$\frac{1}{6}\ \text{sen}^6 x - \frac{1}{8}\ \text{sen}^8 x + c$
6. $\int \text{sen}^3\ \theta x\ \ \cos^{-4} \theta x\ \ dx$	$\left(-\frac{1}{7\theta}\ \text{sen}\ ^2(\theta x) - \frac{2}{35\theta}\right) \cos^5 (\theta x)$
7. $\int \cos^3\ \pi x\ \ \text{sen}^2\ \pi x\ \ dx$	$\frac{1}{15\pi}(-\text{sen}\ \pi x)\left(3 \cos^4 \pi x - \cos \pi x - 2\right)$

Integrales de la forma $\int \text{sen}^n\ (x)\ dx$ o $\int \cos^n\ (x)\ dx$

Si n es un número entero positivo par, esta integración puede realizarse mediante transformaciones sencillas y utilizando las relaciones:

$$\text{sen}^2 (x) = \frac{1}{2}(1 - \cos\ (2x)) \quad \text{y} \quad \cos^2 (x) = \frac{1}{2}(1 + \cos\ (2x))$$

Ejemplo 3.103. Integrales de potencias de seno y coseno

Realice la integral siguiente:

$$\int \text{sen}^4\ 5x\ dx$$

Solución:

$$\int \text{sen}^4\ 5x\ dx = \int \left(\text{sen}^2\ \ 5x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1 - \cos\ 10x}{2}\right)^2 dx$$

$$=\frac{1}{4}\int(1-\cos 10x)^2 dx=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 10x+\cos^2 10x\right)dx$$
$$=\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 10x\,dx+\frac{1}{4}\int\cos^2 10x\,dx$$
$$=\frac{x}{4}-\frac{1}{20}\text{sen }10x+\frac{1}{4}\left(\frac{1+\cos 20x}{2}\right)dx$$
$$=\frac{x}{4}-\frac{1}{20}\text{sen }10x+\frac{1}{8}\int dx+\frac{1}{8}\int\cos 20x\,dx$$
$$=\frac{1}{4}x-\frac{1}{20}\text{sen }10x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{160}\text{sen }20x+c$$

Ejemplo 3.104. Integrales de potencias de seno y coseno

Realice la integral siguiente:

$$\int\cos^2(10\theta)\,d\theta$$

Solución:

$$\int\cos^2(10\theta)d\theta=\int\left(\frac{1+\cos 20\theta}{2}\right)d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int d\theta+\frac{1}{2}\int\cos(20\theta)\,d\theta$$
$$=\frac{\theta}{2}+\frac{1}{40}\text{sen }20\theta+c$$

Ejemplo 3.105. Integrales de potencias de seno y coseno

Realice la integral siguiente:

$$\int\left(\cos^2\frac{z}{\pi}\right)^2 dz$$

Solución:

$$\int\left(\cos^2\frac{z}{\pi}\right)^2 dz=\int\left(\frac{1+\cos\frac{2z}{\pi}}{2}\right)^2 dz$$
$$=\frac{\left(1+\cos\frac{2z}{\pi}\right)^2}{4}dz=\frac{1}{4}\int\left(1+\cos\frac{2z}{\pi}\right)^2 dz$$
$$=\frac{1}{4}\int\left(1+2\cos\frac{2z}{\pi}+\cos^2\frac{2z}{\pi}\right)dz$$
$$=\frac{1}{4}\int dz+\frac{2}{4}\int\cos\frac{2z}{\pi}dz+\frac{1}{4}\int\cos^2\frac{2z}{\pi}dz$$
$$=\frac{1}{4}z+\frac{2}{4}\cdot\frac{\pi}{2}\text{sen}\frac{2z}{\pi}+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1+\cos\frac{4z}{\pi}}{2}\right)dz$$

$$= \frac{z}{4} + \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{2z}{\pi} + \frac{1}{8}\int dz + \frac{1}{8}\int \cos \frac{4z}{\pi}\, dz$$
$$= \frac{z}{4} + \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{2z}{\pi} + \frac{z}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{4z}{\pi} + c$$
$$= \frac{z}{4} + \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{2z}{\pi} + \frac{z}{8} + \frac{\pi}{32} \operatorname{sen} \frac{4z}{\pi} + c$$
$$= \frac{3z}{8} + \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \frac{2z}{\pi} + \frac{\pi}{32} \operatorname{sen} \frac{4z}{\pi} + c$$

Ejemplo 3.106. Integrales de potencias de seno y coseno

Realice la integral siguiente:

$$\int \operatorname{sen}^6 \theta\, d\theta$$

Solución:

$$\int \operatorname{sen}^6 \theta\, d\theta = \int \left(\operatorname{sen}^2 \theta\right)^3 d\theta = \int \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^3 d\theta$$
$$= \int \frac{1 - 3\cos 2\theta + 3\cos^2 2\theta - \cos^3 2\theta}{8}\, d\theta$$
$$= \frac{1}{8}\int d\theta - \frac{3}{8}\int \cos 2\theta\, d\theta + \frac{3}{8}\int \cos^2 2\theta\, d\theta - \frac{1}{8}\int \cos^2 2\theta\, d\theta$$
$$= \frac{\theta}{8} - \frac{3}{16} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{3}{8}\int \left(\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) d\theta - \frac{1}{8}\int \cos^2 2\theta \cdot \cos 2\theta\, d\theta$$
$$= \frac{\theta}{8} - \frac{3}{16} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{3}{16}\int d\theta + \frac{3}{16}\int \cos 4\theta\, d\theta - \frac{1}{8}\int \left(1 - \operatorname{sen}^2 2\theta\right) \cdot \cos 2\theta\, d\theta$$
$$= \frac{\theta}{8} - \frac{3}{16} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{3\theta}{16} + \frac{3}{64} \operatorname{sen} 4\theta - \frac{1}{8}\int \cos 2\theta\, d\theta + \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2\theta \cdot \cos 2\theta$$
$$= \frac{\theta}{8} - \frac{3}{16} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{3\theta}{16} + \frac{3}{64} \operatorname{sen} 4\theta - \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2\theta + c$$
$$= \frac{\theta}{8} + \frac{3\theta}{16} - \frac{3}{16} \operatorname{sen} 2\theta - \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{3}{64} \operatorname{sen} 4\theta + \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2\theta + c$$
$$= \frac{5}{16}\theta - \frac{4}{16} \operatorname{sen} 2\theta + \frac{3}{64} \operatorname{sen} 4\theta + \frac{\operatorname{sen}^3 2\theta}{48} + c$$

Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^n(x) \cdot \cos^m(x)\, dx$

Cuando n o m es un número entero positivo impar, no importará lo que el otro sea. Dicha integración puede practicarse por medio de transformaciones trigonométricas.

Ejemplo 3.107. Integrales de potencias de seno y coseno

Realice la integral siguiente:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^5 x\, dx$$

Solución:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^5 x\, dx = \int \cos^5 x \ \operatorname{sen}^3 x \ dx = \int \cos^5 x \ \operatorname{sen}^2 \operatorname{sen} x \ dx$$

$$= \int \cos^5 x \ (1-\cos^2 x) \ \operatorname{sen} x \ dx$$

$$= \int \cos^5 x \ \operatorname{sen} x \ dx - \int \cos^7 x \ \operatorname{sen} x \ dx$$

$$= -\frac{\cos^6 x}{6} + \frac{\cos^8 x}{8} + c$$

Ejemplo 3.108. **Integrales de potencias de seno y coseno**

Realice la integral siguiente:

$$\int \cos^3 3\theta \operatorname{sen}^{-2} 3\theta \ d\theta$$

Solución:

$$\int \cos^3 3\theta \ \operatorname{sen}^{-2} 3\theta \ d\theta = \int \operatorname{sen}^{-2} 3\theta \ \cos^3 3\theta \ d\theta = \int \operatorname{sen}^{-2} 3\theta \ \cos^2 3\theta \ \cos 3\theta \ d\theta$$

$$= \int \operatorname{sen}^{-2} 3\theta \ (1-\operatorname{sen}^2 3\theta) \ \cos 3\theta \ d\theta$$

$$= \int \operatorname{sen}^{-2} 3\theta \ \cos 3\theta \ d\theta - \int \cos 3\theta \ d\theta$$

$$= -\frac{1}{3} \operatorname{sen}^{-1} 3\theta - \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3\theta$$

$$= -\frac{1}{3} \csc 3\theta - \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3\theta + c$$

Ejemplo 3.109. **Integrales de potencias de seno y coseno**

Realice la integral siguiente:

$$\int \left(\operatorname{sen}^3 2t\right)\sqrt{\cos 2t}\, dt$$

Solución:

$$\int \left(\operatorname{sen}^3 2t\right)\sqrt{\cos 2t} \ dt = \int \operatorname{sen}^3 2t \ \cos^{1/2} 2t \ dt$$

$$= \int \operatorname{sen}^2 2t \ \operatorname{sen} 2t \ \cos^{1/2} 2t \ dt$$

$$= \int \cos^{1/2} 2t \operatorname{sen} 2t \left(1-\cos^2 2t\right) dt$$

$$= \int \cos^{1/2} 2t \ \operatorname{sen} 2t \ dt - \int \cos^{1/2} 2t \ \operatorname{sen} 2t \ \cos^2 2t \ dt$$

$$= \int \cos^{1/2} 2t \ \operatorname{sen} 2t \ dt - \int \cos^{5/2} 2t \ \operatorname{sen} 2t \ dt$$

$$= -\frac{1}{2}\cos^{3/2} 2t \left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\cos^{7/2} 2t \left(\frac{2}{7}\right) + c$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^{5/2} 2t + \frac{1}{7}\cos^{7/2} 2t + c$$

Integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m(x) \cdot \cos^n(x)\,dx$

Cuando m y n son números pares, enteros y positivos, la expresión diferencial dada puede transformarse por sustituciones trigonométricas en una expresión que contiene senos y cosenos de ángulos múltiplos (b) y (c).

Ejemplo 3.110. Integrales de potencias de seno y coseno

Realice la integral siguiente:

$$\int \operatorname{sen}^4 3t \cos^4 3t \ dt$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 3t \ \cos^4 3t \ dt &= \int \left(\operatorname{sen}^2 3t\right)^2 (\cos^2 3t)^2\, dt \\
&= \int \left(\frac{1-\cos 6t}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 6t}{2}\right)^2 dt \\
&= \frac{1}{16}\int (1-\cos 6t)^2 (1+\cos 6t)^2\, dt \\
&= \frac{1}{16}\int \left(1-2\cos 6t+\cos^2 6t\right)\left(1+2\cos 6t + \cos^2 6t\right)dt \\
&= \frac{1}{16}\int \left(1-2\cos^2 6t+\cos^4 6t\right) dt \\
&= \frac{1}{16}\left[\int dt - 2\int \cos^2 6t + \int \cos^4 6t \ dt\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[\int dt - 2\int \frac{1+\cos 12t}{2}dt + \int \left(\frac{1+\cos 12t}{2}\right)^2 dt\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[\int dt - \int dt - \int \cos 12t \ dt + \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 12t+\cos^2 12t\right)dt\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[-\int \cos 12t + \frac{1}{4}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 12t\, dt + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 24t}{2}dt\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[-\int \cos 12t + \frac{1}{4}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 12t \ dt + \frac{1}{8}\int dt + \frac{1}{8}\int \cos 24t \ dt\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[-\frac{1}{12}\operatorname{sen} 12t + \frac{t}{4} + \frac{1}{24}\operatorname{sen} 12t + \frac{t}{8} + \frac{1}{192}\operatorname{sen} 24t\right] + c \\
&= -\frac{1}{192}\operatorname{sen} 12t + \frac{t}{64} + \frac{1}{384}\operatorname{sen} 12t + \frac{t}{128} + \frac{1}{3072}\operatorname{sen} 24t + c \\
&= -\frac{1}{384}\operatorname{sen} 12t + \frac{3}{128}t + \frac{1}{3072}\operatorname{sen} 24t + c
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.111. Integrales de potencias de seno y coseno

Realice la integral siguiente:

$$\int \cos^6\theta \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta$$

Solución:

$$\int \cos^6\theta \operatorname{sen}^2\theta \; d\theta = \int \left(\cos^2\theta\right)^3 \operatorname{sen}^2\theta \; d\theta$$

$$= \int \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^3 \left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \int \left(\frac{1+3\cos 2\theta+3\cos^2 2\theta+\cos^3 2\theta}{8}\right)\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(1+3\cos 2\theta+3\cos^2 2\theta+\cos^3 2\theta\right)\left(1-\cos 2\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(1+2\cos 2\theta-2\cos^3 2\theta-\cos^4 2\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int d\theta+\frac{2}{16}\int \cos 2\theta \; d\theta-\frac{2}{16}\int \cos^3 2\theta \; d\theta-\frac{1}{16}\int \cos^4 2\theta \; d\theta$$

$$= \frac{\theta}{16}+\frac{2}{16}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta-\frac{2}{16}\int \left(\cos^2 2\theta \cos 2\theta\right) d\theta-\frac{1}{16}\int \left(\cos^2 2\theta\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{\theta}{16}+\frac{1}{16}\operatorname{sen} 2\theta-\frac{2}{16}\int \left(1-\operatorname{sen}^2 2\theta\right)\cos 2\theta d\theta-\frac{1}{16}\int \left(\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= \frac{\theta}{16}+\frac{1}{16}\operatorname{sen} 2\theta-\frac{2}{16}\int \left(\cos 2\theta-\operatorname{sen}^2 2\theta] \cos 2\theta\right) d\theta+\cdots$$

$$\cdots-\frac{1}{16}\int \left(\frac{1+2\cos 4\theta+\cos^4 4\theta}{4}\right) d\theta$$

$$= \frac{\theta}{16}+\frac{1}{16}\operatorname{sen} 2\theta-\frac{2}{16}\int \cos 2\theta \; d\theta+\frac{2}{16}\int \operatorname{sen}^2 2\theta \; \cos 2\theta+\cdots$$

$$\cdots-\frac{1}{64}\int d\theta-\frac{2}{64}\int \cos 4\theta \; d\theta-\frac{1}{64}\int \cos^2 4\theta d\theta$$

$$= \frac{\theta}{16}+\frac{1}{16}\operatorname{sen} 2\theta-\frac{2}{16}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta+\frac{2}{16}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{sen}^3 2\theta+\cdots$$

$$\cdots-\frac{\theta}{64}-\frac{2}{64}\cdot\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\theta \; d\theta-\frac{1}{64}\int \left(\frac{1+\cos 8\theta}{2}\right)$$

$$= \frac{\theta}{16}+\frac{1}{16}\operatorname{sen} 2\theta-\frac{1}{16}\operatorname{sen} 2\theta+\frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2\theta-\frac{\theta}{64}-\frac{1}{128}\operatorname{sen} 4\theta+\cdots$$

$$\cdots-\frac{1}{128}\int d\theta-\frac{1}{128}\int \cos 8\theta \, d\theta$$

$$= \frac{\theta}{16}+\frac{1}{16}\operatorname{sen} 2\theta-\frac{1}{16}\operatorname{sen} 2\theta+\frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2\theta-\frac{\theta}{64}-\frac{1}{128}\operatorname{sen} 4\theta\cdots$$

$$\cdots-\frac{\theta}{128}-\frac{1}{128}\cdot\frac{1}{8}\operatorname{sen} 8\theta+c$$

$$= \frac{5}{128}\theta+\frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2\theta-\frac{1}{128}\operatorname{sen} 4\theta-\frac{1}{1024}\operatorname{sen} 8\theta+c$$

Ejemplo 3.112. Integrales de potencias de seno y coseno

Realice la integral siguiente:

$$\int \operatorname{sen}^4 \frac{w}{2}\cos^2 \frac{w}{2} dw$$

Solución:

$$\int \operatorname{sen}^4 \frac{w}{2} \cos^2 \frac{w}{2} dw = \int \left(\operatorname{sen}^2 \frac{w}{2}\right)^2 \cos^2 \frac{w}{2} dw$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos w}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos w}{2}\right) dw$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos w}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos w}{2}\right) dw$$

$$= \int \left(\frac{1-2\cos w+\cos^2 w}{4}\right)\left(\frac{1+\cos w}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1-2\cos\ w+\cos^2\ w\right)\left(1+\cos w\right)\ dw$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1-\cos w-\cos^2 w+\cos^3 w\right)\ dw$$

$$= \frac{1}{8}\int dw - \frac{1}{8}\int \cos w\ \ d\ w - \frac{1}{8}\int \cos^2 w\ \ dw + \frac{1}{8}\int \cos^3 w\ \ dw$$

$$= \frac{1}{8}\ w - \frac{1}{8}\ \operatorname{sen}\ w - \frac{1}{8}\int \frac{1+\cos 2w}{2}\ dw + \frac{1}{8}\int \cos^2 w\ \ \cos w\ \ dw$$

$$= \frac{1}{8}\ w - \frac{1}{8}\ \operatorname{sen}\ w - \frac{1}{16}\int dw - \frac{1}{16}\int \cos 2w\,dw + \frac{1}{8}\int \left(1-\operatorname{sen}^2 w\right)\cos w\ \ dw$$

$$= \frac{1}{8}\ w - \frac{1}{8}\ \operatorname{sen}\ w - \frac{1}{16}\ w - \frac{1}{16}\ \cdot\ \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2w + \frac{1}{8}\int \cos\ w\ \ dw - \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2\ w\ \ \cos\ w\ \ dw$$

$$= \frac{1}{8}w - \frac{1}{8}\ \operatorname{sen}\ w - \frac{1}{16}w - \frac{1}{32}\ \operatorname{sen}\ 2w + \frac{1}{8}\ \operatorname{sen} w - \frac{1}{24}\operatorname{sen}^3 w + c$$

$$= \frac{1}{16}w - \frac{1}{32}\ \operatorname{sen}\ 2w - \frac{1}{24}\ \operatorname{sen}^3 w + c$$

Ejercicios 3.12. Integrales de potencias de seno y coseno

Verifique los resultados propuestos de los ejercicios con su respuesta y realice las demás integrales.

Función	Respuesta
1. $\int \operatorname{sen}^4 x\ dx$	$\frac{x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + c$
2. $\int \operatorname{sen}^4\ z\ \cos^2\ z\ \ dz$	$\frac{z}{16} - \frac{1}{64}\ \operatorname{sen}\ [2z] - \frac{1}{64}\ \operatorname{sen}\ [4z] + \frac{1}{192}\operatorname{sen}[6z] + c$
3. $\int \cos^2 x\ dx$	$\frac{x}{4} + \frac{1}{8}\ \operatorname{sen}\ 4x + c$
4. $\int \operatorname{sen}^6\ y\ \ dy$	$\frac{1}{8}y - \frac{3}{16}\operatorname{sen}\ 2y + \frac{3}{16}y + \frac{3}{64}\ \operatorname{sen}\ 4y - \frac{1}{16}\ \operatorname{sen}\ 2y - \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3\ 2y + c$
5. $\int \cos\ ^6 \frac{-x}{3} dx$	$\frac{5x}{16} + \frac{45}{64}\ \operatorname{sen}\ \left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{9}{64}\ \operatorname{sen}\ \left(\frac{4x}{3}\right) + \frac{1}{64}\operatorname{sen}\ (2x) + c$
6. $\int \operatorname{sen}^2 4z\ \ dz$	$\frac{z}{2} - \frac{1}{16}\operatorname{sen}\ [8z] + c$

Integrales de la forma $\int \tan^m x\,dx$ o $\int \cot^m x\,dx$

Así como existe una relación entre las funciones seno y coseno, algo muy parecido se presenta entre las funciones tangente y secante, además de las funciones cotangente y cosecante, mediante las identidades pitagóricas.

Es importante recordar las siguientes propiedades trigonométricas con tangente y cotangente:

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Si $m \geq 2$, realizamos la descomposición:

$$\tan^m x = \tan^2 x \tan^{m-2} x, \cot^m x = \cot^2 x \cot^{m-2} x$$

Utilizamos las identidades trigonométricas que se incluyen en la pantalla anterior, sustituimos y resolvemos:

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1, \cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

Ejemplo 3.113. Integrales de producto de potencias de tangente y secante

Realice la integral siguiente:

$$\int \tan^5 y\ dy$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \tan^5 y\ dy &= \int \tan^2 x \tan^3 x\ dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1) \tan^3 x\ dx \\
&= -\int \tan^3 x\ dx + \int \tan^3 x\ \sec^2 x\ dx \\
&= -\int \tan^2 x\ \tan x\, dx + \int \tan^3 x \sec^2 x\ dx \\
&= -\int \left(\sec^2 - 1\right) \tan x\ dx + \int \tan^3 x \sec^2 x\ dx \\
&= -\int \tan x \sec^2 x\, dx + \int \tan x\ dx + \int \tan^3 x \sec^2 x\, dx \\
&= -\frac{\tan^2 x}{2} + \ln\left(\cos x\right) + \frac{1}{4}\tan^4 x + c
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.114. Integrales de producto de potencias de tangente y secante

Realice la integral siguiente:

$$\int \cot^5 2t\ dt$$

Solución:

$$\int \cot^5 2t \ dt = \int \cot^2 2t \cot^3 2t \ dt$$
$$= \int \left(\csc^2 2t - 1\right) \cot^3 2t \ dt$$
$$= \int \cot^3 2t \ \csc^2 2t \ dt - \int \cot^3 2t \ dt$$
$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cot^4 2t - \int \left(\csc^2 2t - 1\right) \ \text{ctg } 2t \ dt$$
$$= -\frac{1}{8} \cot^4 2t - \int \text{ctg } 2t \csc^2 2t \ dt + \int \text{ctg } 2t \ dt$$
$$= -\frac{1}{8} \cot {}^4 2t + \frac{1}{4} \text{ctg}^2 \ 2t + \frac{1}{2} \ln\left(\text{sen } 2t\right) + c$$

Ejemplo 3.115. Integrales de producto de potencias de tangente y secante

Realice la integral siguiente:

$$\int \cot^6 y \ dy$$

Solución:

$$\int \cot^6 y \ dy = \int \cot^2 x \cot^4 x \ dx$$
$$= \int \left(\csc^2 x - 1\right) \ \cot^4 \ x \ dx$$
$$= \int \cot^4 x \ \csc^2 x \ dx - \int \cot^4 x \ dx$$
$$= \int \cot^4 x \ \csc^2 x \ dx - \int (\cot^2 x)^2 \ dx$$
$$= -\frac{1}{5} \cot^5 \ x - \int \left(\csc^2 \ x - 1\right)^2 dx$$
$$= -\frac{1}{5} \cot^5 \ x - \int \left(\csc^4 x - 2 \csc^2 x + 1\right) dx$$
$$= -\frac{1}{5} \cot^5 x - \int \csc^4 x \ dx + 2 \int \csc^2 x \ dx - \int dx$$
$$= -\frac{1}{5} \cot^5 x - \int \csc^2 x \ \csc^2 \ x \, dx + 2 \int \csc^2 x \ d\,x - \int dx$$
$$= -\frac{1}{5} \cot^5 x - \int \left(1 + \cot^2 \ x\right) \csc^2 x \, dx - 2 \cot \ x - x$$
$$= -\frac{1}{5} \cot^5 x - \int \csc^2 x \ dx - \int \cot^2 x \ \csc^2 x \ dx - 2 \cot x - x$$
$$= \frac{1}{5} \cot^5 x + \cot x + \frac{1}{3} \cot^3 \ x - 2 \cot x - x + c$$
$$= -\frac{1}{5} \cot^5 \ x - \cot x + \frac{1}{3} \cot^3 \ x - x + c$$

Ejemplo 3.116. Integrales de producto de potencias de tangente y secante

Realice la integral siguiente:

$$\int \tan^8 \pi x \ dx$$

Solución:

$$\int \tan^8 \pi x \; dx = \int \tan^2 \pi x \; \tan^6 \pi x \; dx$$

$$= \int \left(\tan^2 \pi x\right)^3 \tan^2 \pi x \; dx$$

$$= \int \left(\sec^2 \pi x - 1\right)^3 \tan^2 \pi x \, dx$$

$$= \int \left(\sec^6 \pi x - 3 \sec^4 \pi x + 3 \sec^2 \pi x - 1\right) \tan^2 \; \pi x \; dx$$

$$= \underbrace{\int \sec^6 \pi x \; \tan^2 \pi x \; dx}_{\text{I}} - 3\underbrace{\int \sec^4 \pi x \; \tan^2 \pi x \; dx}_{\text{II}} + 3\underbrace{\int \sec^2 \pi x \; \tan^2 \pi x}_{\text{III}} - \underbrace{\int \tan^2 \pi x \; dx}_{\text{IV}}$$

Resolviendo I:

$$\int \sec^6 \pi x \; \tan^2 \pi x \; dx = \int \sec^4 \pi x \; \sec^2 \pi x \; \tan^2 \pi x \; dx$$

$$= \int \left(\sec^2 \pi x\right)^2 \tan^2 \pi x \; \sec^2 \pi x \; dx$$

$$= \int \left(1 + \tan^2 \pi x\right)^2 \tan^2 \pi x \; \sec^2 \pi x \; dx$$

$$= \int \left(1 + 2 \tan^2 \pi x + \tan^4 \pi x\right) \; \tan^2 \pi x \; \sec^2 \pi x \; dx$$

$$= \int \tan^2 \pi x \sec^2 \pi x \, dx + 2\int \tan^4 \pi x \sec^2 \pi x \; dx + \cdots$$

$$\cdots + \int \tan^6 \pi x \; \sec^2 \pi x \; dx$$

$$= \frac{1}{3\pi} \tan^3 \pi x + \frac{2}{5\pi} \tan^5 \pi x + \frac{1}{7\pi} \tan^7 \pi x + c$$

Resolviendo II:

$$3\int \sec^4 \pi x \; \tan^2 \pi x \; dx = -3\int \sec^2 \pi x \; \sec^2 \pi x \; \tan^2 \pi x \; dx$$

$$= -3\int \left(1 + \tan^2 \pi x\right) \sec^2 \pi x \; \tan^2 \pi x \; dx$$

$$= -3 \left(\int \tan^2 \pi x \; \sec^2 \pi x \; dx + \int \tan^4 \pi x \; \sec^2 \pi x \; dx \right)$$

$$= -3 \left[\frac{1}{3\pi} \tan^3 \pi x + \frac{1}{5\pi} \tan^5 \pi x \right] + c$$

$$= -\frac{1}{\pi} \tan^3 \pi x - \frac{3}{5\pi} \tan^5 \pi x + c$$

Resolviendo III:

$$3\int \sec^2 \pi x \; \tan^2 \pi x = 3\int \tan^2 \pi x \; \sec^2 \pi x \; dx = \frac{1}{\pi} \tan^3 \pi x + c$$

Resolviendo IV:

$$-\int \tan^2 \pi x \ dx = -\int \left(\sec^2 \pi x - 1\right) dx$$

$$= -\int \sec^2 \pi x \ dx - \int dx$$

$$= -\frac{\tan \ \pi x}{\pi} + x$$

Finalmente, tenemos el resultado siguiente:

$$\int \tan^8 \pi x \ dx = \frac{1}{3\pi} \tan^3 \pi x + \frac{2}{5\pi} \tan^5 \pi x + \frac{1}{7\pi} \tan^7 \pi x + \cdots$$

$$\cdots - \frac{1}{\pi} \tan^3 \pi x - \frac{3}{5\pi} \tan^5 \pi x + \frac{1}{\pi} \tan^3 \pi x - \frac{\tan \pi x}{\pi} + x + C$$

$$= \frac{1}{7\pi} \tan^7 \pi x - \frac{1}{5\pi} \tan^5 \pi x + \frac{1}{3\pi} \tan^3 \pi x - \frac{1}{\pi} \tan \pi x + x + c$$

Integrales de la forma $\int \sec^n x \, dx$ o $\int \csc^n x \, dx$

Si n es par, se realiza la descomposición:

$$\sec^n x = \sec^2 x \sec^{n-2} x$$

$$\csc^n x = \csc^2 x \csc^{n-2} x$$

Se utilizan las identidades:

$$\sec^2 x = \tan^2 x + 1$$

$$\csc^2 x = \cot^2 x + 1$$

Ejemplo 3.117. Integrales de producto de potencias de tangente y secante

Realice la integral siguiente:

$$\int \sec^4 \ dx$$

Solución:

$$\int \sec^4 \ dx = \int \sec^2 x \ \sec^2 x \ dx$$

$$= \int \left(1 + \tan^2 x\right) \sec^2 x \ dx$$

$$= \int \sec^2 x dx + \int \tan^2 x \sec^2 x \ dx$$

$$= \tan x + \frac{\tan^3 x}{3} + c$$

Si n es impar, se realiza la descomposición $\sec^n x = \sec^2 x \sec^{n-2} x$ y se integra por partes.

Ejemplo 3.118. Integrales de producto de potencias de tangente y secante

Realice la integral siguiente:

$$\int \sec^3 x \; dx$$

Solución:

$$\int \sec^3 x \; dx = \int \sec \; x \; \sec^2 x \; dx$$

$$u = \sec x \qquad dv = \sec^2 x \, dx$$

$$du = \sec x \tan x \, dx \qquad v = \tan x$$

$$\begin{aligned}\int \sec^3 \; x \; dx &= \sec \; x \; \tan x - \int \tan^2 \; x \sec \; x \; dx \\ &= \sec \; x \; \tan x - \int \left(\sec^2 \; x - 1\right) \sec \; x \; dx \\ &= \sec \; x \; \tan x - \int \sec^3 \; x \, dx + \int \sec \; x \; dx\end{aligned}$$

Este tipo de integrales son conocidas (caso III, por partes).

Finalmente, tenemos:

$$\int \sec^3 x \; dx = \frac{1}{2}\left(\sec \, x \tan x + \ln \; (\sec \; x + \tan x\right) + c$$

Integrales de la forma $\int \tan^m x \cdot \sec^n x \, dx$ o $\int \cot^m x \cdot \csc^n x \, dx$

Si la potencia m de la tangente es impar y positiva, se conserva un factor secante-tangente y el resto de los factores se convierte en secante, mientras que para la cotangente se conserva un factor cosecante-cotangente y el resto se convierte en cosecante. Después se desarrolla e integra.

Ejemplo 3.119. Integrales de producto de potencias de tangente y secante

Realice la integral siguiente:

$$\int \tan^3 x \; \sec^2 x \, dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x \sec^2 x \; dx &= \int \tan^2 x \; \sec \, x \sec \, x \tan \, x \, dx \\ &= \int \left(\sec^2 x - 1\right) \sec x \; \sec \, x \tan \; x \; dx \\ &= \int \sec^3 x \sec \, x \; \tan x \, dx - \int \sec x \sec \, x \; \; \tan \; x \; dx \\ &= \frac{1}{4} \sec^4 \; x - \frac{1}{2} \sec x \; + \; c\end{aligned}$$

Ejemplo 3.120. Integrales de producto de potencias de cotangente y cosecante

Realice la integral siguiente:

$$\int \cot^3 2x\ \csc 2x\ dc$$

Solución:

$$\begin{aligned}\int \cot^3 2x\ \csc 2x\ dc &= \int \cot^2 2x\ \cot 2x\ \csc 2x\ dx\\ &= \int \left(\csc^2 2x - 1\right) \cot 2x\ \csc 2x\ dx\\ &= \int \csc^2 2x\ \cot 2x\ \csc 2x\ dx - \int \cot 2x\ \csc 2x\ dx\\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \csc^3 2x + \frac{1}{2} \csc 2x + c\\ &= -\frac{1}{6} \csc^3 2x + \frac{1}{2} \csc 2x + c\end{aligned}$$

Ejemplo 3.121. Integrales de producto de potencias de cotangente y cosecante

Realice la integral siguiente:

$$\int \tan^3 \alpha \sec^{5/2} \alpha\ d\alpha$$

Solución:

$$\begin{aligned}\int \tan^3 \alpha\ \sec^{5/2} \alpha\ d\alpha &= \int \tan^2 \alpha\ \tan\ \alpha\ \sec\ \alpha\ \sec^{3/2} \alpha\ d\alpha\\ &= \int \tan^2 \alpha\ \sec^{3/2}\ \alpha\ \tan\ \alpha\ \sec\ \alpha\ d\alpha\\ &= \int \left(\sec^2 \alpha - 1\right) \sec^{3/2} \alpha\ \tan\ \alpha\ \sec\ \alpha\ d\alpha\\ &= \int \sec^{7/2} \alpha\ \tan\ \alpha\ \sec\ \alpha\ d\alpha - \int \sec^{3/2} \alpha\ \tan\ \alpha\ \sec\ \alpha\ d\alpha\\ &= \frac{2}{9} \sec^{9/2} \alpha - \frac{2}{5} \sec^{5/2} \alpha + c\end{aligned}$$

Ejemplo 3.122. Integrales de producto de potencias de tangente y secante

Realice la integral siguiente:

$$\int \tan^3 x\ \sec^7 x\ dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x\ \sec^7 x\ dx &= \int \tan^2 x\ \tan x\ \sec^6 x\ \sec x\ dx\\ &= \int \tan^2 x\ \sec^6 x\ \tan x\ \sec x\ dx\\ &= \int \left(\sec^2 x - 1\right) \sec^6 x\ \tan x\ \sec x\ dx\\ &= \int \sec^8 x\ \tan\ x\ \sec\ x\ dx - \int \sec^6 x\ \tan\ x\ \sec x\ dx\\ &= \frac{1}{9} \sec^9 x - \frac{1}{7} \sec^7 x + c\end{aligned}$$

Ejemplo 3.123. Integrales de producto de potencias de tangente y secante

Realice la integral siguiente:

$$\int \tan^7 2x \ \sec^4 2x \ \ dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \tan^7 \ 2x \ \sec^4 \ 2xdx &= \int \tan^6 2x \ \tan 2x \ \sec^3 2x \ \sec \ 2x \ dx \\
&= \int \tan^6 2x \ \sec^3 2x \ \tan \ 2x \ \sec \ 2x \ dx \\
&= \int \left(\tan^2 2x\right)^3 \sec^3 2x \ \tan 2x \ \sec 2x \ dx \\
&= \int \left(\sec^2 2x - 1\right)^3 \sec^3 2x \ \tan \ 2x \ \sec \ 2x \ dx \\
&= \int \left(\sec^6 2x - 3\sec^4 2x + 3\sec^2 2x - 1\right) \sec^3 2x \ \tan \ 2x \ \sec \ 2x \ dx \\
&= \int \sec^9 2x \tan 2x \sec 2x - 3\int \sec^7 \ 2x \tan 2x \sec 2x \ dx + \cdots \\
&\cdots + 3\int \sec^5 \ 2x \ \tan \ 2x \ \sec \ 2x - \int \sec^3 \ 2x \ \tan \ 2x \ \sec \ 2x \ dx \\
&= \frac{1}{20}\sec^{10} 2x - \frac{3}{16}\sec^8 2x + \frac{3}{12}\sec^6 2x - \frac{1}{8}\sec^4 2x + c \\
&= \frac{1}{20}\sec^{10} 2x - \frac{3}{16}\sec^8 2x + \frac{1}{4}\sec^6 2x - \frac{1}{8}\sec^4 2x + c
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.124. Integrales de producto de potencias de cotangente y cosecante

Realice la integral siguiente:

$$\int \cot^3 5x \csc^3 5x \ \ dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \cot^3 5x \ \csc^3 5x \ dx &= \int \operatorname{ctg}^2 5x \ \csc^2 5x \ \operatorname{ctg} \ 5x \ \csc \ 5x \ dx \\
&= \int (\csc^2 5x - 1)\csc^2 5x \ \operatorname{ctg} 5x \ \csc \ 5x \ dx \\
&= \int \csc^4 5x \ \operatorname{ctg} 5x \ \csc 5x \ dx - \int \csc^2 5x \ \operatorname{ctg} \ 5x \ \csc \ 5x \ dx \\
&= -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}\csc^5 5x + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}\csc^3 5x + c \\
&= \frac{1}{25}\csc^5 5x + \frac{1}{15}\csc^3 5x + c
\end{aligned}$$

Integrales de la forma $\int \tan^m x \cdot \sec^n x \, dx$ o $\int \cot^m x \cdot \csc^n x \, dx$

Si la potencia *n* de la secante es par y positiva, uno de los factores que se conservará en la descomposición será una secante cuadrada y el resto se convertirá en tangente. Para la cosecante se conserva el factor secante cuadrada y el resto se convierte en cotangente. Después, se desarrolla e integra.

Ejemplo 3.125. Integrales de producto de potencias de tangente y secante

Realice la integral siguiente:

$$\int \tan^{-3} x \ \sec^4 x \ dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \tan^{-3} x \ \sec^4 x \ dx &= \int \sec^4 x \ \tan^{-3} x \ dx \\
&= \int \sec^2 x \ \sec^2 x \ \tan^{-3} x \ dx \\
&= \int \left(1+\tan^2 x\right) \sec^2 x \tan^{-3} dx \\
&= \int \tan^{-3} x \ \sec^2 x \ dx + \int \tan^{-1} x \sec^2 x \ dx \\
&= -\frac{\tan^{-2} x}{2} + \ln(\tan x) + c
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.126. Integrales de producto de potencias de tangente y secante

Realice la integral siguiente:

$$\int \tan^6 \frac{x}{\theta} \ \sec^4 \frac{x}{\theta} dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \tan^6 \frac{x}{\theta} \sec^4 \frac{x}{\theta} \ dx &= \int \tan^6 \frac{x}{\theta} \sec^2 \frac{x}{\theta} \ \sec^2 \frac{x}{\theta} \ dx \\
&= \int \tan^6 \frac{x}{\theta} \left(1+\tan^2 \frac{x}{\theta}\right) \sec^2 \frac{x}{\theta} \ dx \\
&= \int \tan^6 \frac{x}{\theta} \ \sec^2 \frac{x}{\theta} dx + \int \tan^8 \frac{x}{\theta} \ \sec^2 \frac{x}{\theta} \ dx \\
&= \theta \ \frac{\tan \theta}{7} \ \frac{x}{\theta} + \frac{\theta}{9} \ \tan^9 \frac{x}{\theta} + c
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.127. Integrales de producto de potencias de cotangente y cosecante

Realice la integral siguiente:

$$\int \cot^2 \frac{x}{2} \ \csc^4 \frac{x}{2} \ dx$$

Solución:

$$\int \cot^2 \frac{x}{2} \csc^4 \frac{x}{2}\, dx = \int \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} \csc^2 \frac{x}{2} \csc^2 \frac{x}{2}\, dx$$

$$= \int \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}\left(1+\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}\right) \csc^2 \frac{x}{2}\, dx$$

$$= \int \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} \csc^2 \frac{x}{2}\, dx + \int \operatorname{ctg}^4 \frac{x}{2} \csc^2 \frac{x}{2}\, dx$$

$$= -\frac{2}{3} \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2} - \frac{2}{5} \operatorname{ctg}^5 \frac{x}{2} + c$$

Ejemplo 3.128. Integrales de producto de potencias de cotangente y cosecante

Realice la integral siguiente:

$$\int \cot^{-1/2} y \csc^6 y\, dy$$

Solución:

$$\int \cot^{-1/2} y \csc^6 y\, dy = \int \cot^{-1/2} y \csc^4 y \csc^2 y\, dy$$

$$= \int \operatorname{ctg}^{-1/2} y \left(\csc^2 y\right)^2 \csc^2 y\, dy$$

$$= \int \operatorname{ctg}^{-1/2} y \left(1+\cot^2 y\right)^2 \csc^2 y\, dy$$

$$= \int \cot^{-1/2} y \left(1+2\cot^2 y+\cot^4 y\right) \csc^2 y\, dy$$

$$= \int \cot^{-1/2} y \csc^2 y\, dy + 2\int \cot^{3/2} y \csc^2 y\, dy + \int \cot^{7/2} y \csc^2 y\, dy$$

$$= -2\cot^{1/2} y - \frac{4}{5}\cot^{5/2} y - \frac{2}{9}\cot^{9/2} y + c$$

Ejemplo 3.129. Integrales de producto de potencias de cotangente y cosecante

Realice la integral siguiente:

$$\int \cot^{10} x \csc^4 x\, dx$$

Solución:

$$\int \cot^{10} x \csc^4 x\, dx = \int \cot^{10} x \csc^2 x \csc^2 x\, dx$$

$$= \int \cot^{10} x \left(\cot^2 x+1\right) \csc^2 x\, dx$$

$$= \int \cot^{12} x \csc^2 x\, dx + \int \cot^{10} x \csc^2 x\, dx$$

$$= -\frac{\cot^{13} x}{13} - \frac{1}{11}\cot^{11} x + c$$

Ejemplo 3.130. Integrales de producto de potencias de tangente y secante

Realice la integral siguiente:

$$\int \frac{\sec^4 (1-t)}{\tan^8 (1-t)}\, dt$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sec^4 (1-t)}{\tan^8 (1-t)}\, dt &= \int \tan^{-8} (1-t) \sec^4 (1-t)\, dt \\
&= \int \tan^{-8} (1-t) \sec^2 (1-t) \sec^2 (1-t)\, dt \\
&= \int \tan^{-8} (1-t) (1+\tan^2 (1-t)) \sec^2 (1-t)\, dt \\
&= \int \tan^{-8} (1-t)\ \sec^2 (1-t)\, dt + \int \tan^{-6}\ (1-t)\ \sec^2\ (1-t)\, dt \\
&= -\frac{1}{7} \tan^{-7} (1-t) - \frac{1}{3} \tan^{-5} (1-t) + c \\
&= -\frac{1}{7 \tan^7 (1-t)} - \frac{1}{5 \tan^5 (1-t)} + c
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.131. Integrales de producto de potencias de tangente y secante

Realice la integral siguiente:

$$\int \sqrt{\tan\ \theta x}\, \sec^4 \theta x\, dx$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{\tan \theta x}\ \sec^4 \theta x\ dx &= \int \sqrt{\tan \theta x} \sec^2 \theta x\ \sec^2\ \theta x\ dx \\
&= \int \tan^{1/2} \theta x \left(1+\tan^2 \theta x\right) \sec^2 \theta x\ dx \\
&= \int \tan^{1/2} \theta x\ \sec^2 \theta x\ dx + \int \tan^{5/2} \theta x \sec^2 \theta x\ dx \\
&= \frac{2}{3\theta} \tan^{3/2} \theta x + \frac{2}{7\theta} \tan^{7/2} \theta x + c
\end{aligned}$$

Ejercicios 3.13. Integrales de producto de potencias de funciones trigonométricas

Verifique los resultados propuestos, realizando las integrales e identificando los diferentes casos abordados en la presente sección:

	Función	**Respuesta**
1.	$\int \tan^5 2\theta\ d\theta$	$\frac{\tan^4 2\theta}{8} - \frac{1}{2}\frac{\tan^2 2\theta}{2} + \frac{1}{2} \ln (\sec 2\theta) + c$
2.	$\int \tan^6 x\, dx$	$\frac{\tan^5 x}{5} - \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - x + c$
3.	$\int \sec^6 2z\, dz$	$\frac{1}{2} \tan 2z + \frac{\tan^3 2z}{3} + \frac{\tan^5 2z}{10} + c$
4.	$\int \operatorname{sen}^5 x\ \cos^2 x\ dx$	$-\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{2}{5} \cos^5 x - \frac{1}{7} \cos^7 x + c$

Función	Respuesta
5. $\int \tan^5 \frac{x}{4} dx$	$\tan^4 \frac{x}{4} - 2\tan^2 \frac{x}{4} - 4\ln(\cos\frac{x}{4}) + c$
6. $\int \sec^6 4x \tan 4x\ dx$	$\frac{1}{24}\tan^2 4x(\tan^4 4x + 3\tan^2 4x + 3) + c$
7. $\int \text{sen}^2\, \theta x \cos^2 \theta x\ dx$	$\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2} - \frac{\text{sen}\,[4x\theta]}{8\theta}\right) + c$
8. $\int \text{sen}^2 \frac{\pi}{x} \cos^4 \frac{\pi}{x} dx$	$\frac{x}{16} + \frac{1}{64}\pi\, \text{sen}\left[\frac{2x}{\pi}\right] - \frac{1}{64}\pi\, \text{sen}\left[\frac{4x}{\pi}\right] - \frac{1}{192}\pi\, \text{sen}\left[\frac{6x}{\pi}\right] + c$
9. $\int \cos^3 \frac{\theta}{x}\ \text{sen}^5 \frac{\theta}{x} dx$	$\frac{\text{sen}^6\, \theta}{6} + \frac{\text{sen}^8\, \theta}{8} + c$
10. $\int \text{sen}^3 2z \cos^2 2z\ dz$	$-\frac{1}{16}\cos(2x) - \frac{1}{96}\cos(6x) + \frac{1}{160}\cos(10x) + c$
11. $\int \tan^2\theta \sec^4\theta\ d\theta$	$-\frac{2\tan(x)}{15} - \frac{1}{15}\sec^2(x)\tan(x) + \frac{1}{5}\sec^4(x)\tan(x) + c$
12. $\int \tan^3 x \sec^3 x\ dx$	$-\frac{1}{3}\sec^2(x) + \frac{\sec^5(x)}{5} + c$
13. $\int \tan^4 x \sec^4 x\ dx$	$\frac{2}{35}\tan(x) + \frac{1}{35}\sec^2(x)\tan(x) - \frac{8}{35}\sec^4(x) + \frac{1}{7}\sec^6(x)\tan(x) + c$
14. $\int \tan^2 x \sec^2 x\, dx$	$\frac{\tan^3(x)}{3} + c$
15. $\int \tan^6 x \sec^4 x\ dx$	$-\frac{2}{63}\tan(x) - \frac{1}{63}\sec^2(x)\tan(x) + \frac{5}{21}\sec^4(x)\tan(x) - \frac{19}{63}\sec^6(x)\tan(x) + c$
16. $\int \cot^3 x \csc^4 x\ dx$	$\frac{\csc^4(x)}{4} - \frac{\csc^6(x)}{6} + c$

3.3.3. Integración por sustitución trigonométrica

Este método (un caso especial de cambio de variable) nos permitirá integrar cierto tipo de funciones algebraicas cuyas integrales indefinidas son funciones trigonométricas. Existen tres casos diferentes y, por tanto, tres cambios distintos de variable.

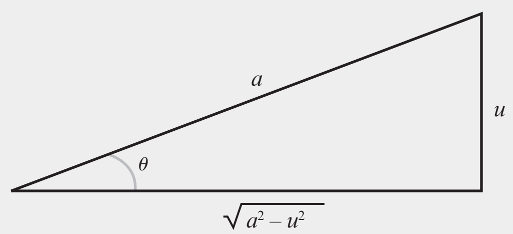
Sustitución trigonométrica ($a \in \mathbb{Z}^+$)

I. Para las integrales que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$, sea $u = a\ \text{sen}\ \theta$

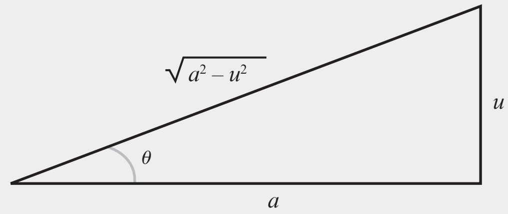
Entonces $\sqrt{a^2 - u^2} = a\cos\theta$

Donde

$$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$



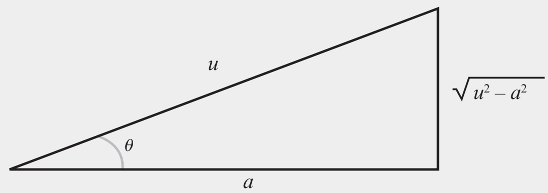
II. Para las integrales que contienen $\sqrt{a^2+u^2}$, sea
$u = a \tan \theta$
Entonces $\sqrt{a^2+u^2} = a \sec \theta$
Donde
$-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$



III. Para las integrales que contienen $\sqrt{u^2-a^2}$, sea
$u = a \sec \theta$
Entonces

$$\sqrt{u^2-a^2} = \begin{cases} a\tan\theta, \text{ si } u > a, \text{ donde } 0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2} \\ -a\tan\theta, \text{ si } u < -a, \text{ donde } \dfrac{\pi}{2} < \theta \le \pi \end{cases}$$

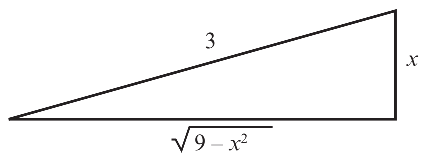
Donde $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$



Nota: La restricción sobre θ asegura que la función que define la sustitución es inyectiva.

Ejemplo 3.132. **Sustitución trigonométrica: $u = a$ sen θ**

Encuentre $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$



Solución: Primero, debemos notar que no hay regla básica de integrales que podamos aplicar. Para poder usar la sustitución trigonométrica, veamos que $\sqrt{9-x^2}$ es de la forma $\sqrt{a^2-u^2}$. De este modo, es posible utilizar la sustitución

$$x = a \operatorname{sen} \theta = 3 \operatorname{sen} \theta$$

Si derivamos y utilizamos el triángulo de la figura, obtenemos

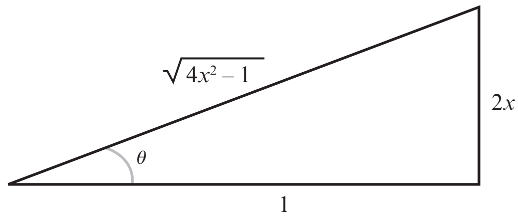
$$dx = 3\cos\theta\, d\theta, \qquad \sqrt{9-x^2} = 3\cos\theta \qquad \text{y} \qquad x^2 = 9\operatorname{sen}^2\theta$$

Si sustituimos los términos trigonométricos, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\text{Sustituir} \quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} &= \int \frac{3\cos\theta\, d\theta}{(9\operatorname{sen}^2\theta)(3\cos\theta)} \\
&= \frac{1}{9}\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} \\
\text{Identidad trigonométrica} \quad &= \frac{1}{9}\int \csc^2\theta\, d\,\theta \\
&= -\frac{1}{9}\cot\theta + c \\
&= -\frac{1}{9}\left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\right) + c \\
&= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + c
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.133. **Sustitución trigonométrica: $u = a \tan \theta$**

Encuentre $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$



Solución: Sea $u = 2x$, $a = 1$ y $2x = \tan \theta$, como se muestra en la figura, tenemos $dx = \frac{1}{2}\sec^2\theta\, d\theta$ y $\sqrt{4x^2+1} = \sec\theta$.

Si sustituimos los términos trigonométricos obtenemos

$$\text{Sustituir:} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}} = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta\ d\theta}{\sec\theta}$$

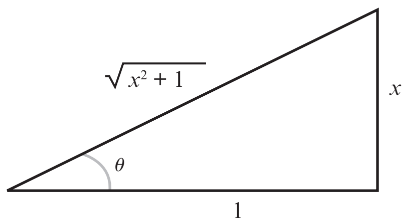
$$\text{Simplificar:} \quad = \frac{1}{2}\int \sec\theta\ d\theta$$

$$\text{Aplicar la regla de la secante} \quad = \frac{1}{2}\ln\left|\sec\theta + \tan\ \theta\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{4x^2+1} + 2x\right| + C$$

Ejemplo 3.134. **Sustitución trigonométrica: potencias racionales**

Encuentre $$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}$$



Solución: Primero, se escribe $(x^2 + 1)^{3/2}$ como $(\sqrt{x^2+1})^3$. Entonces:

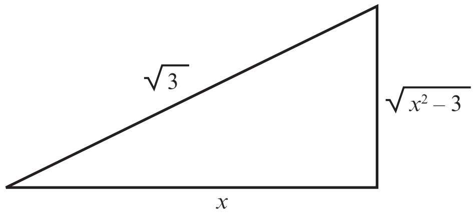
Sea $a = 1$ y $u = x \tan \theta$, como se muestra en la figura, si usamos

$$dx = \sec^2\theta\ \ d\theta \ \text{ y } \ \sqrt{x^2+1} = \sec\theta$$

Algunas ocasiones es necesario cambiar los límites de integración, pero esto se debe realizar con cuidado; verifique estas situaciones cuando sea el caso. El siguiente ejemplo nos muestra tal situación:

Ejemplo 3.135. **Transformación de los límites de integración**

Evalúe $$\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\, dx$$



Solución: Primero veamos que $\sqrt{x^2-3}$ tiene la forma $\sqrt{u^2-a^2}$, entonces podemos considerar $u=x,\ a=\sqrt{3}$ y $\sqrt{u^2-a^2}=\sqrt{3}\,\tan\,\theta$.

Ahora, para determinar los límites superiores e inferiores de la integral, usemos la situación $x=\sqrt{3}\sec\theta$ de la manera siguiente:

Límite inferior	Límite superior
Cuando $x=\sqrt{3}\,\sec\,\theta$, $\sec\,\theta=1$ y $\theta=0$	Cuando $x=2$, $\sec\,\theta=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ y $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

Así, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}}^{2}\frac{\sqrt{x^2-3}}{x}\,dx &= \int_{0}^{\pi/6}\frac{\left(\sqrt{3}\,\tan\,\theta\right)\left(\sqrt{3}\sec\theta\,\tan\theta\right)}{\sqrt{3}\sec\theta}d\theta\\ &=\int_0^{\pi/6}\sqrt{3}\tan^2\theta\ d\theta\\ &=\sqrt{3}\int_0^{\pi/6}\left(\sec^2\theta-1\right)d\theta\\ &=\sqrt{3}[\tan\theta-\theta]_0^{\pi/6}=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}\right)\\ &\approx 0.0931\end{aligned}$$

Algunas sustituciones trigonométricas pueden usarse después de completar el TCP; por ejemplo, al evaluar la integral (primero podemos hacer lo siguiente):

$$\int\sqrt{x^2-2x}\ dx=\int\sqrt{(x-1)^2-1}\,dx$$

Ahora veremos algunos teoremas de integración para estos casos:

Teorema 3.7 Fórmulas especiales de integración ($a>0$)

1. $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(a^2\ \text{arcsen}\ \frac{u}{a}+u\sqrt{a^2-u^2}\right)+C$

2. $\displaystyle\int\sqrt{u^2-a^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2-a^2}-a^2\ln\left|\,u+\sqrt{u^2-a^2}\right|\right)+C,\ u>a$

3. $\displaystyle\int\sqrt{u^2+a^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2+a^2}+a^2\ln\left|\,u+\sqrt{u^2+a^2}\right|\right)+C,\quad u>a$

Ejercicios 3.14. **Integración mediante sustitución trigonométrica**

Verifique los resultados propuestos integrando mediante sustitución trigonométrica:

	Función	**Respuesta**
1.	$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+36}}\,dx$	$\sqrt{36+x^2}+c$
2.	$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{36-x^2}}\,dx$	$\dfrac{(x-36)(x-36+36\ln[x-36])}{\sqrt{(x-36)^2}}+c$
3.	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$	$\operatorname{arcsen}\left[\dfrac{x}{4}\right]+c$
4.	$\displaystyle\int \frac{1}{\left(x^2+5\right)^{3/2}}\,dx$	$\dfrac{x}{5\sqrt{5+x^2}}+c$
5.	$\displaystyle\int \sqrt{16-4x^2}\,dx$	$2\left(x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arcsen} x\right)+c$
6.	$\displaystyle\int x\sqrt{16-4x^2}\,dx$	$-\dfrac{4}{3}\left(1-x^2\right)^{3/2}+c$
7.	$\displaystyle\int (x+1)\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$	$\dfrac{1}{3}\left(2+2x+x^2\right)^{3/2}+c$
8.	$\displaystyle\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$	$\dfrac{e^x\sqrt{1-e^{2x}}+\operatorname{arcsen}\left[e^x\right]}{2}+c$
9.	$\displaystyle\int \frac{1}{4+4x^2+x^4}\,dx$	$\dfrac{x}{4(2+x^2)}+\dfrac{\arctan\left[\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right]}{4\sqrt{2}}+c$
10.	$\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^4+2x^2+1}\,dx$	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{1+x^2}+\arctan[x]+\ln\left[1+x^2\right]\right)+c$
11.	$\displaystyle\int \operatorname{arcsen} 2x\ dx,\quad x>\frac{1}{2}$	$\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}+x\operatorname{arcsen}[2x]\right)+c$
12.	$\displaystyle\int x\operatorname{arcsen} x\ dx,\quad x>1$	$\dfrac{1}{4}\left(x\sqrt{1-x^2}+\left(-1+2x^2\right)\operatorname{arcsen}[x]\right)+c$

Comente con su profesor para cuáles valores no está definida la solución en las dos últimas integrales.

3.3.4. Integración por descomposición en fracciones parciales

Este método nos permitirá integrar cierta clase de funciones racionales (cociente de polinomios). A manera de ilustración, consideremos la integral siguiente:

$$\int \frac{x^2+x+3}{x-2}\,dx$$

Observe que difícilmente podríamos abordarla con alguno de los métodos de los que disponemos. Procederemos con la división de los polinomios:

$$\begin{array}{r|lll}
 & x & +3 & \\
\hline
x-2 & x^2 & +x & +3 \\
 & -x^2 & +2x & \\
\hline
 & & 3x & +3 \\
 & & -3x & +6 \\
\hline
 & & & 9
\end{array}$$

Posteriormente aplicamos el algoritmo de la división, y obtenemos:

$$x^2 + x + 3 = (x - 2)(x + 3) + 9$$

Para obtener en el lado izquierdo de la igualdad la función que queremos integrar, dividimos en ambos lados entre $(x - 2)$:

$$\frac{x^2+x+3}{x-2} = (x+3) + \frac{9}{x-2}$$

De esta manera, descomponemos nuestra fracción "complicada" en una suma de fracciones "sencillas", que llamaremos *fracciones parciales* y que son fáciles de integrar.

$$\int \frac{x^2+x+3}{x-2}dx = \int (x+3)dx + \int \frac{9}{x-2}dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 9 \ln|x-2| + C$$

En general, si queremos integrar un cociente de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en el que el grado de $P(x)$ es mayor o igual al grado de $Q(x)$, debemos proceder como en el caso anterior, aplicando el algoritmo de la división

$$\begin{array}{r|l} & q(x) \\ \hline Q(x) & p(x) \\ \hline & r(x) \end{array}$$

Donde $r(x) = 0$ o grado $r(x) <$ grado $Q(x)$:

$$P(x) = Q(x)\, q(x) + r(x)$$

Dividiendo entre $Q(x)$, obtenemos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

Donde la integral buscada:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int q(x)\, dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)}\, dx \text{ con } gr\ r(x) < gr\ Q(x)$$

Se reduce a calcular la integral de un polinomio $q(x)$ y la integral de una función racional en la cual el numerador tiene menor grado que el denominador.

A continuación describiremos varios casos de descomposición de fracciones racionales (cuyo polinomio del numerador tiene grado menor que el denominador) como una suma de fracciones parciales fáciles de integrar.

Caso I

En este caso, $Q(x)$ tiene todas sus raíces reales y distintas.

Cuando la factorización del polinomio $Q(x)$ se hace en factores lineales y distintos, es decir:

$$Q(x) = (x) - a_1(x - a_2)(x - a_3) \cdots (x - a_n)$$

Hacemos la descomposición:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{A}{x-a} + \frac{A}{x-a} + \cdots + \frac{A}{x-a_n}$$

Donde A_1, A_2, A_3,..., A_n son constantes reales.

Note que una vez efectuada la descomposición, la integración es inmediata, pues:

$$\int \frac{A_k}{x-a_k}dx = \ln|x-a_k|+c$$

Y, por tanto:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{A_1}{x-a_1}dx + \int \frac{A_2}{x-a_2}dx + \int \frac{A_3}{x-a_3}dx + \cdots + \int \frac{A_n}{x-a_n}dx$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \ln|x-a_1| + \ln|x-a_2| + \ln|x-a_3| + \cdots \ln|x-a_n| + C$$

Ejemplo 3.136. Integrales mediante descomposición en fracciones parciales

Realice la integral mediante descomposición en fracciones parciales:

$$\int \frac{dx}{x^2-16}$$

Solución: En este ejemplo $Q(x) = x^2-16 = (x-4)(x+4)$

La descomposición en fracciones parciales sería

$$\frac{1}{x^2-16} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-4}$$

En la que bastará determinar las constantes A y B para poder encontrar nuestra integral. Procederemos a la determinación de las constantes, efectuando la suma del lado derecho

$$\frac{1}{x^2-16} = \frac{A(x-4)+B(x+4)}{(x+4)(x-4)} = \frac{Ax-4A+bX+4B}{(x+4)(x-4)} = \frac{x(A+B)+(4B-4A)}{(X+4)(X-4)}$$

Observamos que la primera y la última fracción son iguales y tienen el mismo denominador, por lo que sus numeradores forzosamente son iguales, es decir:

$$1 = x(A+B) + (4B-4A)$$

O bien:

$$0x + 1 = x(A+B) + (4B-4A)$$

De donde (igualando coeficientes de x con la misma potencia en ambos lados) obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ 4B - 4A &= 1 \end{aligned}$$

Y, si lo resolvemos, queda

$$\begin{aligned} 4A + 4B &= 0 \\ 4B - 4A &= 1 \\ \hline 8B &= 1 \end{aligned}$$

Por lo que $B = \frac{1}{8}$ y si sustituimos en la primera ecuación $A = -B = -\frac{1}{8}$.

Una vez determinadas nuestras constantes A y B, las sustituimos en la descomposición inicial y obtenemos

$$\frac{1}{x^2-16} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-4} + \frac{\frac{1}{8}}{x+4} - \frac{\frac{1}{8}}{x-4}$$

Finalmente, queda la integración

$$\int \frac{dx}{x^2-16} = \frac{1}{8}\int \frac{1}{x+4}dx - \frac{1}{8}\int \frac{1}{x-4}dx = \frac{1}{8}\ln|x+4| - \frac{1}{8}\ln|x-4| + c$$

O bien, si utilizamos las propiedades de los logaritmos

$$\int \frac{dx}{x^2-16} = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x+4}{x-4}\right| + C$$

> **Nota:** Esta integral es un caso particular de la fórmula presentada sin demostración en el método de cambio de variable.

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-u}{a+u}\right| + C$$

La cual puede probarse ahora, a manera de ejercicio, con el método de fracciones parciales.

Ejemplo 3.137. Integrales mediante descomposición en fracciones parciales

Realice la integral mediante descomposición en fracciones parciales:

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x-15}\,dx$$

Solución: En este ejemplo, $Q(x) = x2 - 2x - 15 = (x + 3)$.

La descomposición en fracciones parciales sería:

$$\frac{x+2}{x^2-2x-15} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+3}$$

Y, si se sigue el procedimiento del ejemplo anterior:

$$\frac{x+2}{x^2-2x-15} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-5)}{(x-5)(x+3)} = \frac{x(A+B)+(3A-5B)}{(x-5)(x+3)}$$

Igualando coeficientes, obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ 3A - 5B &= 2 \end{aligned}$$

Que al resolverlo nos da

$$\begin{aligned} 5A + 5B &= 5 \\ 3A - 5B &= 2 \\ \hline 8A &= 7 \end{aligned}$$

Y así obtenemos el valor de $A = \frac{7}{8}$.

Para encontrar B, la despejamos en la primera ecuación

$$B = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

Así pues, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{x+2}{x^2-2x-15} = \frac{\frac{7}{8}}{x-5} + \frac{\frac{1}{8}}{x+3}$$

Y nuestra integral:

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x-15}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{x-5}\,dx + \frac{1}{8}\int \frac{1}{x+3}dx = \frac{7}{8}\ln|x-5| + \frac{1}{8}\ln|x+3| + c$$

Nota: En cada uno de los casos de este método se afirma que puede descomponerse en fracciones parciales, lo cual es un resultado del álgebra y, por tanto, debería probarse algebraicamente, ya que podría ser que en una de estas descomposiciones se produzca un sistema de ecuaciones sin solución. No realizaremos aquí la demostración pero veremos que, por lo menos en el primer caso, siempre será posible encontrar las constantes; es decir, los sistemas resultantes sí tendrán solución.

Otro método para determinar las constantes

Tratemos de despejar la constante A de la descomposición deseada. Para hacerlo, multiplicamos en ambos lados de la ecuación por $(x-5)$:

$$\frac{x+2}{(x-5)(x+3)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+3}$$

Obtenemos:

$$\frac{x+2}{x+3} = A + \frac{B(x-5)}{x+3}$$

Despejamos la constante A:

$$A = \frac{x+2}{x+3} - \frac{B(x-5)}{x+3}$$

Evaluamos en $x = 5$, y obtenemos:

$$A = \frac{7}{8}$$

Observe que estos pasos para determinar A pueden reducirse en uno solo: de la expresión a descomponer en fracciones parciales, se elimina del denominador el factor lineal correspondiente a esta constante y, finalmente, se evalúa en el punto en el que este factor eliminado se anula.

Es decir, $A = \frac{x+2}{x+3}$ evaluado en $x = 5$, da como resultado $A = \frac{7}{8}$.

De manera similar, para obtener el valor de B multiplicamos en ambos lados de la ecuación original por $(x + 3)$, despejamos B y evaluamos en $x = -3$, así obtenemos:

$$B = \frac{x+2}{x-5} \text{ evaluado en } x = -3$$

$$B = \frac{1}{8}$$

Ejemplo 3.138. Integrales mediante descomposición en fracciones parciales

Realice la integral mediante descomposición en fracciones parciales:

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 - 6x^2 + 8x}\,dx$$

Solución: En este ejemplo, $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 8x = x(x-4)(x-2)$.

La descomposición en fracciones parciales sería:

$$\frac{2x^2-3x+1}{x(x-4)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{X-2}$$

Y los valores de las constantes son:

$$A=\frac{2x^2-\ 3x+1}{(x-4)(x-2)} \qquad \text{Evaluado en } x=0 \Rightarrow A=\frac{1}{8}$$

$$B=\frac{2x^2-3x+1}{X(X-2)} \qquad \text{Evaluado en } x=4 \Rightarrow B=\frac{21}{8}$$

$$C=\frac{2x^2-3x+1}{x(x-4)} \qquad \text{Evaluado en } x=2 \Rightarrow C=-\frac{3}{4}$$

Así pues,

$$\int\frac{2x^2-3x+1}{x^3-6x^2+8x}dx=\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x}+\frac{21}{8}\int\frac{dx}{x-4}\ -\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x-2}$$

Es decir,

$$\int\frac{2x^2-3x+1}{x^3-6x^2+8x}\,dx=\frac{1}{8}\ln|x|+\frac{21}{8}\ln|x-4|-\frac{3}{4}\ln|x-2|+C$$

Caso II

En este caso, $Q(x)$ tiene todas sus raíces reales, pero puede haber algunas repetidas. Cuando la factorización del polinomio $Q(x)$ es en factores lineales no necesariamente distintos, es decir,

$$Q(x)=(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}(x-a_3)^{m_3}\cdots(x-a_n)^{m_n}$$

Por cada factor lineal aparecerán tantas fracciones parciales como multiplicidad tenga $(x-a_k)^{m_k}$ Así, habrá m_k fracciones parciales:

$$\frac{A_1}{(x-a_k)}+\frac{A_2}{(x-a_k)^2}+\cdots+\frac{Am_k}{(x-a_k)^{m_k}}$$

Donde A_1, A_2, A_3... A_k son constantes reales.

De nuevo, como en el caso anterior, la integración de las fracciones parciales es sencilla y se reduce a calcular integrales de la forma:

$$\int\frac{dx}{(x-a)^n}$$

Las cuales se resuelven mediante un sencillo cambio de variable para $n>1$.

Ejemplo 3.139. Integrales mediante descomposición en fracciones parciales

Realice la integral mediante descomposición en fracciones parciales:

$$\int\frac{3x+8}{x^3-4x^2+4x}dx$$

Solución: En el ejemplo $Q(x)=x^3-4x^2+4x=x\,(x-2)^2$

La descomposición en fracciones parciales sería

$$\frac{3x+8}{x(x-2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

Al desarrollar e igualar los polinomios del numerador, como en los ejemplos anteriores, obtendremos las constantes de resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Si observamos con detalle la igualdad anterior notaremos que la constante B no puede determinarse por el método corto, pero sí las otras dos, es decir, del sistema de tres por tres habremos determinado dos de las incógnitas y despejaremos cualquiera de las ecuaciones en que aparezca B.

$$A=\frac{3x+8}{(x-2)^2} \qquad \text{Evaluado en } x=0, \text{ nos da } A=2$$

$$C=\frac{3x+8}{x} \qquad \text{Evaluado en } x=2, \text{ nos da } C=7$$

Si efectuamos las operaciones y factorizamos x^2 y x, tenemos

$$\frac{3x+8}{x(x-2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}=\cdots=\frac{x^2(A+B)+x(-4a-2b+c)+4A}{x(x-2)^2}$$

Si igualamos los coeficientes de los numeradores, obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} A+B&=0\\ -4A-2B+C&=3\\ 4A&=8 \end{aligned}$$

Como sólo falta determinar la constante B, la despejamos de la primera ecuación y obtenemos $B=-2$. Entonces sustituimos e integramos:

$$\int\frac{3x+8}{x(x-2)^2}dx=\int\frac{2}{x}dx+\int\frac{-2}{x-2}dx+\int\frac{7}{(x-2)^2}\,dx$$

$$\int\frac{3x+8}{x(x-2)^2}dx=2\ \ln|x|-2\ln|x-2|\frac{-7}{(x-2)^2}$$

Ejemplo 3.140. Integrales mediante descomposición en fracciones parciales

Realice la integral mediante descomposición en fracciones parciales

$$\int\frac{x+8}{x^6-2x^4+x^2}dx$$

Solución: En este ejemplo, $Q(x)=x^6-2x^4+x^2=x^2(x^4-2x^2+1)=x^2(x^2-1)^2$

$$Q(x)=x^2(x+1)^2(x+1)^2$$

La descomposición en fracciones parciales sería:

$$\frac{x+8}{x^2(x+1)^2(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{x-1}+\frac{F}{(x-1)^2}$$

Por el método corto podemos encontrar fácilmente que $B=8$, $D=\frac{7}{4}$ y $F=\frac{9}{4}$. Para determinar el resto de las constantes tenemos que plantear el sistema de ecuaciones:

$$\frac{x+8}{x^2\left(x^2-1\right)} = \frac{A\left(x^5-2x^3+x\right)+B\left(x^4-2x^2+1\right)+C(x^5-x^4-x^3+x^2}{x^2\left(x^2-1\right)^2}$$

$$\frac{+\ D\ \left(x^4+2x^3+x^2+E(x^5+x^4-x^3-x^2\right)+F(x^4+2x^5+x^2)}{x^2\left(x^2-1\right)^2}$$

Lo anterior nos conduce al siguiente sistema de seis ecuaciones con seis incógnitas:

$$\begin{aligned} A+C+E&=0\\ B-C+D+E+F&=0\\ -2A-C+2D-E+2F&=0\\ -2B+C+D-E+F&=0\\ A&=1\\ B&=8 \end{aligned}$$

Como ya tenemos los valores $A=1$, $B=8$, $D=\frac{7}{4}$ y $F=\frac{9}{4}$, si los sustituimos en las primeras dos ecuaciones encontraremos los valores de C y E, y resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} C+E&=-1\\ -C+E&=-12 \end{aligned}$$

Cuya solución es $C=\frac{11}{2}$ y $E=-\frac{13}{2}$. El valor de la integral será entonces:

$$\int \frac{x+8}{x^6-2x^4+x^2}\,dx = \ln|x| - \frac{8}{x} + \frac{11}{2}\ln|x+1| - \frac{13}{2}\ln|x-1| - \frac{9}{4(x-1)} + C$$

Caso III

En este caso, $Q(x)$ tiene raíces complejas distintas. Cuando en la factorización del polinomio $Q(x)$ aparecen factores cuadráticos de la forma ax^2+bx+c con $b^2-4ac<0$, a cada uno de estos factores le corresponderá una fracción parcial de la forma:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

donde A y B son constantes reales.

Ejemplo 3.141. Integrales mediante descomposición en fracciones parciales

Realice la integral mediante descomposición en fracciones parciales

$$\int \frac{3x+1}{x^3+\ 2x^2+5x}\,dx$$

Solución: En el ejemplo $Q(x)=x^3+2x^2+5x=x(x^2+2x+5)$

$$\text{con } b^2-4ac=4-20=-16<0$$

La descomposición en fracciones parciales sería:

$$\frac{3x+1}{x\left(x^2+\ 2x+5\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{x^2+\ 2x+5} = \frac{A\left(x^2+2x+5\right)+x(Bx+C)}{x(x^2+\ 2x+5)}$$

El sistema a resolver es:

$$\begin{array}{lcl} A + B = 0 & & A = \dfrac{1}{5} \\ 2A + C = 3 & \Rightarrow & B = -\dfrac{1}{5} \\ 5A = 1 & & C = \dfrac{13}{5} \end{array}$$

$$\int \frac{3x+1}{x^3 + 2x^2 + 5x}dx = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{5}\int \frac{x-13}{x^2 + 2x + 5}dx$$

Veamos de manera independiente sólo la última integral. En este tipo de integrales debemos tener cuidado al momento de completar el diferencial, donde la función que está en el denominador (su diferencial) debe estar en el numerador, en este caso se consigue de la siguiente manera:

1. Se multiplica y se divide por 2 (un uno muy particular).
2. Se suma y se resta un 2.
3. Simplificando, se obtiene el siguiente resultado:

$$\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)-26-2}{x^2 + 2x+5}dx = -\frac{1}{10}\int \frac{(2x+2)}{x^2 +2\ + 5}dx + \frac{14}{5}\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$$

4. Se unen los resultados obtenidos:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+1}{x^3 + 2x^2 +5x}dx &= \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{5}\int \frac{x-13}{x^2 + 2x+5}dx \\ &= \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{10}\int \frac{(2x+2)}{x^2 +2x+5}dx + \frac{14}{5}\int \frac{dx}{x^2 +2x+5} \end{aligned}$$

En este último resultado las dos primeras integrales quedan de forma directa, en el caso de la tercera se utiliza la técnica de completar el TCP visto previamente:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+1}{x^3 + 2x^2 +5x}dx &= \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{10}\int \frac{(2x+2)}{x^2 + 2x+5}dx + \frac{14}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} \\ &= \frac{1}{5}\ln x - \frac{1}{10}\ln\left|x^2 +2x+5\right| + \frac{14}{5}\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + c \end{aligned}$$

Caso IV

En este caso, $Q(x)$ tiene raíces complejas repetidas.

Cuando en la factorización del polinomio $Q(x)$ aparecen factores cuadráticos repetidos de la forma:

$$(ax^2 + bx + c)^n,\ \text{con } b^2 - 4ac < 0$$

a cada uno de estos factores le corresponderán n fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{\left(ax^2 + bx + c\right)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{\left(ax^2 + bx + c\right)}$$

donde A_k y B_k son constantes reales para $k = 1, 2..., n$.

Ejemplo 3.142. Integrales mediante descomposición en fracciones parciales

Realice la integral mediante descomposición en fracciones parciales:

$$\int \frac{x^2}{x^4 + 2x^2 + 1}\,dx$$

Solución: En el ejemplo, $Q(x) = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$

$$\text{con } b^2 - 4ac < 0$$

La descomposición en fracciones parciales sería:

$$\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)^2} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{Ax^3+Bx^2+Ax+B+Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Con el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} &A = 0\\ &B = 1\\ &A + C = 0\\ &B + D = 0 \end{aligned}$$

Solución:

$A = 0$, $B = 1$, $C = 0$ y $D = -1$

De este modo, la integral sería:

La primera integral es directa.
En la segunda integral se aplica el método de integración por partes:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^4+2x^2+1}dx &= \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}\\ &= \arctan(x) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \arctan(x)\right) + c \end{aligned}$$

Simplificando, se obtiene el resultado siguiente:

$$= \frac{1}{2}\left(\arctan(x) - \frac{x}{1+x^2}\right) + c$$

Donde la primera integral es la inversa de la tangente y la segunda se resuelve mediante el segundo caso de sustitución trigonométrica.

3.4. Aplicaciones de la integral

La integral definida es útil para resolver una amplia variedad de problemas. En este capítulo se estudia su aplicación en problemas de cálculo de áreas, volúmenes, longitudes de curva, así como en ciencias básicas y diversos campos como la ingeniería.

3.4.1. Integración numérica

Cuando se desea calcular la integral definida de una función que no tiene una antiderivada, cuando ésta es muy difícil de calcular, o cuando no se posee la ecuación de la función (al obtenerse datos a partir de un experimento y no ajustarse éstos a un modelo simple), se recurre a los métodos numéricos. El método básico para ello se denomina *cuadratura numérica*, y en éste se aproxima a la integral definida de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ evaluando $f(x)$ en un número finito de puntos (nodos). Estas aproximaciones pueden ser de distintos tipos y cada una conlleva un error de aproximación, de manera que el valor de la integral buscado es:

$$1 = \int_a^b f(x)\,dx \cong Q(f) + E(f) \tag{1}$$

Donde la cuadratura $Q(f)$ está dada por:

$$Q(f) = \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)$$

Los puntos del intervalo (o nodos) son:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b$$

y $E(f)$ es error de la aproximación o error de truncamiento que se refiere al valor de la integral analítica (**I**), de forma que

$$E(f) = I - Q(f) \tag{2}$$

La notación anterior indica que los coeficientes y los nodos son conocidos, y que la variable de la fórmula es la función f.

Existe una extensa familia de métodos que se basan en aproximar la función a integrar $f(x)$ a otra función $g(x)$, de la cual se conoce la integral exacta. La función que sustituye la original se encuentra de forma que en cierto número de puntos tenga el mismo valor que la original. Como los puntos extremos siempre forman parte de este conjunto de puntos, la nueva función se llama *interpolación de la función original*. Típicamente, estas funciones son polinomios.

Ejemplo 3.143. Integración numérica

Considere la integral:

$$I = \int_0^1 x \text{ sen } x \; dx$$

Aproxime el valor de I con la fórmula de cuadratura:

$$Q(f) = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Calcule el valor exacto de la integral y el valor del error.

Solución:

a) Valor aproximado.

Se tiene:

$$a = 0,\ b = 1,\ f(x) = x \text{ sen } x$$

Ahora, si sustituimos los datos proporcionados en la fórmula de cuadratura dada:

$$Q(f) = \frac{1-0}{6}\ [0 + 4\cdot(0.5)\ \text{sen}\ (0.5) + \text{sen}\ (1)] = 0.30005$$

b) Valor exacto y error.

Si calculamos una primitiva de $f(x)$ y utilizamos el método de integración por partes

$$\int x \text{ sen } x\, dx = -x \cos x + \text{sen } x + c$$

Calculamos la integral definida:

$$\int_0^1 x\,\mathrm{sen}\,x\,dx = [-x\cos x + \mathrm{sen}\,x]_0^1 = -\cos(1) + \mathrm{sen}(1) = 0.30117$$

Determinamos el error de la aproximación

$$|E(f)| = |I - Q(f)| = |0.30117 - 0.30005| = 0.00112$$

El resultado indica que la fórmula de cuadratura dada ha producido una aproximación del valor de la integral con una exactitud de dos decimales.

3.4.2. Regla del trapecio y de Newton-Cotes

Las fórmulas de cuadratura que se obtienen a partir del polinomio de interpolación de Lagrange reciben el nombre de *fórmulas de Newton-Cotes*; además, pueden ser cerradas o abiertas. Éstas se obtienen cuando la función a integrar se interpola sobre puntos igualmente espaciados; de este modo, y dados los límites de integración a y b tenemos

$$\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$$

La regla del trapecio es una de las reglas de Newton-Cotes cerradas más simples, la cual aproxima la integral de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ a la integral de un polinomio de primer grado (línea recta, $n = 1$) $g(x)$, el cual tiene por ecuación $g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$ y cuya integral definida en el intervalo $[a, b]$ es $\frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b))$. Esta integral es equivalente al área $\boldsymbol{A}_1$ (corresponde al área de un trapecio) que se muestra en la figura siguiente:

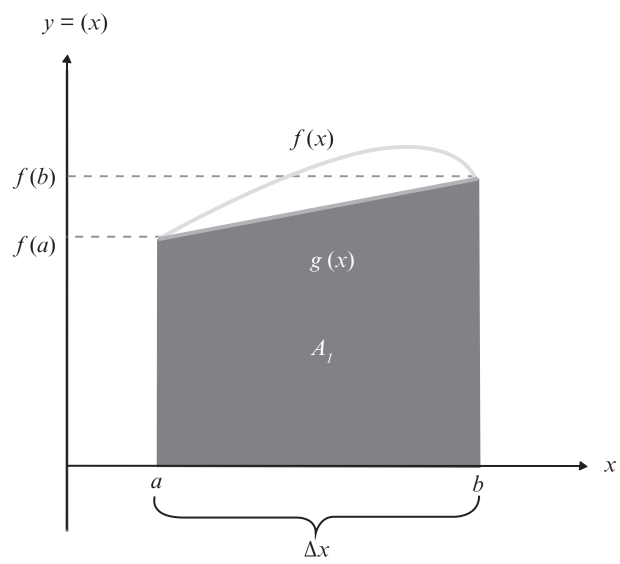


Figura 3.8. Representación gráfica de la aproximación lineal o regla del trapecio.

El error de la aproximación es igual al área entre $g(x)$ y $f(x)$, es decir $|A_0 - A_1|$. De tal manera que:

Teorema 3.8

El valor aproximado de la integral de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ con $n = 1$ es aproximadamente igual a la integral de la función lineal $g(x)$, la cual corresponde al área de un trapecio dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx A_1 = \frac{(b-a)}{2}(f(a)+f(b)) \qquad \textbf{(3)}$$

La ecuación (3) se conoce como *regla del trapecio*, el signo aproximadamente igual quiere decir que, al tratarse de una aproximación, tiene un error de truncamiento asociado (E), el cual se tratará en el teorema 3.9.

La regla del trapecio puede ampliarse si subdividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos (todos de la misma longitud $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$) y aplicamos el método del trapecio en cada uno de éstos, tal como se ilustra en la figura 3.9:

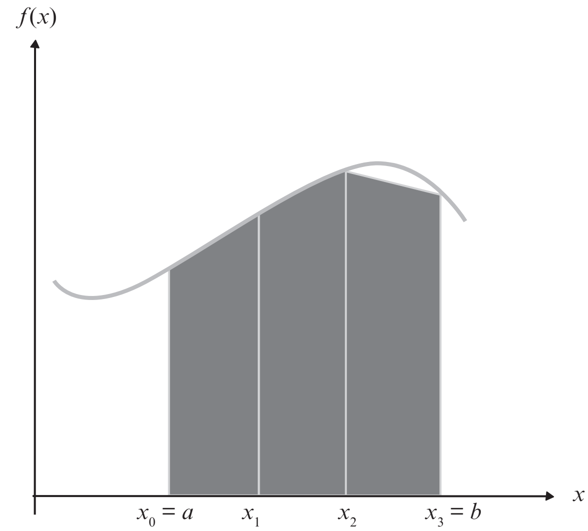


Figura 3.9. Representación gráfica de la regla compuesta del trapecio aplicada sobre tres subintervalos.

Teorema 3.9

La regla extendida o regla compuesta del trapecio, para la función f, continúa en el intervalo $[a, b]$, donde éste se divide en n subintervalos con $a = x_0$ y $b = x_n$ está dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{(b-a)}{2n}\left[(f(x_0)+2\cdot f(x_1)+2\cdot f(x_2)+\cdots+2\cdot f(x_{n-1})+f(x_n)\right] \qquad \textbf{(4)}$$

Note que conforme aumenta n, el error de la aproximación disminuye; sin embargo, también se incrementa el número de términos a calcular, por lo cual convendría desarrollar fórmulas de aproximación o polinomios de grado superior (recuerde que la regla del trapecio es un polinomio de grado 1) para obtener un error menor con una mínima cantidad de términos. Algunos ejemplos de esto son la regla de Simpson, la regla de $\frac{3}{8}$ Simpson y la regla de Boole, las cuales están fuera del alcance de este material.

Por otro lado, al usar una técnica de aproximación es importante conocer la precisión del resultado. En general, cuando se realiza una aproximación se define en el error |E| como la diferencia entre $\int_a^b f(x)\,dx$ y la aproximación. El siguiente teorema proporciona la expresión para estimar el error máximo o cota de error, que implica el uso de la regla del trapecio.

Teorema 3.10

Si f tiene una segunda derivada $f''(x)$ continua en $[a, b]$, entonces el error *máximo* E_τ al aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ por medio de la regla de los trapecios es

$$|E_\tau| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot k \qquad \textbf{(5)}$$

Donde K es el máximo valor de $f''(x)$ en el intervalo $[a, b]$, es decir $|f''(x)| \leq K$.

Esta fórmula permite determinar el número de subintervalos necesarios para aproximar la integral con un error menor que una cota o límite prefijado.

Ejemplo 3.144. Integración numérica

Realice lo siguiente:

a) Use la regla del trapecio para calcular una aproximación al valor de $\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx$, con $n = 5$ y $n = 10$.

b) Calcule el error máximo asociado con cada una de las aproximaciones.

Solución:

a) Se tiene

$$a = 1, b = 5, f(x) = \frac{1}{x}$$

Para $n = 5$, $\Delta x = \frac{(5-1)}{5} = \frac{4}{5} = 0.8$, por lo que $x_0 = 1$, $x_1 = 1.8$, $x_2 = 2.6$, $x_3 = 3.4$, $x_4 = 4.2$ y $x_5 = 5$

La regla del trapecio establece:

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \frac{(b-a)}{2n}\left[(f(x_0) + 2 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + \cdots + 2 \cdot f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

Por tanto,

$$\int_1^5 \frac{1}{x}dx \approx \frac{(5-1)}{10} \cdot \left[f(1) + 2 \cdot f(1.8) + 2 \cdot f(2.6) + 2 \cdot f(3.4) + 2 \cdot f(4.2) + f(5)\right]$$

Después de evaluar, resulta:

$$\int_1^5 \frac{1}{x}dx \approx 1.6578$$

Luego, para $n = 10$:

$$\Delta x = \frac{(5-1)}{10} = \frac{2}{5} = 0.4$$

por lo que:

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1.4,\ x_2 = 1.8,\ x_3 = 2.2,\ x_4 = 2.6,\ x_5 = 3,\ x_6 = 3.4,\ x_7 = 3.8,\ x_8 = 4.2,\ x_9 = 4.6,\ x_{10} = 5$$

Si se evalúa, resulta:

$$\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx \approx 1.6220$$

b) Mientras que la integral exacta tiene un valor de 1.6094, por lo que se demuestra que al aumentar el número de subintervalos para la regla del trapecio se disminuye el error de la aproximación.

Ejemplo 3.145. Integración numérica

Determine un valor de n tal que la regla de los trapecios se aproxime al valor de $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}$, con un error menor que 0.01.

Solución Se halla la segunda derivada de f:

$$f'(x) = x(1+x^2)^{-1/2}\ y\ \ f''(x) = (1+x^2)^{-3/2}$$

El valor máximo de $|f''(x)|$ en el intervalo [0, 1] es $|f''(0)| = 1$. De tal modo que por el teorema 3.10, se tiene:

$$|E_\tau| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot K$$

$$= 0.01 \le \frac{(1-0)^5}{12n^2}\cdot 1$$

$$= 12n^2 \ge 100$$

$$= n \ge \sqrt[2]{\frac{100}{12}} \approx 2.89$$

Así, basta tomar $n = 3$ y aplicar la regla del trapecio para obtener un error máximo de 0.001.

Ejercicios 3.15. Integración numérica

1. Durante un experimento se descubre que las variables físicas x y y están relacionadas, según se muestra en la tabla siguiente:

x	1	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
y	3.1	4.0	4.2	3.8	2.9	2.8	2.7

Si se considera y como una función de x, es decir, $y = f(x)$ continua, entonces la integral definida de $f(x)$ en el intervalo [1, 4] podría representar una cantidad física. Estime el valor de $\int_1^4 f(x)$ utilizando la regla del trapecio.
Respuesta: I = 10.3

2. Para registrar la contaminación térmica de un río, un ingeniero ambiental toma lecturas de la temperatura (°F) de cada hora en un periodo que va de las 9 a.m. a las 5 p.m. Los resultados se muestran en la tabla siguiente:

Hora del día	9	10	11	12	1	2	3	4	5
T(°F)	75.3	77.0	83.1	84.8	86.5	86.4	81.1	78.6	75.1

Utilice la regla del trapecio para calcular una aproximación de la temperatura media del agua entre las 9 a.m. y las 5 p.m.
Respuesta: T = 81.625°F

3. Determine n de modo que la regla compuesta del trapecio dé el valor de:

$$\int_0^1 e^{-x}dx$$

Con seis dígitos correctos después del punto decimal, suponiendo que e^{-x} puede calcularse de manera exacta.
Respuesta: $n = 129.09$

3.4.3. Área entre curvas, longitud de curva

De la misma manera que en el caso del cálculo de áreas de regiones que están bajo las gráficas de funciones, para calcular el área A comprendida entre las gráficas de dos funciones f y g en el intervalo $[a, b]$, se divide A en n franjas de igual anchura Δx, para luego calcular el valor aproximado de la i-ésima franja mediante un rectángulo con base Δx y altura $f(x_i) - g(x_i)$.

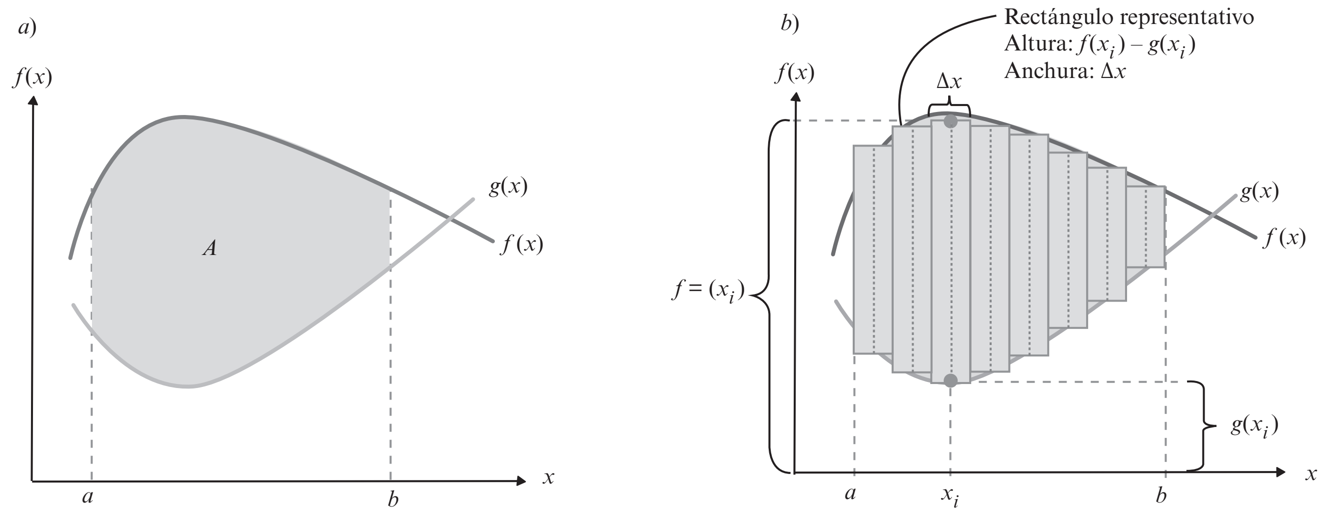


Figura 3.10. En la figura *a*) se muestra el área comprendida entre dos funciones (y valores *a* y *b*) constantes; mientras que en la figura *b*) se presenta cómo puede aproximarse la misma región mediante áreas rectangulares.

Por lo que la suma de Rienmann:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-g(x)_i\right]\,\Delta x$$

La cual equivale al total de las áreas de n rectángulos de aproximación definidos, por lo que el valor límite de esta suma equivale al valor del área A cuando n tiende a infinito.

$$A = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-g(x_i)\right]\,\Delta x$$

Si aplicamos el teorema fundamental del cálculo, tenemos

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)-g(x_i)\right]\,\Delta x = \int_a^b\left[f(x_i)-g(x_i)\right]dx$$

Por lo tanto:

Teorema 3.11

Si f y g son funciones continuas y $f(x) \geq g(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces el área A de la región acotada por las gráficas de f, g, $x = a$ y $x = b$ es:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \tag{1}$$

Observe que en el caso especial donde $g(x) = 0$, A es la región bajo la gráfica de f y la definición general del área se reduce a la definición del área bajo la curva de la función f.

Ejemplo 3.146. Área entre funciones

Determine el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 2$, $y = -x_1$, $x = 0$ y $x = 1$.

Solución: Sean $g(x) = -x$ y $f(x) = x^2 + 2$. Entonces, $f(x) \geq g(x)$ para todo x en $[0, 1]$, como se muestra en la figura 3.11.

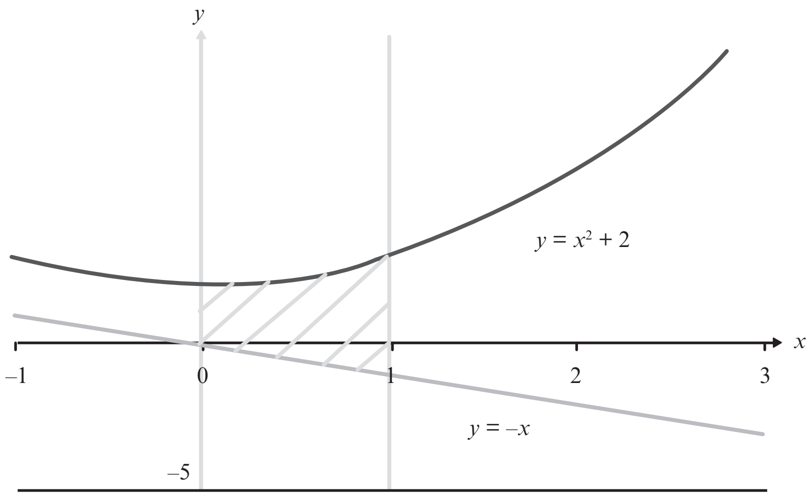


Figura 3.11. Área delimitada por las funciones $y = x^2 + 2$, $y = -x$, $x = 0$ y $x = 1$.

Así, el área de la región es:

$$\begin{aligned} A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx &= \int_0^1 \left[\left(x^2 + 2\right) - (-x)\right] dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{x} + 2x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 \\ &= \frac{17}{6} = 2.833 \end{aligned}$$

Área de una región entre curvas que se intersecan

En las definiciones anteriores no se establece si las curvas f y g se intersecan, sino que simplemente se define un intervalo de estudio $[a, b]$. Un problema particular y común involucra el área de una región comprendida entre dos gráficas que se intersecan, donde los valores de a y b han de calcularse.

Ejemplo 3.147. **Área de una región entre curvas que se intersecan**

Calcule el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones: $y = x^2$ y $y - \sqrt{x}$.

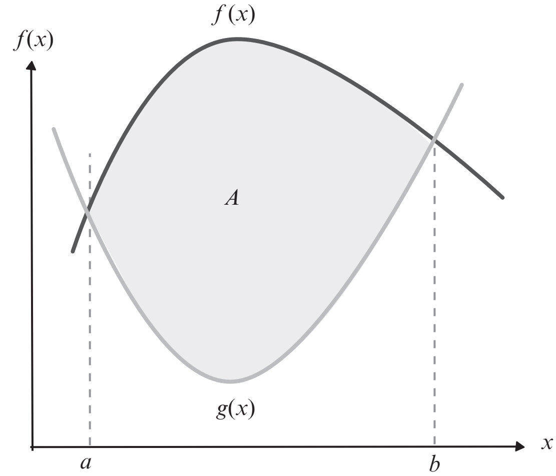


Figura 3.12. Área delimitada por dos funciones que se intersecan.

Solución:

1. Determine los puntos donde se intersecan las gráficas (límites de integración), resolviendo simultáneamente las ecuaciones dadas

$$x^2 = \sqrt{x}$$

Resultan soluciones los valores de $x = 0$ y $x = 1$, por lo que los límites de integración quedan$a = 0$ y $b = 1$.

2. Calcule el área entre curvas en el intervalo definido por la intersección de las gráficas.

Con $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$ se cumple que $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo [0, 1]. Por tanto, el área buscada está dada por el teorema 3.11 de la forma siguiente:

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \int_0^1 \left(x^{1/2} - x^2\right) dx = \left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

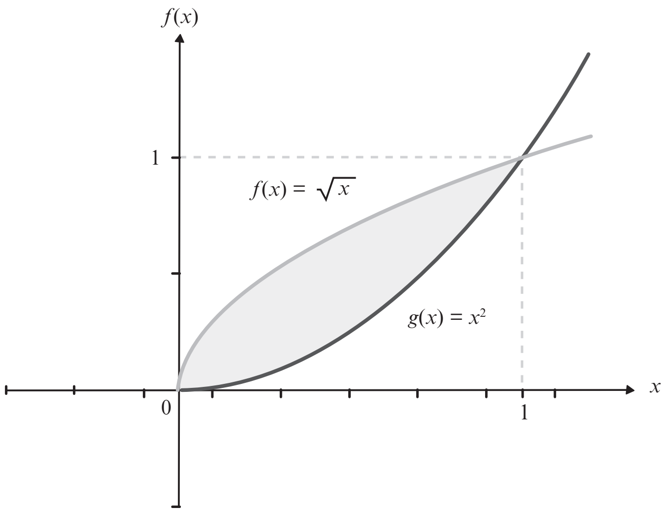


Figura 3.13. Región delimitada por las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$.

Ejemplo 3.148. **Área de una región entre curvas que se intersecan**

El seno y el coseno de las curvas se intersecan infinitas veces, acotando regiones de áreas iguales, como se muestra en la figura 3.14. Encuentre el área de una de esas regiones.

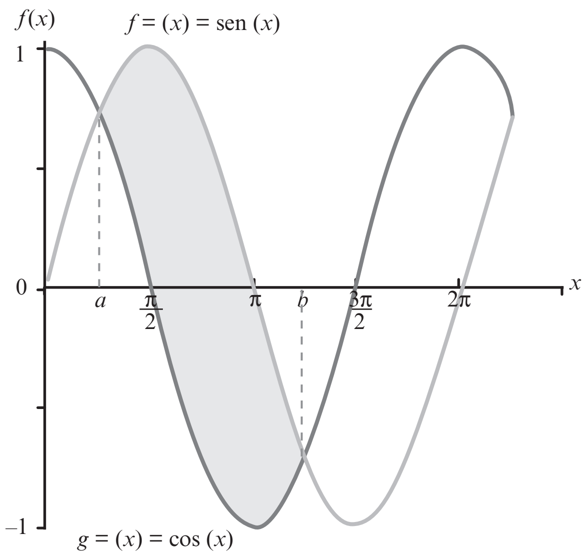


Figura 3.14. Región delimitada por las funciones $f(x) = \text{sen}\,(x)$ y $g(x) = \cos\,(x)$.

Solución:

Determine los puntos donde se intersecan las gráficas (límites de integración), resolviendo simultáneamente:

$$\text{sen}\ x = \cos x$$

$$\frac{\text{sen}\ x}{\cos x} = 1$$

$$\tan x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4},\ 0 \le x \le 2\pi$$

Así, $a = \frac{\pi}{4}$ y $b = \frac{5\pi}{4}$. Con $f(x) = \text{sen}\ x$ y $g(x) = \cos x$, se cumple que $f(x) \ge g(x)$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$. Por tanto, el área buscada está dada por el teorema 3.11 de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} [\text{sen}\ x - \cos x]\ dx \\ &= [-\cos x - \text{sen}\ x]_{\pi/4}^{5\pi/4} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Curvas que se intersecan en más de dos puntos

Si dos curvas se intersecan en más de dos puntos, entonces para encontrar el área de la región comprendida entre éstas se deben hallar todos los puntos de intersección y verificar cuál de las gráficas está encima de la otra en cada uno de los intervalos determinados por esos puntos.

Ejemplo 3.149. Área entre curvas que se intersecan en más de dos puntos

Calcule el área de la región acotada por las gráficas de $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$.

Solución:

1. Determine los puntos donde se intersecan las gráficas (límites de integración):

$$3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x$$

$$3x^3 - 12x = 0$$

$$3x(x-2)(x+2) = 0$$

$$x = -2, 0, 2.$$

Así, las gráficas se cortan cuando $x = -2, 0, 2$. En la figura 3.15 se observa que $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[-2, 0]$. Sin embargo, ambas gráficas cambian en el origen, y $f(x) \leq g(x)$, en el intervalo $[2, 0]$ Así, se requieren dos integrales, una para el intervalo $[-2, 0]$ y otra para el intervalo $[0, 2]$.

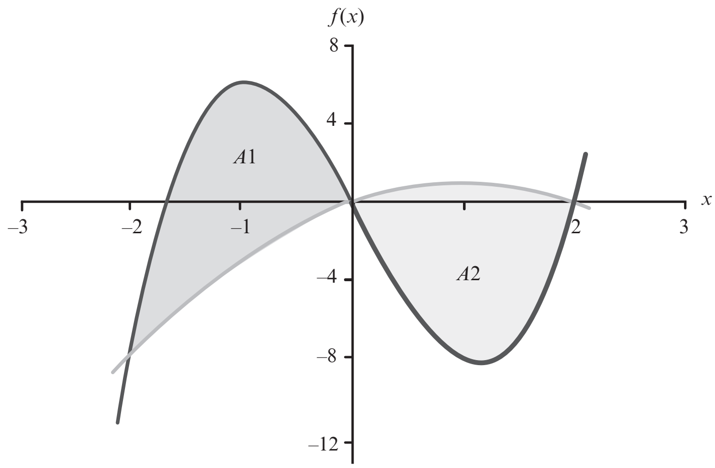


Figura 3.15. Región comprendida entre las gráficas de las funciones f y g.

2. Calcule el área entre curvas en el intervalo definido por la intersección de las gráficas:

$$\begin{aligned}
A_\tau &= A_1 + A_2 \\
&= \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\, dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]\, dx \\
&= \int_{-2}^{0} \left(3x^3 - 12x\right) dx + \int_{0}^{2} \left(-3x^3 + 12x\right) dx \\
&= \left[\frac{3x^4}{4} - 6x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{-3x^4}{4} + 6x^2\right]_{0}^{2} \\
&= -(12 - 24) + (-12 + 24) \\
&= 24u^2
\end{aligned}$$

Longitud de curva

Para la solución de algunos problemas de aplicación, se requiere calcular la longitud de algunas gráficas (o curvas). Por ejemplo, puede ser de interés determinar la distancia que un cohete recorre durante un intervalo de tiempo dado; o bien, la longitud de un segmento de alambre doblado. Si el alambre fuera flexible, se podría enderezar para, posteriormente, medir su longitud con una regla; sin embargo, si el alambre no es flexible, se requerirá usar otro método.

Para resolver este problema se utiliza una aproximación, al igual que en el caso de la determinación de integrales numéricas, tal como se muestra en la figura 3.16. En este caso, la solución consiste en dividir la gráfica o la curva en cuestión en muchas partes pequeñas y aproximar cada parte por medio de un segmento recto, para luego tomar el límite de la suma de las longitudes de todos los segmentos rectilíneos, con lo que se da lugar a una integral definida. Para garantizar la existencia de la integral, $f'(x)$ deberá ser continua en el intervalo estudiado.

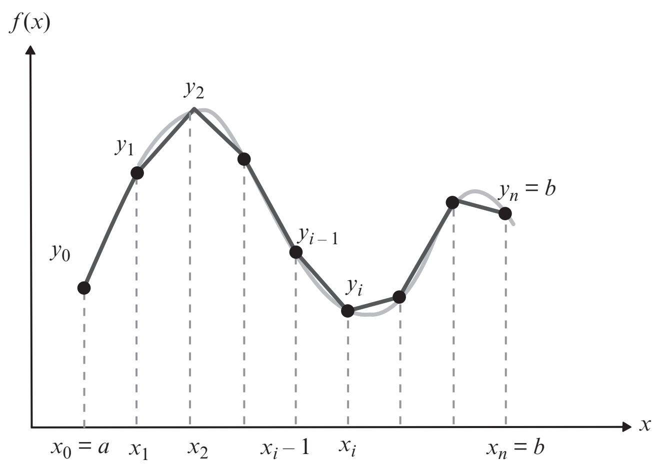


Figura 3.16. Aproximación de la longitud de una curva mediante longitudes de segmentos de líneas rectas.

Analíticamente, para calcular un segmento de recta entre dos puntos se parte de la expresión siguiente:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Considerando una función $y=f(x)$ con derivada continua en el intervalo $[a, b]$, es posible aproximar la gráfica de f por n segmentos de recta, cuyos puntos terminales son determinados por la partición $a=x_0< x_1< x_2 \cdots <x_n=b$, como se muestra en la figura 3.16.

Si la longitud de un segmento de recta Δx_i cualquiera en el intervalo $[a, b]$ se define como x_i-x_{i-1}(con $1 \le i \le n$) y $\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$, por lo que es posible aproximar la longitud de la gráfica por:

$$L\approx\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}$$

Lo que es igual a:

$$L\approx\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}$$

Si simplificamos la expresión anterior, nos queda:

$$L\approx\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\cdot(\Delta x_i)$$

Si tomamos el límite de la suma anterior para la aproximación óptima con $n\to\infty$ y $|\Delta|\to 0$:

$$L=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\cdot(\Delta x_i)$$

Dado que $f'(x)$ existe para todo x en $[a, b]$, el teorema del valor medio garantiza la existencia de c_i, de tal forma que:

$$f(x_i)-f(_{xi-1})=f'(c_i)(x_i-x_{i-1})$$

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=f'(c_i)$$

Debido a que $f'(x)$ es continua en $[a, b]$, se tiene que $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ también es continua en $[a, b]$, lo que implica que:

$$L=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(c_i)]^2}\cdot(\Delta x_i)=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$$

Donde L es llamada la longitud de arco L de f entre a y b.

Definición de longitud de arco

1. Sea la función dada por $y=f(x)$, que representa una curva suave en el intervalo $[a, b]$, la longitud de arco de f entre a y b es:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\ dx \tag{1}$$

2. De manera similar, para una curva dada por $x=g(y)$ la longitud de arco de g entre c y d es:

$$L=\int_c^d\sqrt{1+[g'(y)]^2}dy \tag{2}$$

Ejemplo 3.150. Longitud de curva

Encuentre la longitud de arco de $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ en el intervalo $[\frac{1}{2}, 2]$.

Solución:

1. Calcule $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$$

2. Aplique la ecuación 1.

$$\begin{aligned}
L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx &= \int_{1/2}^{2} \sqrt{1+\left[\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\right]^2}\,dx \\
&= \int_{1/2}^{2} \sqrt{\frac{1}{4}\left(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}\right)}\,dx \\
&= \int_{1/2}^{2} \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}\right]_{1/2}^{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{13}{6} + \frac{47}{24}\right) \\
&= \frac{33}{16}u
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.151. Longitud de curva

Encuentre la longitud de arco de la parábola $y^2 = x$ de (0, 0) a (1, 1).

Solución:

1. Calcule $g'(y)$:

$$g'(x) = \frac{dx}{dy} = 2y$$

2. Aplique la ecuación 2:

$$L = \int_c^d \sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy = \int_0^1 \sqrt{1+4y^2}\,dy$$

Resuelva la integral planteada por el método de sustitución trigonométrica con:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}\tan\theta \\
dy &= \frac{1}{2}\sec^2\theta d\theta \\
\sqrt{1+4y^2} &= \sqrt{1+\tan^2\theta}
\end{aligned}$$

Ahora, si cambiamos los límites de integración para la función de θ, cuando $y = 0$, $\tan\theta = 0$, por tanto $\theta = 0$; y cuando $y = 1$, $\tan\theta = 2$, así que $\theta = \tan^{-1}(2) = \alpha$.

De manera que:

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\alpha} \sec\ \theta \cdot \frac{1}{2}\sec^2\theta\ \ d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\alpha} \sec^3\theta\ \ d\theta \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\Big[\sec\ \theta \cdot \tan\ \theta + \ln\left|\sec\theta + \tan\theta\right|\Big]_0^{\alpha} \\
&= \frac{1}{4}\left(\sec\alpha \cdot \tan\alpha + \ln\left|\sec\alpha + \tan\alpha\right|\right)
\end{aligned}$$

Como $\tan\alpha = 2$, se tiene que $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha = 5$, entonces $\sec\alpha = \sqrt{5}$

Por lo que

$$L = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln\left(\sqrt{5}+2\right)}{4}u$$

Ejemplo 3.152. Longitud de curva

Sea $f'(x) = 3x^{2/3} - 10$. Calcule la longitud de arco de la gráfica de f del punto A (8, 2) al punto B (27,17).

Solución:

1. Calcule $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^{1/3}}$$

2. Aplique la ecuación 1:

$$\begin{aligned}
L &= \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_8^{27} \sqrt{1+\left(\frac{2}{x^{1/3}}\right)^2}\,dx \\
&= \int_8^{27} \sqrt{1+\frac{4}{x^{2/3}}}dx \\
&= \int_8^{27} \sqrt{\frac{x^{2/3}+4}{x^{2/3}}}dx \\
&= \int_8^{27} \sqrt{x^{2/3}+4}\left(\frac{1}{x^{1/3}}\right)dx
\end{aligned}$$

Para evaluar esta integral, sustituimos:

$$u = x^{2/3} + 4,\ \ du = \frac{2}{3}x^{-1/3}dx$$

Si cambiamos los límites de integración para la función u, cuando $x = 8$, entonces $u = (8)^{2/3} + 4 = 8$; y $x = 27$, entonces $u = (27)^{2/3} + 4 = 13$.

Así, tenemos

$$\begin{aligned}
L &= \frac{3}{2}\int_8^{13} u^{1/2}dx \\
&= \frac{3}{2}\cdot\left[\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_8^{13} \\
&= \left[u^{3/2}\right]_8^{13} \\
&= 13^{3/2} - 8^{3/2} \approx 24.2u
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.153. Longitud de curva

Halle la longitud de la curva de la función $y = 2 \cdot \ln\left(\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ en el intervalo $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$.

Solución:

1. Calcule $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \cot\left(\frac{x}{2}\right)$$

2. Aplique la ecuación 1:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_{\pi/3}^{\pi} \sqrt{1+\left(\cot\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}\,dx$$

$$= \int_{\pi/3}^{\pi} \sqrt{1+\left(\cot\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\,dx$$

$$= dx \int_{\pi/3}^{\pi} \sqrt{\csc^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \int_{\pi/3}^{\pi} \csc\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \left[2 \cdot \ln\left(\csc\left(\frac{x}{2}\right) - \cot\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right]_{\pi/3}^{\pi}$$

$$= 2 \cdot \ln\left(\csc\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - 2 \cdot \ln\left(\csc\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 0 - 2\ (-1.317)$$

$$= 2.634\ u$$

Ejercicios 3.16. Aplicaciones geométricas de las integrales (áreas y longitudes de curva o arco)

Calcule el área entre las curvas que se indican a continuación:

Curvas	Respuesta	Curvas	Respuesta
1. $y = \frac{1}{x^2}$, $y = -x^2$, $x = 1$, $x = 2$	$\frac{17}{6}u^2$	**4.** $y = x^2$ $y = \text{sen}\ x$	$0.13539\ u^2$
2. $y = x^2$, $y = 4x$	$\frac{32}{5}u^2$	**5.** $y = 2 - x^4$ y $y = \sec^2 x$	$1.0482\ u^2$
3. $y^2 = 4 + x$, $y^2 + x = 2$	$8\sqrt{3}u^2$	**6.** $y = x^4 - 2$ y $y = x^2$	$4.85664\ u^2$

Calcule la longitud de arco que se indica a continuación:

Función	Respuesta
7. $y = \ln\left(1 - x^2\right)$ entre $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{3}{4}$	$0.9351\ u$
8. $6xy = x^4 + 3$ entre $x = 1$ y $x = 2$	$\frac{17}{12}u$
9. $x^2 = (y - 1)^3$ en el intervalo $[0, 8]$	$\approx 9.073\ u$

10. Calcule la longitud de arco entre $A(1, e)$ y $B\left(2, e^2\right)$ de la gráfica de la ecuación $30xy^3 - y^8 = 15$, donde $y = e^x$.

Respuesta: ≈ 5.9788

11. Determine la longitud de arco de la curva $y = -\ln(\cos x)$ entre $x = \frac{-\pi}{6}$ y $x = -\frac{\pi}{4}$.

Respuesta: ≈ 0.33069

12. La trayectoria de un prototipo de cohete construido a escala está dada por la ecuación $d = -3t^2 + 15t$ con t dado en minutos y d en m. Al viajar desde su despegue hasta el momento de estrellarse, un avión gastó 10 L de combustible, determine el consumo promedio de combustible del prototipo en $\frac{L}{m}$.

Respuesta: $\approx 0.2621 \frac{L}{m}$

3.4.4. Volúmenes de revolución

Otra aplicación básica del cálculo integral es la determinación del volumen de un sólido tridimensional con sección transversal característica. Esta aplicación se basa en el hecho de que si una región de un plano gira alrededor de una recta o eje, el sólido resultante es de revolución y la recta es su eje de revolución. Un sólido de revolución es una región del espacio generada por la rotación de una región plana en torno de una recta.

Método de los discos

El sólido más simple es un cilindro circular recto o disco que se forma al hacer girar un rectángulo alrededor (360°) de uno de sus lados, tal como se ilustra a continuación:

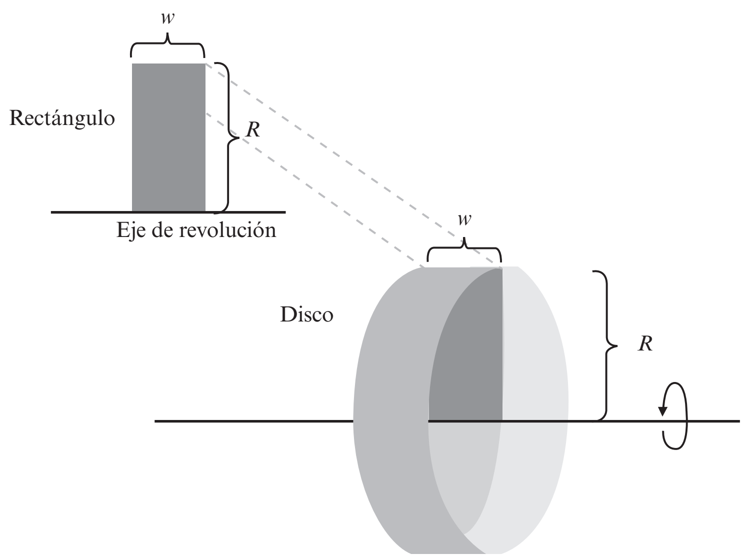


Figura 3.17.

De donde el volumen de tal disco es

V = área del disco × anchura del disco

$V = \pi \cdot R^2 \cdot w$

Esta definición es útil para aproximar el volumen de un sólido tridimensional cualquiera, el cual es dividido en n discos de igual anchura Δx, cuyo volumen es

$$\Delta V = \pi \cdot R^2 \cdot \Delta x$$

Tal como se muestra en la figura 3.18.

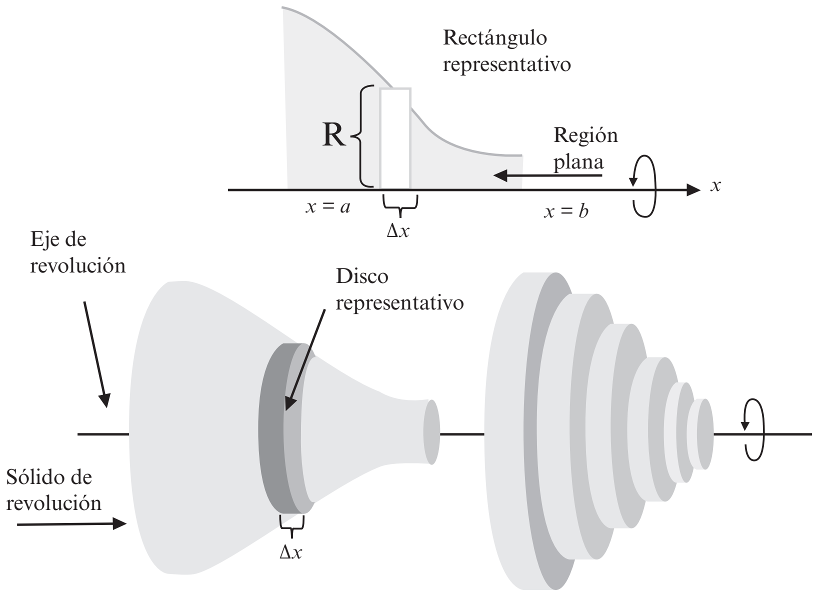


Figura 3.18. Aproximación de un volumen mediante secciones en forma de discos.

Cabe aclarar que para fines de esta definición se ubica al sólido de revolución en un sistema de coordenadas cartesiano; además, se seleccionó el eje x como eje de rotación. La misma aproximación es válida cuando el eje de rotación es el eje y por lo que el volumen aproximado del sólido con n discos es:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi \left[R(x_i)\right]^2 \Delta x$$

Así, cuando $\Delta x \to 0$ ($n \to \infty$), por el teorema fundamental del cálculo:

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} \left[R(x_i)\right]^2 \Delta x = \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx$$

Donde R es una función de la variable independiente x; en los ejercicios que se resuelven a continuación, la forma en que R varía respecto de la variable independiente está dada por la ecuación de $f(x)$. Por tanto, si el eje de revolución es horizontal:

$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx$$

O bien, si el eje de revolución es vertical (R varía respecto de la variable y):

$$V = \pi \int_c^d [R(y)]^2 dy$$

Ejemplo 3.154. Volumen de revolución

Determine el volumen de un sólido que se obtiene al girar la región bajo la curva $y = \sqrt{x}$ respecto del eje x, desde 0 hasta 1.

Solución:

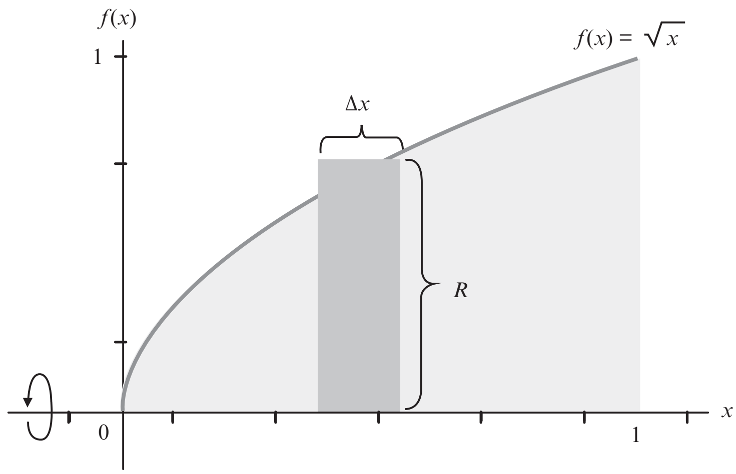


Figura 3.19. Sección plana que genera un volumen al rotar sobre el eje x.

$$V = \pi \int_a^b \left[R(x)\right]^2 \, dx$$

con $R(x) = f(x) = \sqrt{x}$

$$\mathrm{V} = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^1 (x) \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \pi\left[\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = \pi\left[\frac{1}{2}\right]$$

$$V = \frac{\pi}{2} u^3$$

Ejemplo 3.155. Volumen de revolución

Encuentre el volumen del sólido de revolución que se forma al girar la región acotada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{\text{sen } x}$ y el eje $x(0 \leq x \leq \pi)$, alrededor del eje x.

Solución:

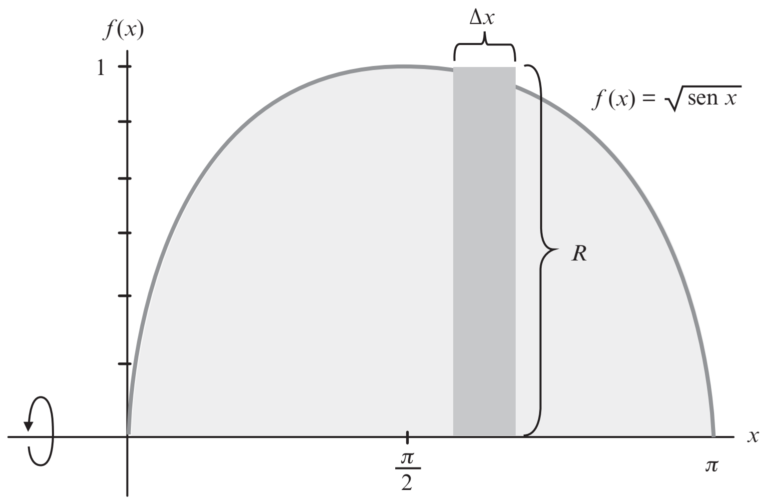


Figura 3.20. Sección plana que genera un volumen al rotar sobre el eje x.

Con $R(x) = f(x) = \sqrt{x}$

$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 \, dx$

$R(x) = f(x) = y = \sqrt{\text{sen } x}$

$V = \pi \int_0^\pi \left(\sqrt{\text{sen } x}\right)^2 dx = \pi \int_0^\pi \text{sen } x \; dx = \pi \; [-\cos x]_0^\pi = \pi(1+1) = 2\pi \;\; u^3$

Ejemplo 3.156. **Volumen de revolución**

Calcule el volumen del sólido que se genera al rotar la región definida por $y = x^3$, $y = 8$ y $x = 0$, respecto del eje y.

Solución: Graficamos las curvas de las funciones que delimitan la sección plana.

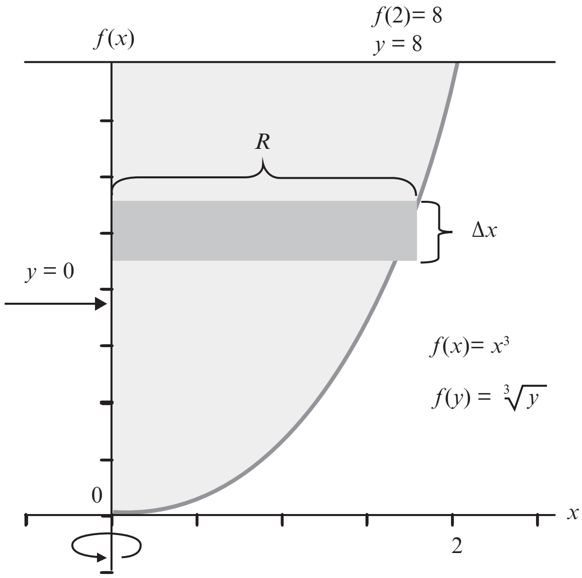


Figura 3.21. Sección plana que genera un volumen en revolución al rotar sobre el eje vertical.

$$V = \pi \int_c^d [R(y)]^2 dy$$

La rotación es alrededor del eje y, por lo que la expresión del radio requiere una función $g(y)$, de ahí que a partir de $f(x) = y = x^3$, se tiene $g(y) = x = \sqrt[3]{y}$

Así,

$$V = \pi \int_0^8 \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 dy = \pi \int_0^8 y^{2/3} dy = \pi \left[\frac{3}{5} y^{5/3}\right]_0^8 = \frac{96\pi}{5} u^3$$

Ejercicios 3.17. **Volumen de revolución**

Verifique los resultados propuestos y calcule el volumen mediante discos en revolución.

1. Halle el volumen generado en la rotación del área limitada por la parábola $y^2 = 8x$ y la ordenada correspondiente a $x = 2$ respecto del eje x.
   Respuesta: $16 \, \pi u^3$

2. Calcule el volumen generado al rotar la región acotada por $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ y el eje $x\left(-\frac{\pi}{6}\le x\le \frac{\pi}{4}\right)$.
   Respuesta: $\approx 1.81\ u^3$

3. Halle el volumen del sólido que se origina al girar alrededor del eje y la superficie limitada por $2y^2=x^3, y=0, x=2$.
   Respuesta: $\frac{32}{7}\pi u^3$

4. Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación de la región acotada por el semicírculo $\sqrt{r^2-x^2}$ alrededor del eje x, para $y>0$.
   Respuesta: $\frac{4}{3}\pi r^3 u^3$

5. Calcule el volumen del sólido que se genera al girar la región limitada por la parábola $y^2=4x$ y la recta $x=4$ alrededor de dicha recta.
   Respuesta: 32π

6. Halle el volumen del sólido producido al rotar alrededor del eje y la superficie delimitada por $y=e^x, y=0, x=0$ y $x=2$.
   Respuesta: $2\pi(e^2-1)\approx 40.143$

7. Calcule el volumen de la trompeta de Torrichelli cuya sección transversal está dada por $f(x)=\frac{1}{x}$ al girarla en torno del eje x para $x\ge 1$.
   Respuesta: π

3.4.5. Problemas de ingeniería química para determinar el trabajo, el calor o la cinética

En definitiva, las aplicaciones del cálculo integral van más allá de situaciones geométricas (las cuales pueden tener una interpretación física, dependiendo de qué dimensiones se coloquen en los ejes cartesianos). Ahora veremos algunas aplicaciones de las integrales en el campo de la ingeniería.

Ejemplo 3.157. Cálculo de trabajo de compresión o expansión en sistemas ideales

Considere un pistón cilíndrico como el que se muestra en la figura 3.22.

Este cilindro posee un área transversal A, y contiene en su interior un gas con comportamiento ideal, que es comprimido a través de una distancia z y mantiene su temperatura constante. El trabajo que se necesita efectuar sobre el sistema para comprimir el gas un cierto volumen ($dV = Adz$) que se encuentra a una presión P está dado por la ecuación

$$dW = -PdV$$

Para obtener el trabajo total efectuado, se requiere integrar la ecuación anterior utilizando como límites el volumen inicial y el volumen final. Así,

$$W=-\int_{vi}^{vf} PdV$$

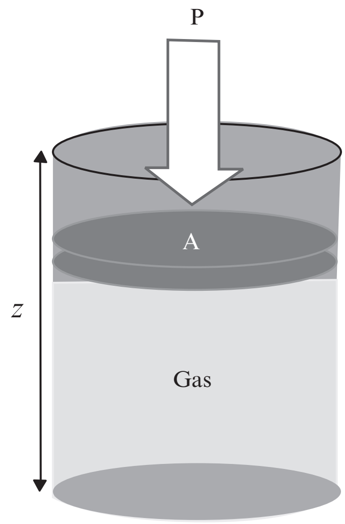


Figura 3.22. Compresión de un gas.

Ahora, asumiendo un comportamiento ideal, determine el trabajo necesario en joules para comprimir 3 kg de nitrógeno de 3 a 1.5 L sometidos a una presión de 3 bar.

Solución: Resuelva la integral definida:

$$
\begin{aligned}
W &= -3\int_{3}^{1.5} dV \\
&= -3[V]_{3}^{1.5} \\
&= -3[1.5-3] \\
&= -3[-1.5] \\
&= 4.5\,\text{bar}\cdot L
\end{aligned}
$$

Transforme las unidades:

$$
W = 4.5\,\text{bar}\cdot \text{L}\cdot \frac{1\ \text{atm}}{1.013\ \text{bar}}\cdot \frac{101\cdot 3\,\text{J}}{1\ \text{atm}\cdot \text{L}}
$$

$$
W = 450\ \text{J}
$$

Ejercicio 3.18. Aplicación del cálculo integral

Resuelva el siguiente problema mediante la aplicación del cálculo integral:

1. Se dispone de un recipiente cilíndrico que contiene 10 kg de nitrógeno a una presión de 50 lb/in^2. Si asumimos un comportamiento ideal, determine el trabajo necesario para comprimir el gas desde un volumen de 7 L hasta 1 L.
Respuesta: 2.07 kJ

Índice analítico

La *n* después de un número de página indica que la referencia se encuentra en las notas.